



FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY  
A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO  
V BRATISLAVE

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

2001

Peter Franek

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO  
v Bratislave

Katedra geofyziky

**Nelineárna seizmická odozva  
povrchových geologických štruktúr**

Diplomová práca  
(Opravená verzia)

Diplomant:

**Peter Franek**

Vedúci diplomovej práce:

**Doc. RNDr. Peter Moczo, DrSc.**

Bratislava

Marec 2001

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím literatúry uvedenej v zozname.

Ďakujem **Doc. RNDr. P. Moczovi, DrSc.** za priateľský prístup, odborné vedenie a cenné rady, ktorými mi pomáhal pri vypracovaní diplomovej práce. Ďakujem tiež všetkým pracovníkom Katedry geofyziky FMFI UK za vytvorenie vhodných podmienok a rovnako aj svojim rodičom a priateľom za podporu a pomoc pri písaní tejto práce.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Nelineárne šírenie seizmických vln a nelineárny seizmický pohyb - pozorovania</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Reologické modely</b>	<b>10</b>
3.1	Elastické kontinuum . . . . .	10
3.2	Viskózne kontinuum . . . . .	11
3.3	Plastické kontinuum . . . . .	11
3.4	Viskoelastické kontinuum . . . . .	12
3.5	Elastoplastické kontinuum . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Nelineárne šírenie elastických vln v dokonale elastickom kontinuu</b>	<b>40</b>
4.1	Pohybová rovnica kontinua, malé a konečné deformácie . . . . .	40
4.2	Hustota energie deformácie . . . . .	41
4.3	Tenzor napätia . . . . .	44
4.4	Šírenie rovinných vln v homogénnom izotropnom kontinuu . . . . .	47
4.5	Pohybová rovnica pre SH problém . . . . .	50
4.6	Pohybová rovnica pre P-SV problém . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Prostredie s hysteréznym vzťahom medzi napätím a deformáciou</b>	<b>53</b>
5.1	Prostredie bez prítomnosti vody . . . . .	53
5.2	Prostredie s pórmí vyplnenými vodou . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>73</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>75</b>

# 1 Úvod

Seizmický pohyb a škody, ktoré spôsobuje, sú významnou mierou ovplyvnené geologickými a topografickými podmienkami lokality. Dôležitosť takéhoto ovplyvnenia seizmického pohybu je dokumentovaná niekoľkými zemetraseniami z nedávnej minulosti, ako napríklad zemetrasenie z 19. septembra 1985 v Michoacane v Mexiku, zemetrasenie zo 17. októbra 1989 v Loma Prieta (Kalifornia) alebo zemetrasenie zo 17. januára 1995 v Hyogoken-Nanbu (Kobe) v Japonsku. Pri snahe pochopiť a popísať javy v povrchových geologických štruktúrach seizmológovia väčšinou predpokladajú prostredie s lineárnym správaním. Ako však potvrdzujú experimentálne merania (Hardin a Drnevich 1972a, 1972b; Presti et al. 1998), priame pozorovania (Hudson 1972, Çelebi 1987, Jarpe et al. 1988, Darragh a Shakal 1991, Archuleta et al. 1992, Beresnev et al. 1995, Aguire a Irikura 1997) a aj numerické modelovania (Joyner 1975, Joyner a Chen 1975, Yu et al. 1992, Marsh et al. 1995), významné je aj nelineárne správanie sa prostredia.

Hoci dôkazy potvrdzujúce nelineárne správanie prostredia pri veľkých deformáciach sú známe už pomerne dlhú dobu, približne od konca 60. rokov, v seizmológii napriek tomu nebola tejto oblasti venovaná potrebná pozornosť. Preto existuje pomerne málo poznatkov o nelineárnom správaní prostredia a tento problém ešte stále nie je v potrebnej miere pochopený. Nelineárne správanie prostredia je možné rozdeliť na dva oddelené javy a to na nelineárne správanie dokonale elastického kontinua a na prípady, kedy sa prostredie začne správať hysterézne.

Cieľom tejto práce je zhrnúť súčasné poznatky o nelineárnom správaní sa prostredia. Kapitola 2 je venovaná experimentálnym meraniam a priamym pozorovaniam nelineárneho správania sa prostredia. V kapitole 3 je uvedený stručný prehľad reologických modelov a kapitola 4 poskytuje odvodenie nelineárnej závislosti medzi tenzorom napätia a tenzorom deformácie pre izotropné dokonale elastické kontinuum spolu s približným riešením pohybovej rovnice pre 1D prípad šírenia rovinnej vlny v homogénnom prostredí. V kapitole 5 sú najprv zavedené tzv. Masingové pravidlá, pomocou ktorých je možné konštruovať hysterézne krivky. Potom sú zavedené vzťahy, pomo-

cou ktorých pri hysteréznom správaní je možné zahrnúť aj prítomnosť vody v póroch prostredia. V závere sú sumarizované výsledky diplomovej práce a načrtnuté perspektívy ďalšej práce v problematike.

## 2 Nelineárne šírenie seizmických vln a nelineárny seizmický pohyb - pozorovania

Na vyjadrenie vzťahu medzi napätím a deformáciou v dokonale elastic-  
kom izotropnom prostredí používame známy Hookeov zákon. Hookeov zákon  
je však len približné vyjadrenie tejto závislosti limitované malými (infinite-  
zimálnymi) deformáciami v dokonale elastickej izotropnom prostredí. Pre  
mnohé problémy a materiály je teória založená na tomto priblížení adekvátna  
a v seizmológii je tento prístup rozšírený. Avšak pri niektorých podmienkach  
mnohé prostredia nie sú takou teóriou dobre opísané. Je to dôsledok týchto  
dvoch faktorov: 1. Deformácie sú tak veľké (rádovo väčšie ako  $10^{-6}$ ), že  
teória malých deformácií už nie je dostatočne presná (malé deformácie tre-  
ba nahradiť konečnými deformáciami), pričom prostredie ešte stále možno  
považovať za elastickej. 2. Prostredie nie je elastickej.

Príkladom elastickejho prostredia, v ktorom sa seizmické vlny môžu  
šíriť nelineárne, je skalné prostredie. Nelineárne elastickej správanie skál je  
ovplyvnené hlavne prítomnosťou porúch v ich štruktúre, ako sú napríklad  
mikrotrhliny, zhluky zrn, napätia na hraniciach zrn a iné. Na zistenie ne-  
lineárneho správania elastickejho izotropného prostredia je možné použiť sta-  
tické alebo dynamické metódy. Pri statických experimentoch sa určuje dĺžka  
alebo objem vzorky ako funkcia napätia. Teória malých deformácií pred-  
povedá, že závislosť napätie - deformácia je lineárna. Pri konečných defor-  
máciach je táto závislosť kvadratická. Zo sklonu krivky napätie - deformácia  
je potom možné určiť Laméove elastickej koeficienty (koeficienty 2. rádu)  
alebo Murnaghanove elastickej koeficienty (koeficienty 3. rádu). Pri dyna-  
mických experimentoch sa meria rýchlosť šírenia pulzov pri hydrostatickom  
a jednoosom napätí. Rýchlosti šírenia pulzov umožňujú zistiť Murnaghanove  
koeficienty (Green 1973). Hughes a Kelly (1953) takýmto spôsobom našli  
hodnoty Murnaghanových koeficientov pre polystyrén, železo a pyrexové sklo.  
Uvedený princíp merania rýchlostí pri rôznych stavoch napätia a následné  
určenie Murnaghanových koeficientov možno aplikovať aj v prípade vzoriek  
skál (Meegan et al. 1993).

V prostrediach, ktoré sú mäkšie ako skaly, je príčinou zlyhania lineárnej



závislosti medzi napätím a deformáciou to, že prostredie sa nespráva elastic-ky. To je ale tiež podmienené dostatočne veľkými deformáciami (rádovo  $10^{-6}$  -  $10^{-5}$ ). Hardin a Drnevich (1972a) merali vzorky pôdy pri rôznych podmienkach. Zistili, že s rastom deformácie v šmyku sa šmykové napätie odkláňa od lineárnej závislosti a pri cyklickom zaťažovaní vytvára hysterézne slučky. Ako charakteristiku nelineárneho správania vzoriek vystavených cyklickej záťaži stanovili priemernú hodnotu modulu pružnosti v šmyku  $G_{sec}$  za jeden cyklus a tlmiaci pomer  $D$  v závislosti od maximálnej deformácie v šmyku. Tlmiaci pomer  $D$  je úmerný ploche ohraničenej hysteréznou slučkou. S rastom maximálnej deformácie (amplitúdy deformácie) hodnota modulu pružnosti v šmyku  $G_{sec}$  klesala a tlmiaci pomer  $D$  rástol. Hardin a Drnevich tiež zistili, že  $G_{sec}$  a  $D$  závisia aj od efektívneho stredného napätia, stupňa saturácie a od počtu cyklov záťaže, čo pravdepodobne súvisí s únavou materiálu. Hardin a Drnevich predpokladajú slabú frekvenčnú závislosť v intervale frekvencií nad 0.1 Hz a silnú frekvenčnú závislosť pre nižšie frekvencie v dôsledku tečenia (creep-u).

Očakávaným prejavom hysterézneho správania prostredia je posun rezonančných frekvencií a zväčšenie útlmu (Yu et al. 1992, Beresnev a Wen 1996, Yoshida a Iai 1998). Ako naznačujú merania, s rastom amplitúdy deformácie sa modul pružnosti v šmyku  $G_{sec}$  znižuje. To znamená, že efektívna rýchlosť  $S$  vln  $\beta$  sa so zväčšujúcou amplitúdou deformácie znižuje. Na ilustráciu uvažujme jednoduchý prípad vrstvy na polpriestore, ktorej základná rezonačná frekvencia je  $f = \frac{\beta}{4h}$ , kde  $h$  je hrúbka vrstvy. So znižovaním rýchlosti  $\beta$  sa rezonančná frekvencia bude posúvať k nižším hodnotám. Preto, ak je správanie prostredia hysterézne, rezonančné frekvencie sa posúvajú k nižším hodnotám.

Významné je hysterézne tlmenie, pretože strata energie za jeden cyklus je priamo úmerná ploche ohraničenej hysteréznou slučkou. S rastom amplitúdy deformácie je hysterézna slučka širšia a preto prostredie s hysteréziou spôsobuje znižovanie spektrálnej amplitúdy posunutia počas silného pohybu. Podľa práce Hardin a Drnevich (1972a) by sme očakávali, že hysterézne tlmenie bude len veľmi slabo frekvenčne závislé. Je to však skutočne tak? Yu et al. (1993) pomocou numerického modelovania nelineárneho správania se-

dimentárnej vrstvy hľadali rozdiely medzi lineárnou a nelineárnou odozvou. Ich výsledky ukazujú, že skúmaný frekvenčný interval je možné rozdeliť na tri podintervaly z hľadiska miery nelineárneho správania. Spektrálne amplitúdy v podintervale najnižších frekvencií nie sú ovplyvnené nelineárnosťou. V strednom podintervale sú spektrálne amplitúdy v dôsledku nelineárnosti zmenšené a napokon vo vysokofrekvenčnom podintervale je zosilnenie väčšie pre nelineárnu ako pre lineárnu odozvu. Yu et al. očakávajú závislosť prechodových frekvencií medzi týmito frekvenčnými podintervalmi na vlastnostiach prostredia, hrúbke sedimentov a amplitúdovom a frekvenčnom obsahu excitujúceho pohybu. Existenciu takýchto frekvenčných podintervalov kvalitatívne vysvetľujú Beresnev a Wen (1996). V nízko-frekvenčnom pásme sú vlnové dĺžky veľké a preto aj vlny sú málo ovplyvnené povrchovou vrstvou. V strednom frekvenčnom intervale, ktorý obsahuje najviac z vyžiarenej energie, sú amplitúdy posunutia pri silných pohyboch v porovnaní s amplitúdami pri slabých pohyboch omnoho viac redukované hysteréznym tlmením. Vo vysokofrekvenčnej oblasti sú generované vyššie harmonické, čo spôsobuje nárast spektrálnej amplitúdy posunutia.

Ako naznačujú uvedené experimenty, hysterézne správanie je možné očakávať predovšetkým v mäkkých povrchových vrstvách. Pri modelovaní nelineárneho seizmického pohybu je preto potrebné uvažovať predovšetkým anelastické, resp. hysterézne správanie prostredia. Podobne aj pri silných pohyboch môžeme očakávať skôr hysterézne správanie prostredia ako nelineárne elastické.

Napriek uvedenému doteraz v seizmológii nebola venovaná nelineárnemu správaniu adekvátne pozornosť. Je to aj v dôsledku nedostatku priamych dôkazov z pozorovaní silného pohybu. Detekcia nelineárneho správania je problematická, pretože nepoznáme dostatočne presne parametre prostredia a nelineárne prejavy môžu byť maskované inými javmi (napríklad rozptylom, vplyvom zdroja) (Bonilla 2000).

Beresnev a Wen (1996) navrhujú ako možnosť priameho dôkazu nelineárneho správania ukázať prostredníctvom záznamov silných pohybov, že základná perióda a rýchlosť priečných vln v sedimentoch závisia na amplitúde excitujúceho pohybu. Ďalšou možnosťou môže byť potvrdenie predpokladu,

že empiricky určené prenosové funkcie sú rôzne pre slabé a silné pohyby. Na základe údajov z niekoľkých zemetrasení Beresnev a Wen považujú za hraničnú hodnotu nelineárnej odozvy hodnotu zrýchlenia  $0.1g - 0.2g$ , kde  $g$  je tiažové zrýchlenie.

Pre potvrdenie nelineárnej odozvy je preto potrebné nájsť prenosovú funkciu pre slabé a silné pohyby. Prenosovú funkciu určíme, ak od spektra pozorovaného zemetrasenia oddelíme vplyv zdroja a vplyv dráhy šírenia. Metóda spektrálneho pomeru je rozšírený spôsob určenia prenosovej funkcie pomocou  $S$  vln alebo koda vln. Prenosovú funkciu zistíme ako pomer spektra na záujmovom mieste k spektru na referenčnom mieste (ako referenčné miesto je výhodný skalný voľný povrch, kvôli potlačeniu lokálnych efektov). Referenčné miesto sa vyberá tak, aby vzdialenosť medzi záujmovým a referenčným miestom bola omnoho menšia ako vzdialenosť od ohniska zemetrasenia. Častým problémom tohoto spôsobu je nežiadúci efekt zvetralej vrchnej vrstvy skalného podložia. Tiež sa vždy nedá zabezpečiť, aby vzdialenosť medzi referenčným a záujmovým miestom bola omnoho menšia ako ohnisková vzdialenosť. Prenosová funkcia určená pomocou koda vln je zistená zo slabých pohybov a preto použitie koda vln pri silných pohyboch môže viesť k nesprávnemu určeniu prenosovej funkcie (Bonilla 2000).

Metódu spektrálneho pomeru je možné použiť aj pri meraniach vo vrtoch (Yoshida a Iai 1998), kde referenčné miesto je zvolené v takej hĺbke, aby už bolo v skalnom podloží. Prenosová funkcia sa potom určí ako pomer spektra posunutia na povrchu k spektru posunutia zisteného v hĺbke. Týmto spôsobom je prenosová funkcia takmer zbavená vplyvu zdroja a dráhových efektov (Beresnev a Wen 1996). Keďže však referenčné miesto je v určitej hĺbke, sú tu zaznamenané okrem dopadajúcich vln aj vlny odrazené od povrchu a možných rýchlostných rozhraní vrchných vrstiev. Toto môže vo frekvenčnej oblasti viesť k deštruktívnej interferencii medzi dopadajúcim vlnovým poľom a odrazenými vlnami a takto vytvárať "diery" v spektre, resp. pseudorezonanciu (Bonilla 2000).

Ďalším spôsobom zistenia prenosovej funkcie je určenie pomeru spektra horizontálnej a vertikálnej zložky  $S$  vln, ktorý označujeme  $H/V$ . Pre použitie metódy  $H/V$  je základným predpokladom to, aby vertikálna zložka

S vlny nebola ovplyvnená lokálnou štruktúrou. Na horizontálne zložky vplýva konverzia P vln na S vlny spôsobená geologickým zložením pod miestom merania. Pomocou tejto metódy môžeme celkom dobre určiť rezonančné frekvencie. Avšak pri nesplnení predpokladu pre použitie  $H/V$  (t.j. aby vertikálna zložka bola nezávislá od lokálnej odozvy) dostaneme v porovnaní s inými metódami menšie amplitúdy prenosovej funkcie (Bonilla 2000).

Pozrime sa teraz na niekoľko prác venovaných zemetraseniam, pri ktorých došlo k nelineárnej odozve prostredia. Zemetrasenie z 9. februára 1971 a slabšie zemetrasenie pozorované na rovnakom mieste v San Fernande poskytujú možnosť porovnať slabé a silné pohyby. Hudson (1972) porovnal zaznamenané silné pohyby so skorším Gutenbergovým pozorovaním slabých pohybov (Gutenberg 1957). Zistil, že maximálne zrýchlenie, napriek jeho komplikovanej variabilite v oblasti, bolo na skalnom podklade väčšie ako na nánosoch, čo je v kontraste s Gutenbergovým pozorovaním slabých pohybov. Avšak Hudson nespomenul nelineárnosť a pripisuje rozdiel medzi zosilnením slabého a silného pohybu vplyvu topografie, zdroja a dráhy šírenia. Rogers et al. (1984) porovnali spektrálne pomery určené zo silných pohybov toho istého zemetrasenia so slabými pohybmi spôsobenými jadrovými pokusmi v Nevade. Zistili, že pri silných pohyboch v intervale frekvencií 0.5 až 5 Hz nastalo zmenšenie spektrálneho pomeru v porovnaní so slabými pohybmi. Autori však opäť považujú vplyv zdroja a dráhy šírenia za príčinu rozporu v zosilnení.

Jarpe et al. (1988) určili spektrálne pomery pre oblasť Coalinga v Kalifornii (zemetrasenie z roku 1983) zo 7 silných pohybov a 23 regionálnych a malých lokálnych zemetrasení. Zistili, že pre zrýchlenia do 0.7g v intervale frekvencií 1 - 10 Hz sú spektrálne pomery rovnaké pre slabé aj silné pohyby. Pre frekvencie od 10 do 11 Hz sú spektrálne pomery slabých pohybov značne menšie ako silných. Za najpravdepodobnejšiu príčinu Jarpe et al. (1988) považujú nelineárnu odozvu.

Çelebi (1987) porovnal spektrálne pomery slabých a silných pohybov pre hlavný otras a dotrasy zemetrasenia v Chile z 3. marca 1985. Zosilnenie pri slabých pohyboch bolo väčšie ako pri silných pre frekvencie od 1 do 10 Hz. Za možnú príčinu uvedeného rozdielu Çelebi považuje nelineárnu odozvu.

Na druhej strane, vzdialenosť medzi miestami, z ktorých Ćelebi urćoval spektrálne pomery, je porovnateľná so vzdialenosťou k epicentru hlavného otrasu a preto nájdený rozpor je možné pripísať rozdielu dráh šírenia a variácii vo vyžarovaní zdroja (Beresnev a Wen 1996).

Ďalšie zemetrasenie, ktoré poskytuje priamy dôkaz nelineárnej odozvy, je zemetrasenie v Loma Prieta roku 1989. Darragh a Shakal (1991) určili spektrálne pomery pre hlavný otras a štyri dotrasy pomocou dvoch párov staníc. Prvý pár tvoria stanice umiestnené na Treasure Island (mäkké vrstvy) a Yerba Buena Island (skalné miesto), druhý pár tvoria Gilroy#2 (mäkké vrstvy) a Gilroy#1 (skalné miesto). Spektrálna amplitúda posunutia určená na Treasure Island v porovnaní s Yerba Buena Island je omnoho menšia pre silný pohyb ako pre slabý pohyb v intervale frekvencií od 0.5 do 2 Hz. Za príčinu tohto rozdielu Darragh a Shakal považujú nelineárnu odozvu na Treasure Island počas hlavného otrasu. Spektrálne amplitúdy posunutia druhého páru staníc sú však v uvedenom intervale frekvencií porovnateľné pre silné a slabé pohyby.

Pomocou stochastického modelovania zemetrasenia Loma Prieta Chin a Aki (1991) skúmali vplyv zdroja, dráhy šírenia a lokálnych efektov na silný pohyb. Zistili, že ich lineárny model dáva pre skalné miesta dobrú zhodu medzi pozorovanými a predpovedanými akcelerogramami v ich trvaní a spektrálnom obsahu pre epicentrálne vzdialenosti väčšie ako 50 km. V epicentrálnych vzdialenostiach do 50 km však Chin a Aki zistili pre mäkké vrstvy systematicky menšie pozorované maximálne zrýchlenia v porovnaní s predpovedanými. Chin a Aki tento nesúhlas pripísali nelineárnym efektom.

Možnosť porovnať slabé a silné pohyby poskytujú aj merania vo vrtoch v Garner Valley na juhu Kalifornie. Archuleta et al. (1992) analyzovali spektrá zrýchlení pre dve zemetrasenia s takmer zhodnými hypocetrami, ale s rôznymi veľkosťami ( $M=4.2$  a  $M=2.5$ ). Zistili, že zosilnenie pri slabých pohyboch je značne väčšie ako pri silných pohyboch v širokom intervale frekvencií od 3 do 40 Hz. Autori nepodali vysvetlenie pozorovaného rozdielu medzi slabým a silným pohybom pravdepodobne kvôli predbežnému charakteru ich analýzy.

Beresnev et al. (1995) skúmali pomocou spektrálnych pomerov ne-

lineárnu odozvu pre dve usporiadania meracích staníc na Taiwane zaznamenávajúcich silné pohyby. Spektrálne pomery určovali niekoľkými spôsobmi. Porovnávali priemerné spektrálne pomery pre slabé a silné pohyby, pomery pre hlavné otrasy a dotrasy a spektrálne pomery S vln s im zodpovedajúcimi koda vlnami. Pre usporiadanie SMART1 Beresnev et al. zistili značne menší spektrálny pomer silných pohybov v porovnaní so slabými pohybmi v intervale frekvencií 2 - 9 Hz. Maximálne horizontálne zrýchlenie bolo pre slabé pohyby menšie ako 0.03g a pre silné pohyby od 0.1g do 0.267g. Rovnako aj pri druhom usporiadaní SMART2 zistili pre frekvencie od 1 do 10 Hz menší spektrálny pomer silných pohybov v porovnaní so slabými pohybmi. Maximálne horizontálne zrýchlenie bolo pre slabé pohyby menšie ako 0.013g, ale pre silné pohyby od 0.1g do 0.295g. Pozorované rozdiely pre slabé a silné pohyby Beresnev et al. pripisujú nelineárnej odozve.

