

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
v Bratislave**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO**

Katedra fyziky Zeme a planét

**Hydromagnetické nestability v podmienkach
zemského jadra**

Diplomová práca

Autor:

Vedúci diplomovej práce:

Tomáš Šoltis

doc. RNDr. Jozef Brestenský, CSc.

BRATISLAVA

apríl 2004

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne a použitú literatúru som uviedol v zozname.

Ďakujem svojmu školiteľovi doc. RNDr. Jozefovi Brestenskému, CSc. za uvedenie do problematiky a za všestrannú pomoc, ktorú mi počas práce poskytoval. Vedúcemu Katedry fyziky Zeme a planét FMFI UK prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. a ostatným pedagógom a pracovníkom katedry a Geofyzikálneho ústavu SAV za vytvorenie podmienok a za inšpirácie pri realizácii tejto diplomovej práce.

Ďalej je mojou milou povinnosťou poďakovať sa Doc. RNDr. Sebastiánovi Ševčíkovi CSc. takisto za uvedenie do problematiky a za cenné rady a pripomienky. Moja úprimná vďaka patrí aj spolužiakovi Petrovi Pažákovi za pomoc pri prekonávaní programátorských a iných technických problémov.

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Motivácia a ciele práce	2
1.2	Štruktúra práce	3
2	Model a základné rovnice	3
2.1	Model rotujúcej horizontálnej vrstvy	3
2.2	Metóda riešenia	5
3	Preformulovanie problému viskózneho prípadu pre jednoduché hraničné podmienky $\mathcal{F}_\infty^\infty$	6
3.1	Polynóm pre výpočet frekvencie σ	7
3.2	Nutné podmienky viskózných skokov	8
3.3	Prechod MAC(W) módov na MC(W) módy	10
4	Preformulovanie problému pre MC módy	12
5	Numerické výpočty a popis práce programu	13
6	Numerické výsledky	15
6.1	Západné MAC módy	16
6.2	Východné MAC módy	23
6.3	Prechod MAC(W) módov na MC(W) módy	28
7	Vysvetlenie niektorých numerických výsledkov	35
7.1	Vlastnosti MC módov pri prechodoch MAC \rightarrow MC a MC \rightarrow MAC	35
7.2	Vlastnosti MAC(E) módov	38
8	Záver	40
	Príloha A	
	Práca ŠVOČ: Magnetické nestability v podmienkach zemského jadra	42
	Literatúra	60

1 Úvod

Problém generácie magnetického poľa hydromagnetickým dynamom zamestnáva v súčasnosti mnohých vedcov na celom svete (Krause & Rädler 1980, Kono & Roberts 2002, Jones 2003). V posledných rokoch sa v tomto probléme spravili významné objavy pri chápaní procesov, ktoré prebiehajú vo fungujúcom samobudiacom dynamo. Veľmi dôležitým krokom, ktorý spôsobil doslova revolúciu v tejto oblasti, bola numerická simulácia samobudiacoho dynamo, pri ktorej sa objavili inverzie magnetického poľa (Glatzmaier & Roberts 1995, 1997). V súčasnosti sú viaceré výskumné pracoviská veľmi blízko spustenia reálne fungujúceho laboratórneho hydromagnetického dynamo (Gailitis et al 2002, Frick et al 2001, Dobler et al 2003). Aj keď je tento komplexný prístup veľmi dôležitý, nedáva šancu detailne skúmať rozličné čiastkové mechanizmy, ktoré v dynamo prebiehajú. Preto je stále dôležité riešiť a rozvíjať jednoduchšie modely, ktoré umožňujú zamerať sa na jeden konkrétny proces a skúmať ho veľmi podrobne. K takým problémom patrí aj vyšetovanie tepelných a magnetických nestabilit, ktoré vznikajú v modeli rotujúcej horizontálnej vrstvy pri súčasnom pôsobení troch difúzných procesov: tepelnej difúzie, magnetickej difúzie a viskozity (Proctor 1994). Tepelné nestability (nestability typu MAC vln) majú zásadný význam pri generačných mechanizmoch, keďže sú nevyhnutnou súčasťou α -efektu. Magnetické nestability (nestability typu MC vln) môžu pôsobiť ako nejaký regulačný mechanizmus, zabraňujúci magnetickému poľu narásť do extrémne veľkých hodnôt (Fearn 1993). V tejto práci vyšetrujeme model rovnomerne stratifikovanej horizontálnej vrstvy viskózne kvapaliny s voľnými nekonečne elektricky vodivými hranicami. Tieto jednoduché hraničné podmienky umožnia preformulovať počiatočný všeobecný zložitý problém s rozmanitými hraničnými podmienkami na matematicky menej komplikovanú úlohu. Soward (1979) síce formuloval podobný jednoduchý problém, ale analýzu obmedzil iba na neviskózny prípad. Nová formulácia problému dáva možnosti efektívne vyšetovať vlastnosti tepelných nestabilit typu MAC módov, a to ako západných (W), tak aj východných (E), hlavne ich citlivosť na mnohé parametre ako viskozitu, magnetické pole, tepelnú a magnetickú difuzivitu. Pozornosť si však zaslúžia aj magnetické nestability, ktoré ku svojej existencii nepotrebujú vztlakovú silu a energiu ku svojmu vzniku berú z magnetického poľa, čím ho oslabujú. Nie je vylúčené, že práve magnetické nestability môžu byť spúšťacím mechanizmom inverzií magnetického poľa.

1.1 Motivácia a ciele práce

V prípade jednoduchých voľných nekonečne elektricky vodivých hraníc, ale v zložitejšom prípade nenulovej viskozity využijeme možnosť zjednodušiť pôvodný všeobecný problém na matematicky zvládnuteľnejšiu úlohu. Toto zjednodušenie a následné preformulovanie problému nám umožní zostavenie programu, ktorý bude efektívne numericky rátať závislosti základných charakteristík MAC módov na rôznych vstupných parametroch. Na základe vlastnosti MAC módov pri takýchto jednoduchých hraničných podmienkach sa pokúsime pochopiť a vysvetliť zložitejšie správanie sa MAC módov pri rozmanitých mechanických a elektromagnetických hraničných podmienkach, napr. skoky vo frekvenciách a radiálnych vlnových číslach.

Ak si uvedomíme, že základnou vlastnosťou magnetických nestabilit je nulovosť Rayleighovho čísla ($R = 0$) a ak sa zameráme na MC módy nezávislé na hraničných podmienkach a stratifikácii, problém sa dá natoľko matematicky zjednodušiť, že všetky vlastnosti týchto MC módov (odhalené zložitými numerickými výpočtami) sa môžeme pokúsiť vysvetliť analyticky analýzou jednoduchých algebraických rovníc, pričom je nádej, že sa objavia aj nové nečakané vlastnosti.

Z geofyzikálneho hľadiska študovaný model viac či menej môže odpovedať vybraným oblastiam tekutého zemského jadra, predstavujúceho sférickú vrstvu hrúbky 2200 km. Jed-

nou z možných oblastí je tenká vrstva neurčitej hrúbky (desiatky až ~ 1000 km) hraničiaca so zemským plášťom. Môže to byť stabilne stratifikovaná podvrstva s časťou nestabilne stratifikovanou, v ktorých teplotný profil pripomína písmeno “D”. Toto dvojvrstvie by bolo možné si predstaviť ako oblasť v ktorej MC módy (neovplyvnené vztlakovými silami) môžu v istých obdobiach histórie Zeme iniciovať inverziu geomagnetického poľa. V takejto vrstve môže byť Ekmanove číslo $E \sim 10^{-3}$ (pozri str. 4), čo je ústredným predpokladom štúdia MC módov katalyzovaných viskozitou (Brestenský et al 2001) študovaných podrobne v predkladanej práci. Dôvodom veľkosti E môže byť okrem tenkosti študovanej vrstvy aj sporadicky zosilňovaný turbulentný stav v zemskom jadre (Braginsky & Meytlis 1990, Braginsky & Roberts 1994). Vplyv viskozity aj pri oveľa menšom $E \sim 10^{-9} - 10^{-7}$ môže byť takisto nezanedbateľný pri budení rôznych hydromagnetických nestabilit – hlavne difúzných v zemskom jadre. U difúzných nestabilit difúzne procesy zohrávajú podstatnú aktívnu úlohu, pretože zoslabovaním niektorých síl v základnej rovnováhe môžu túto výrazne narušiť v prospech vybudenia nestabilit dokonca nečakaných vlastností. Obom aspektom, teda štúdiu MC módov i MAC módov v zemskom jadre je venovaná predkladaná diplomová práca.

1.2 Štruktúra práce

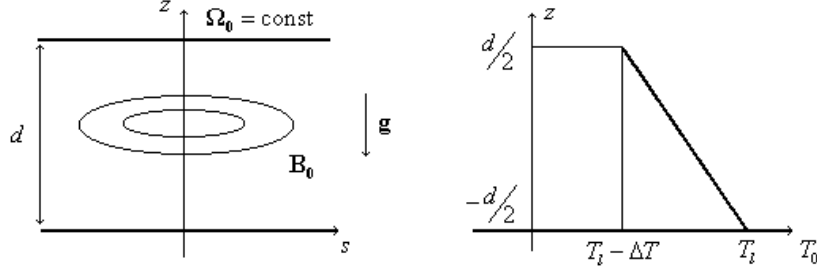
Práca s úvodom a záverom má 8 kapitol, pritom jej dôležitou súčasťou je príloha. V nasledujúcej druhej kapitole je formulácia problému rotujúcej horizontálnej vrstvy rovnomerne stratifikovanej a preniknutej azimutálnym magnetickým poľom. V tretej kapitole sa všeobecnejší problém preformuloval na prípad rotujúcej vrstvy s voľnými nekonečne elektricky vodivými hranicami. V rámci nej je aj odvodenie nutných podmienok existencie skokov v radiálnych vlnových číslach a frekvenciách pri analytickom zjednodušení problému v špeciálnom prípade voľby Robertsovho čísla $q = 1$ a zdôvodnenie mnohých výhod takého zjednodušenia pri vyšetrowaní prechodu MAC módov na MC módy. Štvrtá kapitola obsahuje preformulovanie problému pre MC vlny uvažovaním faktu, že Rayleighove číslo u MC vln je nulové. Piata kapitola opisuje numerické výpočty a v skratke popis programu, ktorý umožnil veľmi efektívne rátať základné parametre MAC a MC módov. Šiesta a obrázkami najbohatšia kapitola opisuje numerické výsledky, ktoré sú prezentované vo forme grafov znázorňujúcich závislosti dôležitých parametrov (Rayleighove číslo R , radiálne vlnové číslo k a frekvencia σ) na Ekmanovom čísle E a Elsasserovom čísle Λ . Siedma kapitola sa venuje vysvetleniu niektorých numerických výsledkov, a to analytickému zdôvodneniu mnohých vlastností viskózných MC módov hlavne pri prechode MAC módov na MC módy, a takisto vlastnostiam východných MAC(E) módov. V poslednej ôsmej kapitole sú závery, ktoré konštatujú splnenosť postavených cieľov. Súčasťou tejto diplomovej práce je ako príloha A pridaná práca ŠVOČ (Šoltis 2003), prezentovaná v roku 2003 na celoštátnom kole Študentskej vedeckej konferencie. V tejto práci je v rámci teoretickej časti formulovaný všeobecnejší problém nerovnomerne stratifikovanej rotujúcej vrstvy pri rozmanitých kombináciách mechanických a elektromagnetických hraničných podmienok. Avšak hlavným prínosom prílohy A je štúdium MC(W) módov katalyzovaných viskozitou.

2 Model a základné rovnice

2.1 Model rotujúcej horizontálnej vrstvy

Vychádzame z modelu nekonečnej horizontálnej vrstvy (obr. 1) Boussinesqovej tekutiny (Soward 1979). Vrstva rotuje ako tuhé teleso uhlovou rýchlosťou $\Omega_0 \hat{\mathbf{z}}$, pričom tekutina je elektricky vodivá a preniknutá azimutálnym magnetickým poľom \mathbf{B}_0 , lineárne rastúcim so vzdialenosťou s od osi rotácie. Vo vrstve môžu vznikáť nestability spôsobené vertikálnym

teplotným gradientom, preto budeme uvažovať, že medzi hornou a dolnou hranicou je udržiavaný teplotný rozdiel ΔT , kde dolná hranica je udržiavaná na teplote T_l , horná hranica na teplote $T_l - \Delta T$ a vrstva je rovnomerne stratifikovaná. Všeobecnejší prípad nerovnomernej stratifikácie pri zložitejších hraničných podmienkach je detailnejšie opísaný v práci ŠVOČ (pozri prílohu A).



Obr. 1: Model rovnomerne stratifikovanej horizontálnej vrstvy s odpovedajúcim teplotným profilom

Základný stav, ktorého stabilitu vyšetrujeme, je definovaný nasledovne

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_0 = B_M \frac{s}{d} \hat{\varphi}, \quad T_0 = T_l - \Delta T \frac{z + d/2}{d}. \quad (1)$$

Nestability vznikajú poruchami rýchlosti \mathbf{u} , magnetického poľa \mathbf{b} , a teploty $\tilde{\vartheta}$ (a tiež tlaku p). Uvažovaním len veľmi malých porúch môžeme problém linearizovať, a tým podstatne zjednodušiť. Celý problém môžeme zbezrozmerniť charakteristickou dĺžkou d , magnetickým difúznym časom d^2/η , magnetickým poľom B_M a teplotným rozdielom ΔT , čím dostaneme základné rovnice lineárnej stabilitej analýzy v nasledujúcom tvare

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda [(\nabla \times s \hat{\varphi}) \times \mathbf{b} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times s \hat{\varphi}] + R \tilde{\vartheta} \hat{\mathbf{z}} + E \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times s \hat{\varphi}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \tilde{\vartheta}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (5)$$

Systém rovníc je riešený v cylindrickej súradnicovej sústave (s, φ, z) s jednotkovými vektormi $\hat{\varphi}$, $\hat{\mathbf{z}}$.