Zemetrasenie z roku 1995 v Kobe v Japonsku v dôsledku nelineárnych efektov ovplyvnilo rozloženie rýchlostí v sedimentoch. Aguirre a Irikura (1997) analyzovali pomocou metódy spektrálnych pomerov nelineárne správanie zo záznamov zrýchlení z Port Islandu. Pozorovali veľkú variáciu v spektrálnych pomeroch medzi povrchom a rôznymi hĺbkami počas silných pohybov. Zistili, že píkove frekvencie v spektrálnych pomeroch po hlavnom otrase sú posunuté k nižším frekvenciám v porovnaní s píkovými frekvenciami pred hlavným otrasom. Nelineárne správanie počas hlavného otrasu silne ovplyvnilo horizontálny pohyb na povrchu. Pozorované maximálne horizontálne zrýchlenie dosahovalo len 25% maximálneho zrýchlenia očakávaného z lineárnej teórie. Aguirre a Irikura však zistili len slabý vplyv nelineárnych efektov na maximálne vertikálne zrýchlenie.

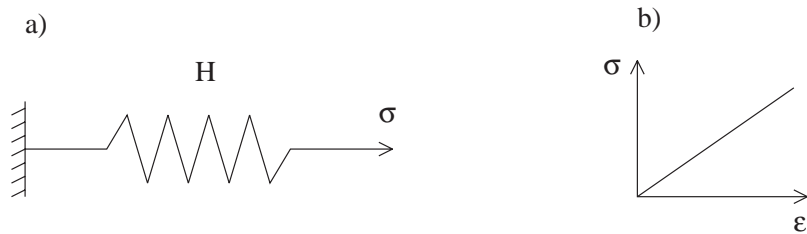
### 3 Reologické modely

Hlavným podkladom pre spracovanie tejto kapitoly bola práca Sobotka (1984).

Reológia skúma vzťah medzi napätím a deformáciou látok v závislosti od času. Keďže analytické vyjadrenie vzťahu môže byť zložité, používame pritom jednoduché modely, tzv. reologické modely, základných typov správania sa reálnych látok. Správanie látok vyjadrujeme zvyčajne pomocou diagramov napätie - deformácia, napätie - rýchlosť deformácie, napätie - čas, deformácia - čas. Najjednoduchšími reologickými modelmi sú elastické kontinuum, viskózne kontinuum a plastické kontinuum. Správanie reálnych látok môžeme aproximovať vhodnou kombináciou týchto základných modelov.

#### 3.1 Elastické kontinuum

Správanie elastického telesa môžeme reprezentovať pomocou dokonale elastickej pružiny s *modulom pružnosti*  $E$ . Takúto pružinu voláme **Hookeove teleso** (Obr. 3.1a). Závislosť medzi napätím a deformáciou tohto reologického



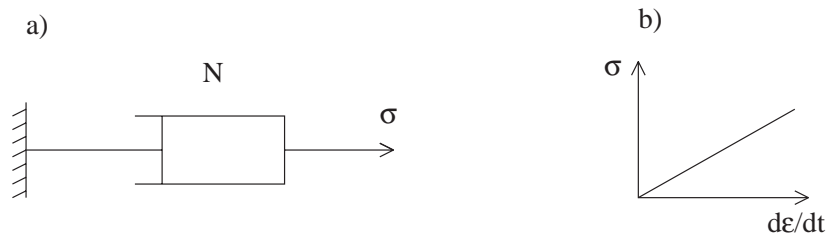
Obr. 3.1. Hookeove teleso (a) a závislosť napätia od deformácie (b).

ho modelu je lineárna (Obr. 3.1b) a môžeme ju vyjadriť pomocou *Hookeovho zákona*

$$\sigma = E\epsilon . \tag{3.1}$$

### 3.2 Viskózne kontinuum

Viskózne prostredie možno reprezentovať tmičom s *viskozitou*  $\eta$  - *Newtonove teleso* (Obr. 3.2a). Pri pohybe piesta v tmiacom zariadení kladie viskózna kvapalina vo valci odpor, ktorý je priamo úmerný rýchlosti



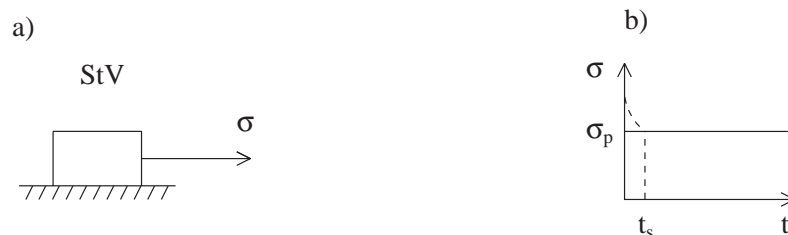
Obr. 3.2. Newtonove teleso (a) a závislosť napätia od rýchlosti deformácie (b).

pohybu piesta (Obr. 3.2b). Napätie potom môžeme vyjadriť vzťahom

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt} . \quad (3.2)$$

### 3.3 Plastické kontinuum

Správanie plastického telesa možno reprezentovať pomocou mechanického modelu telesa na podložke, pričom trenie medzi telesom a podložkou kladie odpor voči pohybu telesa po podložke. Takýto model sa volá *Saint-Venantove teleso* (Obr. 3.3a). Pri napätí menšom ako hraničná hodnota  $\sigma_P$ , ktorú voláme *medza plasticnosti* (klzu), bude deformácia nulová. Kým



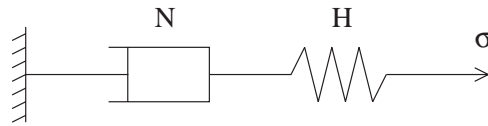
Obr. 3.3. Saint-Venantove teleso (a) a závislosť napätia od času (b).



sa teleso nepohybuje po podložke, medza plasticnosti je určená statickým trením. Keď aplikované napätie dosiahne hodnotu  $\sigma_P$  (v čase  $t = 0$ ), teleso sa začne pohybovať a za krátky čas  $t_s$  medza plasticnosti klesne na nižšiu hodnotu, ktorá je určená dynamickým trením. Tento pokles napätia  $\sigma_P$  je na Obr. 3.3b znázornený prerušovanou krivkou. Pre jednoduchosť a kvôli malej hodnote  $t_s$  však predpokladajme, že medza plasticnosti  $\sigma_P$  je určená len dynamickým trením (nepretršovaná krivka na Obr. 3.3b). Po dosiahnutí medze plasticnosti  $\sigma_P$  deformácia nadobudne hodnotu, ktorá závisí len od doby pôsobenia napätia. Pri neobmedzene dlhom pôsobení dosiahne deformácia nekonečne veľkú hodnotu.

### 3.4 Viskoelastické kontinuum

Ak spojíme Hookeove a Newtonove teleso tak, ako je to na Obr. 3.4,



Obr. 3.4. Maxwelllove teleso.

dostaneme *Maxwellove teleso*. Napätie pôsobiace na elasticnú pružinu H je

$$\sigma_H = E\epsilon_H ,$$

kde  $\epsilon_H$  je elasticná deformácia časti H a napätie pôsobiace na viskóznou časť N je

$$\sigma_N = \eta \frac{d\epsilon_N}{dt} ,$$

kde  $\epsilon_N$  je viskóznou deformácia. Napätie  $\sigma$ , ktorým pôsobíme na Maxwelllove teleso, okamžite deformuje elasticnú časť a prenáša sa ďalej na tlmič, takže  $\sigma = \sigma_H = \sigma_N$ . Výsledná deformácia Maxwellovho telesa je tvorená súčtom  $\epsilon_H$  a  $\epsilon_N$  a to isté platí aj pre rýchlosti deformácie, preto

$$\epsilon = \epsilon_H + \epsilon_N , \tag{3.3}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_H}{dt} + \frac{d\epsilon_N}{dt} . \quad (3.4)$$

Po dosadení za  $\epsilon_H$  a  $\epsilon_N$  do vzťahu (3.4) dostaneme základnú reologickú rovnicu pre Maxwelllove teleso

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} . \quad (3.5)$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice môžeme nájsť závislosť deformácie  $\epsilon(t)$  alebo napätia  $\sigma(t)$ .

Ak poznáme časovú závislosť napätia  $\sigma(t)$ , stačí rovnicu (3.5) integrovať na intervale  $\langle 0, t \rangle$ , čím dostaneme vyjadrenie pre deformáciu (s počiatkovou podmienkou  $\epsilon = 0$  pri  $t = 0$ )

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E} \int_0^t \left( \frac{E}{\eta} \sigma + \frac{d\sigma}{d\tau} \right) d\tau . \quad (3.6)$$

Ak pri známej rýchlosti deformácie násobíme rovnicu (3.5) výrazom  $Ee^{Et/\eta}$ , dostaneme

$$E \frac{d\epsilon}{dt} e^{Et/\eta} = \frac{E}{\eta} \sigma e^{Et/\eta} + \frac{d\sigma}{dt} e^{Et/\eta}$$

a po úprave pravej strany

$$E \frac{d\epsilon}{dt} e^{Et/\eta} = \frac{d}{dt} \left( \sigma e^{Et/\eta} \right) .$$

Po integrácii na intervale  $\langle 0, t \rangle$  a úpravách bude vyjadrenie pre napätie v tvare (s počiatkovou podmienkou  $\sigma = 0$  pri  $t = 0$ )

$$\sigma(t) = E e^{-Et/\eta} \int_0^t \frac{d\epsilon}{d\tau} e^{E\tau/\eta} d\tau . \quad (3.7)$$

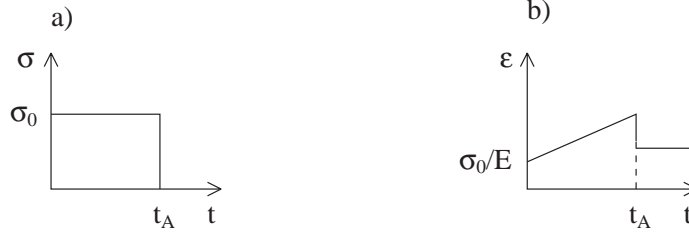
Predpokladajme teraz, že na Maxwelllove teleso aplikujeme konštantné napätie  $\sigma_0$  v časovom intervale  $\langle 0, t_A \rangle$  (Obr. 3.5a), t.j.

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) , \quad \text{pre } t \leq t_A \quad (3.8)$$

$$\sigma(t) = 0 , \quad \text{pre } t > t_A \quad (3.9)$$

kde  $H(t)$  je Heavisideova funkcia definovaná nasledovným spôsobom

$$H(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ pre } t < 0 \\ 1 & , \text{ pre } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$



Obr. 3.5. Závislosť napätia od času (a) a deformácie od času (b).

a pre jej deriváciu platí

$$\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t) , \quad (3.11)$$

kde  $\delta(t)$  je Diracova  $\delta$ -funkcia. Po dosadení napätia (3.8) do vzťahu (3.6) a úpravách dostaneme pre deformáciu (pre  $t < t_A$ )

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \\ &= \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{t}{\tau_M} \right) , \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde  $\tau_M = \frac{\eta}{E}$  je *Maxwellov relaxačný čas* a  $\tau_M < t_A$ . Prvý člen na pravej strane vzťahu (3.12) predstavuje elastickú deformáciu, ktorá po odstránení napätia v čase  $t_A$  zmizne. To má za následok celkový pokles deformácie Maxwellovho telesa o hodnotu  $\frac{\sigma_0}{E}$  (Obr. 3.5b). Druhý člen predstavuje viskóznou deformáciu, ktorá s časom rastie a po odstránení napätia ostane. Pri časoch  $t \gg \tau_M$  môžeme prvý člen zanedbať a prostredie bude tiecť. Pri časoch  $t \ll \tau_M$  môžeme zanedbať druhý člen a prostredie sa bude správať ako Hookeove teleso.

Skúmame teraz ako bude vyzeráť napätie, ak Maxwellove teleso budeme udržiavať pri konštantnej deformácii (Obr. 3.6a), t.j.

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} H(t) , \quad (3.13)$$

resp.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{E} \delta(t) . \quad (3.14)$$



Obr. 3.6. Závislosť deformácie od času (a) a napätia od času (b).

Potom dosadením (3.14) do vzťahu (3.7) a po úpravách dostaneme pre napätie

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau_M} . \quad (3.15)$$

Grafické vyjadrenie tejto závislosti je na Obr. 3.6b. Z predchádzajúceho vzťahu je zrejmy ďalší význam Maxwellovho relaxačného času: je to čas, za ktorý napätie Maxwellovho telesa pri konštantnej deformácii klesne na  $\frac{1}{e}$  svojej pôvodnej hodnoty  $\sigma_0$ .

Všimnime si ešte jednu vlastnosť Maxwellovho telesa. Nech rýchlosť deformácie je konštantná, teda  $\frac{d\epsilon}{dt} = v = \frac{\epsilon}{t}$ . Ak využijeme, že  $t = \frac{\epsilon}{v}$ , zo vzťahu (3.7) dostaneme pre napätie

$$\sigma(t) = E v \tau_M \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\epsilon}{v \tau_M}\right) \right] . \quad (3.16)$$

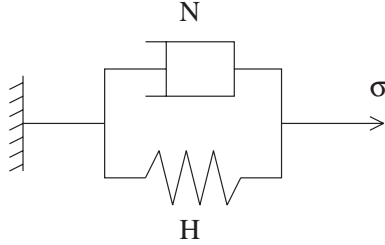
V limitnom prípade pre  $v \rightarrow \infty$  máme

$$\sigma(t) = \lim_{v \rightarrow \infty} E v \tau_M \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\epsilon}{v \tau_M}\right) \right] = E \epsilon . \quad (3.17)$$

To znamená, že pri nekonečne veľkej rýchlosti deformácie prebieha deformovanie Maxwellovho telesa pružne.

Ak Hookeove a Newtonove teleso spojíme paralelne, získame **Kelvin-Voigtovo teleso** (Obr. 3.7). Pri aplikácii napätia sa pružina H a tlmič N pohybujú súčasne, preto je zrejme, že deformácie sú pre H a N rovnaké a rovnajú sa deformácii Kelvin-Voigtovho telesa

$$\epsilon = \epsilon_H = \epsilon_N .$$



Obr. 3.7. Kelvin-Voigtovo teleso.

To isté platí aj pre rýchlosti deformácie

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_H}{dt} = \frac{d\epsilon_N}{dt} .$$

Výsledné napätie  $\sigma$  je potom tvorené súčtom napätia prenášaného elasticou pružinou  $\sigma_H = E\epsilon$  a napätia prenášaného tlmičom  $\sigma_N = \eta \frac{d\epsilon}{dt}$ . Preto pre napätie Kelvin-Voigtovho telesa môžeme písať

$$\sigma(t) = \sigma_H + \sigma_N = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} . \quad (3.18)$$

Tento vzťah pri známom  $\epsilon(t)$  priamo vyjadruje závislosť napätia od času.

Zo vzťahu (3.18) môžeme nájsť aj vyjadrenie pre deformáciu. Násobme (3.18) výrazom  $\frac{1}{\eta}e^{Et/\eta}$ , čím dostaneme

$$\frac{1}{\eta}\sigma e^{Et/\eta} = \frac{E}{\eta}\epsilon e^{Et/\eta} + \frac{d\epsilon}{dt}e^{Et/\eta}$$

a po úprave prave strany

$$\frac{1}{\eta}\sigma e^{Et/\eta} = \frac{d}{dt} (\epsilon e^{Et/\eta}) .$$

Tento výsledok ďalej integrujme na intervale  $\langle 0, t \rangle$  a po úpravách dostaneme

$$\epsilon(t) = e^{-Et/\eta} \left( \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma e^{E\tau/\eta} d\tau + \epsilon_0 \right) , \quad (3.19)$$

kde  $\epsilon_0$  je deformácia v čase  $t = 0$ .

Predpokladajme teraz, že na Kelvin-Voigtovo teleso v čase  $t = 0$  apli-



Obr. 3.8. Závislosť napätia od času (a) a deformácie od času (b).

kujeme konštantné napätie  $\sigma_0$  (Obr. 3.8a), teda

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) . \quad (3.20)$$

Potom pri počiatočnej podmienke  $\epsilon_0 = 0$  vzťah pre deformáciu (3.19) po úpravách nadobudne tvar

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-Et/\eta}) \\ &= \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau_K}) , \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde  $\tau_K = \frac{\eta}{E}$ . Grafické znázornenie tejto závislosti je na Obr. 3.8b. Pri neobmedzene dlhom pôsobení konštantného napätia  $\sigma_0$  (t.j.  $t \rightarrow \infty$ ) sa deformácia asymptoticky blíži k hodnote elastickej deformácie  $\frac{\sigma_0}{E}$ . Správanie Kelvin-Voigtovho telesa je potom tiež elastické.

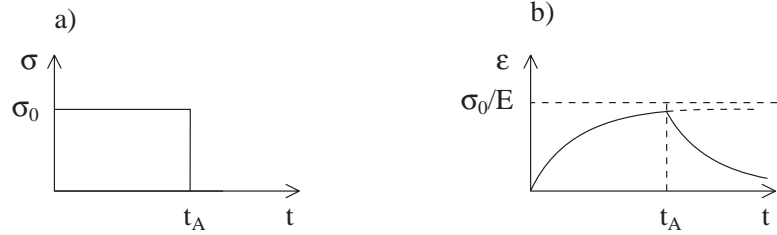
Veličinu  $\tau_K$  vo vzťahu (3.21) voláme *retardačný čas* a je to čas, za ktorý deformácia Kelvin-Voigtovho telesa pri konštantnom napätí dosiahne  $(1 - 1/e)$  z hodnoty  $\frac{\sigma_0}{E}$ .

Relaxačný čas  $\tau_M$  a retardačný čas  $\tau_K$  sú vyjadrené rovnakými vzťahmi. Avšak relaxačný čas reprezentuje dobu, za ktorú napätie klesne na určitú charakteristickú hodnotu, zatiaľčo retardačný čas reprezentuje dobu, za ktorú deformácia dosiahne charakteristickú hodnotu.

Pozrime sa teraz na prípad, keď v čase  $t_A$  náhle odstránime konštantné napätie  $\sigma_0$  (Obr. 3.9a), ktoré pôsobilo na Kelvin-Voigtovo teleso, čo môžeme opäť pomocou Heavisideovej funkcie vyjadriť v tvare

$$\sigma(t) = 0 \quad , \quad \text{pre } t < 0 \quad (3.22)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t_A - t) \quad , \quad \text{pre } t \geq 0 \quad (3.23)$$



Obr. 3.9. Závislosť napätia od času (a) a deformácie od času (b).

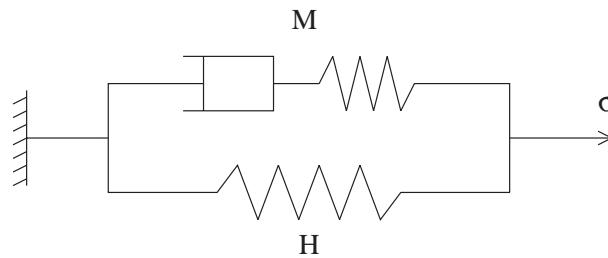
Po dosadení (3.23) do vzťahu pre deformáciu (3.19) s počiatočnou podmienkou  $\epsilon_0 = 0$  dostaneme pre  $t \geq t_A$

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ \exp\left(\frac{E}{\eta} t_A\right) - 1 \right] e^{-Et/\eta} . \quad (3.24)$$

To znamená, že po odstránení napätia deformácia nezanikne hneď, ale exponenciálne klesá k nulovej hodnote (Obr. 3.9b).

Mechanické modely sériového a paralelného spojenia elastickej pružiny a tmiča (Maxwellove a Kelvin-Voigtovo teleso) sú najjednoduchšími modelmi viskoelastického kontinua. Nie sme však obmedzení len na takéto spojenia dvoch prvkov a je samozrejmé, že môžeme vytvárať rôzne kombinácie sériového a paralelného spojenia ľubovoľného počtu elastických pružín a tmičov.

**Zenerove teleso** reprezentujeme paralelným spojením elastickej pružiny H a Maxwellovho telesa M (Obr. 3.10). Z predchádzajúcej časti



Obr. 3.10. Zenerove teleso.

zaoberajúcej sa Kelvin-Voigtovým telesom je zrejmé, že pri paralelnom spojení na Obr. 3.10 budú deformácie  $\epsilon_H$ ,  $\epsilon_M$  a rýchlosti deformácie  $\frac{d\epsilon_H}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_M}{dt}$

časti H a časti M rovnaké a budú sa rovnať deformácii (rýchlosti deformácie) Zenerovho telesa

$$\epsilon = \epsilon_H = \epsilon_M , \quad (3.25)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_H}{dt} = \frac{d\epsilon_M}{dt} . \quad (3.26)$$

Výsledné napätie  $\sigma$  je tvorené súčtom napätia  $\sigma_H$  pôsobiaceho na časť H a napätia  $\sigma_M$  pôsobiaceho na časť M, preto

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_M . \quad (3.27)$$

Vieme, že pre napätie Hookeovho telesa platí

$$\sigma_H = E_H \epsilon_H = E_H \epsilon \quad (3.28)$$

a pre rýchlosť deformácie Maxwellovho telesa zasa

$$\frac{d\epsilon_M}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E_M} \frac{d\sigma_M}{dt} + \frac{\sigma_M}{\eta_M} . \quad (3.29)$$

Po dosadení vzťahu (3.28) do vzťahu (3.27) a po úprave dostaneme

$$\sigma_M = \sigma - E_H \epsilon . \quad (3.30)$$

Toto vyjadrenie pre  $\sigma_M$  ďalej dosadíme do (3.29), čím získame

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E_M} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_H}{E_M} \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_M} - \frac{E_H}{\eta_M} \epsilon$$

a po úprave máme

$$\sigma + \frac{\eta_M}{E_M} \frac{d\sigma}{dt} = E_H \epsilon + \eta_M \left( 1 + \frac{E_H}{E_M} \right) \frac{d\epsilon}{dt} . \quad (3.31)$$

Ak poznáme časovú závislosť deformácie  $\epsilon(t)$ , môžeme vzťah (3.31) násobiť výrazom  $\frac{E_M}{\eta_M} e^{E_M t / \eta_M}$ , čím dostaneme

$$\left[ \frac{E_M}{\eta_M} \sigma + \frac{d\sigma}{dt} \right] \exp \left( \frac{E_M}{\eta_M} t \right) = \left[ \frac{E_H E_M}{\eta_M} \epsilon + (E_H + E_M) \frac{d\epsilon}{dt} \right] \exp \left( \frac{E_M}{\eta_M} t \right)$$

a po úprave ľavej strany

$$\frac{d}{dt} \left[ \sigma \exp \left( \frac{E_M}{\eta_M} t \right) \right] = \left[ \frac{E_H E_M}{\eta_M} \epsilon + (E_H + E_M) \frac{d\epsilon}{dt} \right] \exp \left( \frac{E_M}{\eta_M} t \right) .$$



Tento výsledok integrujme na intervale  $\langle 0, t \rangle$ . Potom pri počiatkovej podmienke  $\sigma = \sigma_0$  pri  $t = 0$  bude pre napätie platiť

$$\sigma(t) = \exp\left(-\frac{E_M}{\eta_M}t\right) \left\{ \int_0^t \left[ \frac{E_H E_M}{\eta_M} \epsilon + (E_H + E_M) \frac{d\epsilon}{d\tau} \right] \exp\left(\frac{E_M}{\eta_M}\tau\right) d\tau + \sigma_0 \right\} . \quad (3.32)$$

Analogickým spôsobom pri známom  $\sigma(t)$  nájdeme aj vyjadrenie pre deformáciu. Násobme vzťah (3.31) výrazom  $\frac{E_M}{\eta_M(E_H+E_M)}e^{E_H E_M t/\eta_M(E_H+E_M)}$ . Dostaneme

$$\left[ \frac{E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}\sigma + \frac{1}{E_H + E_M} \frac{d\sigma}{dt} \right] \exp\left(\frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}t\right) = \left[ \frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}\epsilon + \frac{d\epsilon}{dt} \right] \exp\left(\frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}t\right)$$

a po úprave pravej strany

$$\left[ \frac{E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}\sigma + \frac{1}{E_H + E_M} \frac{d\sigma}{dt} \right] \exp\left(\frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}t\right) = \frac{d}{dt} \left[ \epsilon \exp\left(\frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}t\right) \right] .$$

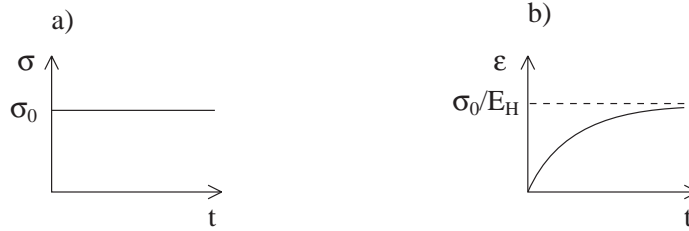
Po integrácii na intervale  $\langle 0, t \rangle$  a úpravách bude pre deformáciu platiť

$$\epsilon(t) = \exp\left(-\frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}t\right) \left\{ \int_0^t \left[ \frac{E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}\sigma + \frac{1}{E_H + E_M} \frac{d\sigma}{d\tau} \right] \exp\left(\frac{E_H E_M}{\eta_M(E_H + E_M)}\tau\right) d\tau + \epsilon_0 \right\} , \quad (3.33)$$

kde  $\epsilon_0$  je počiatková deformácia v čase  $t = 0$ .

Predpokladajme teraz, že na Zenerove teleso aplikujeme v čase  $t = 0$  konštantné napätie  $\sigma_0$  (Obr. 3.11a), teda

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) . \quad (3.34)$$



Obr. 3.11. Závislosť napätia od času (a) a tomu prislúchajúci časový priebeh deformácie (b) Zenerovho telesa.

Potom pri počiatočnej podmienke  $\epsilon_0 = 0$  zo vzťahu (3.33) po integrácii a úpravách dostaneme pre deformáciu

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_H} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{E_H E_M t}{\eta_M (E_H + E_M)} \right] \right\} . \quad (3.35)$$

Grafické znázornenie závislosti (3.35) je na Obr. 3.11b. S rastúcim časom sa deformácia Zenerovho telesa asymptoticky blíži k hodnote elastickej deformácie  $\frac{\sigma_0}{E_H}$ , čo je rovnaké ako pri Kelvin-Voigtovom telese (pozri Obr. 3.8) pri tých istých predpokladoch (konštantné napätie  $\sigma = \sigma_0$ , počiatočná deformácia  $\epsilon_0 = 0$ ).

Ďalej predpokladajme, že Zenerove teleso budeme udržiavať pri kon-



Obr. 3.12. Závislosť deformácie od času (a) a tomu prislúchajúci časový priebeh napätia (b) Zenerovho telesa.

štantnej deformácii  $\epsilon_0$  (Obr. 3.12a)

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t) . \quad (3.36)$$

Ako sa potom bude meniť napätie z počiatočnej hodnoty  $\sigma_0$ ? Dosaďme (3.36) do (3.32) a po integrovaní a úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma_0 e^{-E_M t/\eta_M} + E_H \epsilon_0 (1 - e^{-E_M t/\eta_M}) \\ &= E_H \epsilon_0 + (\sigma_0 - E_H \epsilon_0) e^{-E_M t/\eta_M} .\end{aligned}\quad (3.37)$$

Grafické znázornenie tejto závislosti je na Obr. 3.12b. Podobne ako v prípade Maxwellovho telesa, aj teraz napätie exponenciálne klesá. V prípade Zenerovho telesa sa však napätie blíži k  $E_H \epsilon_0$ , ktoré je určené napätím na elastickej pružine H.

Rovnakým spôsobom, ako sme definovali relaxačný a retardačný čas pri Maxwellovom telese a pri Kelvin-Voigtovom telese, môžeme zaviesť takéto časy aj pre Zenerove teleso. *Relaxačný čas*  $\tau_{Zrel}$  je čas, za ktorý napätie pri konštantnej deformácii  $\epsilon_0$  klesne z pôvodnej hodnoty  $\sigma_0$  na hodnotu  $E_H \epsilon_0 + \frac{1}{e}(\sigma_0 - E_H \epsilon_0)$ . Tento čas môžeme vyjadriť vzťahom

$$\tau_{Zrel} = \frac{\eta_M}{E_M} . \quad (3.38)$$

*Retardačný čas*  $\tau_{Zret}$  je čas, za ktorý deformácia pri konštantnom napätí  $\sigma_0$  dosiahne  $(1 - \frac{1}{e})$  z hodnoty  $\frac{\sigma_0}{E_H}$ . Môžeme ho vyjadriť vzťahom

$$\tau_{Zret} = \eta_M \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_M} \right) . \quad (3.39)$$

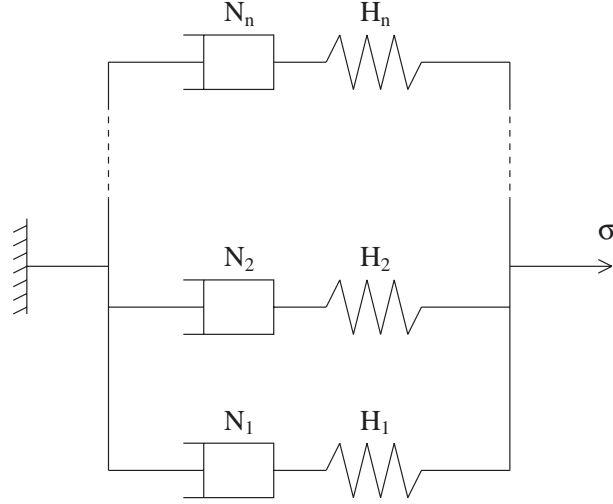
Mechanická reprezentácia **generalizovaného Maxwellovho telesa** je na Obr. 3.13. Pri aplikácii napätia  $\sigma$  sú deformácie  $\epsilon_k$  a rýchlosti deformácie  $\frac{d\epsilon_k}{dt}$  na jednotlivých vetvách tohto paralelného spojenia rovnaké a rovnajú sa celkovej deformácii generalizovaného Maxwellovho telesa

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n , \quad (3.40)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{d\epsilon_2}{dt} = \dots = \frac{d\epsilon_n}{dt} . \quad (3.41)$$

Napätie  $\sigma$  je tvorené súčtom napätí na jednotlivých vetvách, takže

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n . \quad (3.42)$$



Obr. 3.13. Generalizované Maxwellove teleso.

Pre jednotlivé vetvy, ktoré tvoria Maxwellove telesá, môžeme podľa vzťahu (3.5) písať

$$\frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{\sigma_k}{\eta_k} + \frac{1}{E_k} \frac{d\sigma_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.43)$$

kde  $E_k$  a  $\eta_k$  sú príslušné moduly pružnosti a viskozity. Po dosadení (3.43) do vzťahu (3.41) dostaneme

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma_k}{\eta_k} + \frac{1}{E_k} \frac{d\sigma_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.44)$$

Z týchto  $n$  rovníc si postupne vyjadríme napätia  $\sigma_k$  analogickým spôsobom ako pri Maxwellovom telese. Násobíme najprv (3.44) výrazom  $E_k e^{E_k t / \eta_k}$ , čím dostaneme

$$\begin{aligned} E_k \frac{d\epsilon}{dt} e^{E_k t / \eta_k} &= \frac{E_k}{\eta_k} \sigma_k e^{E_k t / \eta_k} + \frac{d\sigma_k}{dt} e^{E_k t / \eta_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sigma_k e^{E_k t / \eta_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.45)$$

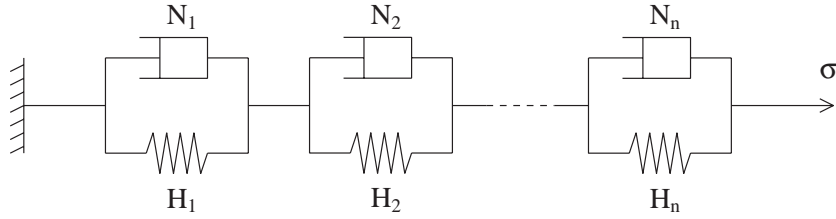
Tento výsledok integrujme na intervale  $\langle t_0, t \rangle$ . Po úpravách budú napätia  $\sigma_k$  s počiatočnými podmienkami  $\sigma_k = \sigma_{0k}$  v čase  $t_0$  vyjadrené nasledovne

$$\sigma_k(t) = e^{-E_k t / \eta_k} \left\{ E_k \int_{t_0}^t \frac{d\epsilon}{d\tau} e^{E_k \tau / \eta_k} d\tau + \sigma_{0k} e^{E_k t_0 / \eta_k} \right\} , \quad k = 1, 2, \dots, n . \quad (3.46)$$

Ak teraz dosadíme (3.46) do vzťahu (3.42), pre napätie  $\sigma(t)$  generalizovaného Maxwellovho telesa dostaneme

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n e^{-E_k t / \eta_k} \left\{ E_k \int_{t_0}^t \frac{d\epsilon}{d\tau} e^{E_k \tau / \eta_k} d\tau + \sigma_{0k} e^{E_k t_0 / \eta_k} \right\} . \quad (3.47)$$

Sériovým spojením  $n$  Kelvin-Voigtových telies získame **generalizované Kelvin-Voigtovo teleso** (Obr. 3.14). Napätia  $\sigma_k$  pôsobiace na jed-



Obr. 3.14. Generalizované Kelvin-Voigtovo teleso.

notlivé prvky sú navzájom rovnaké a rovnajú sa aplikovanému napätiu  $\sigma$ , preto

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n . \quad (3.48)$$

Výsledá deformácia  $\epsilon$  generalizovaného Kelvin-Voigtovho telesa je tvorená súčtom deformácií  $\epsilon_k$  na jednotlivých prvkoch

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n . \quad (3.49)$$

Podľa vzťahu (3.18) pre napätia  $\sigma_k$  a teda aj pre napätie  $\sigma$  môžeme písať

$$\sigma(t) = \sigma_k(t) = E_k \epsilon_k + \eta_k \frac{d\epsilon_k}{dt} , \quad k = 1, 2, \dots, n . \quad (3.50)$$

Ak teraz vynásobíme vzťah (3.50) výrazom  $\frac{1}{\eta_k}e^{E_k t/\eta_k}$ , dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta_k}\sigma e^{E_k t/\eta_k} &= \frac{E_k}{\eta_k}\epsilon_k e^{E_k t/\eta_k} + \frac{d\epsilon_k}{dt}e^{E_k t/\eta_k} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\epsilon_k e^{E_k t/\eta_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \dots\end{aligned}$$

Po integrácii na intervale  $\langle t_0, t \rangle$  a pri počiatkových podmienkach  $\epsilon = \epsilon_{0k}$  v čase  $t_0$  bude pre deformáciu na  $k$ -tom prvku platiť

$$\epsilon_k(t) = e^{-E_k t/\eta_k} \left\{ \frac{1}{\eta_k} \int_{t_0}^t \sigma e^{E_k \tau/\eta_k} d\tau + \epsilon_{0k} e^{E_k t_0/\eta_k} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots \quad (3.51)$$

Dosadením vzťahu (3.51) do (3.49) dostaneme časovú závislosť generalizovaného Kelvin-Voigtovho telesa v tvare

$$\epsilon(t) = \sum_{k=1}^n e^{-E_k t/\eta_k} \left\{ \frac{1}{\eta_k} \int_{t_0}^t \sigma e^{E_k \tau/\eta_k} d\tau + \epsilon_{0k} e^{E_k t_0/\eta_k} \right\}. \quad (3.52)$$

**Generalizované Zenerove teleso** reprezentujeme paralelným spojením  $n$  Zenerových telies (Obr. 3.15). Keďže pri aplikácii napätia  $\sigma$  sa jednotlivé Zenerové telesá deformujú súčasne, potom pre deformáciu  $\epsilon$  a rýchlosť deformácie  $\frac{d\epsilon}{dt}$  platí

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n, \quad (3.53)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{d\epsilon_2}{dt} = \dots = \frac{d\epsilon_n}{dt}, \quad (3.54)$$

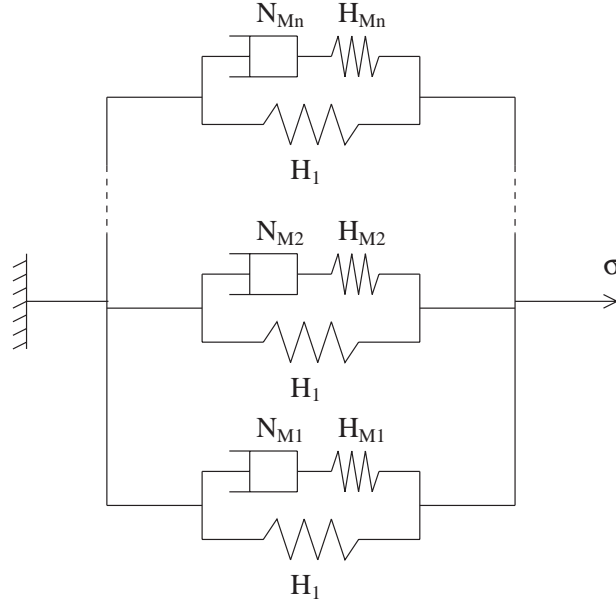
kde  $\epsilon_k$  sú deformácie na jednotlivých vetvách tohto paralelného spojenia. Súčtom napätí  $\sigma_k$ , ktoré pôsobia na jednotlivé Zenerove telesá, dostaneme výsledné napätie

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n. \quad (3.55)$$

Podľa vzťahu (3.31) môžeme pre  $k$ -te Zenerove teleso písať

$$\sigma_k + \frac{\eta_{Mk}}{E_{Mk}} \frac{d\sigma_k}{dt} = E_{Hk} \epsilon_k + \eta_{Mk} \left( 1 + \frac{E_{Hk}}{E_{Mk}} \right) \frac{d\epsilon_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

resp.



Obr. 3.15. Generalizované Zenerove teleso.

$$\sigma_k + \frac{\eta_{Mk}}{E_{Mk}} \frac{d\sigma_k}{dt} = E_{Hk}\epsilon + \eta_{Mk} \left( 1 + \frac{E_{Hk}}{E_{Mk}} \right) \frac{d\epsilon}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.56)$$

Rovnakým spôsobom, ako sme našli vyjadrenie pre napätie Zenerovho telesa, môžeme postupovať aj v prípade generalizovaného Zenerovho telesa. Teraz však integrujme na intervale  $\langle t_0, t \rangle$ . Potom pri počiatočných podmienkach  $\sigma_k = \sigma_{0k}$  v čase  $t_0$  dostaneme

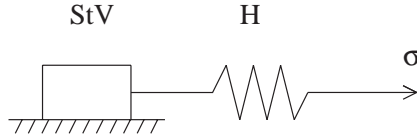
$$\begin{aligned} \sigma_k(t) = & \exp\left(-\frac{E_{Mk}}{\eta_{Mk}}t\right) \\ & \left\{ \int_{t_0}^t \left[ \frac{E_{Hk}E_{Mk}}{\eta_{Mk}}\epsilon + (E_{Hk} + E_{Mk}) \frac{d\epsilon}{d\tau} \right] \exp\left(\frac{E_{Mk}}{\eta_{Mk}}\tau\right) d\tau + \right. \\ & \left. \sigma_{0k} \exp\left(\frac{E_{Mk}}{\eta_{Mk}}t_0\right) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.57) \end{aligned}$$

Po dosadení (3.57) do vzťahu (3.55) nakoniec nájdeme vyjadrenie pre napätie generalizovaného Zenerovho telesa v tvare

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{E_{Mk}}{\eta_{Mk}}t\right) \left\{ \int_{t_0}^t \left[ \frac{E_{Hk}E_{Mk}}{\eta_{Mk}}\epsilon + (E_{Hk} + E_{Mk}) \frac{d\epsilon}{d\tau} \right] \exp\left(\frac{E_{Mk}}{\eta_{Mk}}\tau\right) d\tau + \sigma_{0k} \exp\left(\frac{E_{Mk}}{\eta_{Mk}}t_0\right) \right\} . \quad (3.58)$$

### 3.5 Elastoplastické kontinuum

Elastoplastické prostredia môžeme reprezentovať spojením Hookeovho telesa so Saint-Venantovým telesom. Pri sériovom spojení (Obr. 3.16) je aplikované napätie  $\sigma$  rovné napätiu  $\sigma_H$  na časti H a rovnako aj napätiu  $\sigma_{StV}$



Obr. 3.16. Sériové spojenie Hookeovho telesa so Saint-Venantovým telesom.

na časti StV

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_{StV} . \quad (3.59)$$

Súčet deformácie elastickej pružiny  $\epsilon_H$  a deformácie Saint-Venantovho telesa  $\epsilon_{StV}$  tvorí výslednú deformáciu

$$\epsilon = \epsilon_H + \epsilon_{StV} . \quad (3.60)$$

Keď na takéto usporiadanie aplikujeme napätie, ktoré je menšie ako medza plasticity  $\sigma_P$  časti StV, bude sa deťormovať len elastická časť H. Akonáhle však napätie dosiahne  $\sigma_P$ , začne sa deťormovať aj trecie zariadenie, pričom deformácia môže nadobudnúť ľubovoľne veľkú hodnotu. Veľkosť deformácie elastickej časti ostane na hodnote  $\epsilon_H = \epsilon_P$ , ktorá zodpovedá napätiu  $\sigma_P$ , teda

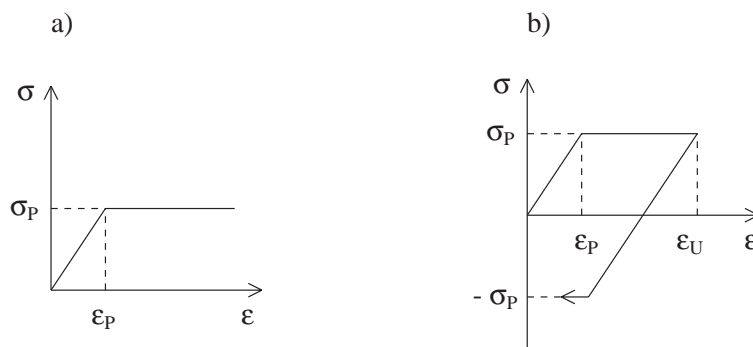
$$\epsilon_P = \frac{\sigma_P}{E} , \quad (3.61)$$



kde  $E$  je modul pružnosti elastickej pružiny H. Pre napätie môžeme potom písať

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & , \quad \epsilon < \epsilon_P \\ \sigma_P & , \quad \epsilon \geq \epsilon_P \end{cases} \quad (3.62)$$

Grafické znázornenie tejto závislosti je na Obr. 3.17a.



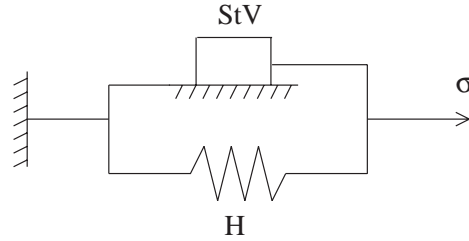
Obr. 3.17. Závislosť napätia od deformácie sériového spojenia Hookeovho telesa so Saint-Venantovým telesom pri zaťažení (a) a pri odľahčení (b).

Skúmame, čo sa stane, keď po zaťažení uvedeného sériového spojenia začneme pri deformácii  $\epsilon_U > \epsilon_P$  znižovať napätie (Obr. 3.17b). Najprv bude deformovaná elastickej časť. Keď napätie dosiahne hodnotu  $\sigma = 0$ , deformácia na pružine bude nulová a celková veľkosť deformácie bude zodpovedať hodnote  $\epsilon_U - \epsilon_P$ , ktorú nadobudla plastickej časť počas zaťažovania. Pri ďalšom znižovaní napätia bude elastickej pružina stláčaná, až kým napätie nedosiahne hodnotu  $-\sigma_P$ . Ďalej už potom bude prebiehať len deformovanie plastickej časti. Celkový pokles napätia pri takomto odľahčení je  $2\sigma_P$ .

Pri paralelnom spojení elastickej pružiny H a trecieho zariadenia StV (Obr. 3.18) prebieha deformovanie jednotlivých vetiev spojenia súčasne, preto pre celkovú deformáciu platí

$$\epsilon = \epsilon_H = \epsilon_{StV} . \quad (3.63)$$

Kým aplikované napätie nedosiahne medzi plastickej časti StV, deformácia bude nulová (Obr. 3.19a). Po dosiahnutí  $\sigma_P$  sa časť StV bude môcť



Obr. 3.18. Paralelné spojenie Hookeovho telesa so Saint-Venantovým telesom.