V rovniciach sa objavujú tieto bezrozmerné čísla – Elsasserove číslo $\Lambda = B_M^2 / (2\Omega_0 \mu \rho_0 \eta)$, modifikované Rayleighove číslo¹ $R = g \alpha_T \Delta T d / (2\Omega_0 \kappa)$, Ekmanove číslo $E = \nu / (2\Omega_0 d^2)$, Robertsove číslo $q = \kappa / \eta$. Pritom κ je teplotná a $\eta = 1/(\mu \sigma_0)$ magnetická difuzivita (μ je permeabilita a σ_0 elektrická vodivosť), Ω_0 je uhlová rýchlosť rotácie, ν je kinematická viskozita, α_T je koeficient teplotnej rozťažnosti, g je gravitačné zrýchlenie a ρ_0 je hustota.

Ak rozložíme poruchy rýchlosti \mathbf{u} a poruchy magnetického poľa \mathbf{b} na poloidálnu a toroidálnu časť, dostaneme

$$\mathbf{u} = k^{-2} [\nabla \times (\nabla \times \tilde{w} \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \tilde{\omega} \hat{\mathbf{z}}], \quad \mathbf{b} = k^{-2} [\nabla \times (\nabla \times \tilde{b} \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \tilde{j} \hat{\mathbf{z}}], \quad (6)$$

¹ $R = Ra E$, kde Ra je Rayleighove číslo v nerotujúcej Benardovej vrstve a E je Ekmanove číslo

kde \tilde{w} , $\tilde{\omega}$ reprezentujú poruchy rýchlosti \mathbf{u} , \tilde{b} , \tilde{j} poruchy magnetického poľa \mathbf{b} a $\tilde{\vartheta}$ poruchy teploty. Všetky poruchy (\tilde{w} , $\tilde{\omega}$, \tilde{b} , \tilde{j} , $\tilde{\vartheta}$) možno vyjadriť v separovanom tvare

$$\tilde{f}(z, s, \varphi, t) = \Re\{f(z)J_m(ks) \exp(im\varphi + \lambda t)\}, \quad (7)$$

kde $f(z) = w(z), \omega(z), b(z), j(z), \vartheta(z)$. $J_m(ks)$ je Besselova funkcia, prirodzené² číslo m a reálne nezáporné k sú azimutálne a radiálne vlnové číslo, λ je rýdzoimaginárna frekvencia v zmysle $\lambda = i\sigma$ pri reálnej frekvencii σ .

Funkcie w, ω, b, j a ϑ , reprezentujúce poruchy, sa riadia nasledujúcim systémom obyčajných diferenciálnych rovníc

$$0 = -Dw + 2\Lambda Db - im\Lambda j - E(D^2 - k^2)\omega, \quad (8)$$

$$0 = -D\omega + 2\Lambda Dj + im\Lambda(D^2 - k^2)b - Rk^2\vartheta + E(D^2 - k^2)^2w, \quad (9)$$

$$\lambda b = imw + (D^2 - k^2)b, \quad (10)$$

$$\lambda j = im\omega + (D^2 - k^2)j, \quad (11)$$

$$\frac{\lambda}{qR}\vartheta = w + (D^2 - k^2)\vartheta, \quad (12)$$

kde operátor D je definovaný ako $D = d/dz$.

Hraničné podmienky $w = D^2w = D\omega = b = Dj = \vartheta$ pre obe hranice viažeme na prípad voľných \mathcal{F} dokonale elektricky vodivých hraníc $\frac{\infty}{\infty}$, čo budeme značiť ako $\mathcal{F}_{\infty}^{\infty}$, pričom navyše predpokladáme aj ich dokonalú tepelnú vodivosť. Pekný najnovší prehľad doteraz riešených rozmanitých hraničných podmienok je v (Šimkanin et al 2003), ale pozri aj prílohu A.

2.2 Metóda riešenia

Systém rovníc (8–12) sa v prípade zložitejších hraničných podmienok (iných ako $\mathcal{I}_{\infty}^{\infty}$ alebo $\mathcal{F}_{\infty}^{\infty}$) rieši Chandrasekharovou metódou modifikovanou na náš systém rovníc (Brestenský et al 1995, Šimkanin et al 1997). Z rovníc (8–11) vylúčime b a j , čím dostaneme rovnice

$$\left\{ \frac{1}{m^2\Lambda} D^2 (D^2 - k^2 - \lambda + 2im\Lambda)^2 + m^2\Lambda (D^2 - k^2) [1 + \mathcal{D}_{\varepsilon}]^2 \right\} w = Rk^2 (D^2 - k^2 - \lambda) [1 + \mathcal{D}_{\varepsilon}] \vartheta, \quad (13)$$

$$[1 + \mathcal{D}_{\varepsilon}] \omega = \frac{1}{m^2\Lambda} \left[-D (D^2 - k^2 - \lambda + 2im\Lambda) \right] w, \quad (14)$$

$$\text{kde } \mathcal{D}_{\varepsilon} \equiv \varepsilon (D^2 - k^2 - \lambda) (D^2 - k^2).$$

Parameter $\varepsilon = E / (m^2\Lambda)$ je extrémne malý, teda $\varepsilon \rightarrow 0$. Preto, že je pri najvyšších deriváciách v rovniciach (13, 14), môže výrazne ovplyvniť riešenia hlavne vďaka efektom v hraničných vrstvách. Pri riešení rovníc (13, 14), resp. systému (8–12) postupujeme tak, že neznáme veličiny $\vartheta(z), w(z), \omega(z), b(z), j(z)$, vyjadríme v tvare radov

$$\vartheta(z) = \frac{1}{Rk^2} \sum_{l=1}^{\infty} v_l t_l(z), \quad (15)$$

$$w(z) = \sum_l v_l w_l(z), \quad \omega(z) = \sum_l v_l \omega_l(z), \quad b(z) = \sum_l v_l b_l(z), \quad j(z) = \sum_l v_l j_l(z) \quad (16)$$

²predpokladáme len osovo nesymetrické poruchy

s tými istými koeficientami v_l a odpovedajúcimi bázovými funkciami $w_l(z)$, $\omega_l(z)$, $b_l(z)$ a $j_l(z)$ splňujúcimi tie isté hraničné podmienky, ako splňajú $w(z)$, $\omega(z)$, $b(z)$, $j(z)$ pre všetky $l = 1, 2 \dots$. Formulácia úlohy vedie nakoniec ku vlastnohodnotovému problému

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = R \mathbf{v}, \quad (17)$$

kde Rayleighove číslo R bolo zvolené za vlastnú hodnotu a súbor koeficientov v_l je vlastný vektor. Maticu \mathbf{A} môžeme vyjadriť pomocou matice \mathbf{M} ako $\mathbf{A} = k^{-2} \mathbf{M}^{-1}$, pričom prvky matice \mathbf{M} môžeme vyjadriť nasledovne

$$M_{nl} = \frac{1}{\pi_n^2 + k^2 + q^{-1}\lambda} \{ 2(n/l) + c_n \gamma_n \delta_{nl} \}, \quad (18)$$

kde členy (n/l) , c_n , γ_n sú definované v nasledujúcich častiach, resp. v prílohe A. Napr. (n/l) je definované v prílohe na strane 51, c_n v časti 3 vzťahom (23) a γ_n v časti 4 na strane 12.

3 Preformulovanie problému viskózneho prípadu pre jednoduché hraničné podmienky $\mathcal{F}_\infty^\infty$

Prezentovaný problém rovnomernej stratifikácie kvapalnej vrstvy ohraničenej voľnými nekonečne vodivými hranicami je skoro totožný so Sowardovou (1979) formuláciou problému. Pritom v predkladanej práci na rozdiel od základnej práce (Soward 1979) prípad nenulovej viskozity je nielen uvažovaný, ale i podrobne riešený. Sowardov problém bol rozvinutý do zložitejších a všeobecnejších modifikácií, napríklad s uvážením nerovnomernej stratifikácie (Boda 1988, Ševčík 1989, Brestenský & Rädler 1989, ...) a so zložitejšími mechanickými i elektromagnetickými hraničnými podmienkami (Brestenský et al 1995, Šimkanin et al 1997, 2003) a s uvážením viskozity (Brestenský & Ševčík 1994, Ševčík et al 2001, ...). Teraz naším cieľom je využiť jednoduchosť matematickej podstaty prípadu $\mathcal{F}_\infty^\infty$ pre lepšie chápanie prípadov so zložitejšími hraničnými podmienkami, resp. so zložitejšou nerovnomernou stratifikáciou, a preto vychádzame z najvšeobecnejšej formulácie problému. Naformulujeme si problém $\mathcal{F}_\infty^\infty$ s nenulovou viskozitou pri najjednoduchších hraničných podmienkach či už mechanických, alebo elektromagnetických a pri rovnomernej stratifikácii ako konkrétny problém v rámci všeobecnej formulácie problému pre rozmanité hraničné podmienky a rôzne druhy stratifikácie vrstvy (pozri tiež prílohu A).

Vlastnohodnotový problém $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = R \mathbf{v}$ sa snažíme preformulovať na problém $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ak využijeme vyjadrenie \mathbf{A} pomocou \mathbf{M}

$$\mathbf{A} = k^{-2} \mathbf{M}^{-1}, \quad (19)$$

a dosadíme ho do rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = R \mathbf{v}$, tak dostaneme $k^{-2} \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{v} = R \mathbf{v}$. Ďalej, použitím jednoduchých algebraických úprav dostaneme rovnicu

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{k^2 R} \mathbf{v},$$

ktorá sa po zavedení pomocnej premennej $\beta = (k^2 R)^{-1}$ zmení na rovnicu $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \beta \mathbf{v}$. Nasledujúcou úpravou $(\mathbf{M} - \beta \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0$ už dostávame požadovaný tvar

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{pričom platí } \mathbf{B} = \mathbf{M} - \beta \mathbf{I}. \quad (20)$$

Takýto systém má netriviálne riešenie vtedy a len vtedy ak $\det \mathbf{B} \equiv |\mathbf{B}| = 0$. Pôvodná matica \mathbf{M} má prvky

$$M_{nl} = \frac{1}{d_n} \{ 2(n/l) + c_n \gamma_n \delta_{nl} \}, \quad (21)$$

zatiaľ čo novo zadaná matica \mathbf{B} má prvky

$$B_{nl} = \frac{1}{d_n} \{ 2(n/l) + (c_n \gamma_n - \beta d_n) \delta_{nl} \}, \text{ kde} \quad (22)$$

$$d_n = \delta + q^{-1} \lambda, \quad c_n = (\delta + \lambda)[1 + \varepsilon(\delta + \lambda)\delta]. \quad (23)$$

Pripomeňme si pritom, že $\delta = \pi_n^2 + k^2$ (pozri str. 12 prílohy A, kde na str. 10 sú uvedené aj vzťahy pre (n/l) a na str. 9 pre γ_n^{-1}). Pre voľné elektricky nekonečne vodivé hranice (čiže prípad \mathcal{F}_∞) platí, že prvý člen $2(n/l)$ je rovný 0. Nenulový ostane teda len druhý člen $(c_n \gamma_n - \beta d_n) \delta_{nl}$. Tento člen obsahuje Kroneckerov tenzor δ_{nl} , preto takto zjednodušená matica \mathbf{B} má iba diagonálne členy. Determinant takejto matice je súčin diagonálnych členov

$$\prod_{n=1}^N \left(\frac{c_n \gamma_n}{d_n} - \beta \right) = 0. \quad (24)$$

Neznáma β má N koreňov

$$\beta_1 = \frac{c_1 \gamma_1}{d_1}, \quad \beta_2 = \frac{c_2 \gamma_2}{d_2}, \quad \dots, \quad \beta_N = \frac{c_N \gamma_N}{d_N}.$$

Z definície β vieme, že Rayleighove číslo R je dané $R = k^{-2} \beta^{-1}$. Ak za β^{-1} dosadíme výraz $\beta_n^{-1} = d_n (c_n \gamma_n)^{-1}$, máme N rôznych hodnôt Rayleighovho čísla

$$R_n = k^{-2} \frac{d_n}{c_n \gamma_n}. \quad (25)$$

Rayleighove číslo je vo všeobecnosti komplexné číslo. Fyzikálny zmysel má len reálne Rayleighove číslo. Preto imaginárnu časť položíme rovnú nule, čo nám dá dôležitú rovnicu pre numerické rátanie. Reálna časť $\Re(R)$ je daná

$$R = \frac{C(A\delta - \sigma q^{-1}B) + D(\delta B + \sigma q^{-1}A)}{(C^2 + D^2)k^2}. \quad (26)$$

Pomocné premenné C , D , A , B , sú definované takto

$$\begin{aligned} C &= \delta [1 + \varepsilon(\delta^2 - \sigma^2)], & D &= (1 + 2\varepsilon\delta^2) \sigma, \\ A &= E\delta^3 [2 + \varepsilon(\delta^2 - \sigma^2)] + P [\delta^2 - (\sigma - 2m\Lambda)^2] + m^2 \Lambda \delta, \\ B &= 2E\delta^2 \sigma (1 + \varepsilon\delta^2) + 2\delta P (\sigma - 2m\Lambda), \end{aligned}$$

kde A a B predstavujú reálnu a imaginárnu časť komplexného výrazu γ_n^{-1} (pozri (33, 34) v prílohe A) a $P = \pi_n^2 / m^2 \Lambda$.

Po pracnejších úpravách s využitím $\Im m\{k^2 R\} = 0$ napokon dostaneme

$$R = \frac{B}{k^2 \delta \sigma} \frac{\delta^2 + q^{-2} \sigma^2}{\varepsilon(\delta^2 + q^{-1} \sigma^2) + (1 - q^{-1})(1 + \varepsilon\delta^2)}. \quad (26')$$

Podstatu algoritmu týchto úprav vidieť vo vzťahoch (33 – 38) v nasledujúcej časti 3.3.