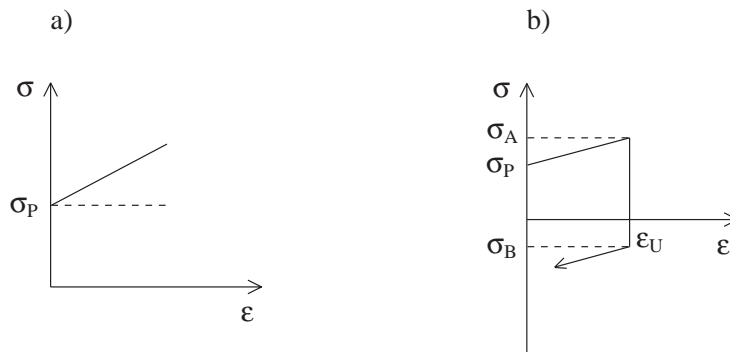
deformovať neobmedzene. Celková deformácia však bude určená len elasticou deformáciou časti H. Pre závislosť napätia od deformácie môžeme písať

$$\sigma = \sigma_P + E\epsilon \quad , \quad (3.64)$$

a pre vyjadrenie deformácie pomocou napätia

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & , \quad \sigma < \sigma_P \\ \frac{\sigma - \sigma_P}{E} & , \quad \sigma \geq \sigma_P \end{cases} \quad (3.65)$$

Predpokladajme teraz, že pri deformácii  $\epsilon_U$ , ktorá zodpovedá napätiu  $\sigma_A = \sigma_P + E\epsilon_U$ , začneme aplikované napätie znižovať. Závislosť napätia od



Obr. 3.19. Závislosť napätia od deformácie paralelného spojenia Hookeovho telesa so Saint-Venantovým telesom pri zaťažení (a) a pri odľahčení (b).

deformácie môžeme sledovať na Obr. 3.19b. Ak začneme napätie  $\sigma$  znižovať, napätie vo vetve s trecím zariadením StV, ktoré dovtedy bolo rovné  $\sigma_P$ ,

klesne pod túto hodnotu. To spôsobí, že časť StV sa prestane deformovať a zároveň sa prestane deformovať aj časť H (kvôli paralelizmu). Celková deformácia bude rovná deformácii naakumulovanej počas zväčšovania napätia, takže sa bude rovnáť  $\epsilon_U$ . Napätie  $\sigma$  sa bude znižovať pri deformácii  $\epsilon_U$ , až kým nedosiahne hodnotu

$$\sigma_B = \sigma_A - 2\sigma_P = E\epsilon_U - \sigma_P .$$

Je to preto tak, lebo na časť StV najprv pôsobilo ťahové napätie, ktoré počas odľahčenia vymizne (pokles o  $\sigma_P$ ). Potom začne pôsobiť tlakové napätie. Keď napätie  $\sigma$  dosiahne hodnotu  $\sigma_B$  (ďalší pokles o  $\sigma_P$ ), začne sa deformovať aj elastická časť a celková deformácia sa bude znižovať z hodnoty  $\epsilon_U$  podľa vzťahu

$$\epsilon = \epsilon_U + \frac{\sigma - \sigma_B}{E} . \quad (3.66)$$

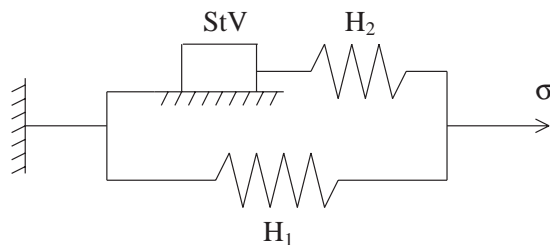
Po dosadení za  $\sigma_B = E\epsilon_U - \sigma_P$  do (3.66) dostaneme

$$\epsilon = \frac{\sigma + \sigma_P}{E} , \text{ pre } \sigma \leq \sigma_B , \quad (3.67)$$

resp.

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_U , & \text{pre } \sigma \leq \sigma_A \\ \frac{\sigma + \sigma_P}{E} , & \text{pre } \sigma_A < \sigma \leq \sigma_B \end{cases} \quad (3.68)$$

Skúmame teraz usporiadania, ktoré sú tvorené viacerými pružinami a trecími zariadeniami. Najprv sa pozrieme na paralelné usporiadanie, ako je



Obr. 3.20. Paralelné spojenie Hookeovho telesa so sériovým spojením Saint-Venantovho a Hookeovho telesa.

na Obr. 3.20. Deformácia  $\epsilon_1$  elastickej pružiny  $H_1$  je rovnaká ako deformácia  $\epsilon_2$  časti s prvkami  $H_2$  a StV a tieto deformácie sa rovnajú celkovej deformácii

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 \quad . \quad (3.69)$$

Aplikované napätie  $\sigma$  môžeme rozdeliť na súčet napätia  $\sigma_1$ , ktoré pôsobí na časť  $H_1$ , a napätia  $\sigma_2$  pôsobiaceho na časť s  $H_2$  a StV, teda

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad . \quad (3.70)$$

Pre napätie  $\sigma_1$  platí

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon \quad (3.71)$$

a pre napätie  $\sigma_2$

$$\sigma_2 = \begin{cases} E_2 \epsilon & , \quad \epsilon < \epsilon_P \\ \sigma_P & , \quad \epsilon \geq \epsilon_P \end{cases} \quad (3.72)$$

kde  $E_1$ ,  $E_2$  sú moduly pružnosti elastických pružín  $H_1$  a  $H_2$ ,  $\sigma_P$  je medza plasticity trecieho zariadenia StV a  $\epsilon_P$  je deformácia časti s prvkami  $H_2$  a StV, pri ktorej je  $\sigma_2 = \sigma_P$ , teda

$$\epsilon_P = \frac{\sigma_P}{E_2} \quad . \quad (3.73)$$

Po aplikácii napätia  $\sigma$  na usporiadanie na Obr. 3.20 sa najprv budú súčasne deformovať pružiny  $H_1$  a  $H_2$ , čo môžeme vyjadriť vzťahom

$$\sigma = (E_1 + E_2) \epsilon \quad .$$

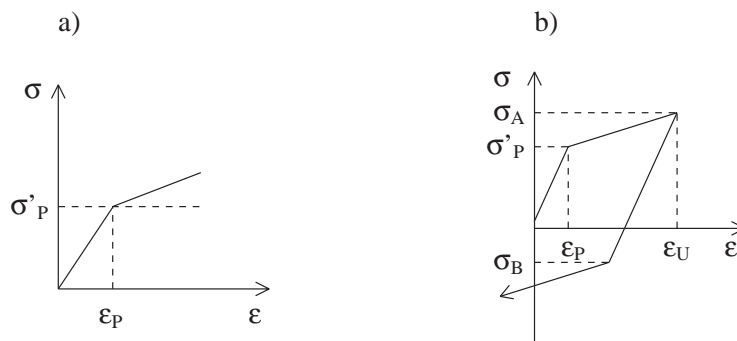
Takýmto lineárnym spôsobom sa so zväčšujúcou deformáciou  $\epsilon$  bude zväčšovať aj napätie  $\sigma$  až po hodnotu  $\sigma'_P$ . Vtedy napätie  $\sigma_2$  dosiahne medzu plasticity ( $\sigma_2 = \sigma_P$ ) a časť paralelného usporiadania s prvkami  $H_2$  a StV sa bude môcť deformovať neobmedzene. Keďže deformácie  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$  sú rovnaké a v tomto prípade rovné  $\epsilon_P$ , napätie  $\sigma'_P$  je určené vzťahom

$$\begin{aligned} \sigma'_P &= (E_1 + E_2) \epsilon_P = \\ &= E_1 \epsilon_P + \sigma_P \quad . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Pri ďalšom zväčšovaní napätia  $\sigma$  sa napätie  $\sigma_2$  v časti s elastickou pružinou  $H_2$  a trecím zariadením StV nebude ďalej meniť z hodnoty  $\sigma_P$  a závislosť deformácie od napätia  $\sigma$  bude určená už len elastickou pružinou  $H_1$ . Dosadením (3.71) a (3.72) do vzťahu (3.70) dostaneme pre napätie (Obr. 3.21a)

$$\sigma = \begin{cases} (E_1 + E_2)\epsilon & , \quad \epsilon < \epsilon_P \\ \sigma_P + E_1\epsilon & , \quad \epsilon \geq \epsilon_P \end{cases} \quad (3.75)$$

kde  $\epsilon_P$  je určené vzťahom (3.73). Pre závislosť deformácie od napätia



Obr. 3.21. Závislosť napätia od deformácie usporiadania z Obr. 3.20 pri zaťažení (a) a pri odľahčení (b).

dostaneme z predchádzajúceho vzťahu

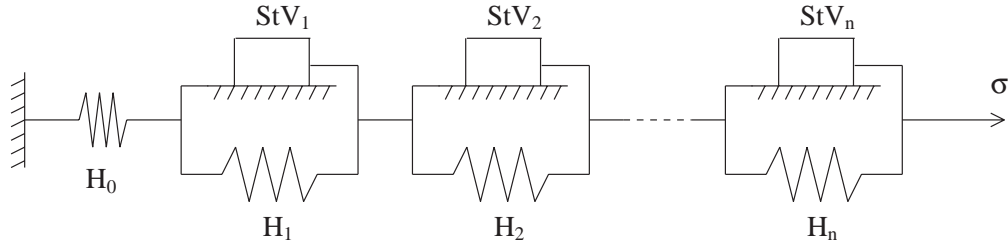
$$\epsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_1 + E_2} & , \quad \text{pre } \sigma < \sigma'_P \\ \frac{\sigma - \sigma_P}{E_1} & , \quad \text{pre } \sigma \geq \sigma'_P \end{cases} \quad (3.76)$$

kde  $\sigma'_P$  je určené vzťahom (3.74).

Predpokladajme teraz, že pri deformácii  $\epsilon_U$  ( $\epsilon_U > \epsilon_P$ ) a napätí  $\sigma_A = \sigma_P + E_1\epsilon_U$  začneme aplikované napätie znižovať. Grafické znázornenie závislosti napätia od deformácie je na Obr. 3.21b. Najprv bude prebiehať súčasné deformovanie pružín  $H_1$  a  $H_2$  a napätie poklesne z hodnoty  $\sigma_A$  o  $\sigma'_P$ . Vtedy bude napätie  $\sigma_P$ , ktoré pôvodne pôsobilo na  $H_2$  a StV, už úplne odstránené. Pri ďalšom znižovaní  $\sigma$  budú pružiny  $H_1$  a  $H_2$  naďalej súčasne deformované, až kým napätie  $\sigma_2$  nedosiahne hodnotu  $\sigma_2 = -\sigma_P$ . Tomu zodpovedá ďalší pokles napätia  $\sigma$  o  $\sigma'_P$ . Napätie  $\sigma$  sa teda celkovo z hodnoty  $\sigma_A$

zmenší o  $2\sigma'_P$  na hodnotu  $\sigma_B = \sigma_A - 2\sigma'_P$ . Pri ďalšom stláčaní sa časť vetvy s trecím zariadením StV bude deformovať neobmedzene a napätie na tejto časti sa nebude meniť z hodnoty  $\sigma_2 = -\sigma_P$ . Závislosť napätia od deformácie bude pri ďalšom znižovaní napätia určená už len elasticou pružinou  $H_1$ .

Pozrime sa teraz na prípad usporiadania elasticých pružín a trecích zariadení, ktoré sú znázornené na Obr. 3.22 (*Iwanov model*). Aplikované napätie  $\sigma$  je rovnaké ako napätie  $\sigma_0$ , ktoré pôsobí na elasticú pružinu  $H_0$ , a



Obr. 3.22. Iwanov model.

napätia  $\sigma_k$ , ktoré pôsobia na  $k$ -te paralelné spojenie elastickej pružiny  $H_k$  s trecím zariadením  $StV_k$

$$\sigma = \sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n . \quad (3.77)$$

Výsledná deformácia  $\epsilon$  je tvorená súčtom deformácie  $\epsilon_0$  na elastickej pružine  $H_0$  a deformáciami  $\epsilon_k$  na  $k$ -tom paralelnom spojení, takže

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n . \quad (3.78)$$

Pre pružinu  $H_0$  môžeme pomocou Hookeovho zákona písať

$$\sigma_0 = \sigma = E_0 \epsilon_0 , \quad (3.79)$$

resp.

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0} . \quad (3.80)$$

Využitím vzťahu (3.64) môžeme vyjadriť závislosť napätia  $\sigma_k$  od deformácie,

$$\sigma_k = \sigma = \sigma_{Pk} + E_k \epsilon_k , \quad k = 1, 2, \dots, n , \quad (3.81)$$

prípadne závislosť deformácie od napätia (vzťah (3.65)),

$$\epsilon_k = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_{Pk} \\ \frac{\sigma - \sigma_{Pk}}{E} & , \sigma \geq \sigma_{Pk} \end{cases} , \quad k = 1, 2, \dots, n , \quad (3.82)$$

kde  $E_k$  je modul pružnosti elastickej pružiny  $H_k$  a  $\sigma_{Pk}$  je medza platickosti  $StV_k$ . Navyše pre  $\sigma_{Pk}$  predpokladajme

$$\sigma_{P1} < \sigma_{P2} < \dots < \sigma_{Pn} . \quad (3.83)$$

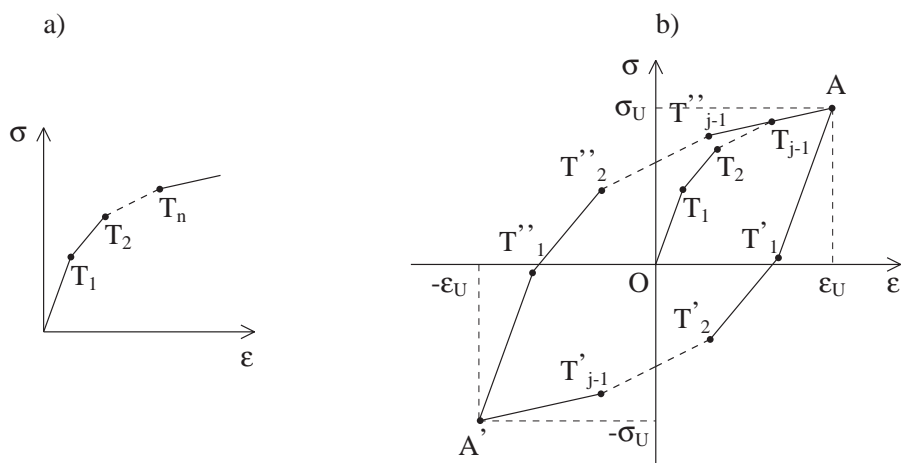
Pri zväčšovaní aplikovaného napätia  $\sigma$  sa najprv bude zväčšovať deformácia v dôsledku deformovania elastickej pružiny  $H_0$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} , \quad pre \quad \sigma < \sigma_{P1} . \quad (3.84)$$

Keď napätie  $\sigma$  dosiahne medzu platickosti  $\sigma_{P1}$ , začne prebiehať aj deformovanie časti s paralelným spojením  $H_1$  a  $StV_1$  a deformáciu môžeme vyjadriť v tvare

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma - \sigma_{P1}}{E_1} , \quad pre \quad \sigma_{P1} \leq \sigma < \sigma_{P2} . \quad (3.85)$$

To môžeme pozorovať na Obr. 3.23a ako "zlomenie" krivky v bode  $T_1$  so



Obr. 3.23. Priebeh závislosti napätia od deformácie pri zaťažovaní Iwanovho modelu (a) a vytvorenie hysteréznej slučky (b).

súradnicami  $(\epsilon_{P1}, \sigma_{P1})$ , kde  $\epsilon_{P1} = \frac{\sigma_{P1}}{E_0}$ . Po dosiahnutí napätia  $\sigma_{P2}$  sa začne deformovať aj časť s paralelným spojením  $H_2$  a  $StV_2$  a pre deformáciu dostaneme

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma - \sigma_{P1}}{E_1} + \frac{\sigma - \sigma_{P2}}{E_2} , \text{ pre } \sigma_{P2} \leq \sigma < \sigma_{P3} . \quad (3.86)$$

Na Obr. 3.23a to opäť môžeme pozorovať ako "zlomenie" krivky, teraz však v bode  $T_2(\epsilon_{P2}, \sigma_{P2})$ , kde  $\epsilon_{P2}$  je deformácia pri napätí  $\sigma_{P2}$ . Deformáciu  $\epsilon_{P2}$  môžeme určiť zo vzťahu (3.86) dosadením za  $\sigma = \sigma_{P2}$ , teda

$$\epsilon_{P2} = \frac{\sigma_{P2}}{E_0} + \frac{\sigma_{P2} - \sigma_{P1}}{E_1} .$$

Podobne ako v dvoch predchádzajúcich prípadoch, keď aplikované napätie dosiahne ďalšiu medzu plasticity, začne sa deformovať ďalšia časť s paralelným spojením pružiny a trecieho zariadenia. Takto to bude pokračovať, až kým napätie nedosiahne medzu plasticity na poslednom  $n$ -tom paralelnom spojení pružiny a trecieho zariadenia. Vtedy bude pre deformáciu platiť

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma - \sigma_{P1}}{E_1} + \frac{\sigma - \sigma_{P2}}{E_2} + \dots + \frac{\sigma - \sigma_{Pn}}{E_n} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{E_k} \sigma - \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{Pk}}{E_k} , \text{ pre } \sigma_{Pn} \leq \sigma . \end{aligned} \quad (3.87)$$

Uvedené prípady závislosti deformácie od napätia môžeme zovšeobecniť na prípady, kedy aplikované napätie je väčšie ako  $\sigma_{P(i-1)}$ , ale ešte nedosiahlo medzu plasticity  $\sigma_{Pi}$ . Keď dosadíme (3.80) a (3.82) do vzťahu (3.78) a budeme predpokladať  $\sigma_{P(i-1)} \leq \sigma < \sigma_{Pi}$ , dostaneme

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\sigma - \sigma_{Pk}}{E_k} , \text{ pre } \sigma_{P(i-1)} \leq \sigma < \sigma_{Pi} , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.88)$$

Vzťah (3.88) môžeme ešte ďalej upraviť. Zavedme medze plasticity  $\sigma_0$  a  $\sigma_{n+1}$ , pre ktoré predpokladajme

$$\sigma_0 = 0 , \quad (3.89)$$

$$\sigma_{n+1} = \infty . \quad (3.90)$$



Potom vzťah (3.88) môžeme prepísať na tvar

$$\epsilon = \sigma \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{E_k} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\sigma_{Pk}}{E_k} , \text{ pre } \sigma_{P(i-1)} \leq \sigma < \sigma_{Pi} ,$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1 . \quad (3.91)$$

Jednoduchou úpravou zo vzťahu (3.91) dostaneme vyjadrenie napätia pomocou deformácie v tvare

$$\sigma = \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{E_k} \right)^{-1} \left( \epsilon + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\sigma_{Pk}}{E_k} \right) , \text{ pre } \sigma_{P(i-1)} \leq \sigma < \sigma_{Pi} ,$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1 . \quad (3.92)$$

Skúmame teraz prípad, keď napätie pôsobiace na usporiadanie z Obr. 3.22 začneme znižovať z hodnoty  $\sigma_U$ , ktorej zodpovedá deformácia  $\epsilon_U$  (bod A na Obr. 3.23b). Napätie  $\sigma_U$  je z intervalu  $\sigma_{P(j-1)} \leq \sigma_U < \sigma_{Pj}$ , kde  $j$  môže byť rovné  $1, 2, \dots, n + 1$ . Najprv budeme napätie znižovať po hodnotu  $-\sigma_U$ , pri ktorej deformácia dosiahne  $-\epsilon_U$  (bod A') a potom opäť zväčšovať, až kým sa nedostaneme znova do bodu A.

Pri znižovaní napätia sa ako prvá bude deformovať pružina  $H_0$ . Súčasne sa bude znižovať aj napätie v častiach s paralelnými spojeniami, avšak bez deformovania. Tento stav potrvá dovtedy, kým aplikované napätie nedosiahne hodnotu, ktorá umožní deformovanie niektorého z trecích zariadení  $StV_1, StV_2, \dots$  alebo  $StV_n$ . Keďže medza plastickej trecieho zariadenia  $StV_1$  je najmenšia ( $\sigma_{P1} < \sigma_{P2} < \dots < \sigma_{Pn}$ ), ako prvá sa začne deformovať časť s paralelným spojením  $H_1$  a  $StV_1$ . Aplikované napätie, pri ktorom dôjde k deformácii plastickej časti s  $StV_1$ , bude zmenšené o dvojnásobok  $\sigma_{P1}$ . Preto napätie v bode  $T'_1$  je  $\sigma(T'_1) = \sigma_U - 2\sigma_{P1}$ . Dôvod dvojnásobného zmenšenia je rovnaký ako v prípade samotného paralelného spojenia elastickej pružiny a trecieho zariadenia. Pri znižovaní aplikovaného napätia najprv vymizne napätie, ktoré bolo na trecom zariadení. Tomu zodpovedá pokles o  $\sigma_{P1}$  a napätie na trecom zariadení bude potom nulové. Až vtedy, keď napätie klesne ešte o ďalšiu hodnotu  $\sigma_{P1}$ , začne sa prvok  $StV_1$  deformovať.

Pri ďalšom znižovaní napätia  $\sigma$  bude závislosť napätie - deformácia lineárna (deformujú sa pružina  $H_0$  a časť s paralelným spojením  $H_1$  a  $StV_1$ )

až do bodu  $T'_2$ , kde opäť nastane "zlomenie" krivky. Napätie v tomto bode je  $\sigma(T'_2) = \sigma(T'_1) - 2\sigma_{P2}$  a pri napätiah  $\sigma \leq \sigma(T'_2)$  sa už môže deformovať aj časť s elastickou pružinou  $H_2$  a trecím zariadením  $StV_2$ . Postupným prekonávaním medzí plasticity na trecích zariadeniach sa dostaneme až do bodu  $A'$ , pričom vždy, keď aplikované napätie dosiahne hodnotu, ktorej bude zodpovedať prekonanie medze pevnosti niektorého z trecích zariadení, nastane "zlomenie" krivky v grafickom znázornení napätie - deformácia.

Ak po dosiahnutí napätia  $-\sigma_U$  a deformácie  $-\epsilon_U$  začneme zväčšovať aplikované napätie, závislosť bude podobná ako pri prvom zaťažení alebo odľahčení. Najprv bude prebiehať deformovanie elastickej pružiny  $H_0$  a napätie vzrastie z hodnoty  $-\sigma_U$  o  $2\sigma_{P1}$  až kým nenastane "zlomenie" krivky vyjadrujúcej závislosť napätia od deformácie (bod  $T''_1$ ). Potom sa začne deformovať aj časť spojenia s pružinou  $H_1$  a trecím zariadením  $StV_1$ . Pri dosiahnutí ďalšej medze plasticity sa krivka znova "zlomí" (bod  $T''_2$ ). Takýmto "lámavým" spôsobom sa dostaneme späť do bodu A, čím sa vytvorí *hysterézná slučka*.

Môžeme si všimnúť, že na vytvorenie hysteréznej slučky nemusíme podrobne sledovať celú dráhu od bodu A cez body  $T'_1, T'_2, \dots, T'_{j-1}, A'$  a späť cez  $T''_1, T''_2, \dots, T''_{j-1}$  až do A. Stačí poznať krivku, ktorú získame pri prvom zaťažení (krivka prvotnej záťaže) a uvedomiť si, že jednotlivé vetvy hysteréznej slučky majú rovnaký tvar ako krivka  $O, T_1, T_2, \dots, T_{j-1}, A$ , len poloha ich počiatku je v bode A, resp. v bode  $A'$  a sú dvakrát "natiahnuté". Takéto preškáľovanie dosiahneme násobením deformácie a napätia s  $\frac{1}{2}$ . Pre závislosť deformácie od napätia budeme pri odľahčení potom môcť písať

$$\frac{\epsilon - \epsilon_U}{2} = \frac{\sigma - \sigma_U}{2} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{E_k} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\sigma_{Pk}}{E_k}, \quad pre \quad \sigma_{P(i-1)} \leq \sigma < \sigma_{Pi},$$

$$i = 1, 2, \dots, j + 1, \quad (3.93)$$

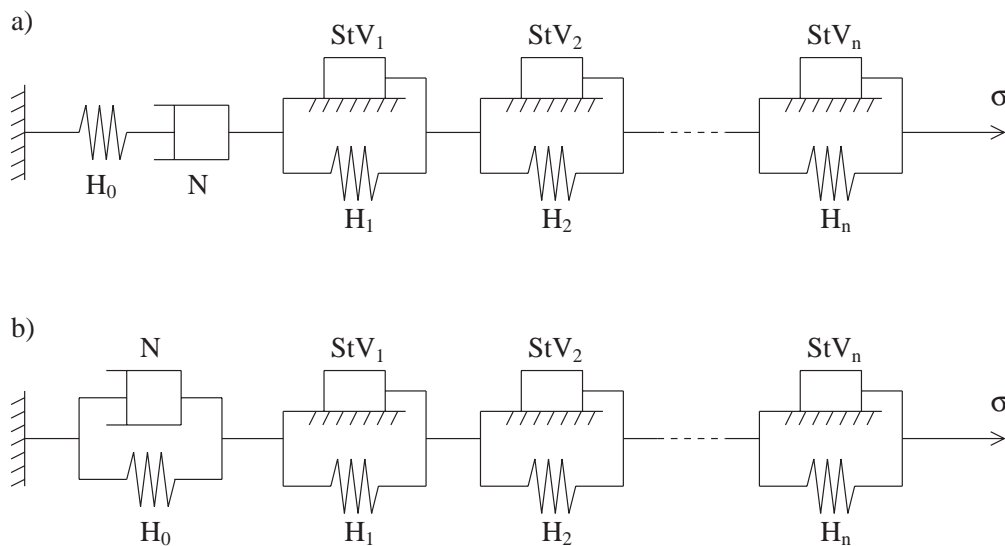
a pre závislosť deformácie od napätia pri opätovnom zaťažení dostaneme

$$\frac{\epsilon + \epsilon_U}{2} = \frac{\sigma + \sigma_U}{2} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{E_k} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\sigma_{Pk}}{E_k}, \quad pre \quad \sigma_{P(i-1)} \leq \sigma < \sigma_{Pi},$$

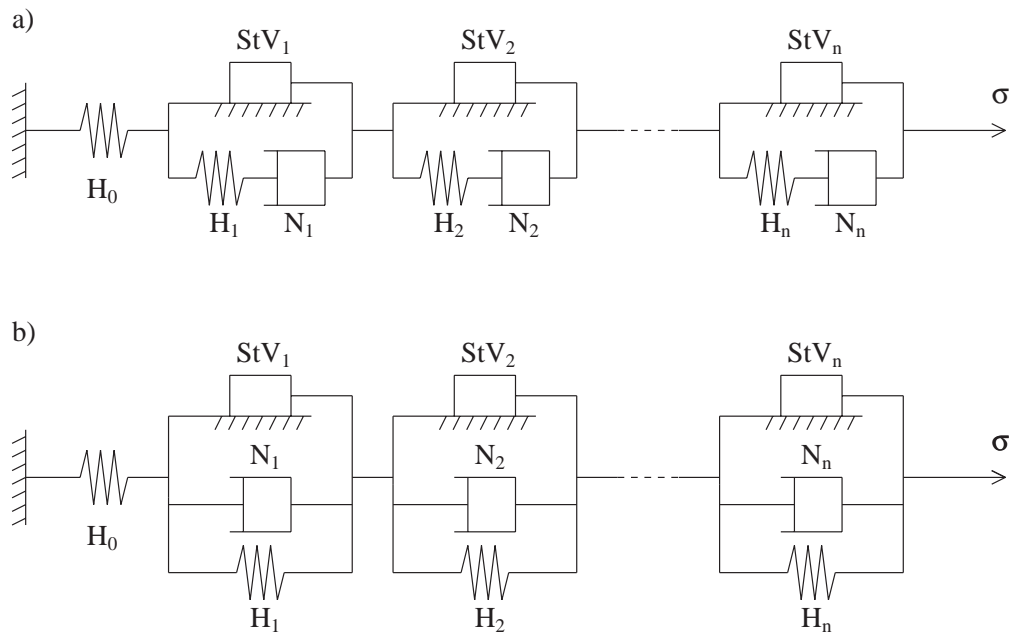
$$i = 1, 2, \dots, j + 1. \quad (3.94)$$

Znamienko  $+$  na pravej strane vzťahu (3.93) nás nesmie mýliť, pretože trecie napätia  $\sigma_{Pk}$  odčítame od hodnoty  $\sigma_U$  a tento rozdiel od napätia  $\sigma$  odčítavame. Podobný dôvod je aj pre zavedenie znamienka  $-$  medzi sumami vo vzťahu (3.94). Tu však k napätiu  $-\sigma_U$  pripočítavame trecie napätia.

Ak začneme zväčšovať počet elastických pružín a trecích zariadení, pričom rozdiely medzi jednotlivými medzami plasticity budeme znižovať, potom krivka prvotnej záťaže a rovnako aj vetvy hysteréznej slučky sa budú blížiť k spojitým krivkám. Je pravdepodobné, že pre lepšie opísanie hysterézneho správania reálnych prostredí treba zahrnúť jeden alebo viac viskózných prvkov do Iwanovho modelu. Tu však vzniká otázka, kde ich zapojiť? Niekoľko možných usporiadaní je na Obr. 3.24 a Obr. 3.25. V dostupnej literatúre nie sú uvedené modely uvažované.



Obr. 3.24. Príklady pripojenia Newtonovho telesa do Iwanovho modelu.



Obr. 3.25. Príklady pripojenia Newtonových telies do Iwanovho modelu.

## 4 Nelineárne šírenie elastických vln v dokonale elastickom kontinuu

### 4.1 Pohybová rovnica kontinua, malé a konečné deformácie

Odvodenie pohybovej rovnice kontinua je možné nájsť v učebniciach mechaniky kontinua či pružnosti (Brdička 1959, Landau a Lifšic 1965, Bland 1972). Jej všeobecne používaný tvar je

$$\varrho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j} + f_i \quad , \quad (4.1)$$

kde  $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2}$ ,  $\tau_{ij,j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ ,  $\varrho$  je hustota prostredia,  $u_i$  je  $i$ -tá zložka posunutia,  $\tau_{ij}$  je tenzor napätia a  $f_i$  je hustota vonkajších síl (pre opakujúce sa indexy platí Einsteinova sumačná konvencia).

Pohybovú rovnicu kontinua je možné odvodiť za predpokladu dynamickej rovnováhy objemových a plošných síl so zotrvačnou silou. Táto rovnica ostáva v tvare (4.1) nezávisle od toho, či uvažujeme lineárne alebo nelineárne správanie elastického prostredia. Pri opise lineárneho elastického prostredia používame *malé (infinitesimálne) deformácie* a pri nelineárnom elastickom prostredí *konečné deformácie*. Pod malými deformáciami rozumieme také deformácie, keď tenzor deformácie je vyjadrený v tvare

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (4.2)$$

Takéto vyjadrenie môžeme nájsť uvažovaním o relatívnej zmene vzdialenosti dvoch nekonečne blízkych bodov pred a po deformácii (Brdička 1959, Landau a Lifšic 1965, Bland 1972). Pritom členy s mocninami väčšími ako prvými sa zanedbávajú. Takéto zanedbanie môžeme vykonať len vtedy, ak deformácie, resp. gradienty posunutí sú dostatočne malé. Malé deformácie takto vyjadrujú lineárne správanie kontinua. V nelineárnom prípade, keď deformáciu nazývame konečnou a členy s vyššími mocninami nie je možné zanedbať, je tenzor deformácie vyjadrený vzťahom

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad . \quad (4.3)$$

Veľkosť deformácie sa takto stáva akousi mierou "lineárnosti" elastického prostredia. Hranica medzi lineárnym a nelineárnym prípadom však nie je presne určená.

## 4.2 Hustota energie deformácie

V lineárnej teórii pružnosti je tenzor napätia vyjadrený lineárnym vzťahom pomocou zovšeobecneného Hookeovho zákona ako funkcia tenzora deformácie a teda aj posunutia (malé deformácie). Ak budeme preto hľadať vyjadrenie  $\tau_{ij}$  pomocou tenzora konečných deformácií, môžeme očakávať, že v hľadanej závislosti budú aj členy stupňa vyššieho ako prvého.

Pri odvodení hľadanej závislosti  $\tau_{ij}$  od  $u_i$  predpokladajme izotropné elastické kontinuum a použime 1. a 2. termodynamický zákon (Brdička 1959, Landau a Lifšic 1965, Bland 1972, Aki a Richards 1980). *Prvý termodynamický zákon* zapíšme v tvare

$$\delta Q = dU + \delta A \ ,$$

kde  $\delta Q$  je *teplo* dodané nejakej časti kontinua s ľubovoľným objemom  $V$ ,  $dU$  je zmena *vnútornej energie* tejto časti kontinua a  $\delta A$  je *práca* vykonaná touto časťou kontinua (dodané teplo a práca vykonaná časťou kontinua sú kladné). Pri deformovaní vykonajú objemové a plošné sily prácu  $\delta E$  a zároveň časť kontinua s objemom  $V$  získa kinetickú energiu  $\delta E_{kin}$ . Potom rozdiel  $\delta E - \delta E_{kin}$  je prácou, ktorú spotrebovali vonkajšie sily na samotné deformovanie časti kontinua. Práca  $\delta A$  je rovnako veľká ako práca spotrebovaná na deformovanie, ale má opačné znamienko, takže

$$\delta A = -(\delta E - \delta E_{kin}) \ .$$

Ak si uvedomíme, že seizmické vlny sú z termodynamického hľadiska *adiabatickým dejom* ( $dS = 0$ , kde  $S$  je *entropia*), tak z *druhého termodynamického zákona*, ktorý zapíšme v tvare

$$\delta Q = TdS \ ,$$

vyplýva, že  $\delta Q = 0$ . Pre vnútornú energiu potom môžeme po úpravách písať

$$dU = \delta E - \delta E_{kin} \ . \tag{4.4}$$

Zo vzťahu (4.4) dostaneme pre rýchlosť prírastku vnútornej energie

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{dE_{kin}}{dt} . \quad (4.5)$$

Prírastok kinetickej energie časti kontinua s objemom  $V$  je

$$\delta E_{kin} = \delta \left( \frac{1}{2} \int_V \varrho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \right) . \quad (4.6)$$

Veličiny  $V$  a  $\varrho$  chápeme ako hodnoty pred deformáciou, preto pre rýchlosť prírastku  $\delta E_{kin}$  môžeme písať

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \int_V \varrho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV . \quad (4.7)$$

Pomocou jednoduchých úvah sa dá ukázať, že

$$\delta E = \delta \left( \int_V f_i u_i dV + \int_S \tau_{ij} u_i n_j dS \right) , \quad (4.8)$$

kde prvý člen na pravej strane predstavuje prácu objemových síl a druhý člen predstavuje prácu plošných síl, ktoré pôsobia na časť kontinua s objemom  $V$  ohraňovaného plochou  $S$ . Vektor  $\vec{n}$  je normálovým vektorom na plochu  $S$ . Použitím Gauss-Ostrogradského vety môžeme posledný vzťah prepísať na tvar

$$\begin{aligned} \delta E &= \delta \left[ \int_V (f_i u_i + (\tau_{ij} u_i)_{,j}) dV \right] \\ &= \delta \left[ \int_V (f_i u_i + \tau_{ij,j} u_i + \tau_{ij} u_{i,j}) dV \right] . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Rýchlosť prírastku tejto práce je potom

$$\frac{dE}{dt} = \int_V (f_i \dot{u}_i + \tau_{ij,j} \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j}) dV . \quad (4.10)$$

Dosadením vzťahov (4.7) a (4.10) do (4.5) dostaneme

$$\frac{dU}{dt} = \int_V (f_i \dot{u}_i + \tau_{ij,j} \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} - \varrho \dot{u}_i \ddot{u}_i) dV . \quad (4.11)$$

Ak do tohto vzťahu ešte dosadíme  $\varrho \ddot{u}_i$  zo vzťahu (4.1), potom po úpravách bude pre rýchlosť prírastku vnútornej energie platiť

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} dV . \quad (4.12)$$

Teraz vyjadríme rýchlosť prírastku vnútornej energie pomocou veličiny  $W$ , ktorú voláme *hustota energie deformácie*, nasledovným spôsobom

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V W dV \right) = \int_V \frac{\partial W}{\partial t} dV . \quad (4.13)$$

Po dosadení (4.13) do vzťahu (4.12) dostaneme

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial t} dV = \int_V \tau_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} dV . \quad (4.14)$$

Keďže objem  $V$  volíme ľubovoľne, z predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$dW = \tau_{ij} d(u_{i,j}) . \quad (4.15)$$

Tensor napätia máme potom v tvare

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial (u_{i,j})} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{mn}} \frac{d\epsilon_{mn}}{d(u_{i,j})} , \quad (4.16)$$

pričom predpokladáme, že hustota energie deformácie je funkciou len tenzora deformácie  $\epsilon_{ij}$ .

Pre deriváciu tenzora deformácie podľa  $u_{i,j}$  zo vzťahu (4.3) máme

$$\frac{d\epsilon_{mn}}{d(u_{i,j})} = \frac{1}{2} (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} + \delta_{jm}u_{i,n} + \delta_{jn}u_{i,m}) . \quad (4.17)$$

S využitím (4.17) po jednoduchých úpravách zo vzťahu (4.16) dostaneme

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} + u_{i,k} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{kj}} . \quad (4.18)$$

Ako vidíme zo vzťahu (4.18), tensor napätia nie je symetrický. Je to dôsledok toho, že pre vyjadrenie  $\tau_{ij}$  sme použili tenzor konečných deformácií. Ak by sme v (4.17) namiesto tenzora konečných deformácií použili tenzor malých deformácií (4.2), dostali by sme

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} , \quad (4.19)$$

čo zodpovedá lineárnemu prípadu.



### 4.3 Tenzor napätia

Ak rozvinieme hustotu energie deformácie do Taylorovho radu podľa  $\epsilon_{ij}$  po členy 3. rádu, dostaneme

$$W(\epsilon_{ij}) = W(0) + \frac{\partial W(0)}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 W(0)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 W(0)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{mn}} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} . \quad (4.20)$$

Keďže sa vo vzťahu (4.18) vyskytuje len prvá derivácia  $W$ , môžeme položiť  $W(0) = 0$ . Ďalej predpokladajme, že pri nulovej deformácii je aj napätie nulové, z čoho vyplýva, že  $\frac{\partial W(0)}{\partial \epsilon_{ij}} = 0$ . Po označení zvyšných derivácií koeficientami  $C_{ijkl}$  a  $C_{ijklmn}$  môžeme (4.20) prepísať na tvar

$$W(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{6} C_{ijklmn} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} \quad (4.21)$$

alebo

$$W = \frac{1}{2} W_1 + \frac{1}{6} W_2 , \quad (4.22)$$

kde

$$W_1 = C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} , \quad (4.23)$$

$$W_2 = C_{ijklmn} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} . \quad (4.24)$$

Koeficienty  $C_{ijkl}$  a  $C_{ijklmn}$  sú tenzorové veličiny, ktoré charakterizujú vlastnosti prostredia. Z nezávislosti poradia násobenia tenzorov deformácie vo vzťahoch (4.23) a (4.24) a tiež z toho, že  $\epsilon_{ij}$  je symetrický tenzor, vyplývajú pre koeficienty  $C_{ijkl}$  a  $C_{ijklmn}$  nasledovné vlastnosti

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{klij} = C_{jikl} , \\ C_{ijklmn} &= C_{klijmn} = C_{ijmnlk} = C_{jklmni} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pre tieto tenzory môžeme však nájsť aj ďalšie vlastnosti. Keďže hľadáme závislosť  $\tau_{ij}$  od  $u_i$  pre izotropné elastické prostredie, bude hodnota hustoty energie deformácie nezávislá od orientácie zvolenej súradnicovej sústavy. To isté potom platí aj pre koeficienty  $C_{ijkl}$  a  $C_{ijklmn}$ . Tenzory, ktoré sú nezávislé

od otočenia súradníc, voláme *izotropné tenzory*. Všeobecný tvar izotropného tenzora 4. rádu  $\eta_{ijkl}$  môžeme vyvoriť kombináciou  $\delta_{ij}$  - Kroneckerových symbolov, čo sú izotropné tenzory 2. rádu (napr. Brdička 1959). Potom

$$\eta_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} . \quad (4.26)$$

Analogickým spôsobom môžeme vytvoriť aj izotropný tenzor 6. rádu,

$$\begin{aligned} \xi_{ijklmn} = & A_1\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + A_2\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + A_3\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \\ & A_4\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + A_5\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + A_6\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \\ & A_7\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + A_8\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + A_9\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \\ & A_{10}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + A_{11}\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + A_{12}\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \\ & A_{13}\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} + A_{14}\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + A_{15}\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} , \end{aligned} \quad (4.27)$$

pričom  $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_{15}$  sú nejaké konštanty.

Koeficienty  $C_{ijkl}$  a  $C_{ijklmn}$  môžeme vyjadriť vo všeobecnom tvare pomocou vzťahov (4.26) a (4.27). Ak využijeme vlastnosti koeficientov (4.25), po premenovaní kombinácií konštant  $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_{15}$  dostaneme

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (4.28)$$

a

$$\begin{aligned} C_{ijklmn} = & (2l - 2m + n)\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \\ & \left(m - \frac{n}{2}\right) [\delta_{ij}(\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm}) + \delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \\ & \delta_{mn}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] + \\ & \frac{n}{4} [\delta_{kn}(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + \delta_{km}(\delta_{il}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jl}) + \\ & \delta_{ln}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}) + \delta_{lm}(\delta_{ik}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jk})] , \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde  $\lambda$  a  $\mu$  sú *Laméove elastické koeficienty* a  $l, m, n$  sú *Murnaghanove elastické koeficienty*. Kombinácie koeficientov  $l, m, n$  a ich pomenovanie sa v literatúre uvádza rôzne (Green 1973, str. 77).

Po dosadení vzťahov (4.28) a (4.29) do (4.21) a po úpravách získame vyjadrenie hustoty energie deformácie pre izotropné elastické kontinuum v

tvare

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \\
&\frac{1}{6} (2l - 2m + n) \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} \epsilon_{kk} + \left(m - \frac{n}{2}\right) \epsilon_{ii} \epsilon_{jk} \epsilon_{jk} + \\
&\frac{n}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{jk} \epsilon_{ik} .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Nakoniec po dosadení vzťahov (4.3) a (4.30) do (4.18) a pri zanedbaní členov priestorovej derivácie posunutia vyššieho ako 2. stupňa bude mať tenzor napätia nasledovné vyjadrenie:

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \\
&\delta_{ij} \left[ \left(l - m + \frac{n}{2}\right) u_{k,k} u_{l,l} + \frac{1}{2} \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right) u_{k,l} u_{k,l} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \left(m - \frac{n}{2}\right) u_{k,l} u_{l,k} \right] + \\
&\left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right) u_{k,k} u_{i,j} + \left(m - \frac{n}{2}\right) u_{k,k} u_{j,i} + \\
&\left(\mu + \frac{n}{4}\right) (u_{k,i} u_{k,j} + u_{i,k} u_{j,k} + u_{i,k} u_{k,j}) + \frac{n}{4} u_{k,i} u_{j,k} .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Takto vyjadrený tenzor napätia môžeme dosadiť do pohybovej rovnice. Tým získame parciálnu diferenciálnu rovnicu s množstvom členov, z ktorých niektoré sú aj deriváciami elastických koeficientov (neplatí pre homogénne prostredie). Vhodnejšie je však písať pohybovú rovnicu v tvare (4.1) spolu s tenzorom napätia (4.31) ako sústavu diferenciálnych rovníc. V takomto tvare (tzv. formulácia v posunutí a napätí) je pohybová rovnica vhodnejšia na numerické riešenie, napr. pomocou metódy konečných diferencií. Je však zatiaľ otázkou, ako sa diferenčná schéma zostavená pre takúto diferenciálnu rovnicu správa, t.j. či je konzistentná s pôvodnou úlohou a či je riešenie stabilné a konvergentné.

Vo vzťahu (4.31) si môžeme všimnúť, že ak v ňom zanebáme všetky členy, ktoré sú vyššieho ako prvého stupňa, tak ostane len

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) . \tag{4.32}$$

To je známy Hookeov zákon pre izotropné prostredie.

Poznamenajme, že hustota energie deformácie  $W$  sa vyjadruje aj pomocou *invariantov tenzora deformácie*  $I_1, I_2, I_3$  v tvare

$$W = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{1}{3}(l + 2m)I_1^3 - 2mI_1I_2 + nI_3 . \quad (4.33)$$

Invarianty sú definované vzťahmi

$$I_1 = \epsilon_{ii} ,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} ,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} .$$

Teraz preskúmame niektoré z vlastností šírenia sa vln v nelineárnom elastickom izotropnom prostredí.