3.1 Polynóm pre výpočet frekvencie σ

Z podmienky $\Im m(R) = 0$ dostaneme polynóm 5. stupňa pre neznámu σ , ktorou označujeme frekvenciu nestability typu MAC vlny

$$C_5 \sigma^5 + C_4 \sigma^4 + C_3 \sigma^3 + C_2 \sigma^2 + C_1 \sigma + C_0 = 0. \quad (27)$$

K určení koeficientov C_0, C_1, \dots, C_5 je vhodné vyjadriť vzťah (25) takto

$$k^2 R = \frac{d_n}{c_n \gamma_n} = \frac{\delta + iq^{-1}\sigma}{\delta + i\sigma} \frac{\gamma_n^{-1}}{1 + \varepsilon\delta^2 + i\varepsilon\delta\sigma},$$

pričom

$$\delta = k^2 + \pi_n^2 \quad \text{a} \quad \varepsilon = \frac{E}{m^2 \Lambda}.$$

Potom z $\Im m\{k^2 R\} = 0$ pri $\gamma^{-1} = A + iB$ vyplýva (27) v nasledujúcom vyjadrení

$$(\delta^2 + q^{-1}\sigma^2)[-A\varepsilon\sigma\delta + B(1 + \varepsilon\delta^2)] + \sigma\delta(q^{-1} - 1)[A(1 + \varepsilon\delta^2) + B\varepsilon\sigma\delta] = 0.$$

Ak ďalej využijeme, že

$$\begin{aligned} A &= -a\sigma^2 + b\sigma + c, & B &= \alpha\sigma - \beta, \\ a &= \varepsilon^2 m^2 \Lambda \delta^3 + \frac{\pi_n^2}{m^2 \Lambda}, & b &= 4 \frac{\pi_n^2}{m}, & c &= m^2 \Lambda \delta (1 + \varepsilon\delta^2)^2 + \pi_n^2 \left(\frac{\delta^2}{m^2 \Lambda} - 4\Lambda \right), \\ \alpha &= 2\delta(E\delta + a), & \beta &= \delta b, \end{aligned}$$

a ďalej, že B je úmerné δ ($B \propto \delta$), tak (27) po vydelení s δ sa prepíše na (27')

$$(\delta^2 + q^{-1}\sigma^2)(A_3\sigma^3 + A_2\sigma^2 + A_1\sigma + A_0) + (q^{-1} - 1)\sigma\{[2\varepsilon E\delta^3 - a(1 - \varepsilon\delta^2)]\sigma^2 + b\sigma + (1 + \varepsilon\delta^2)c\} = 0,$$

pričom

$$\begin{aligned} A_3 &= \varepsilon a = \varepsilon(\varepsilon^2 \delta^3 m^2 \Lambda + \frac{\pi_n^2}{m^2 \Lambda}), & A_2 &= -\varepsilon b = -4\varepsilon \frac{\pi_n^2}{m}, \\ A_1 &= \varepsilon \delta m^2 \Lambda (1 + \varepsilon\delta^2)^2 + \pi_n^2 \left(\frac{2}{m^2 \Lambda} + \frac{\varepsilon\delta^2}{m^2 \Lambda} + 4\varepsilon\Lambda \right), \\ A_0 &= -(1 + \varepsilon\delta^2)b = -4(1 + \varepsilon\delta^2) \frac{\pi_n^2}{m}. \end{aligned} \quad (27'')$$

Potom koeficienty polynómu (27) vydeleného s δ možno vyjadriť takto

$$\begin{aligned} C_5 &= q^{-1}A_3, & C_4 &= q^{-1}A_2, \\ C_3 &= q^{-1}A_1 + \delta^2 A_3 + (q^{-1} - 1)[(\varepsilon\delta^2 - 1)a + 2\varepsilon^2 \delta^3 m^2 \Lambda], \\ C_2 &= q^{-1}A_0 + \delta^2 A_2 + (q^{-1} - 1)b, & C_1 &= \delta^2 A_1 + (q^{-1} - 1)(1 + \varepsilon\delta^2)c, & C_0 &= \delta^2 A_0. \end{aligned}$$

Korene polynómu sa ďalej hľadali numericky. Podrobnosti numerického výpočtu koreňov polynómu 5. stupňa sú uvedené v kapitole 5. V kapitole 7 je diskusia o koreňoch tohto polynómu v niektorých špeciálnych prípadoch.

3.2 Nutné podmienky viskózných skokov

V článkoch (Brestenský & Ševčík 2000, Ševčík et al 2001), venovaných vplyvu viskozity na MAC módy, boli prezentované grafy, opisujúce vlastnosti difúzných MAC módov pre Robertsove čísla $q \geq 1$ pri rôznych kombináciach mechanických a elektromagnetických hraničných podmienok, pričom v prípade pevných hraníc sa objavili skoky vo frekvenciách a radiálnych vlnových číslach. Tieto viskózne skoky, pretože je ich veľa, pravdepodobne súvisia so zmenou preferencie módov pre rôzne vertikálne vlnové čísla n . Pokúsme sa teraz odhaliť takéto skoky pre prípad najjednoduchších hraničných podmienok $\mathcal{F}_\infty^\infty$ a analyticky vysvetliť príčiny týchto skokov. Treba zdôrazniť, že vďaka numerickým výpočtom sú známe viaceré okolnosti, kedy tieto skoky nenastávajú. V prvom rade nenastávajú v neviskóznej kvapaline, a preto ich nazývame “viskózne skoky”. Takisto nenastávajú v prípade rovnosti

koeficientov teplotnej a magnetickej difúzie, t.j. pre $q = \kappa/\eta = 1$. Pritom aj numerické výsledky, prezentované v tejto diplomovej práci (pozri kapitolu 6.), ukazujú, že v prípade voľných nekonečne elektricky vodivých hraníc takéto skoky neexistujú. Potom čo je nutnou a čo postačujúcou podmienkou skokov, konkrétnejšie skokov spojených so zmenou preferencie módov rôznych vertikálnych vlnových čísel? Ukážeme si teraz analyticky, že nutnými podmienkami ich výskytu sú (1) nenulová viskozita, (2) $q \neq 1$ a (3) zložitejšie hraničné podmienky, teda iné ako prípad voľných hraníc $\mathcal{F}_\infty^\infty$.

Z úvodu tejto 3. kapitoly vieme, že v prípade $\mathcal{F}_\infty^\infty$ platí vzťah $R = k^{-2}\beta_n^{-1}$, kde β_n^{-1} sa dá vyjadriť takto $\beta_n^{-1} = d_n(c_n\gamma_n)^{-1}$. V prípade $E = 0$ a $q = 1$ sa d_n rovná c_n (pozri (23) na str. 6), čím sa vyjadrenie Rayleighoveho čísla výrazne zjednoduší. Z dôvodu hľadania minimálneho (teda kritického) Rayleighoveho čísla (v zmysle Lagrangeovho algoritmu hľadania viazaných extrémov funkcie viacerých premenných) si zavedieme novú pomocnú funkciu ϱ , ktorú si zdefinujeme takto

$$\varrho = \Re\{R\} + \lambda \Im\{R\}, \quad (28)$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor³. Reálna a imaginárna časť Rayleighoveho čísla sú vyjadrené takto

$$\begin{aligned} \Re\{R\} &= \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda k^2} \left[(\pi_n^2 + k^2)^2 - (\sigma - 2m\Lambda)^2 \right] + \frac{m^2\Lambda}{k^2} (\pi_n^2 + k^2), \\ \Im\{R\} &= \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda k^2} 2(\pi_n^2 + k^2)(\sigma - 2m\Lambda). \end{aligned}$$

Z podmienky extrémnosti funkcie ϱ potrebujeme riešiť takéto dve rovnice

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial k} = 0, \quad (29)$$

ku ktorým pridáme tretiu rovnicu $\Im\{R\} = 0$. Máme teda trojicu algebraických rovníc pre tri neznáme k , σ , λ . Riešením tejto sústavy sú výrazy

$$\lambda = 0, \quad \sigma = 2m\Lambda \quad \text{a} \quad k = \sqrt[4]{\pi_n^4 + m^4\Lambda^2}. \quad (30)$$

Po zohľadnení týchto výsledkov sa Rayleighove číslo zjednoduší na tvar

$$R = \frac{1}{k^2} (\pi_n^2 + k^2) \left[\frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda} (\pi_n^2 + k^2) + m^2\Lambda \right].$$

Ak si zavedieme novú pomocnú premennú x , definovanú takto

$$x = 1 + \frac{k^2}{\pi_n^2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{m^4\Lambda^2}{\pi_n^4}},$$

vyjadrenie Rayleighoveho čísla sa opäť zjednoduší

$$R = m^2\Lambda \frac{x}{x-1} \left[\frac{\pi_n^4}{m^4\Lambda^2} x + 1 \right].$$

Z definície premennej x jednoduchými algebraickými úpravami dostaneme rovnicu

$$\frac{\pi_n^4}{m^4\Lambda^2} = \frac{1}{(x-1)^2 - 1},$$

³nesúvisí s komplexnou frekvenciou $\lambda = i\sigma$

s využitím ktorej máme veľmi jednoduché vyjadrenie Rayleighovho čísla R

$$R = m^2 \Lambda \frac{x}{x-2}. \quad (31)$$

Tento výraz je už vhodný k vyjadreniu derivácie Rayleighovho čísla R podľa vertikálneho čísla n . Pri počítaní derivácie využijeme pravidlo o derivovaní zloženej funkcie v nasledujúcom zmysle

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n},$$

kde jednotlivé derivácie na pravej strane tejto rovnice sú vyjadrené takto

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{2m^2 \Lambda}{(x-2)^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{-2m^4 \Lambda^2 / \pi_n^4 n^3}{\sqrt{1 + m^4 \Lambda^2 / \pi_n^4}}.$$

Výrazy na pravej strane obidvoch rovníc sú záporné, teda výsledná derivácia $\partial R / \partial n$ je kladná ($\partial R / \partial n > 0$), čo znamená, že ku skokom zmenou vertikálneho vlnového čísla n nemôže dôjsť, lebo mód s nižším vertikálnym vlnovým číslom má aj nižšie Rayleighove číslo, a je teda vždy viac preferovaný. Je zrejmé, že k väčšiemu počtu tzv. viskózných skokov spojených so zmenou preferencie medzi MAC módmi rôznych vertikálnych vlnových čísel n nutne dochádza iba vo viskóznom prípade. Treba však zdôrazniť, že dôkaz využíval okrem nulovej viskozity ďalšie dôležité zjednodušenia $q = 1$ a hraničné podmienky $\mathcal{F}_\infty^\infty$. Preto náš analytický dôkaz nemôže byť dôkazom pre všeobecný viskózný prípad. Takže zatiaľ sa musíme uspokojiť len s tromi nutnými podmienkami existencie viskózných skokov: viskozitou, $q \neq 1$ a inými hraničnými podmienkami ako $\mathcal{F}_\infty^\infty$.

Zdá sa, že postačujúcou podmienkou týchto skokov u viskóznej kvapaliny budú súčasne $q \neq 1$ a zložitejšie hraničné podmienky, pretože tieto najjednoduchšie $\mathcal{F}_\infty^\infty$ ku skokom nevedú a všetky zložitejšie hraničné podmienky napr. $\mathcal{R}_\infty^\infty$ a $\mathcal{F}_1^{10^{-3}}$ vo viskózných prípadoch ku skokom vedú (pozri napr. Šimkanin et al 2003). Ostáva len dúfať, že naznačenú možnosť postačujúcich podmienok viskózných skokov spojených so zmenou preferencie módov rôznych vertikálnych vlnových čísel n sa podarí v rozumnom čase aj analyticky dokázať. Zaujímavé je tiež pripomenúť, že v neviskóznom prípade $\mathcal{I}_1^{10^{-3}}$ ku skokom tiež dochádza; ich príčinou sú zložitejšie elektromagnetické hraničné podmienky.

3.3 Prechod MAC(W) módov na MC(W) módy

Numerické výsledky ukázali, že pri dostatočne vysokej hodnote Ekmanovho čísla $E = \mathcal{O}(10^{-3})$ nastane u módu 1W [mód MAC(W) pri azimutálnom vlnovom čísle $m = 1$] na grafe, ktorý vyjadruje závislosť $R = R(\Lambda)$ prudký pokles Rayleighovho čísla do záporných hodnôt. Pri tomto poklese nadobudne Rayleighove číslo pri určitej hodnote Elsasserovho čísla Λ nulovú hodnotu, čomu hovoríme, že vznikol MC mód. MAC(W) módy s rôznymi vertikálnymi vlnovými číslami l prejdú na MC módy pri rôznych hodnotách Λ . Nakoľko sú MC módy nezávisle na Robertsovom čísle q , máme určitú voľnosť pri jeho voľbe. Mnohé z komplikovaných analytických rovníc a výrazov sa v prípade $q = 1$ podstatne zjednodušia, preto si vyberieme práve prípad $q = 1$, s ktorým súvisí mierne preformulovanie predchádzajúcich rovníc.