#### 4.4 Šírenie rovinných vln v homogénnom izotropnom kontinuu

Uvažujme 1D prípad a predpokladajme šírenie rovinnnej vlny v homogénnom izotropnom kontinuu, napr. v smere osi  $x_1$ . Potom vektor posunutia je funkciou len tejto jednej priestorovej premennej a času, t.j.  $\vec{u} = [u_1(x_1, t), u_2(x_1, t), u_3(x_1, t)]$  a pre  $\tau_{ij}$  zo vzťahu (4.31) dostaneme

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda u_{1,1} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \\ &\delta_{ij} \left[ \frac{1}{2}(\lambda + 2l) u_{1,1}^2 + \frac{1}{2} \left( \lambda + m - \frac{n}{2} \right) (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \right] + \\ &\left( \lambda + m - \frac{n}{2} \right) u_{1,1} u_{i,j} + \left( m - \frac{n}{2} \right) u_{1,1} u_{j,i} + \\ &\left( \mu + \frac{n}{4} \right) (u_{k,i} u_{k,j} + u_{i,1} u_{j,1} + u_{i,1} u_{1,j}) + \frac{n}{4} u_{1,i} u_{j,1} . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ak pohybovú rovnicu pre homogénne prostredie vyjadríme len pomocou vektora posunutia (tzv. formulácia v posunutí), tak pri neuvažovaní  $f_i$  dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{u}_1 &= (\lambda + 2\mu)u_{1,11} + \\ & [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)]u_{1,1}u_{1,11} + \\ & (\lambda + 2\mu + m)(u_{2,1}u_{2,11} + u_{3,1}u_{3,11}) \quad , \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{u}_2 &= \mu u_{2,11} + \\ & (\lambda + 2\mu + m)(u_{1,1}u_{2,11} + u_{2,1}u_{1,11}) \quad , \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{u}_3 &= \mu u_{3,11} + \\ & (\lambda + 2\mu + m)(u_{1,1}u_{3,11} + u_{3,1}u_{1,11}) \quad . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Túto sústavu môžeme riešiť napr. pomocou Greenovej funkcie (McCall 1994). Môžeme sa však pokúsiť nájsť približné riešenia vzťahov (4.35), (4.36) a (4.37) sledujúc postup podľa Greena (1973). Úlohu si rozdelíme na šírenie pozdĺžnych (P) a priečných (S) vln. Pre pozdĺžnu rovinnú vlnu šíriacu sa v smere  $x_1$  predpokladajme  $\vec{u} = (u_1, 0, 0)$ . Potom pohybová rovnica má tvar

$$\varrho \ddot{u}_1 = (\lambda + 2\mu)u_{1,11} + [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)]u_{1,1}u_{1,11} \quad . \quad (4.38)$$

Riešenie predpokladajme v tvare

$$u_1 = u^0 + u^1 \quad , \quad (4.39)$$

kde  $u^0$  je nulté priblíženie riešenia,  $u^1$  je prvé priblíženie a  $u^1 \ll u^0$ . Po dosadení predpokladaného riešenia (4.39) do (4.38) a úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho (\ddot{u}^0 + \ddot{u}^1) &= (\lambda + 2\mu) (u^0_{,11} + u^1_{,11}) + \\ & [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)] \\ & (u^0_{,1}u^0_{,11} + u^0_{,1}u^1_{,11} + u^1_{,1}u^0_{,11} + u^1_{,1}u^1_{,11}) \quad . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Keďže je  $u^1 \ll u^0$ , tri posledné členy na pravej strane vzťahu (4.40) môžeme zanedbať. Potom po porovnaní členov rovnakého rádu dostaneme dve diferenciálne rovnice v tvare

$$\varrho \ddot{u}^0 = (\lambda + 2\mu)u^0_{,11} \quad , \quad (4.41)$$

$$\varrho \ddot{u}^1 = (\lambda + 2\mu)u^1_{,11} + [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)]u^0_{,1}u^0_{,11} \quad . \quad (4.42)$$

Súčet riešení, ktoré vyhovujú týmto rovniciam, je

$$u_1(x_1, t) = A \sin(kx_1 - \omega t) - \frac{(kA)^2 \Theta}{8 \varrho c_0^2} x_1 \cos 2(kx_1 - \omega t) , \quad (4.43)$$

kde  $A$  je amplitúda nultého priblíženia,  $k$  a  $\omega$  sú vlnové číslo a uhlová frekvencia  $P$  vlny,  $c_0$  je fázová rýchlosť určená vzťahom  $c_0 = \sqrt{\Gamma/\varrho}$  a

$$\Gamma = \lambda + 2\mu , \quad (4.44)$$

$$\Theta = 3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m) . \quad (4.45)$$

Ak predpokladáme, že prostredím sa šíri v smere osi  $x_1$  len priečna rovinná vlna, teda  $u_2 = u_2(x_1, t)$ ,  $u_1 = u_3 = 0$  (alebo  $u_3 = u_3(x_1, t)$ ,  $u_1 = u_2 = 0$ ), z rovníc (4.35), (4.36) a (4.37) dostaneme

$$0 = (\lambda + 2\mu + m)u_{2,1}u_{2,11} , \quad (4.46)$$

$$\varrho \ddot{u}_2 = \mu u_{2,11} . \quad (4.47)$$

Táto sústava však nepopisuje šírenie vln. Predpokladajme preto, že spolu s priečnou vlnou sa šíri aj pozdĺžna, pričom amplitúda tejto vlny je nižšieho rádu ako priečnej vlny, t.j.

$$u_2 = Af(x_1, t) , \quad u_1 = Bg(x_1, t) , \quad u_3 = 0 ,$$

kde  $B$  je rádu  $A^2$ . Potom pri zanedbaní členov rádu  $A^3$  a vyšších rádov bude mať pohybová rovnica tvar

$$\varrho \ddot{u}_1 = (\lambda + 2\mu)u_{1,11} + (\lambda + 2\mu + m)u_{2,1}u_{2,11} , \quad (4.48)$$

$$\varrho \ddot{u}_2 = \mu u_{2,11} . \quad (4.49)$$

Ak zvolíme okrajové podmienky v tvare

$$u_1(0, t) = 0 , \quad u_3(0, t) = 0 , \quad u_2(0, t) = A(1 - \cos \omega t) ,$$

potom riešenie má tvar

$$u_1 = B \sin \left[ \omega x_1 \left( \frac{1}{c_t} - \frac{1}{c_l} \right) \right] \cos \left[ 2\omega t - \omega x_1 \left( \frac{1}{c_t} + \frac{1}{c_l} \right) \right] , \quad (4.50)$$

$$u_2 = A \left[ 1 - \cos \left( \omega t - \frac{\omega x_1}{c_t} \right) \right] , \quad (4.51)$$

kde

$$\begin{aligned}
c_t &= \sqrt{\mu/\varrho} , \\
c_l &= \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\varrho} , \\
B &= \Lambda\omega A^2 / \{4\varrho c_t^3 [(c_l/c_t)^2 - 1]\} , \\
\Lambda &= \lambda + 2\mu + m .
\end{aligned}$$

Z uvedeného vyplýva, že v izotropnom elastickom homogénnom prostredí s nelineárnym správaním sa môže nazávisle šíriť pozdĺžna vlna. Pričná vlna sa samostatne šíriť nemôže. Šírenie priečnej vlny generuje aj pozdĺžne vlny .

## 4.5 Pohybová rovnica pre SH problém

Pod *SH problémom* rozumieme taký prípad, kedy  $\vec{u} = [0, u_2(x_1, x_3, t), 0]$ , pričom súradnicová sústava je orientovaná tak, že os  $x_3$  smeruje nadol a osi  $x_1, x_2$  ležia v horizontálnej rovine. Pre prostredie predpokladáme, že jeho vlastnosti (hustota a elastické koeficienty) sa menia len v smere  $x_1$  a  $x_3$ . Z uvedených predpokladov dostaneme pre pohybovú rovnicu nasledovné vyjadrenie (vonkajšie sily opäť neuvažujeme)

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu + m)u_{2,1}^2 \right]_{,1} + \left[ \frac{1}{2} \left( \lambda + m - \frac{n}{2} \right) u_{2,3}^2 \right]_{,1} + \\
&\quad \left[ \left( \mu + \frac{n}{4} \right) u_{2,1}u_{2,3} \right]_{,3} , \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$\varrho \ddot{u}_2 = [\mu u_{2,1}]_{,1} + [\mu u_{2,3}]_{,3} , \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ \frac{1}{2} \left( \lambda + m - \frac{n}{2} \right) u_{2,1}^2 \right]_{,3} + \left[ \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu + m)u_{2,3}^2 \right]_{,3} + \\
&\quad \left[ \left( \mu + \frac{n}{4} \right) u_{2,1}u_{2,3} \right]_{,1} . \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Z toho vidíme, že rovnako ako v 1D prípade nazávislé šírenie SH vln nie je možné.

## 4.6 Pohybová rovnica pre P-SV problém

*P-SV problémom* označujeme prípad, keď pre vektor posunutia platí  $\vec{u} = [u_1(x_1, x_3, t), 0, u_3(x_1, x_3, t)]$  a vlastnosti prostredia sú závislé od  $x_1, x_3$ . Voľba súradnic je taká istá ako v prípade SH problému. Pohybová rovnica potom má tvar

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{u}_1 &= [(\lambda + 2\mu)u_{1,1}]_{,1} + [\lambda u_{3,3}]_{,1} + [\mu u_{1,3}]_{,3} + [\mu u_{3,1}]_{,3} + \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)] u_{1,1}^2 \right]_{,1} + \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2l) u_{3,3}^2 \right]_{,1} + \\ &\quad [(\lambda + 2l)u_{1,1}u_{3,3}]_{,1} + \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu + m) (u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2) \right]_{,1} + \\ &\quad [(\mu + m)u_{1,3}u_{3,1}]_{,1} + [(\mu + m) (u_{1,1}u_{3,1} + u_{3,3}u_{3,1})]_{,3} + \\ &\quad [(\lambda + 2\mu + m) (u_{1,1}u_{1,3} + u_{3,3}u_{1,3})]_{,3} \quad , \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{u}_3 &= [\lambda u_{1,1}]_{,3} + [(\lambda + 2\mu)u_{3,3}]_{,3} + [\mu u_{1,3}]_{,1} + [\mu u_{3,1}]_{,1} + \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2l) u_{1,1}^2 \right]_{,3} + \left[ \frac{1}{2} [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)] u_{3,3}^2 \right]_{,3} + \\ &\quad [(\lambda + 2l)u_{1,1}u_{3,3}]_{,3} + \left[ \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu + m) (u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2) \right]_{,3} + \\ &\quad [(\mu + m) (u_{1,1}u_{1,3} + u_{3,3}u_{1,3})]_{,1} + [(\mu + m)u_{1,3}u_{3,1}]_{,3} + \\ &\quad [(\lambda + 2\mu + m) (u_{1,1}u_{3,1} + u_{3,3}u_{3,1})]_{,1} \quad . \end{aligned} \quad (4.56)$$

Rovnica pre zložku  $u_2$  je identicky rovná nule. Z rovníc (4.55) a (4.56) usudzujeme, že šírenie P-SV vln je možné.

Uvedme pre úplnosť aj formuláciu v posunutí a napätí:

$$\varrho \ddot{u}_1 = \tau_{11,1} + \tau_{13,3} \quad , \quad (4.57)$$

$$\varrho \ddot{u}_3 = \tau_{31,3} + \tau_{33,3} \quad , \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{3,3} + \\ &\quad \frac{1}{2} [3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)] u_{1,1}^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} (\lambda + 2l) u_{3,3}^2 + (\lambda + 2l)u_{1,1}u_{3,3} + \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu + m) (u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2) + (\mu + m)u_{1,3}u_{3,1} , \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \tau_{33} = & \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{3,3} + \\ & \frac{1}{2}(\lambda + 2l)u_{1,1}^2 + \\ & \frac{1}{2}[3(\lambda + 2\mu) + 2(l + 2m)] u_{3,3}^2 + (\lambda + 2l)u_{1,1}u_{3,3} + \\ & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu + m) (u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2) + (\mu + m)u_{1,3}u_{3,1} , \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \tau_{13} = & \mu (u_{1,3} + u_{3,1}) + \\ & (\lambda + 2\mu + m) (u_{1,1} + u_{3,3}) u_{1,3} + \\ & (\mu + m) (u_{1,1} + u_{3,3}) u_{3,1} , \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \tau_{31} = & \mu (u_{1,3} + u_{3,1}) + \\ & (\mu + m) (u_{1,1} + u_{3,3}) u_{1,3} + \\ & (\lambda + 2\mu + m) (u_{1,1} + u_{3,3}) u_{3,1} . \end{aligned} \quad (4.62)$$

## 5 Prostredie s hysteréznym vzťahom medzi napätím a deformáciou

Hlavným podkladom pre spracovanie tejto kapitoly bola práca Bonilla (2000).

Dôkazy o hysteréznom správaní prostredia pochádzajú z experimentálnych meraní (Hardin a Drnevich 1972a, Pyke 1979, Presti 1998). Ako sme videli v závere 3. kapitoly, hysterézne správanie je vlastnosťou relatívne jednoduchého elastoplastického telesa. Existujú však empirické pravidlá, tzv. Masingove pravidlá, ktoré opisujú dráhu napätie - deformácia v ľubovoľnom čase (Masing 1926). Pomocou týchto pravidiel je možné konštruovať hysterézne slučky.

### 5.1 Prostredie bez prítomnosti vody

Skôr ako zavedieme a vysvetlíme Masingove pravidlá, popíšme najprv *krivku prvotnej záťaže*. Pod krivkou prvotnej záťaže ("backbone curve") rozumieme závislosť medzi napätím a deformáciou pre prostredie, ktoré pôvodne bolo v stave pokoja a teraz je naň aplikované napätie. V lineárnom prostredí je táto závislosť popísaná Hookeovým zákonom

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} , \quad (5.1)$$

kde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (5.2)$$

V dvojrozmernom prípade bude šmykové napätie vyjadrené vzťahom

$$\sigma_{xz} = 2\mu \epsilon_{xz} . \quad (5.3)$$

Po označení

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \tau , \\ 2\epsilon_{xz} &= \gamma , \\ \mu &= G_0 , \end{aligned}$$

môžeme vzťah (5.3) prepísať na tvar

$$\tau(\gamma) = G_0 \gamma . \quad (5.4)$$

V lineárnom dokonale elastickom prostredí je modul pružnosti v šmyku  $G_0$  len funkciou priestorových súradníc, teda  $G_0 = G_0(x, z)$ . Pre prostredia s hysteréznym správaním je však modul pružnosti v šmyku aj funkciou deformácie, teda  $G = G(x, z, \gamma)$ . Závislosť napätia od deformácie je potom

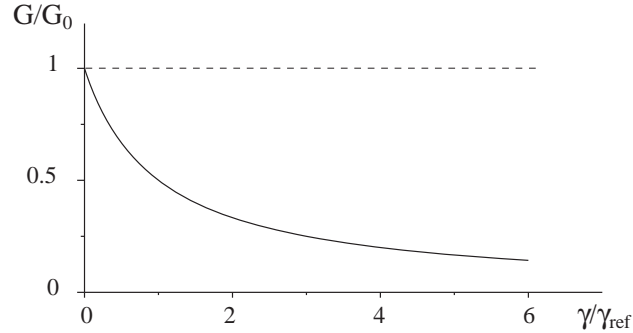
$$\tau(\gamma) = G(\gamma) \gamma . \quad (5.5)$$

Pri dostatočne malých deformáciach (rádovo menších ako  $10^{-6}$ ) prestáva  $G$  závisieť od deformácie a rovná sa  $G_0$ .

Na základe experimentálnych meraní (Hardin a Drnevich 1972a, 1972b; Pyke 1979) bol pre  $G(\gamma)$  nájdený vzťah

$$\frac{G(\gamma)}{G_0} = \frac{1}{1 + |\gamma/\gamma_{ref}|} , \quad (5.6)$$

kde  $\gamma_{ref} = \frac{\tau_0}{G_0}$  a  $\tau_0$  je maximálne šmykové napätie, ktoré možno na prostredie aplikovať bez toho, aby došlo k jeho porušeniu. Grafické znázornenie vzťahu



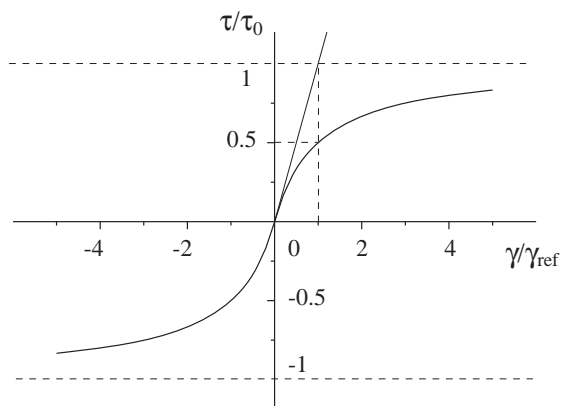
Obr. 5.1. Závislosť modulu pružnosti v šmyku od deformácie v bezrozmerných veličinách  $\frac{G}{G_0}$  a  $\frac{\gamma}{\gamma_{ref}}$ .

(5.6) je na Obr. 5.1.

Po dosadení (5.6) do vzťahu (5.5) a po úprave dostaneme

$$\tau = \tau_0 \frac{\gamma/\gamma_{ref}}{1 + |\gamma/\gamma_{ref}|} , \quad (5.7)$$

čo je matematické vyjadrenie krivky prvotnej záťaže v hyperbolickom tvare. Grafické znázornenie (5.7) v bezrozmerných veličinách  $\frac{\tau}{\tau_0}$  a  $\frac{\gamma}{\gamma_{ref}}$  je na Obr. 5.2.



Obr. 5.2. Znázornenie krivky prvotnej záťaže v bezrozmerných veličinách  $\frac{\tau}{\tau_0}$  a  $\frac{\gamma}{\gamma_{ref}}$ .

Na vyjadrenie závislosti medzi napätím a deformáciou pri odľahčovaní alebo opätovnom zaťažovaní však so vzťahom (5.7) nevystačíme. Všeobecné vyjadrenie tejto závislosti môžeme použiť v tvare (Bonilla 2000)

$$\tau = Hys(F_{bb}) , \quad (5.8)$$

$$F_{bb}(\gamma) = \tau_0 \frac{\gamma/\gamma_{ref}}{1 + |\gamma/\gamma_{ref}|} , \quad (5.9)$$

kde  $Hys(\cdot)$  je hysterézný operátor a  $F_{bb}(\gamma)$  je krivka prvotnej záťaže. Hysterézný operátor reprezentuje aplikáciu Masingových pravidiel.

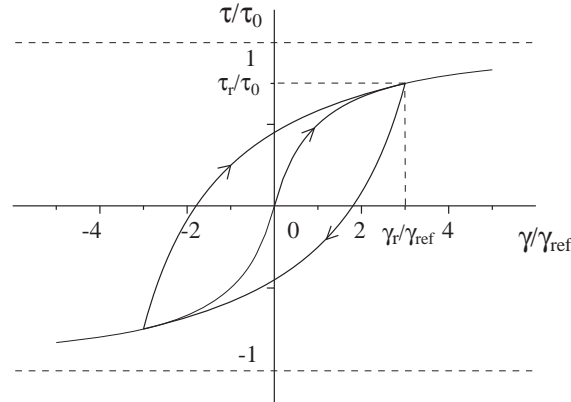
Ako prvé boli zavedené tzv. *pôvodné Masingove pravidlá*. 1. Masingove pravidlo: Dráha prvého zaťaženia je zhodná s krivkou prvotnej záťaže. 2. Masingove pravidlo: Tvar krivky znázorňujúcej vzťah napätie - deformácia pri odľahčení alebo opätovnej záťaži je rovnaký ako tvar krivky prvotnej záťaže, len poloha počiatku je posunutá do bodu, kde sa mení smer aplikovaného napätia a krivka je vo vertikálnom a horizontálnom smere dvakrát

zväčšená. Toto môžeme matematicky reprezentovať v tvare

$$\frac{\tau - \tau_r}{2} = F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_r}{2} \right) , \quad (5.10)$$

kde  $\tau_r$  a  $\gamma_r$  sú napätie a deformácia, pri ktorých dochádza k zmene smeru zaťažovania (vtedy rýchlosť deformácie mení znamienko a preto  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = 0$ ).

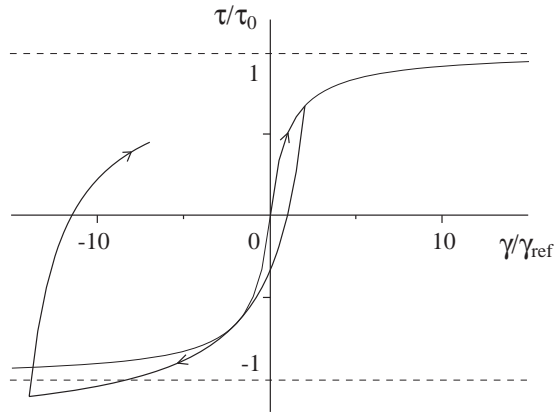
Po použití 1. a 2. Masingovho pravidla pri pravidelnom zaťažovaní (časovým priebehom deformácie môže byť napr. sínusoida) dostaneme hysteréznú slučku ako na Obr. 5.3. Keď sa však deformácia bude meniť



Obr. 5.3. Hysterézná slučka pri pravidelnom zaťažovaní. Tenká čiara: krivka prvotnej záťaže.

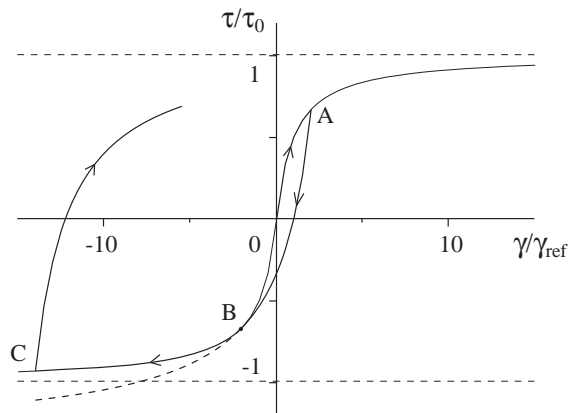
nepravidelne, môže nastať prípad, ktorý je znázornený na Obr. 5.4. Deformáciu sme zväčšovali až po takú hodnotu, kedy veľkosť napätia  $\tau$  určeného podľa 2. Masingovho pravidla dosiahla hodnotu väčšiu ako  $\tau_0$ . Je teda zrejmé, že použitie pôvodných Masingových pravidiel pri nepravidelnom zaťažovaní môže viesť k nesprávnemu určeniu napätia. Tento problém je možné riešiť dvoma spôsobmi. Buď sa k pôvodným Masingovým pravidlám pridajú ďalšie pravidlá, alebo sa tie pôvodné preformulujú.

Pridaním ďalších dvoch pravidiel, ktoré označujeme ako 3. a 4. Masingove pravidlo, dostaneme *rozšírené Masingove pravidlá* (Pyke 1979). Sú to tieto: 3. Masingove pravidlo: Ak je veľkosť šmykového napätia pri predchádzajúcej záťaži (odľahčení) prekročená pri následnom odľahčení (záťaži),



Obr. 5.4. Príklad zlyhania 2. Masingovho pravidla pri nepravidelnom zaťažovaní.  
Tenká čiara: krivka prvotnej záťaže.