Po vyjadrení d_n a c_n v rovnici $k^2 R = d_n / c_n \gamma_n$ máme rovnicu

$$k^2 R = \frac{\delta + q^{-1} \lambda}{(\delta + \lambda)[1 + \varepsilon(\delta + \lambda)\delta]} \gamma_n^{-1}, \quad (32)$$

ktorá sa pre $q = 1$ zjednoduší na tvar

$$k^2 R = [1 + \varepsilon(\delta + i\sigma)\delta]^{-1} \gamma_n^{-1} \quad (33)$$

Ak si komplexný výraz γ_n^{-1} vyjadríme v tvare $\gamma_n^{-1} = A + iB$, potom

$$k^2 R = \frac{A + iB}{1 + \varepsilon\delta^2 + i\varepsilon\delta\sigma} = \frac{(A + iB)[1 + \varepsilon\delta^2 - i\varepsilon\delta\sigma]}{(1 + \varepsilon\delta^2)^2 + \varepsilon^2\delta^2\sigma^2}. \quad (34)$$

Ďalej si menovateľ tejto rovnice označíme M a v čitateli zoskupíme reálne a imaginárne členy; dostaneme tak rovnicu

$$k^2 R = [A(1 + \varepsilon\delta^2) + B\varepsilon\delta\sigma + i\{B(1 + \varepsilon\delta^2) - A\varepsilon\delta\sigma\}]/M \quad (35)$$

Túto rovnicu môžeme rozdeliť na $\Re\{k^2 R\}$ a $\Im\{k^2 R\}$. Imaginárnu časť položíme rovnú nule, čo nám dá nasledujúce vyjadrenie

$$\Im\{k^2 R\} = 0 \iff B(1 + \varepsilon\delta^2) - A\varepsilon\delta\sigma = 0. \quad (36)$$

Reálnu časť vyjadríme v tvare

$$\Re\{k^2 R\} = \frac{B}{M} \left[\frac{A}{B}(1 + \varepsilon\delta^2) + \varepsilon\delta\sigma \right], \quad (37)$$

kde za zlomok A/B dosadíme výraz $(1 + \varepsilon\delta^2)/\varepsilon\delta\sigma$ z rovnice $\Im\{k^2 R\} = 0$, čo podstatne zjednoduší $\Re\{k^2 R\}$ na tvar

$$\Re\{k^2 R\} = \frac{B}{M} \left[\frac{(1 + \varepsilon\delta^2)^2}{\varepsilon\delta\sigma} + \varepsilon\delta\sigma \right] = \frac{B}{\varepsilon\delta\sigma}. \quad (38)$$

Po dosadení za výraz B dostaneme konečné vyjadrenie rovnice

$$\Re\{k^2 R\} = \frac{2}{\varepsilon\sigma} \left\{ E\delta\sigma(1 + \varepsilon\delta^2) + \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda}(\sigma - 2m\Lambda) \right\}. \quad (39)$$

Z podmienky $\Im\{k^2 R\} = 0$ sme dostali rovnicu (36), z ktorej po dosadení výrazov A a B dostaneme trochu neprehľadnú rovnicu

$$2(1 + \varepsilon\delta^2) \left\{ E\delta\sigma(1 + \varepsilon\delta^2) + \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda}(\sigma - 2m\Lambda) \right\} - \varepsilon\sigma \left\{ E\delta^3 [\varepsilon(\delta^2 - \sigma^2) + 2] + \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda} [\delta^2 - (\sigma - 2m\Lambda)^2] + m^2\Lambda\delta \right\} = 0, \quad (40)$$

ktorá je polynómom tretieho stupňa pre neznámu σ

$$C_3\sigma^3 + C_2\sigma^2 + C_1\sigma + C_0 = 0 \quad (41)$$

s takto definovanými koeficientami

$$\begin{aligned} C_3 &= \varepsilon^2 E\delta^3 + \varepsilon \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda}, \\ C_2 &= -4\varepsilon \frac{\pi_n^2}{m}, \\ C_1 &= E\delta(1 + \varepsilon\delta^2)^2 + \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda}(2 + \varepsilon\delta^2) + 4\pi_n^2\Lambda\varepsilon, \\ C_0 &= -\frac{4}{m}\pi_n^2(1 + \varepsilon\delta^2). \end{aligned}$$

Porovnaj s koeficientami A_3, A_2, A_1, A_0 (27") na str. 8 v časti 3.1. Tento polynóm je už vhodný na zostavenie programu a numerické výsledky získané týmto programom ukazujú zaujímavé správanie sa MAC módu pri prechode na MC mód, ako uvidíme v šiestej kapitole venovanej numerickým výsledkom.

4 Preformulovanie problému pre MC módy

Na rozdiel od MAC módov MC módy ku svojej existencii nepotrebujú vztlakovú (teda Archimedovu) silu. Tento fakt umožňuje veľmi výrazne zjednodušiť pôvodný všeobecný a dosť komplikovaný vlastnohodnotový problém

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = R \mathbf{v}.$$

Nulová vztlaková sila znamená nulové Rayleighove číslo, čo pôvodný problém zjednoduší na

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ak hľadáme netriviálne riešenie \mathbf{v} , tak musí platiť

$$\det \mathbf{A} \equiv |\mathbf{A}| = 0.$$

Podmienka $|\mathbf{A}| = 0$ dáva (pre konečné kladné k) $|\mathbf{M}| \rightarrow \infty$, pretože $\mathbf{A} = k^{-2} \mathbf{M}^{-1}$. Pritom pre prvky M_{nl} matice \mathbf{M} platí

$$M_{nl} = \frac{1}{\pi_n^2 + k^2 + q^{-1}\lambda} \{ 2(n/l) + c_n \gamma_n \delta_{nl} \}.$$

Sústredíme pozornosť na druhý člen v zátvorkách, lebo nezávisí na hraničných podmienkach, a tým sľubuje najjednoduchšie matematické prístupy. Diagonálne prvky M_{ll} matice \mathbf{M} sú vďaka 2. členu $c_n \gamma_n \delta_{nl}$ rôzne od nuly pre všetky ($l = 1, 2, \dots$). Stačí, aby jeden z nich $\rightarrow \infty$ a $|\mathbf{M}| \rightarrow \infty$. To vedie ku problému $\gamma_l^{-1} = 0$, kde

$$\begin{aligned} \gamma_l^{-1} = & E[\varepsilon(\pi_l^2 + k^2 + \lambda)^2(\pi_l^2 + k^2)^3 + 2(\pi_l^2 + k^2 + \lambda)(\pi_l^2 + k^2)^2] + \\ & + \frac{1}{m^2\Lambda} \pi_l^2 (\pi_l^2 + k^2 + \lambda - 2im\Lambda)^2 + m^2\Lambda(\pi_l^2 + k^2). \end{aligned}$$

Výraz γ_l^{-1} je komplexné číslo, čo umožní rovnicu $\gamma_l^{-1} = 0$ rozdeliť na dve rovnice

$$\Re(\gamma_l^{-1}) = 0, \quad \Im(\gamma_l^{-1}) = 0$$

Pri daných vstupných parametroch E , Λ , m , $\varepsilon = E/(m^2\Lambda)$, $\delta = \pi_l^2 + k^2$, dostávame pre každé $\pi_l (= l\pi)$ vzťahy medzi k a σ , resp. medzi δ a σ . Potom

$$\begin{aligned} \Re(\gamma_l^{-1}) = 0 \implies \\ E[\varepsilon(\delta^2 - \sigma^2)\delta^3 + 2\delta^3] + \frac{\pi_l^2}{m^2\Lambda} [\delta^2 - (\sigma - 2m\Lambda)^2] + m^2\Lambda\delta = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Im(\gamma_l^{-1}) = 0 \implies \\ E[\varepsilon \cdot 2\delta^4\sigma + 2\sigma\delta^2] + \frac{\pi_l^2}{m^2\Lambda} 2\delta(\sigma - 2m\Lambda) = 0 \\ \implies \sigma = \frac{2\pi_l^2/m}{\pi_l^2/(m^2\Lambda) + E\delta(\varepsilon\delta^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Je zrejmé, že frekvencia σ je kladné číslo, čo znamená, že ide o západné MC(W) módy. Teda viskozitou katalyzované MC módy sa šíria len západným smerom, a preto ich značíme MC(W) módy. Zavedením nových parametrov

$$\alpha = m^2 E\Lambda, \quad \varepsilon_l = \pi_l^4 \varepsilon = \frac{\pi_l^4 E}{m^2\Lambda}, \quad x = \frac{\delta}{\pi_l^2} = 1 + \frac{k^2}{\pi_l^2}, \quad (44)$$

a ďalšími algebraickými úpravami možno rovnice (42, 43) zjednodušiť na tvar

$$[I_\eta + \alpha x (1 + \varepsilon_l x^2)]^2 = 4 \frac{\alpha^2}{m^2} x. \quad (45)$$

$$(E \sigma)^2 x = I_\eta, \quad (46)$$

kde $I_\eta = 1$ v uvažovanom prípade zanedbávaných inerciálnych síl (2). Porovnaj vzťahy (45, 46) so vzťahmi (37, 38) v prílohe A.

Ostáva riešiť polynomiálnu rovnicu 6. stupňa (45) pre neznámu x . Analýzou tejto rovnice sa dajú odvodiť mnohé zaujímavé vlastnosti MC(W) módov. Jej podrobnosti a mnohé ďalšie vlastnosti spojené hlavne s prechodom západných MAC módov do viskózných MC(W) módov sú v kapitole 7.

Na záver ešte poznámku k uvažovaným západným viskóznym MC(W) módom. Tak ako MAC módy, tak aj MC módy uvažujeme ako nestability typu MAC vln, resp. MC vln. Znamená to, že tu študované MAC a MC módy sú ovplyvnené difúznymi procesmi (napr. Soward 1979, Fearn et al 1988, Proctor 1994) v porovnaní s klasickými nedifúznymi MAC a MC vlnami (Braginsky 1964, resp. Hide 1966). Navyše uvažujeme vplyv viskozity, ktorá podobne svojim difúznym pôsobením na hybnosť, resp. moment hybnosti nemusí spôsobovať len tlmenie vznikajúcich nestabilit, ale zásadným spôsobom ovplyvniť kvalitu vznikajúcich nestabilit, resp. prispieť ku vzniku nových nečakaných módov, napr. aj tu študovaných MC(W) módov katalyzovaných viskozitou (Brestenský et al 2001). Uváženie často zanedbávanej viskozity otvára tiež otázku, ako by našu analýzu ovplyvnilo zahrnutie takisto často zanedbávaných inerciálnych síl. V zemskom jadre Rossbyho číslo, vyjadrujúce podiel inerciálnych síl a Coriolisovej sily, je $\mathcal{O}(10^{-8})$, zatiaľ čo Ekmanove číslo je $\mathcal{O}(10^{-15})$, resp. $\mathcal{O}(10^{-9})$ v prípade molekulárnej viskozity, resp. turbulentnej viskozity zemského jadra. Dynamicky významnejšia je viskózna sila, aj keď podľa práve uvedených odhadov inerciálne sily sú väčšie ako ona. Preto v rôznych modeloch aplikovaných na hydromagnetické procesy v zemskom jadre sa skôr zanedbávajú inerciálne ako viskózne sily v základnej pohybovej Navier-Stokesovej rovnici.

V našom prípade, ak by sme uvážili inerciálnu silu spojenú s nestacionárnosťou rýchlosti ($\sim \partial \mathbf{u} / \partial t$), tak v rovniciach (45, 46) by bolo

$$I_\eta = \left(\frac{P_m}{P_m + 1} \right)^2, \quad \text{kde } P_m = \frac{\nu}{\eta}$$

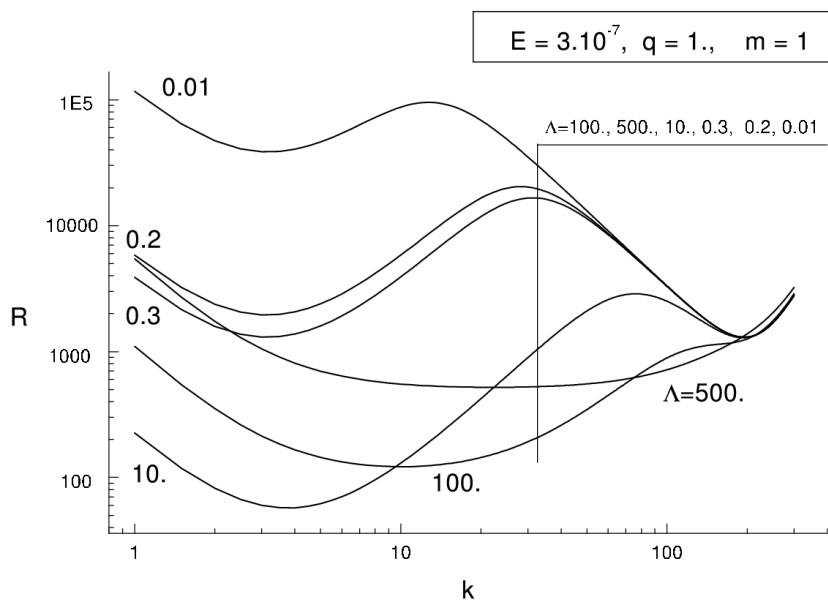
je magnetické Prandtllove číslo. Ako vieme (pozri prílohu A) MC(W) módy vznikajú až pre relatívne veľké Ekmanove čísla s najmenšími hodnotami $E = \mathcal{O}(10^{-3})$, čo dáva $P_m \gg 1$, a tým $I_\eta \rightarrow 1$. Teda uváženie lineárneho inerciálneho člena v rovnici (2) by len mierne modifikovalo, ale nedeterminovalo viskózne MC(W) módy. Presne v súlade so všetkými modelmi, študovanými tímom na Katedre geofyziky, resp. Katedre fyziky Zeme a planét FMFI UK, kde zanedbávanie inerciálnych síl bolo opodstatnenejšie oproti prípadom viskózných MC(W) módov.

5 Numerické výpočty a popis práce programu

Numerické výsledky v tejto predkladanej práci sú v podstate grafy, vyjadrujúce závislosti kritických čísel Rayleighovho R_c , radiálneho vlnového k_c a frekvencie σ_c MAC módov na Elsasserovom a Ekmanovom čísle. V tejto časti si bližšie opíšeme program, ktorý počítal spomínané tri základné parametre, charakterizujúce MAC módy.

Ďalej si bližšie rozanalyzujeme len prípad západných MAC(W) módov, lebo program na počítanie charakteristík (R_c , k_c , σ_c) východných MAC(E) módov je až na drobné úpravy

rovnaký. Vstupné parametre programu sú azimutálne vlnové číslo m , Robertsove číslo q , Elsasserove číslo Λ a Ekmanove číslo E . Kritické Rayleighove číslo je reálne číslo a pri daných vstupných parametroch minimálne. Podmienka reálnosti Rayleighovho čísla $\Im m(R) = 0$ nám dá polynomiálnu rovnicu 5. stupňa pre neznámu σ (pozri časť 3.1). V tejto rovnici vstupuje ako parameter radiálne vlnové číslo k . Rovnica nám dá 5 koreňov, z ktorých iba jeden odpovedá MAC(W) módu, t.j. je reálny a kladný. Máme teda radiálne vlnové číslo k a jemu odpovedajúcu frekvenciu σ . Ak tieto dve čísla spolu s ostatnými vstupnými parametrami dosadíme do výrazu (26), dostaneme hodnotu Rayleighovho čísla. Úloha je nájsť také radiálne číslo a jemu odpovedajúcu frekvenciu, pri ktorých je Rayleighove číslo minimálne (samozrejme aj pri ostatných vstupných parametroch). Pre lepšie pochopenie uvádzame graf (obr. 2) vyjadrujúci závislosť Rayleighovho čísla na radiálnom vlnovom čísle. Jednotlivé krivky súvisia s rôznymi hodnotami Elsasserovho čísla Λ . Z grafu možno



Obr. 2: Závislosť Rayleighovho čísla R na radiálnom vlnovom čísle k pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla $\Lambda = 0.01, 0.2, 0.3, 10., 100., 500.$

vidieť, že pri malých hodnotách Λ , dosahujú krivky dve lokálne minimá. Prvé minimum súvisí s hydromagnetickým módom a nastáva pri radiálnom vlnovom čísle $k \sim 3$. Druhé minimum súvisí s viskóznym módom, pre ktorý sú typické hodnoty radiálneho vlnového čísla $k \sim 200$. Kritické Rayleighove číslo je najmenšie, preto do hry vstupujú práve tieto dve minimá. Je zrejmé, že pri malých hodnotách Elsasserovho čísla je kritické Rayleighove číslo totožné s druhým minimom, lebo Rayleighove číslo, odpovedajúce tomuto minimu, je oveľa menšie ako Rayleighove číslo, odpovedajúce prvému minimu. Existuje však hodnota Λ_c , pri ktorej sú obidve minimá rovnaké, a pre $\Lambda > \Lambda_c$ je už kritické Rayleighove číslo totožné s prvým minimom. Práve pri hodnote Λ_c dochádza ku zmene preferencie z viskózneho módu na hydromagnetický mód. Ako sa to prejaví na grafoch vyjadrujúcich závislosti $R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$, je podrobne opísané v kapitole 6. Všimnime si ešte, že pri väčších hodnotách Λ už druhé minimum, súvisiace s viskóznym módom, neexistuje. Program, ktorý počíta kritické Rayleighove čísla, pracuje nasledovne. Pri vstupných parametroch (E, Λ, q, m) si zoberieme počiatočný interval radiálnych vlnových čísel $k \in (0.1, 200)$, ktorý sa rozdelí na tisíc podintervalov, ktorých hranice nám dajú sadu radiálnych vlnových čísel. V každom z týchto čísel spočítame korene polynómu 5. stupňa a po

vybratí fyzikálne vhodného koreňa (σ) vypočítame Rayleighove číslo. Z danej sady radiálnych vlnových čísel vyberieme také, ktorému odpovedá najmenšie Rayleighove číslo. Okolo tohto radiálneho vlnového čísla utvoríme nový interval (malé okolie), ktorý opäť rozdelíme na menšie podintervaly a predchádzajúce výpočty zopakujeme. Postupne delíme stále menšie a menšie intervaly až po požadovanú presnosť. Takto získané Rayleighove číslo, radiálne vlnové číslo a frekvencia sú už kritické. Týmto sme vlastne získali jeden bod jednej krivky na grafoch, vyjadrujúcich závislosť $R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$, ak uvažujeme závislosť na Elsasserovom čísle Λ . Celú krivku získame, ak necháme predchádzajúce výpočty spraviť v cykle pre rôzne hodnoty Λ (prípadne Ekmanovho čísla E pri závislostiach $R_c = R_c(E)$, $k_c = k_c(E)$, $\sigma_c = \sigma_c(E)$).

Na výpočet koreňov polynómu 5. stupňa sme použili procedúru *zroots*, ktorá je súčasťou balíka programov Numerical Recipes (Press et al 1989). Táto procedúra počíta korene polynómu Laguerrovou metódou, ktorej konvergencia je veľmi zriedkavo porušená a je dostatočne rýchla aj v prípadoch, keď sú koeficienty polynómu rôznych rádov. Navyše Laguerrova metóda je univerzálne použiteľná metóda k výpočtu koreňov polynómov, pretože veľmi dobre konverguje v prípade ľubovoľných typov koreňov, či už reálnych, komplexných, jednoduchých alebo viacnásobných.

6 Numerické výsledky

Špeciálna kombinácia mechanických a elektromagnetických hraničných podmienok $\mathcal{F}_\infty^\infty$ (voľné elektricky nekonečne vodivé hranice) umožnila preformulovanie počítačového problému, čo z numerického hľadiska viedlo k podstatnému zjednodušeniu. Pôvodný komplikovaný vlastnohodnotový problém sa zmenil na jednoduchší problém hľadania koreňov polynómu piateho stupňa. Výsledkom numerických výpočtov sú kritické Rayleigh-ove číslo R_c , kritické radiálne vlnové číslo k_c a kritická frekvencia σ_c . Nasledujúce grafy možno rozdeliť na 3 hlavné časti: [1] západné MAC módy MAC(W), ktorých frekvencia je kladná ($\sigma > 0$; obrázky 3 až 7), [2] východné MAC módy MAC(E), ktoré majú zápornú frekvenciu ($\sigma < 0$; obrázky 8 až 11), [3] prechod MAC(W) módov na MC(W) módy (obrázky 12 až 15).

Všetky grafy prvej [1] a druhej časti [2] môžeme rozdeliť na dve skupiny, pričom prvá skupina predstavuje sériu grafov, ktoré vyjadrujú závislosť kritického Rayleighovho čísla, kritického radiálneho vlnového čísla a kritickej frekvencie na Elsasserovom čísle ($R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$), kde každý takýto graf obsahuje MAC módy s rôznymi azimutálnymi vlnovými číslami väčšinou $m = 1, 2, 5, 30$ (podľa potreby sú niekde pridané aj ďalšie módy s inými azimutálnymi vlnovými číslami), ale s jedným konštantným Robertsovým číslom q . Na zjednodušenie orientácie medzi grafmi zavedieme nasledujúcu logiku, ktorú vysvetlíme na jednom príklade. Označenie grafu menom WQ1.1R znamená, že ide o západné módy (W), graf vyjadruje závislosť kritického Rayleigh-oveho čísla (R) na Elsasserovom čísle; všetky krivky, ktoré graf obsahuje, majú rovnaké Robertsove číslo rovné hodnote 1.1 (v označeniach grafov vyjadrené symbolom Q1.1) a líšia sa len rôznymi azimutálnymi vlnovými číslami m .

Takéto pomenovanie grafov má zjednodušiť a zrýchliť identifikáciu grafu skôr intuitívne, lebo súvisí so základnými charakteristikami grafu (vzájomná závislosť veličín na grafe, konštantné vstupné parametre, typ MAC módu, W alebo E), pričom korešponduje s textom, ktorý je na každom grafe v jeho hornej časti v rámečku a hovorí v podstate to isté, ale trochu iným štýlom. Všetky grafy sú v skutočnosti číslované klasickým spôsobom (napr. obr. 3a, obr. 3c). Grafy sú zoskupené do obrázkov, kde každý obrázok obsahuje 6 grafov rozlíšených písmenami a, b, c, d, e, f.

Numerické výpočty boli spravené pre Robertsove čísla $q = 0.5, 0.9, 1., 1.1, 2., 5.$ (v prípade MAC(E) módov $q = 1.05, 1.1, 2., 5.$) a pre Ekmanove čísla $E = 3 \cdot 10^{-7}$. Závislosť $k_c = k_c(\Lambda)$

značíme k a závislosť $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$ značíme s , napr. EQ2.k a EQ1.1s.

V druhej skupine grafov si Robertsove číslo q a azimutálne vlnové číslo m vymenili úlohy. Grafy vyjadrujú jednu z troch už popísaných závislostí, pričom jednotlivé módy v rámci jedného grafu majú rovnaké azimutálne vlnové číslo, ale líšia sa Robertsovými číslami. Na označenie grafov si zavedieme podobný systém ako v prvej skupine, napr. WM5s. Logika je tá istá, až na písmeno M, ktoré hovorí, že ide o módy s rovnakým azimutálnym vlnovým číslom m s danou hodnotou (v našom prípade $m = 5$), ktoré sa líšia len Robertsovými číslami q . Ide v podstate o tie isté módy ako v prvej skupine, až na to, že kým v prvej skupine sú pozoskupované podľa rovnakých Robertsových čísel, v druhej skupine sú zoskupené podľa rovnakých azimutálnych vlnových čísel. Všetky MAC(W) a MAC(E) módy boli počítané pri Ekmanovom čísle $E = 3 \cdot 10^{-7}$ a pri Elsasserovom čísle v rozpätí $\Lambda \in \langle 1 \cdot 10^{-4}, 3000 \rangle$. Jedným z dôležitých rozdielov MAC(W) a MAC(E) módov je, že zatiaľ čo západné MAC módy existujú v celom uvažovanom rozpätí Λ , východné módy začínajú existovať až od určitej nábehovej hodnoty Λ , ktorá závisí od Robertsovho čísla q aj od azimutálneho vlnového čísla m .

Tretiu [3] najmenej rozsiahlu časť grafov, prechod MAC(W) módov na MC(W) módy môžeme rozdeliť na dve podskupiny, kde prvá obsahuje grafy vyjadrujúce závislosti kritického Rayleighovho čísla, kritického radiálneho vlnového čísla a kritickej frekvencie na Ekmanovom čísle ($R_c = R_c(E)$, $k_c = k_c(E)$ a $\sigma_c = \sigma_c(E)$) pri hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 2500$ s azimutálnym vlnovým číslom $m = 1$, Robertsovým číslom $q = 1.0$ a s Ekmanovým číslom v rozpätí $E \in \langle 0.2 \cdot 10^{-3}, 1.5 \cdot 10^{-3} \rangle$. Jednotlivé krivky vyjadrujú módy s rôznymi vertikálnymi vlnovými číslami $l = 1, 2, \dots, 10, 11$. Druhá podskupina obsahuje dve série grafov závislosti $R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$ pri $m = 1$, $q = 1.0$, pre rôzne vertikálne vlnové čísla $l = \{1, \dots, 11\}$, kde Λ berieme v rozpätí $1 \cdot 10^{-4} - 2500$ v prvej sérii a $100 - 3000$ v druhej sérii.

6.1 Západné MAC módy

Prvá časť prezentovaných grafov pre MAC(W) módy začína trojicou grafov označených v zmysle hore vysvetlenej logiky WQ.5R, WQ.5k, WQ.5s (obr. 3a, b, c). Tieto grafy obsahujú po 4 krivky znázorňujúce 4 módy pri konštantnom Robertsovom čísle $q = 0.5$, s rôznymi azimutálnymi vlnovými číslami $m = 1, 2, 5, 30$. Módy v grafe WQ.5R (obr. 3a) majú podobný tvar, charakterizovaný začiatočnou vodorovnou časťou, ktorú budeme ďalej nazývať viskóznym módom (v-mód), lebo jeho existencia je podmienená nenulovou viskozitou a časťou podobnou parabole s lokálnym minimom, ktorú budeme ďalej nazývať hydromagnetickým módom (h-mód), ktorý existuje aj pri nulovej viskozite. Viskóznym módom je pre všetky štyri módy rovnaký, čo sa týka hodnoty kritického Rayleighovho čísla R_c , t.j. je nezávislý na azimutálnom vlnovom čísle m . Jednotlivé módy sa odlišujú len v h-módoch a v hodnotách Elsasserovho čísla Λ , pri ktorých dochádza k prekríženiu v-módu a h-módu. Táto hodnota Λ_{vh}^m hovorí o zmene preferencie v-módu na h-mód pri azimutálnom vlnovom čísle m pre $\Lambda > \Lambda_{vh}^m$ z dôvodu menšieho Rayleighovho čísla u h-módu. Hodnoty Λ_{vh}^m sa s nárastom m znižujú. Módy s $m = 2, 5, 30$ sa vyznačujú istým druhom symetrie vzhľadom na lokálne minimum R_c , ale mód s $m = 1$ túto symetriu porušuje. Na grafe WQ.5k (obr. 3b) sú jednotlivé módy charakterizované prudkým skokom v hodnote kritického radiálneho vlnového čísla z hodnôt $k_c \sim 200$ na hodnotu $k_c \sim 3$, čo súvisí s prechodom v-módu na h-mód, ktorý má rádovo iné hodnoty k_c . Pre hodnoty $\Lambda \geq \mathcal{O}(10)$ sa módy s $m = 5, 30$ kvalitatívne líšia od módov s $m = 1, 2$. Máme dôvod predpokladať, že aj módy s $m = 5, 30$ sa správajú v zmysle logiky módov s $m = 1, 2$, ale až pri väčších hodnotách Λ . Krivky grafu WQ.5s (obr. 3c) neobsahujú skoky v hodnotách σ_c , čo znamená, že kritické frekvencie v-módu a h-módu sú rádovo rovnaké. Podobne ako v prípade grafu WQ.5k aj na tomto grafe sa módy s $m = 1, 2$ odlišujú kvalitou od módov s $m = 5, 30$, navyše 1W mód

znova vykazuje istý typ nesymetrie, ktorá súvisí s nesymetriou v prípade grafu WQ.5R. Nasledujúca trojica grafov WQ.9R, WQ.9k, WQ.9s (obr. 3d, e, f) vyjadruje tie isté závislosti ako predchádzajúca s tým rozdielom, že Robertsove číslo q sa zmenilo z hodnoty 0.5 na hodnotu 0.9. Znova máme 4 módy 1W, 2W, 5W, 30W, ktoré majú ten istý charakter, ako na predchádzajúcich grafoch. Múd 1W na grafoch WQ.9R (obr. 3d) a WQ.9s (obr. 3f) vykazuje stále nesymetriu, ktorá ale nie je až taká výrazná ako v prípade $q = 0.5$. Najväčší rozdiel oproti prípadu $q = 0.5$ nastal v grafe WQ.9s, kde sa na krivkách objavujú skoky, ktoré súvisia s prechodom v-módov na h-módy. Tieto skoky vyjadrujú fakt, že v prípade $q = 0.9$ sa frekvencie v-módu mierne líšia od frekvencií h-módu. Frekvencie sú rádovo stále rovnaké (na rozdiel od radiálnych vlnových čísel), ale h-mód má trochu menšie frekvencie ako v-mód.