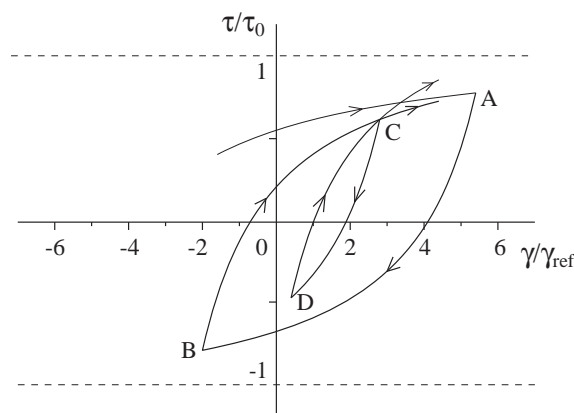
potom dráha ďalšieho odľahčenia (zaťaženia) sleduje krivku prvotnej záťaže.  
4. Masingove pravidlo: Ak aktuálna krivka zaťaženia alebo odľahčenia pretne krivku z predchádzajúceho zaťaženia alebo odľahčenia, tak potom sleduje tú-



Obr. 5.5. Použitie 3. Masingovho pravidla pri nepravidelnom zaťažovaní. Tenká čiara: krivka prvotnej záťaže, prerušovaná hrubá čiara: krivka určená 2. Masingovým pravidlom.

to predchádzajúcu krivku. Na Obr. 5.5 je znázornený výsledok po použití 3. Masingovho pravidla. Pri aplikácii napätia sa najprv z bodu 0 dostaneme

do bodu A po krivke prvotnej záťaže. Teraz zmeníme smer aplikovaného napätia, začneme ho zmenšovať, až sa dostaneme do bodu B, v ktorom má napätie rovnakú veľkosť ako v bode A. Na nájdenie krivky medzi bodmi A a B sme aplikovali 2. Masingove pravidlo. Prerušovaná čiara na Obr. 5.5 vychádzajúca z bodu B je pokračovaním krivky, ktorú by sme získali, ak by sme napätie aj naďalej určovali pomocou 2. Masingovho pravidla. Aplikovaním 3. Masingovho pravidla však budeme pokračovať z bodu B do bodu C po krivke prvotnej záťaže. V bode C zmeníme smer aplikovaného napätia. Ďalšiu závislosť medzi napätím a deformáciou budeme potom určovať opäť pomocou 2. Masingovho pravidla, až kým nenastane niektorý z prípadov, ktorý vyžaduje použitie 3. alebo 4. Masingovho pravidla. Výsledok po použití 4. Masingovho pravidla môžeme vidieť na Obr. 5.6. Po niekoľkých



Obr. 5.6. Použitie 4. Masingovho pravidla pri nepravidlenom zaťažovaní.

zaťaženiach a odľahčeniach sme sa dostali do bodu A, z neho do bodu B a potom do bodu C. Odtiaľ pri zmenšovaní deformácie pokračujeme do bodu D a z neho pri ďalšom zaťažovaní sa dostaneme späť do bodu C. Ak by sme nepoužili 4. Masingove pravidlo, tak pri ďalšom zväčšovaní deformácie by napätie mohlo prekročiť hodnotu  $\tau_0$ , čo je na Obr. 5.6 naznačené tenkou krivkou vychádzajúcou z bodu C. Po použití 4. Masingovho pravidla však závislosť napätie - deformácia bude sledovať krivku, ktorá je pokračovaním krivky BC (hrubá čiara vychádzajúca z bodu C).

Použitie rozšírených Masingových pravidiel pri numerickom modelovaní nie je príliš výhodné, pretože je potrebné si pamätať krivku prvotnej záťaže a predchádzajúcu hysteréznú slučku. Pozrime sa preto teraz na možnosť preformulovania pôvodných Masingových pravidiel. Zavedením *hysterézneho škálovacieho faktora*  $\kappa_H$  (Bonilla 2000) sa dosiahne zovšeobecnenie 2. Masingovho pravidla, ktoré matematicky reprezentujeme v tvare

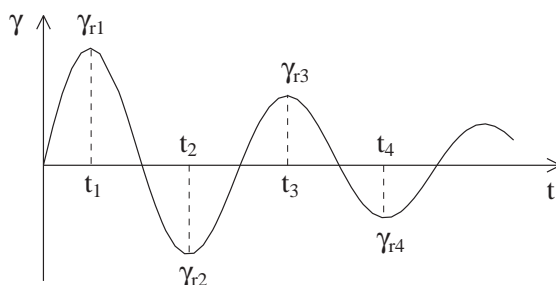
$$\frac{\tau - \tau_r}{\kappa_H} = F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_r}{\kappa_H} \right) . \quad (5.11)$$

V prípade  $\kappa_H = 2$  dostaneme pôvodné Masingove pravidlá a vzťah (5.11) je zhodný so vzťahom (5.10). Pyke (1979) navrhol škálovací faktor v tvare

$$\kappa_H = \left| \pm 1 - \frac{\tau_r}{\tau_0} \right| , \quad (5.12)$$

kde kladné znamienko je pre zaťaženie a záporné pre odľahčenie. Keďže je  $|\tau_r| < \tau_0$ , pre Pykeov škálovací faktor platí  $\kappa_H < 2$ . Takýto škálovací faktor odstraňuje potrebu pamätania si krivky prvotnej záťaže a predchádzajúcej hysteréznej slučky, ale vyžaduje pamätanie si napätia  $\tau_r$ , pri ktorom naposledy došlo k zmene smeru zaťažovania. To pravdepodobne aj lepšie vystihuje správanie sa reálneho prostredia.

Predpokladajme teraz, že časový priebeh deformácie je taký ako na Obr. 5.7. Budeme sa snažiť nájsť vyjadrenie pre napätie pomocou 2.



Obr. 5.7. Časový priebeh deformácie pri nepravidelnom zaťažovaní.

zovšeobecneného Masingovho pravidla. Škálovací faktor budeme označovať



$\kappa_{Hj}$ , kde  $j = 1, 2, \dots$ . Index  $j$  označuje poradie použitia 2. zovšeobecneného Masingovho pravidla. To znamená, že  $\kappa_{H1}$  je pre prvé použitie zovšeobecneného Masingovho pravidla,  $\kappa_{H2}$  je pre druhé použitie a tak ďalej. V časovom intervale  $\langle 0, t_1 \rangle$  je napätie určené hyperbolickým vzťahom

$$\tau = \tau_0 \frac{\gamma/\gamma_{ref}}{1 + |\gamma/\gamma_{ref}|} = F_{bb}(\gamma) . \quad (5.13)$$

Keď bude  $t = t_1$ , deformácia dosiahne hodnotu  $\gamma_{r1}$  a tomu zodpovedajúce napätie bude

$$\tau_{r1} = F_{bb}(\gamma_{r1}) . \quad (5.14)$$

V tomto čase ( $t = t_1$ ) začneme meniť smer zaťažovania. Deformácia sa bude znižovať a napätie v časovom intervale  $(t_1, t_2)$  môžeme podľa vzťahu (5.11) po úpravách písať v tvare

$$\tau = \kappa_{H1} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_{r1}}{\kappa_{H1}} \right) + \tau_{r1} . \quad (5.15)$$

V čase  $t = t_2$  dosiahne deformácia hodnotu  $\gamma_{r2}$  a napätie

$$\tau_{r2} = \kappa_{H1} F_{bb} \left( \frac{\gamma_{r2} - \gamma_{r1}}{\kappa_{H1}} \right) + \tau_{r1} . \quad (5.16)$$

Po dosiahnutí deformácie  $\gamma_{r2}$  a napätia  $\tau_{r2}$  začneme zasa zväčšovať deformáciu a pre napätie v časovom intervale  $(t_2, t_3)$  bude platiť

$$\tau = \kappa_{H2} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_{r2}}{\kappa_{H2}} \right) + \tau_{r2} \quad (5.17)$$

a analogicky ako v predchádzajúcich prípadoch môžeme pre napätie v čase  $t = t_3$ , keď deformácia bude rovná  $\gamma_{r3}$ , písať

$$\tau_{r3} = \kappa_{H2} F_{bb} \left( \frac{\gamma_{r3} - \gamma_{r2}}{\kappa_{H2}} \right) + \tau_{r2} . \quad (5.18)$$

Ak 2. zovšeobecnené Masingove pravidlo použijeme  $j$ -krát, potom v časovom intervale  $(t_j, t_{j+1})$ , na ktorom deformácia monotónne rastie alebo klesá, dostaneme pre napätie takéto vyjadrenie

$$\tau(t) = \kappa_{Hj} F_{bb} \left( \frac{\gamma(t) - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj}} \right) + \tau_{rj} , \quad (5.19)$$

kde

$$\tau_{rj} = \kappa_{H(j-1)} F_{bb} \left( \frac{\gamma_{rj} - \gamma_{r(j-1)}}{\kappa_{H(j-1)}} \right) + \tau_{r(j-1)} \quad (5.20)$$

a  $\gamma_{rj}$  sú napätie a deformácia, pri ktorých naposledy nastala zmena smeru zaťažovania.

Pre nájdenie napätia v tvare (5.19) sme použili len 1. a 2. zovšeobecnené Masingove pravidlá. To samozrejme vyžaduje, aby nenastal niektorý z prípadov, ktorý viedol k zavedeniu rozšírených Masingových pravidiel. Predpokladom teda je  $|\tau| < \tau_0$ , alebo že veľkosť napätia pri nekonečne veľkej deformácii bude rovná  $\tau_0$ , teda

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \tau = \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad (5.21)$$

Toto zároveň kladie aj podmienku pre škálovací faktor. Aby sme našli limitu vo vzťahu (5.21), potrebujeme najprv nájsť limitu pravej strany (5.19). Stačí si pritom uvedomiť, že

$$F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj}} \right) = \tau_0 \frac{\frac{\gamma - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj} \gamma_{ref}}}{1 + \left| \frac{\gamma - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj} \gamma_{ref}} \right|} \quad .$$

V limitnom prípade je potom

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj}} \right) = \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad (5.22)$$

a pre limitu pravej strany vzťahu (5.19) dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_{Hj} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj}} \right) + \tau_{rj} \right\} = \\ = \kappa_{Hj} \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) + |\tau_{rj}| \operatorname{sgn}(\tau_{rj}) \quad . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Po dosadení (5.23) do vzťahu (5.21) budeme mať

$$\kappa_{Hj} \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) + |\tau_{rj}| \operatorname{sgn}(\tau_{rj}) = \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad (5.24)$$

Z toho vyjadríme  $\kappa_{Hj}$ :

$$\kappa_{Hj} = 1 - \frac{|\tau_{rj}| \operatorname{sgn}(\tau_{rj})}{\tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma})} \quad (5.25)$$

Je možné sa ľahko presvedčiť, že uvedený škálovací faktor je ekvivalentný Pykeovmu škálovaciemu faktoru (5.12).

Vzťah (5.25) umožňuje nájsť vyjadrenie škálovacieho faktora  $\kappa_{Hj}$  v tvare, ktorý pri používaní zovšeobecnených Masingových pravidiel zabezpečí, aby veľkosť vypočítaného napätia neprekročila hodnotu  $\tau_0$ . Škálovací faktor v tvare (5.25) však bol získaný za predpokladu, že deformácia môže dosiahnuť nekonečne veľkú hodnotu. Je zrejmé, že v reálnych prostrediach takýto prípad nemôže nastať a deformácia môže dosiahnuť len konečnú hodnotu  $\gamma_f$ , pre ktorú platí  $|\gamma_{rj}| \leq |\gamma_f| \leq \infty$ . Potom pre takýto limitný prípad môžeme písať

$$\lim_{\gamma \rightarrow |\gamma_f| \operatorname{sgn}(\dot{\gamma})} \tau = \tau_f \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad , \quad (5.26)$$

kde  $\tau_f = |F_{bb}(\gamma_f)|$ . Dosadením (5.19) do vzťahu (5.26) dostaneme

$$\lim_{\gamma \rightarrow |\gamma_f| \operatorname{sgn}(\dot{\gamma})} \left\{ \kappa_{Hj} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj}} \right) + \tau_{rj} \right\} = \tau_f \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad , \quad (5.27)$$

a po dosadení matematického vyjadrenia krivky prvotnej záťaže za  $F_{bb}$  vo vzťahu (5.27) dostaneme

$$\kappa_{Hj} \tau_0 \frac{[|\gamma_f| \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) - \gamma_{rj}] / [\kappa_{Hj} \gamma_{ref}]}{1 + |[|\gamma_f| \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) - \gamma_{rj}] / [\kappa_{Hj} \gamma_{ref}]|} + \tau_{rj} = \tau_f \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) \quad . \quad (5.28)$$

Po vyjadrení  $\kappa_{Hj}$  a úpravách nakoniec dostaneme

$$\kappa_{Hj} = \frac{[\operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) |\tau_f| - \tau_{rj}] |\operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) |\gamma_f| - \gamma_{rj}|}{\tau_0 [\operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) |\gamma_f| - \gamma_{rj}] - \gamma_{ref} [\operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) |\tau_f| - \tau_{rj}]} \quad . \quad (5.29)$$

Ak by sme vo vzťahu (5.29) za  $\gamma_f$  dosadili hodnotu  $\gamma_f = \infty$ , dostali by sme vzťah (5.25). Škálovací faktor (5.29) teda zahŕňa aj Pykeov škálovací faktor.

Po nájdení vyjadrenia napätia (5.19) a tvaru škálovacieho faktora (5.29) môžeme *hysterézny operátor* definovať nasledovne

$$Hys(\gamma(t), \kappa_{Hj}) = \begin{cases} F_{bb}(\gamma(t)) & , \text{ pre } 0 \leq t \leq t_1 \\ \kappa_{Hj} F_{bb} \left( \frac{\gamma(t) - \gamma_{rj}}{\kappa_{Hj}} \right) + \tau_{rj} & , \text{ pre } t_j < t \leq t_{j+1} \\ & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.30)$$

kde krivka prvotnej záťaže  $F_{bb}$  je určená vzťahom (5.9) a  $t_j$  je čas, pri ktorom dochádza k zmene smeru zaťažovania. To znamená, že rýchlosť deformácie v tomto čase je nulová, t.j.  $\dot{\gamma}(t_j) = 0$ , a napätie a deformácia sú rovné  $\tau_{rj}$  a  $\gamma_{rj}$ . Škálovací faktor  $\kappa_{Hj}$  je určený vzťahom (5.29).

Ako mieru nelineárnosti Hardin a Drnevich (1972a) uvádzajú závislosť modulu pružnosti v šmyku  $G$  a tlmiaci pomer  $D$  od deformácie v šmyku. Závislosť pre  $G$  je vyjadrená vzťahom (5.6) a grafické znázornenie je na Obr. 5.1. Hardin a Drnevich (1972a) definujú *tlmiaci pomer* pomocou vzťahu

$$D = \frac{\Delta W}{4\pi W} , \quad (5.31)$$

kde  $\Delta W$  je energia disipovaná za jeden cyklus a  $W = \frac{1}{2}\gamma_r\tau_r = \frac{1}{2}\gamma_r F_{bb}(\gamma_r)$ . Po dosadení za  $F_{bb}$  zo vzťahu (5.9) môžeme pre energiu  $W$  písať

$$W = \frac{1}{2}\gamma_r\tau_0 \frac{\gamma_r/\gamma_{ref}}{1 + \gamma_r/\gamma_{ref}} . \quad (5.32)$$

Pre  $\Delta W$  môžeme písať

$$\Delta W = \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \tau_2(\gamma)d\gamma - \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \tau_1(\gamma)d\gamma , \quad (5.33)$$

kde prvý člen predstavuje energiu spotrebovanú pri zaťažovaní prostredia a druhý člen energiu uvoľnenú pri odľahčovaní. Ich rozdiel je úmerný energii disipovanej za jeden cyklus. Energie  $\Delta W$  a  $W$  majú jednoduchý geometrický význam (Obr. 5.8.).  $\Delta W$  je plocha ohraničená hysteréznou slučkou a  $W$  zasa zodpovedá ploche trojuholníka OAB.

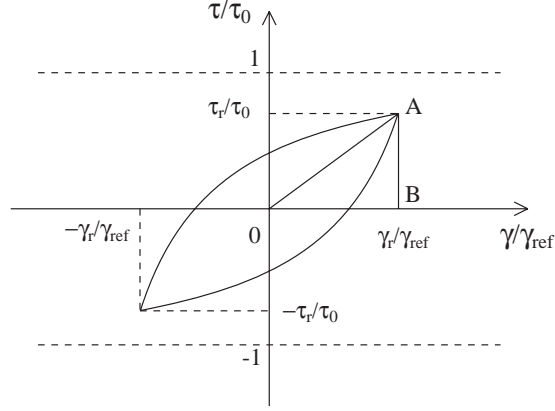
Závislosť napätia  $\tau_1$  od deformácie  $\gamma$  na Obr. 5.8 reprezentuje spodná vetva hysteréznej slučky. Horná vetva hysteréznej slučky zasa reprezentuje závislosť  $\tau_2(\gamma)$ . Napätia  $\tau_1$  a  $\tau_2$  za pomoci rozšírených Masingových pravidiel môžeme vyjadriť v tvare

$$\tau_1 = \kappa_{H1} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_r}{\kappa_{H1}} \right) + \tau_r , \quad (5.34)$$

$$\tau_2 = \kappa_{H2} F_{bb} \left( \frac{\gamma + \gamma_r}{\kappa_{H2}} \right) - \tau_r , \quad (5.35)$$

kde napätie  $\tau_r$  je určené nasledovným vzťahom

$$\tau_r = \tau_0 \frac{\gamma_r/\gamma_{ref}}{1 + \gamma_r/\gamma_{ref}} . \quad (5.36)$$



Obr. 5.8. Znárodnenie hysteréznej slučky ohraničujúcej plochu, ktorá zodpovedá energii  $\Delta W$ . Trojuholní OAB ohraničuje plochu, ktorá zodpovedá energii  $W$ .

Po dosadení napätí  $\tau_1$  a  $\tau_2$  do vzťahu (5.33) dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \left\{ \kappa_{H2} F_{bb} \left( \frac{\gamma + \gamma_r}{\kappa_{H2}} \right) - \tau_r \right\} d\gamma \\ &- \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \left\{ \kappa_{H1} F_{bb} \left( \frac{\gamma - \gamma_r}{\kappa_{H1}} \right) + \tau_r \right\} d\gamma . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ak použijeme substitúcie  $\gamma' = (\gamma + \gamma_r)/\kappa_{H2}$  a  $\gamma'' = (\gamma - \gamma_r)/\kappa_{H1}$ , potom po integrovaní členov s  $\tau_r$  môžeme vzťah (5.37) prepísať na tvar

$$\begin{aligned} \Delta W &= \kappa_{H2}^2 \int_0^{2\gamma_r/\kappa_{H2}} F_{bb}(\gamma') d\gamma' \\ &- \kappa_{H1}^2 \int_{-2\gamma_r/\kappa_{H1}}^0 F_{bb}(\gamma'') d\gamma'' - 4\gamma_r \tau_r . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Po dosadení vzťahu (5.9) za  $F_{bb}$ , integrovaní a úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta W &= 2\gamma_r \tau_0 (\kappa_{H1} + \kappa_{H2}) - 4\gamma_r \tau_r \\ &- \gamma_{ref} \tau_0 \left[ \kappa_{H1}^2 \ln \left( 1 + \frac{2\gamma_r}{\kappa_{H1} \gamma_{ref}} \right) \right. \\ &+ \left. \kappa_{H2}^2 \ln \left( 1 + \frac{2\gamma_r}{\kappa_{H2} \gamma_{ref}} \right) \right] . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Dosaďme vzťahy (5.32) a (5.39) a následne aj (5.36) do vzťahu (5.31). Potom pre tlmiaci pomer  $D$  dostaneme takéto vyjadrenie:

$$D = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_{ref}}{\gamma_r} \right) \left\{ 2(\kappa_{H1} + \kappa_{H2}) - \frac{4}{1 + \gamma_{ref}/\gamma_r} - \frac{\gamma_{ref}}{\gamma_r} \left[ \kappa_{H1}^2 \ln \left( 1 + \frac{2\gamma_r}{\kappa_{H1}\gamma_{ref}} \right) + \kappa_{H2}^2 \ln \left( 1 + \frac{2\gamma_r}{\kappa_{H2}\gamma_{ref}} \right) \right] \right\}. \quad (5.40)$$

## 5.2 Prostredie s pórmí vyplnenými vodou

V predchádzajúcej časti sme zaviedli Masingové pravidlá, pomocou ktorých konštruujeme hysterézne slučky, t.j. nachádzame vzťah medzi šmykovým napätím a šmykovou deformáciou pre prostredia s hysteréznym správaním. Povrchové geologické vrstvy však často obsahujú vodu. V takomto prostredí sa častice pri pohybe snažia dostať do pórov, ktoré sú vyplnené vodou. To spôsobuje, že voda je z pórov vytláčaná. Keďže je však voda nestlačiteľná, takéto "vytláčanie" vody spôsobuje nárast jej tlaku, ktorý potom znižuje normálové napätia. Pri opise správania sa reálnych prostredí je preto potrebné vziať do úvahy aj vytváranie tlaku vody v póroch.

Pri odvodení vzťahu medzi napätím a deformáciou pre prostredie s pórmí vyplnenými vodou predpokladajme 2D prípad (Bonilla 2000). Zavedme vektory napätia a deformácie v nasledovnom tvare

$$\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}), \quad (5.41)$$

$$\epsilon^T = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}), \quad (5.42)$$

kde  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$  ( $u$  a  $v$  sú  $x$ -ová a  $y$ -ová zložka posunutia),  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  sú normálové napätia a  $\tau_{xy}$  je šmykové napätie. Zložky vektora napätia  $\sigma$  vytvárajú kontaktné napätia medzi časticami prostredia. Zavedme ďalej vektor efektívneho napätia v tvare

$$\sigma'^T = (\sigma'_x, \sigma'_y, \tau_{xy}), \quad (5.43)$$

kde

$$\sigma'_x = \sigma_x - p, \quad (5.44)$$

$$\sigma'_y = \sigma_y - p \quad (5.45)$$

sú efektívne napätia a  $p$  je tlak vody v póroch.