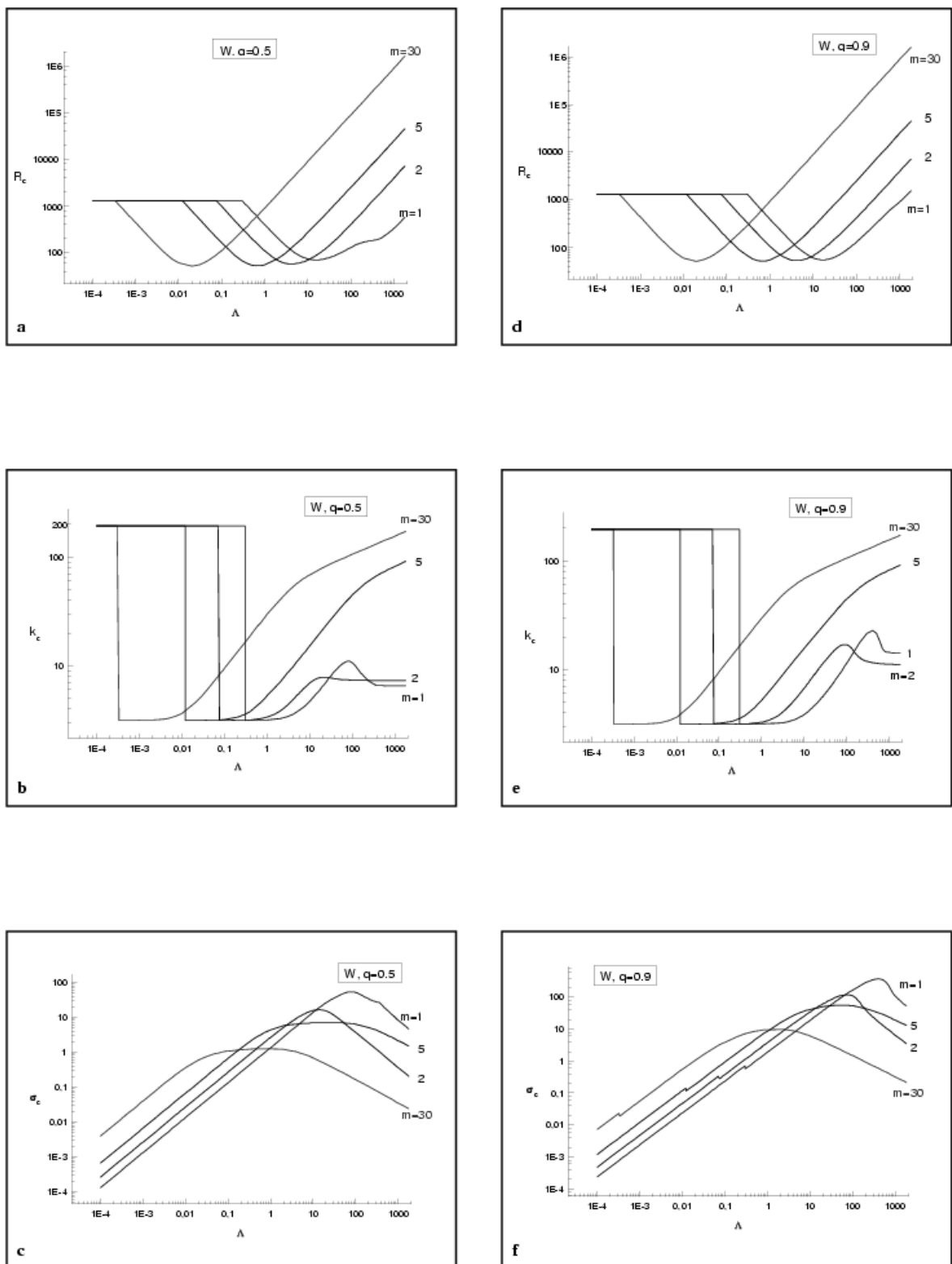
Trojica grafov (obr. 4a, b, c) pre prípad Robertsového čísla $q = 1.0$ sa od prípadu $q = 0.9$ odlišuje minimálne. Nesymetria 1W módu sa stratila a zdanlivý kvalitatívny rozdiel módov 1W a 2W oproti módom 5W a 30W by sa pravdepodobne tiež stratil, ak by sme brali do úvahy $\Lambda \gg 2000$.

MAC módy pre prípad $q = 1.1$ výrazne menia svoju kvalitu, čo dobre vidieť hlavne na grafoch WQ1.1k (obr. 4e) a WQ1.1s (obr. 4f). Toto správanie sa dalo očakávať vzhľadom na fakt, že už analytické výpočty dávali rozdiely v mnohých rovniciach pre prípad $q > 1$ oproti prípadu $q = 1$, čo sa prejavilo hlavne väčšou zložitou mnohých výrazov. Zmenu kvality vidieť hlavne na grafe závislosti $k_c = k_c(\Lambda)$, kde sa u módu 30W objavujú dva zákmity, jeden ostrý [pozri diskusiu k nástupu MAC(E) módov v časti 7.2] a druhý miernejší. Múd 5W obsahuje náznak takéhoto zákmitu. Podobne sa objavuje istý druh vydutia aj na grafe WQ1.1s (obr. 4e) pre mód 30W a znova náznak takéhoto správania sa aj u módov s menším azimutálnym vlnovým číslom. Kritické Rayleighove čísla v prípade $q = 1.1$ sa od prípadu $q = 1$ líšia minimálne.

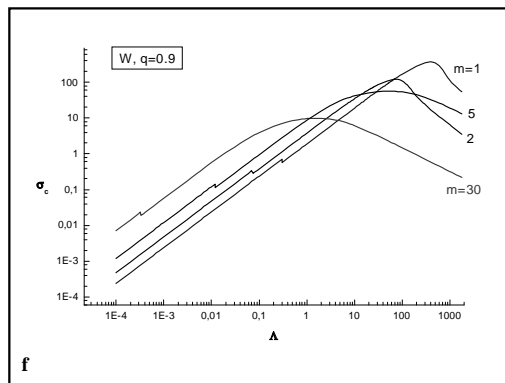
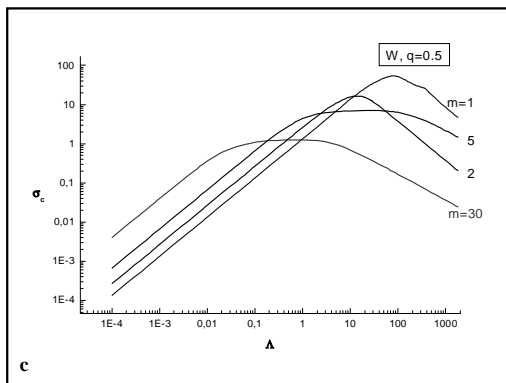
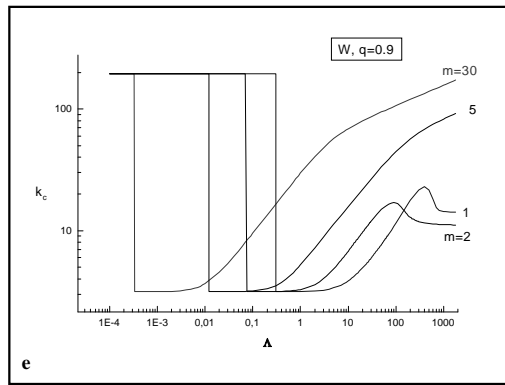
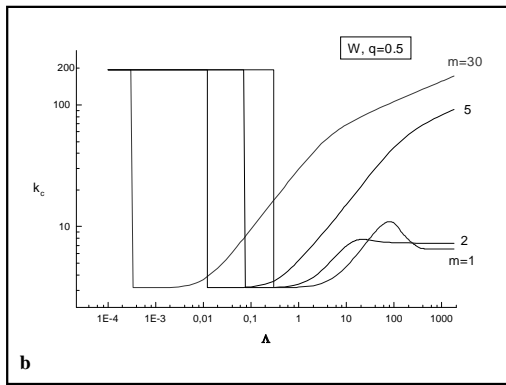
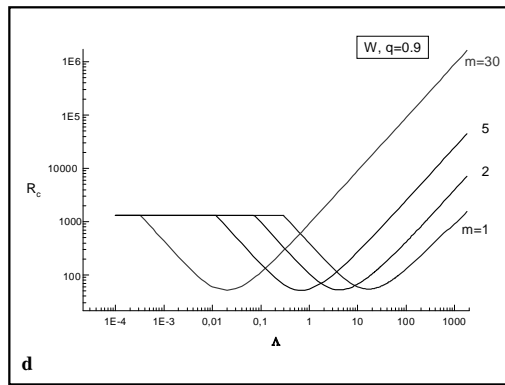
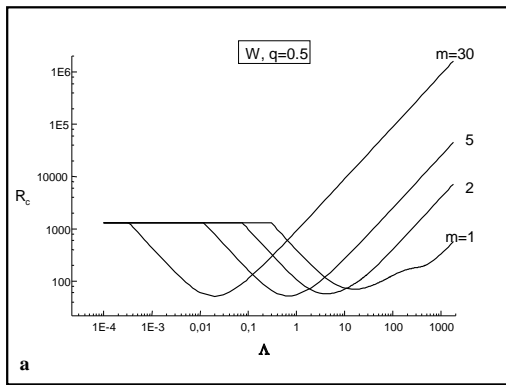
Všetky zvláštnosti MAC módov, ktoré sa objavili v prípade $q = 1.1$ sa v prípadoch $q = 2$ a $q = 5$ (v nasledujúcich šiestich grafoch) ešte zvýraznili. Navyše sa objavil zákmit aj v grafoch WQ2.R (obr. 5a) a WQ5.R (obr. 5d), teda v závislosti kritického Rayleighoveho čísla na Λ .

Druhá časť grafov, týkajúcich sa MAC(W) módov, začína trojicou závislostí ($R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$) pre 1W mód pri Robertsových číslach $q = \{.1, .5, .9, 1., 1.1, 2., 5.\}$, teda celkovo 7 kriviek. Na grafe WM1R (obr. 6a) vidíme v podstate jeden MAC mód pri rôznych hodnotách q . Keďže ide o jeden mód, tak prechod v-módu na h-mód prebehne pri tej istej hodnote Λ_{vh}^m pre všetky uvažované q . Prechod nie je závislý na q . Zaujímavé je aj rozdielne správanie módu pre hodnoty $q < 1$ a $q > 1$, kde rozdiel spočíva v nezachovávaní, resp. zachovávaní určitej symetrie hydromagnetickej časti módu. Módy so svojimi vlastnosťami v prípade $q = 1$ sa radia ku $q < 1$ alebo ku $q > 1$. Z grafu WM1k (obr. 6b) vidno, že viskózna časť módu je pre všetky hodnoty q opäť rovnaká, rozdiely sú len v hydromagnetickej časti módu. Znova máme rozdielne správanie sa kriviek pre $q < 1$ a $q > 1$, pričom v prípadoch $q \leq 1$ krivky dosahujú lokálne maximum, ktoré s poklesom q klesá a posúva sa k menším hodnotám Λ . Krivky grafu WM1s (obr. 6c) sa zhodujú s krivkami na grafoch WM1R a WM1k, čo sa týka rozdielnosti kvality pre $q < 1$ a $q > 1$. Z grafu je ešte zrejmé, že rozdiel kritických frekvencií v-módu a h-módu súvisí s hodnotou q , čo vidno na výraznosti skoku pre jednotlivé q . Poklesom q po určitú hodnotu q_1 výraznosť skokov klesá, a potom začína opäť rásť, ale opačným smerom, čo znamená, že h-mód má väčšie kritické frekvencie ako v-mód pre $q < q_1$, zatiaľčo pre $q > q_1$ je kritická frekvencia h-módu menšia ako kritická frekvencia v-módu ($\sigma_h < \sigma_v$).

Ďalšia trojica grafov, vyjadrujúca rovnaké závislosti, sa týka módu 2W. Na prvom grafe WM2R (obr. 6d) sa na rozdiel od módu 1W stratila nesymetria pre krivky s $q < 1$. Na grafe WM2k (obr. 6e) sa lokálne maximum objavilo u ďalších kriviek. Na grafe WM2s (obr. 6f), poslednom z tejto trojice, sa zvýraznil kvalitatívny rozdiel medzi krivkami s $q < 1$ a $q > 1$.

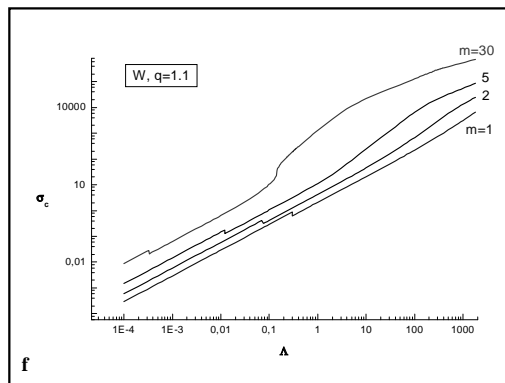
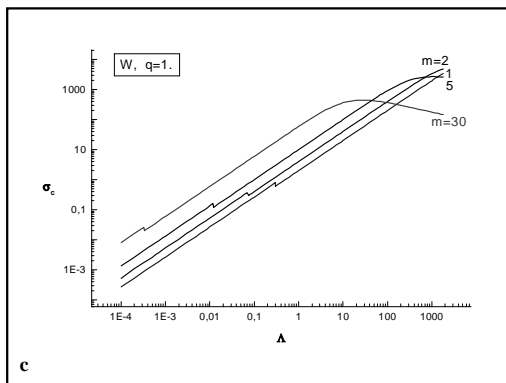
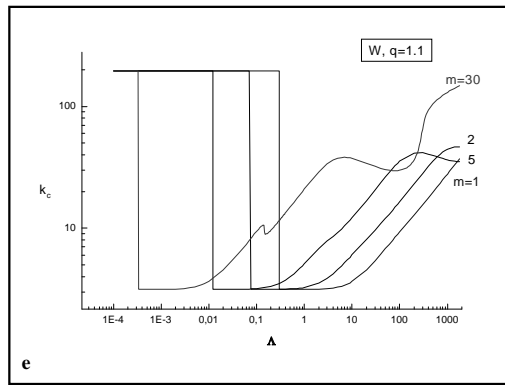
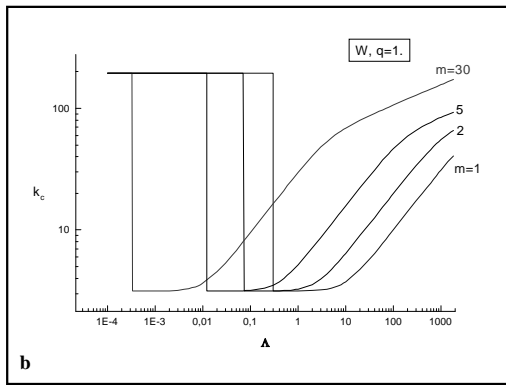
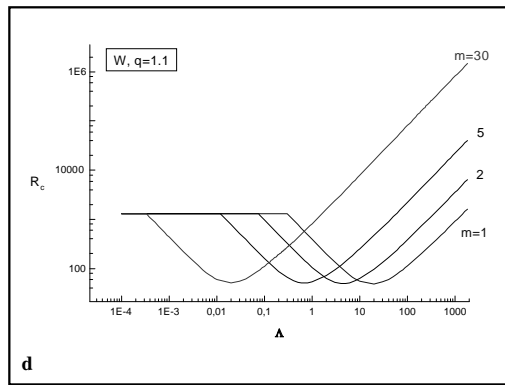
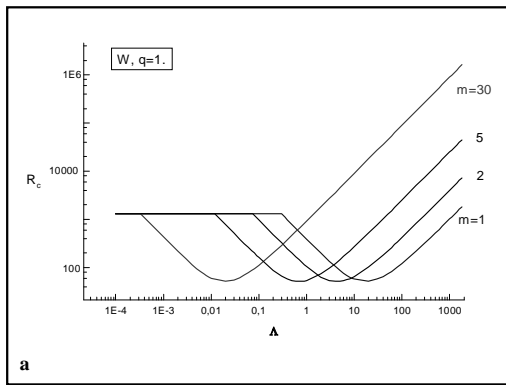


Obr. 3: Závislosti kritických čísel MAC(W) módov – Rayleighoveho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách Robertsovoho čísla $q = 0.5$ (a, b, c) a $q = 0.9$ (d, e, f) pre rôzne azimutálne vlnové čísla $m = 1, 2, 5, 30$.



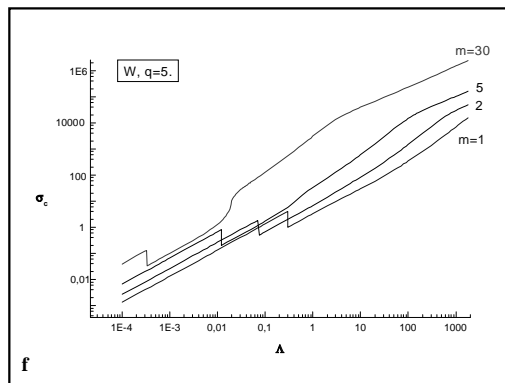
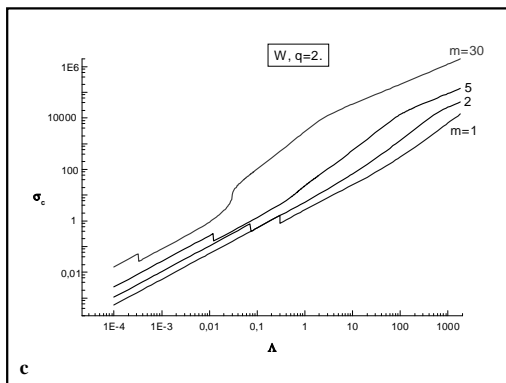
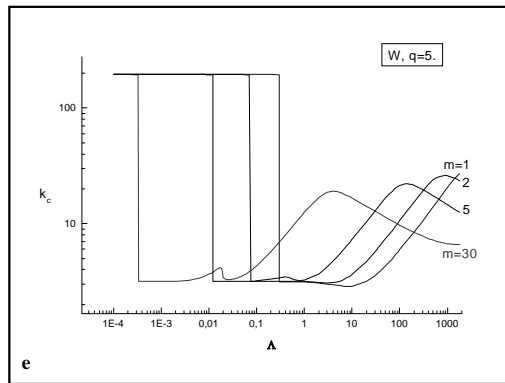
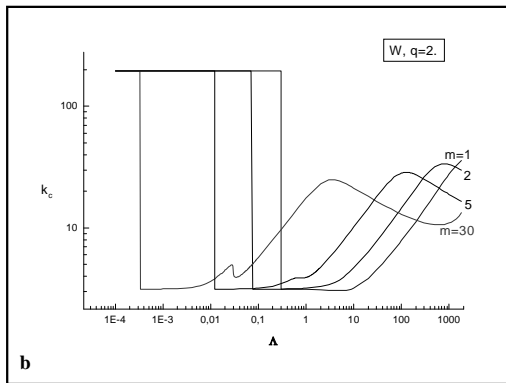
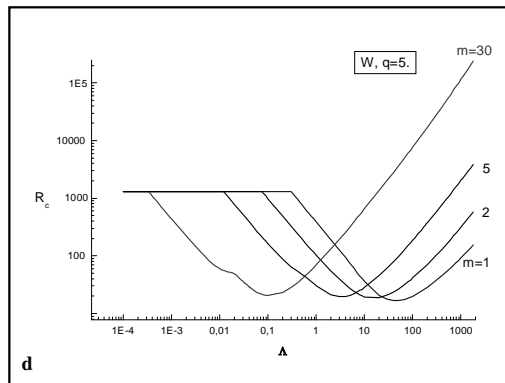
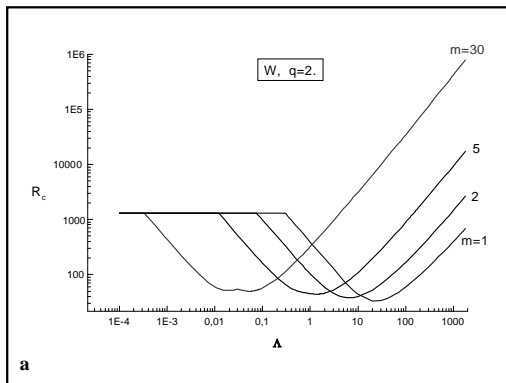
1

Obr. 4: Závislosti kritických čísel MAC(W) módov – Rayleighoveho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách Robertsovoho čísla $q = 1.0$ (a, b, c) a $q = 1.1$ (d, e, f) pre rôzne azimutálne vlnové čísla $m = 1, 2, 5, 30$.



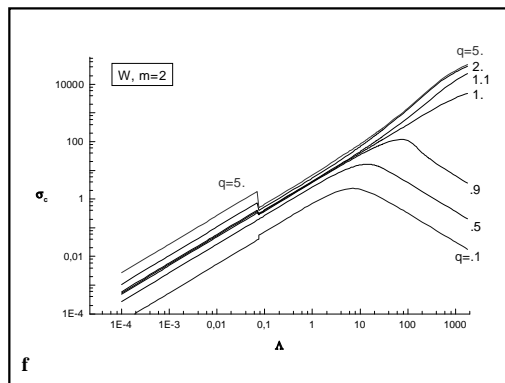
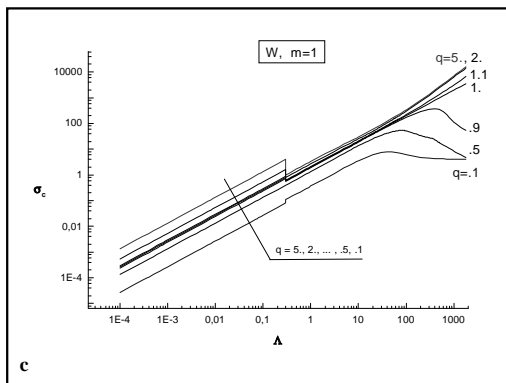
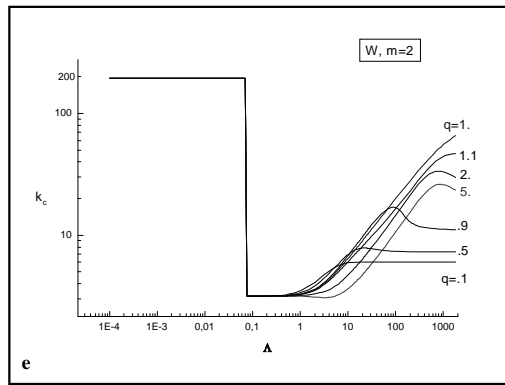
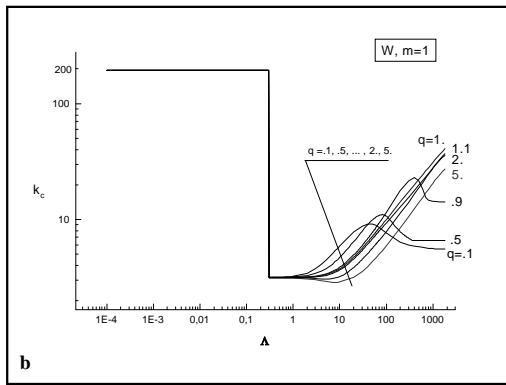
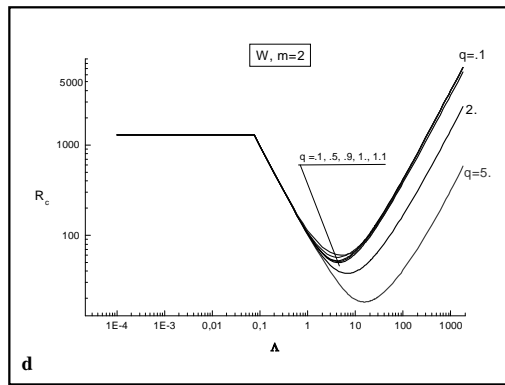
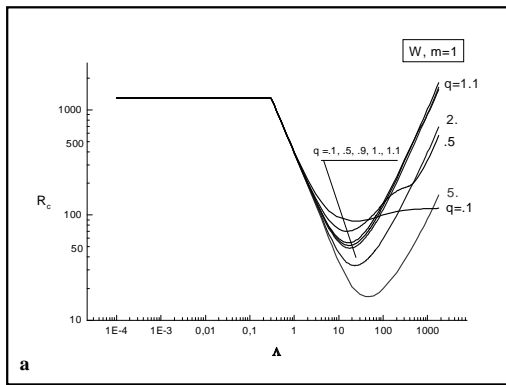
1

Obr. 5: Závislosti kritických čísel $MAC(W)$ módov – Rayleighoveho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách Robertsovoho čísla $q = 2.0$ (a, b, c) a $q = 5.0$ (d, e, f) pre rôzne azimutálne vlnové čísla $m = 1, 2, 5, 30$.



1

Obr. 6: Závislosti kritických čísel MAC(W) módov – Rayleighoveho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách azimutálneho vlnového čísla $m = 1$ (a, b, c) a $m = 2$ (d, e, f) pre rôzne Robertsove čísla $q = .1, .5, .9, 1., 1.1, 2., 5.$



1

Obr. 7: Závislosti kritických čísel MAC(W) módov – Rayleighovho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách azimutálneho vlnového čísla $m = 5$ (a, b, c) a $m = 30$ (d, e, f) pre rôzne Robertsove čísla $q = .1, .5, .9, 1., 1.1, 2., 5.$ ($+q = 1.01$ pri $m = 30$).

Z predposlednej trojice grafov týkajúcich sa módu 5W sa grafy WM5R (obr. 7a) a WM5s (obr. 7c) kvalitatívne nelíšia od predchádzajúcich grafov WM2R (obr. 6d) a WM2s (obr. 6f). Rozdiel je len v grafe WM5k (obr. 7b), kde sa oproti grafu WM2k (obr. 6e) stratilo lokálne maximum pre krivky s $q = 0.5, 0.9$. Navyše sa u kriviek s $q = 2., 5.$ objavuje zákmit pri hodnotách $\Lambda = \mathcal{O}(1)$.

Posledná trojica grafov v časti MAC(W) sa týka módu 30W. Na prvom grafe označenom WM30R (obr. 7d) sa objavuje zákmit u kriviek s $q = \{2., 5.\}$. Druhý graf názorne ukazuje, ako prudko sa pre hodnoty $q \leq 1$ a $q > 1$ mení kvalita kriviek, teda ako výrazný je rozdiel v kvalite kriviek pre $q \leq 1$ a $q > 1$. Vidíme, že sa u kriviek s $q > 1$ objavuje zákmit. Stačí, ak sa hodnota q veľmi málo odlišuje od 1 (v našom prípade $q = 1.01$), mód 30W sa začne správať dosť odlišne. Podobné vlastnosti (rôzne správanie sa kriviek pre $q \leq 1.$ a $q > 1.$) vykazujú aj krivky na grafe WM30s (obr. 7f). Pozri diskusiu k nástupu MAC(E) módov v nasledujúcej kapitole v časti 7.2.