Rovnica, ktorá dáva do vzťahu vektor efektívneho napätia s vektorom deformácie, je v tvare

$$d\sigma' = Md\epsilon \quad , \quad (5.46)$$

kde  $d\sigma'$  a  $d\epsilon$  sú prírastky príslušných vektorov a  $M$  je *matica tuhosti*. Ďalej predpokladajme, že prírastok vektora efektívneho napätia môžeme rozdeliť na  $I + 1$  častí, teda

$$\begin{aligned} d\sigma' &= \sum_{i=0}^I d\sigma'^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^I R_{L/U}^{(i)} n^{(i)} n^{(i)T} d\epsilon \quad , \end{aligned} \quad (5.47)$$

kde členy s indexom  $i = 0$  reprezentujú mechanizmus spôsobujúci objemovú deformáciu, členy s indexmi  $i = 1, 2, \dots$  reprezentujú šmykovú deformáciu,  $n^{(i)}$  sú jednotkové vektory zodpovedajúce smeru zaťažovania a odľahčovania a  $R_{L/U}^{(i)}$  reprezentuje elastické koeficienty a použitie Masingových pravidiel pri zaťažovaní a odľahčovaní.

Transformujme teraz vektory  $\sigma'$  a  $\epsilon$  nasledovným spôsobom:

$$s' = T_\sigma \sigma' \quad , \quad (5.48)$$

$$e = T_\epsilon \epsilon \quad . \quad (5.49)$$

*Matice transformácie*  $T_\sigma$  a  $T_\epsilon$  sú definované ako

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (5.50)$$

Je možné sa ľahko presvedčiť, že platí  $T_\sigma = T_\epsilon^{-1}$  a  $T_\epsilon = T_\sigma^{-1}$ . S využitím tejto vlastnosti sa dá nájsť zo vzťahu (5.49) vyjadrenie pre  $\epsilon$  v tvare

$$\epsilon = T_\epsilon^{-1} e = T_\sigma e \quad . \quad (5.51)$$

Po transformovaní vektorov napätia a deformácie pomocou matíc  $T_\sigma$  a  $T_\epsilon$  dostaneme

$$s'^T = \left( \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2} , \frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2} , \tau_{xy} \right) \quad , \quad (5.52)$$

$$e^T = (\epsilon_x + \epsilon_y , \epsilon_x - \epsilon_y , \gamma_{xy}) \quad . \quad (5.53)$$

Ak vzťah (5.47) vynásobíme maticou  $T_\sigma$  a využijeme vzťah (5.51), potom dostaneme

$$\begin{aligned} ds' &= \sum_{i=0}^I ds'^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^I R_{L/U}^{(i)} T_\sigma n^{(i)} n^{(i)T} T_\sigma^T de . \end{aligned} \quad (5.54)$$

Po zavedení nových jednotkových vektorov

$$l^{(i)} = T_\sigma n^{(i)} \quad (5.55)$$

môžeme vzťah medzi prírastkom napätia a deformácie (5.54) prepísať na tvar

$$ds' = \sum_{i=0}^I R_{L/U}^{(i)} l^{(i)} l^{(i)T} de . \quad (5.56)$$

Túto rovnicu budeme integrovať samostatne pre mechanizmus spôsobujúci objemovú deformáciu a pre mechanizmus spôsobujúci šmykovú deformáciu.

Deformáciu, ktorá sa týka zmeny tlaku vody v póroch, označme  $\epsilon_p$ . Tomu zodpovedajúci vektor deformácie bude

$$de_p^T = (\epsilon_p, 0, 0) . \quad (5.57)$$

Ak uvážime, že objemová deformácia je zmenšená o  $\epsilon_p$ , potom vzťah medzi prírastkom napätia a deformácie bude mať tvar

$$ds'^{(0)} = K l^{(0)} l^{(0)T} (de - de_p) , \quad (5.58)$$

kde  $K = R_{L/U}^{(0)}$  je *objemový modul* pružnosti. Pri objemovej deformácii pre jednotkový vektor  $l^{(0)}$  platí

$$l^{(0)T} = (1, 0, 0) . \quad (5.59)$$

Ak teraz vynásobíme medzi sebou vektory na pravej strane vzťahu (5.58), zistíme, že pre jedinú nenulovú zložku vektora  $ds'^{(0)}$  platí

$$d\sigma'_m = K d\epsilon_c , \quad (5.60)$$



kde  $\sigma'_m = \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2}$  je stredné efektívne napätie a  $d\epsilon_\epsilon = d\epsilon_x + d\epsilon_y - d\epsilon_p$ . Na základe laboratórných meraní je objemový modul pružnosti  $K$  vybraný v tvare

$$K = K_a \sqrt{\frac{\sigma'_m}{\sigma'_{ma}}} , \quad (5.61)$$

kde  $K_a$  je objemový modul pružnosti pri referenčnom strednom efektívnom napätí  $\sigma'_{ma}$ . Po dosadení (5.61) do vzťahu (5.60) a úprave môžeme písať

$$d\epsilon_\epsilon = \frac{1}{K_a} \sqrt{\frac{\sigma'_{ma}}{\sigma'_m}} d\sigma'_m . \quad (5.62)$$

Integrovaním vzťahu (5.62) dostaneme

$$\epsilon_\epsilon = \frac{2}{K_a} \sqrt{\sigma'_{ma}} \sqrt{\sigma'_m} \quad (5.63)$$

a po usporiadaní členov dostaneme pre závislosť stredného efektívneho napätia  $\sigma'_m$  od deformácie  $\epsilon_\epsilon$  nasledovné vyjadrenie

$$\sigma'_m = \left( \frac{K_a}{2\sqrt{\sigma'_{ma}}} \right)^2 \epsilon_\epsilon^2 . \quad (5.64)$$

Pomocou maticového zápisu môžeme vzťah (5.64) prepísať na tvar

$$s'^{(0)} = \left( \frac{K_a}{2\sqrt{\sigma'_{ma}}} \right)^2 \epsilon_\epsilon^2 l^{(0)} , \quad (5.65)$$

kde  $s'^{(0)T} = (\sigma'_m, 0, 0)$ .

Vzťah medzi prírastkom napätia a deformácie je v prípade mechanizmu spôsobujúcom šmykovú deformáciu v tvare

$$ds'^{(i)} = R_{L/U}^{(i)} l^{(i)} l^{(i)T} de , \quad i = 1, 2, \dots, I . \quad (5.66)$$

Pre jednotkový vektor predpokladáme, že platí

$$l^{(i)T} = (0, \cos \theta_i, \sin \theta_i) , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (5.67)$$

kde  $\theta_i = (i - 1)\Delta\theta$  a  $\Delta\theta = \pi/I$ . Zaveďme ďalšiu premennú v tvare

$$\gamma^{(i)} = l^{(i)T} e , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (5.68)$$

a po násobení členov na pravej strane dostaneme

$$\gamma^{(i)} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad . \quad (5.69)$$

Koeficienty  $R_{L/U}^{(i)}$  vyjadrime pomocou skalárnej funkcie  $Q^{(i)}(\gamma^{(i)})$  takýmto spôsobom:

$$R_{L/U}^{(i)} = \frac{dQ^{(i)}(\gamma^{(i)})}{d\gamma^{(i)}} \Delta\theta \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad . \quad (5.70)$$

Keď dosadíme (5.70) a (5.68) do vzťahu (5.66), dostaneme

$$ds'^{(i)} = \frac{dQ^{(i)}(\gamma^{(i)})}{d\gamma^{(i)}} \Delta\theta l^{(i)} d\gamma^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad . \quad (5.71)$$

Po integrovaní dostaneme

$$s'^{(i)} = Q^{(i)}(\gamma^{(i)}) \Delta\theta l^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad . \quad (5.72)$$

Sčítaním vzťahov (5.65) a (5.72) napokon dostaneme

$$s' = \left( \frac{K_a}{2\sqrt{\sigma'_{ma}}} \right)^2 \epsilon_\epsilon^2 l^{(0)} + \sum_{i=1}^I Q^{(i)}(\gamma^{(i)}) \Delta\theta l^{(i)} \quad . \quad (5.73)$$

Ak si uvedomíme, že platia vzťahy

$$\sigma' = T_\sigma^{-1} s' = T_\epsilon s' \quad ,$$

$$n^{(0)T} = (T_\epsilon l^{(0)})^T = (1, 1, 0) \quad ,$$

$$n^{(i)T} = (T_\epsilon l^{(i)})^T = (\cos \theta_i, -\cos \theta_i, \sin \theta_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I$$

potom po vynásobení vzťahu (5.73) maticou transformácie  $T_\epsilon$  dostaneme

$$\sigma' = \left( \frac{K_a}{2\sqrt{\sigma'_{ma}}} \right)^2 (\epsilon_x + \epsilon_y - \epsilon_p)^2 n^{(0)} + \sum_{i=1}^I Q^{(i)}(\gamma^{(i)}) \Delta\theta n^{(i)} \quad . \quad (5.74)$$

Teraz je potrebné nájsť funkčnú závislosť  $Q^{(i)}(\gamma^{(i)})$ . Keďže závislosť šmykového napätia od deformácie v prípade prvotného zaťaženia je zavedená v hyperbolickom tvare

$$\tau_{xy} = \tau_0 \frac{\gamma_{xy}/\gamma_{ref}}{1 + |\gamma_{xy}/\gamma_{ref}|} \quad , \quad (5.75)$$

môžeme očakávať, že aj závislosť  $Q^{(i)}(\gamma^{(i)})$  bude mať podobný tvar. Preto použijeme

$$Q^{(i)}(\gamma^{(i)}) = Q_v \frac{\gamma^{(i)}/\gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)}/\gamma_v|} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (5.76)$$

kde  $Q_v$  a  $\gamma_v$  sú koeficienty, ktoré súvisia s  $G_0$  a  $\gamma_{ref}$ . Ak dosadíme (5.76) do vzťahu (5.74), potom pre šmykové napätie dostaneme

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^I Q_v \frac{\gamma^{(i)}/\gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)}/\gamma_v|} \Delta\theta \sin\theta_i \quad . \quad (5.77)$$

Pre jednoduchosť predpokladajme, že  $\epsilon_x - \epsilon_y = 0$ . Potom

$$\gamma^{(i)} = \gamma_{xy} \sin\theta_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I \quad .$$

Keďže pri  $\gamma_{xy} \rightarrow \infty$  je  $\tau_{xy} \rightarrow \tau_0$ , zo vzťahu (5.77) dostaneme

$$\tau_0 = \sum_{i=1}^I Q_v \Delta\theta \sin\theta_i \quad , \quad (5.78)$$

resp. po vyjadrení  $Q_v$

$$Q_v = \frac{\tau_0}{\sum_{i=1}^I \Delta\theta \sin\theta_i} \quad . \quad (5.79)$$

Ak budeme predpokladať malé šmykové deformácie ( $\gamma_{xy} \ll \gamma_{ref}$ ), potom približné vyjadrenie vzťahu (5.75) je v lineárnom tvare

$$\tau_{xy} = G_0 \gamma_{xy} \quad (5.80)$$

a zo vzťahu (5.77) s využitím (5.69) dostaneme (tiež pri malých deformáciach)

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^I Q_v \frac{\gamma_{xy} \sin\theta_i}{\gamma_v} \Delta\theta \sin\theta_i \quad . \quad (5.81)$$

Po porovnaní vzťahov (5.80) a (5.81) dostaneme

$$G_0 = \sum_{i=1}^I \frac{Q_v}{\gamma_v} \Delta\theta \sin^2\theta_i \quad (5.82)$$

a nakoniec po vyjadrení  $\gamma_v$  zo vzťahu (5.82) budeme mať

$$\gamma_v = \frac{Q_v}{G_0} \sum_{i=1}^I \Delta\theta \sin^2 \theta_i . \quad (5.83)$$

Kvôli prehľadnosti uveďme dôležité vzťahy, ktoré sa týkajú formulácie pre vyjadrenie závislosti napätie - deformácia za prítomnosti vody v póroch v prípade prvotného zaťaženia:

$$\sigma' = \left( \frac{K_a}{2\sqrt{\sigma'_{ma}}} \right)^2 (\epsilon_x + \epsilon_y - \epsilon_p)^2 n^{(0)} + \sum_{i=1}^I Q^{(i)} (\gamma^{(i)}) \Delta\theta n^{(i)} . \quad (5.84)$$

Tu

$$Q^{(i)} (\gamma^{(i)}) = Q_v \frac{\gamma^{(i)}/\gamma_v}{1 + |\gamma^{(i)}/\gamma_v|} , \quad (5.85)$$

$$\gamma^{(i)} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i , \quad (5.86)$$

$$\gamma_v = \frac{Q_v}{G_0} \sum_{i=1}^I \Delta\theta \sin^2 \theta_i , \quad (5.87)$$

$$Q_v = \frac{\tau_0}{\sum_{i=1}^I \Delta\theta \sin \theta_i} , \quad (5.88)$$

$$\sigma'^T = (\sigma'_x , \sigma'_y , \tau_{xy}) , \quad (5.89)$$

$$n^{(0)T} = (1, 1, 0) , \quad (5.90)$$

$$n^{(i)T} = (\cos \theta_i , -\cos \theta_i , \sin \theta_i) , \quad (5.91)$$

$$\theta_i = (i - 1)\Delta\theta , \quad (5.92)$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{I} . \quad (5.93)$$

Deformáciu  $\epsilon_p$  môžeme určiť podľa vzťahu

$$\epsilon_p = \frac{n}{K_f} (\sigma'_{m0} - \sigma'_m) - 2\sqrt{\sigma'_m \sigma'_{ma}} + \epsilon_{\epsilon 0} , \quad (5.94)$$

kde  $\sigma'_{m0}$  je počiatkové efektívne napätie a tomu zodpovedajúca počiatková objemová deformácia  $\epsilon_{\epsilon}$  je

$$\epsilon_{\epsilon} = 2\sqrt{\sigma'_{m0} \sigma'_{ma}} ,$$

$n$  je porozita prostredia a  $K_f$  je objemový modul vody.

Zavedenie Masingových pravidiel uskutočníme jednoduchým spôsobom. Namiesto vzťahu (5.85) použijeme

$$Q^{(i)}(\gamma^{(i)}) = \kappa_{Hj} Q_v \frac{(\gamma^{(i)} - \gamma_{rj}) / (\kappa_{Hj} \gamma_v)}{1 + |(\gamma^{(i)} - \gamma_{rj}) / (\kappa_{Hj} \gamma_v)|} + \tau_{rj} , \quad (5.95)$$

kde  $\kappa_{Hj}$  je zovšeobecnený škálovací faktor a  $\gamma_{rj}$  a  $\tau_{rj}$  sú šmyková deformácia a napätie, pri ktorých sa mení smer zaťaženia.

## 6 Záver

V kapitole 3 sme stručne popísali základné reologické modely a z nich zostavené zložitejšie modely pre viskoelastické kontinuum a pre elastoplastické kontinuum. Reologické modely pre elastoplastické kontinuum poskytujú možnosť konštruovania hysteréznych slučiek a do istej miery aj vysvetľujú fyzikálnu podstatu hysterézneho správania prostredí. Hysterézne tlmenie určené pre elastoplastické kontinuum však pravdepodobne dostatočne presne nezodpovedá tlmeniu v mäkkých prostrediach. Pre popis, ktorý by zahŕňal skutočné tlmenie, je potrebné do elastoplastických modelov zaradiť jeden alebo viac viskózných prvkov, čím vznikne elastoviskoplastický model. Je však otázkou, kam zaradiť takéto viskózne prvky, aby sme dostali čo najlepšie vystihnutie správania reálnych prostredí. Elastoviskoplastické modely je preto potrebné v budúcnosti podrobiť bližšiemu výzkumu. Hoci pomocou takýchto reologických modelov je možné pochopiť podstatu hysterézneho správania, pri numerickom modelovaní kvôli množstvu potrebných parametrov majú zatiaľ nevýhodu v porovnaní s Masingovými pravidlami.

V kapitole 4 sme uviedli nelineárny vzťah medzi tenzorom napätia a tenzorom konečných deformácií pre izotropné dokonale elastické kontinuum. S využitím tohto vzťahu sme potom riešili pohybovú rovnicu pre 1D prípad a zistili sme, že v izotropnom elastickom homogénnom prostredí s nelineárnym správaním sa môže nezávisle šíriť pozdĺžna rovinná vlna. Pričná rovinná vlna sa v takomto prostredí samostatne šíriť nemôže, ale šírenie rovinnej priečnej vlny generuje pozdĺžne vlny. Tiež sme zistili, že rovnako ako v 1D prípade ani samostatné šírenie SH vln nie je možné. Pohybové rovnice pre P-SV problém sú veľmi zložité a nájdenie riešenia nie je triviálne. Predpokladáme však, že samostatné šírenie P-SV vln je možné. Na overenie tohto záveru je však potrebné riešiť pohybové rovnice a ako prijateľná cesta je pravdepodobne numerické modelovanie.

V kapitole 5 sme najprv uviedli pôvodné Masingové pravidlá, ktoré umožňujú konštruovať hysterézne slučky pri pravidelnom zaťažovaní. Ak je ale aplikované zaťažovanie nepravidelné, je potrebné k týmto pravidlám pridať ďalšie pravidlá, čím vzniknú rozšírené Masingove pravidlá, alebo mo-

difikovať pôvodné pravidlá zavedením zovšeobecneného škálovacieho faktora. V druhej časti je uvedený vzťah medzi napätím a deformáciou v 2D prípade pre prostredie, ktoré v póroch obsahuje vodu. Táto formulácia zahŕňa aj Masingové pravidlá, ktoré obsahujú zovšeobecnený škálovací faktor.

## Literatúra

- Aguirre, J. a K. Irikura (1997). Nonlinearity, Liquefaction, and Velocity Variation of Soft Soil Layers in Port Island, Kobe, during Hyogo-ken Nanbu Earthquake, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 1244-2358.
- Aki, K., (1993). Local site effects on weak and strong ground motion, *Tectonophysics*, **218**, 93-111.
- Aki, K. a P.G. Richards (1980). Quantitative seismology - Theory and Methods, vol. 1, W. H. Freeman and company, San Francisco, USA.
- Archuleta, R. J., S. H. Seale, P. V. Sangas, L. M. Baker a S. T. Swain (1992). Garner Valley downhole array of accelerometers: instrumentation and preliminary data analysis, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **82**, 1592-1621.
- Beresnev, I. A., K.-L. Wen a Y. T. Yeh (1995). Nonlinear Soil Amplification: Its Corroboration in Taiwan, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 496-515.
- Beresnev, I. A. a K.-L. Wen (1996). Nonlinear Soil Response - A Reality? *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 1964-1978.
- Bland, D. R., (1972). Nelinejnaja dinamičeskaja teorija uprugosti, Izdatel'stvo MIR, Moskva.
- Bonilla, L. F., (2000). Computation of Linear and Nonlinear Site Response for Near Field Ground Motion, Ph.D. thesis, University of California, Santa Barbara.
- Brdička, M., (1959). Mechanika kontinua, Nakladatelství ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD, Praha.
- Çelebi, M., (1987). Topographical and geological amplifications determined from strong-motion and aftershock records of the 3 March 1985 Chile earthquake, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **77**, 1147-1167.



- Chin, B.-H. a K. Aki (1991). Simultaneous study of the source, path, and site effects on strong ground motion during the 1989 Loma Prieta earthquake: a preliminary result on pervasive nonlinear site effects, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 1859-1884.
- Darragh, R. a A. F. Shakal (1991). The site response of two rock and soil station pairs to strong and weak ground motion, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 1885-1899.
- Green jr., R. E., (1973). Treatise on materials science and technology, vol. 3, ACADEMIC PRESS, New York and London, pg. 73-94.
- Feda, J., (1992). Creep of soils, ACADEMIA, Praha.
- Gutenberg, B., (1957). Effects of ground on earthquake motion, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **47**, 221-500.
- Hardin, B. O. a V. P. Drnevich (1972a). Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects, *J. Soil Mech. Foundations Div. ASCE*, **98**, 603-624.
- Hardin, B. O. a V. P. Drnevich (1972a). Shear modulus and damping in soils: design equations and curves , *J. Soil Mech. Foundations Div. ASCE*, **98**, 667-692.
- Hudson, D. E., (1972). Local distribution of strong earthquake ground motions, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **62**, 1765-1786.
- Hughes, D. S. a J. L. Kelly (1953). Second-Order Elastic Deformation of Solids, *Physical Review*, **92**, 1145-1149.
- Iwan, W. D., (1967). On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems, *J. Appl. Mech.*, **34**, 612-617.
- Jarpe, S. P., C. H. Cramer, B. E. Tucker a A. F. Shakal (1988). A comparison of observations of ground response to weak and strong ground motion at Coalinga, California, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **78**, 421-435.

- Joyner, W. B., (1975). A method for calculating nonlinear seismic response in two dimensions, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **65**, 1337-1357.
- Joyner, W. B. a A. T. F. Chen (1975). Calculation of nonlinear ground response in earthquakes, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **65**, 1315-1336.
- Landua, L. D. a E. M. Lifšic (1965). Teorija uprugosti, Izdavatel'stvo NAUKA, Moskva.
- Masing, G., (1926). Eigenspannungen und Verfertigung beim Messing, Proceedings, 2nd International Congress on Applied Mechanics, Zurich.
- Marsh, J., T. J. Larkin, A. J. Haines a R. A. Benites (1995). Comparison of Linear and Nonlinear Seismic Responses of Two-Dimensional Alluvial Basins, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 874-889.
- McCall, K. R., (1994). Theoretical study of nonlinear elastic wave propagation, *J. Geol. Res.*, **99**, 2591-2600.
- Meegan, G. D., P. A. Johnson, R. A. Guyer a K. R. McCall (1993). Observation of nonlinear elastic wave behavior in sandstone, *J. Acoust. Soc. Am.*, **94**, 3387-3391.
- Presti, D. C. F., O. Pallara, A. Cavallaro a M. Maugeri (1998). Non linear stress-strain relations of soils for cyclic loading, 11th European Conference on Earthquake Engineering, Balkema, Rotterdam, 1-9.
- Pyke, R., (1979). Nonlinear soil models for irregular cyclic loadings, *J. Geotech. Eng.*, **105**, 715-726.
- Rogers, A. M., R. D. Borchardt, P. A. Covington a D. M. Perkins (1984). A comparative ground response study near Los Angeles using recordings of Nevada nuclear tests and the 1971 San Fernando earthquake, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **74**, 1925-1949.
- Sobotka, Z., (1984). Rheology of materials and engineering structures, ACADEMIA, Praha.

Yoshida, N. a S. Iai (1998). Nonlinear site response and its evaluation and prediction, Proceeding of the Second International Symposium on the Effects of Surface Geology on Seismic Motion, Vol. 1, K. Kudo, H. Okada & T. Sasatani, A. A. Balkema: Netherlands, 71-90.

Yu, G., J. G. Anderson a R. Siddharthan (1992). On the characteristics of nonlinear soil response, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **83**, 218-244