6.2 Východné MAC módy

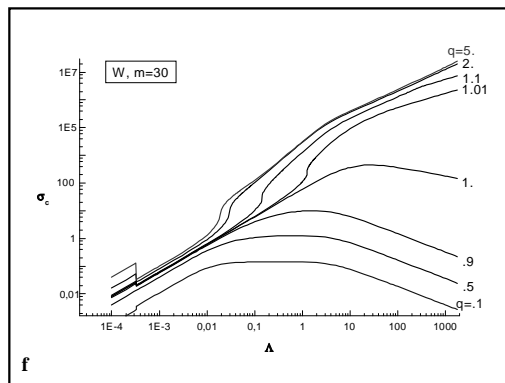
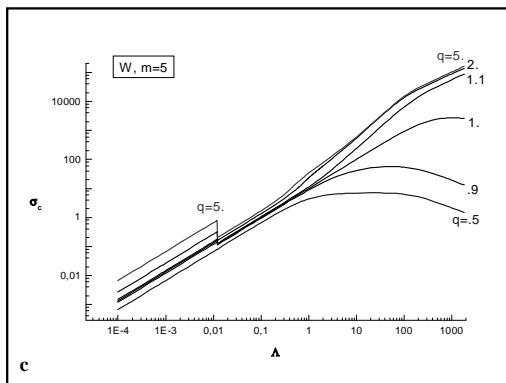
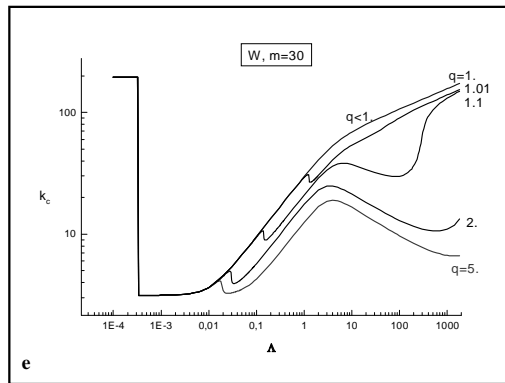
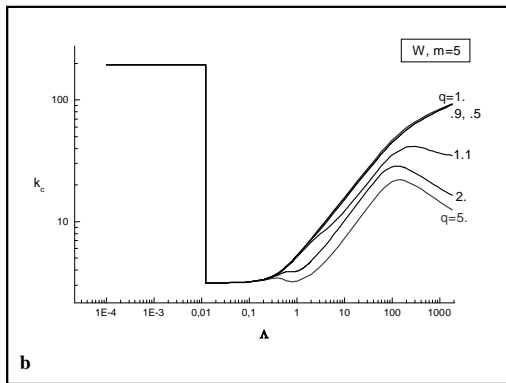
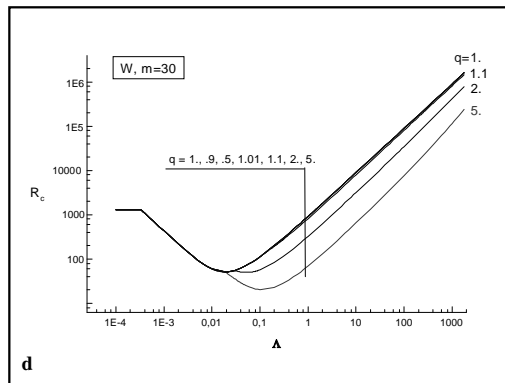
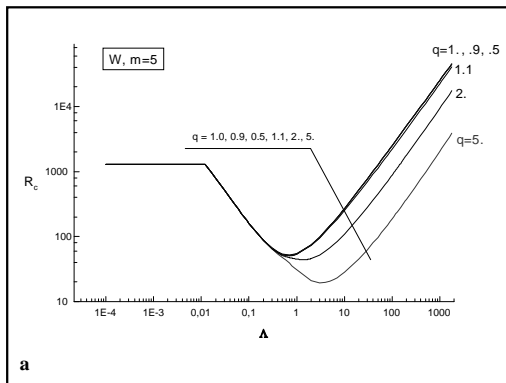
Aj v prípade východných MAC(E) módov rozdelíme grafy na dve časti, kde v prvej časti budú jednotlivé grafy obsahovať krivky, odpovedajúce rôznym azimutálnym vlnovým číslam m pri jednom konštantnom Robertsovom čísle q . Druhá časť, rovnako ako v prípade MAC(W) módov, obsahuje grafy vždy jedného módu s konkrétnym m , kde jednotlivé krivky prislúchajú rôznym hodnotám q .

Prvá časť začína trojicou grafov, ktoré vyjadrujú závislosti $R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$ pre jediné q a viac hodnôt m . Prvú trojicu grafov pre Robertsove číslo $q = 1.05$ budeme značiť EQ1.05R, EQ1.05k a posledný graf EQ1.05s (obr. 8a, b, c). Na prvom grafe EQ1.05R (obr. 8a) môžeme vidieť štyri módy s $m = 1, 2, 5, 30$. Pre každý mód existuje nábehová hodnota $\Lambda = \Lambda_E^m$, pri ktorej začne existovať. Táto hodnota je pre rôzne čísla m rôzna a s nárastom m sa posúva k menším hodnotám Λ . Každá krivka dosahuje lokálne minimum, ktoré sa s nárastom m tiež znižuje. Na grafe EQ1.05k (obr. 8b) majú módy 1E a 2E iný tvar ako módy 5E a 30E. Mód 30E má podobné správanie ako mód 5E, až na lokálne minimum a s ním súvisiacu preličenú časť v intervale $\Lambda \in \langle 10, 300 \rangle$. Zaujímavý je tiež prudký pokles radiálneho vlnového čísla k u módov 30E a 5E poklesom Λ v blízkosti hodnôt Λ_E^m , pre ktoré začínajú svoju existenciu. Pre MAC(E) módy je typické, že ich frekvencia je záporná, preto na grafe EQ1.05s (obr. 8c) je frekvencia σ_c v absolútnej hodnote. Z grafu vidno, že módy 2E, 5E a 30E majú jednotnú logiku ($|\sigma_c|$ s nárastom Λ rastie), zatiaľ čo mód 1E sa správa opačne.

Ďalšia trojica grafov súvisí s Robertsovým číslom $q = 1.1$, pričom grafy sú pomenované EQ1.1R, EQ1.1k a EQ1.1s (obr. 8d, e, f). Grafy tejto trojice sa kvalitatívne nelíšia od grafov predchádzajúcej trojice pri $q = 1.05$. Nasledujúca trojica grafov predstavuje MAC(E) módy pri $q = 2$ s označením EQ2.R, EQ2.k a EQ2.s (obr. 9a, b, c). K módom 1E, 2E, 5E a 30E je pridaný ďalší mód 3E. Graf EQ2.R (obr. 9a) je veľmi podobný grafu EQ1.1R (obr. 9d) z predchádzajúcej trojice, krivky sa kvalitatívne nelíšia, opäť začínajú existenciu pri určitej hodnote Λ , rôznej pre rôzne azimutálne vlnové čísla m . Z grafu EQ2.k (obr. 9b) vidíme dôvod pridania módu 3E. Práve krivka odpovedajúca módu 3E je hraničnou krivkou, ktorá oddeľuje módy 1E a 2E od kvalitatívne iných módov s $m \geq 3$. Graf EQ2.s (obr. 9c) sa od rovnakého grafu predchádzajúcej trojice kvalitatívne nelíši.

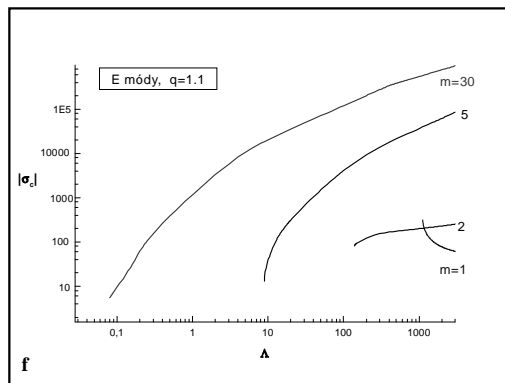
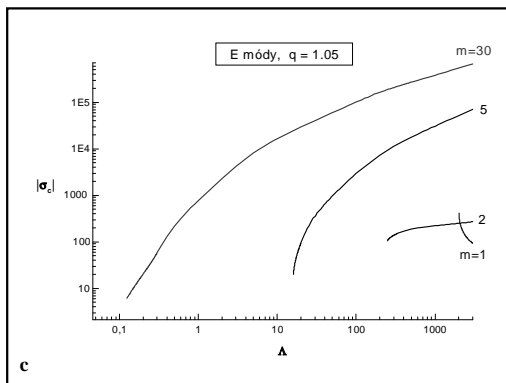
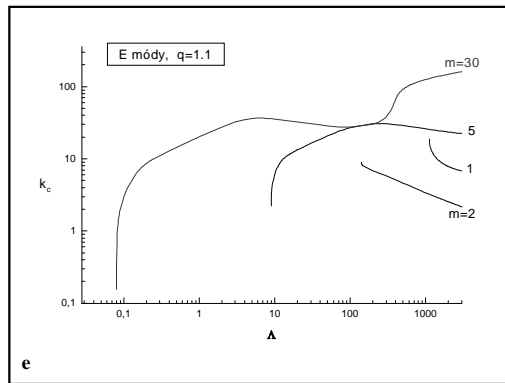
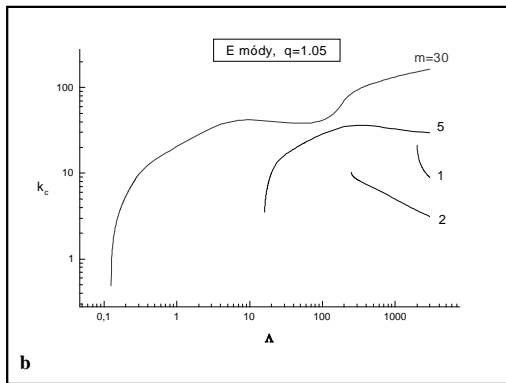
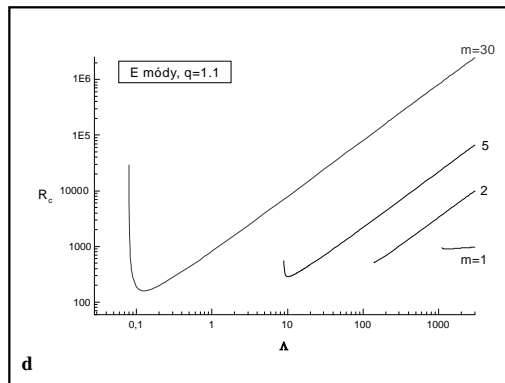
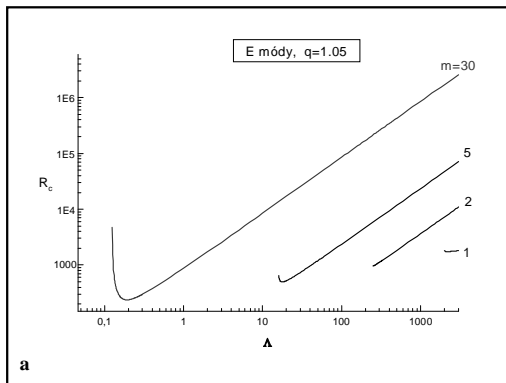
Trojica grafov s označením EQ5.R, EQ5.k a EQ5.s (obr. 9d, e, f) neprináša kvalitatívne nič nové oproti predchádzajúcej trojici a uvádzame ju kvôli úplnosti.

Druhá časť grafov (obr. 10 a 11) obsahuje štyri trojice grafov, ktoré vyjadrujú tie isté závislosti $R_c = R_c(\Lambda)$, $k_c = k_c(\Lambda)$ a $\sigma_c = \sigma_c(\Lambda)$, pričom každá trojica odpovedá vždy jednému MAC(E) módu s konkrétnym azimutálnym vlnovým číslom m a rôzne krivky prislúchajú rôznym hodnotám čísla q . Štyri trojice grafov odpovedajú štyrom hodnotám



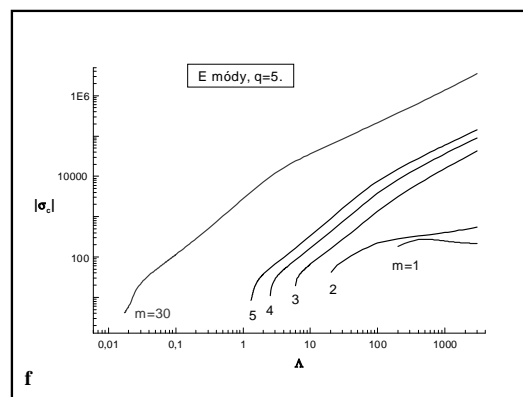
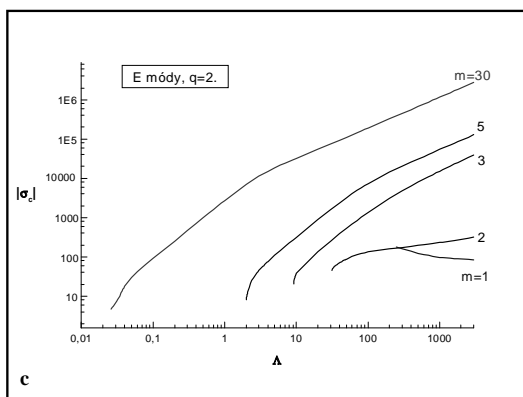
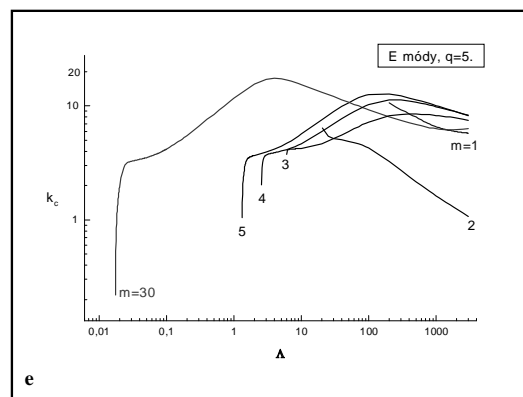
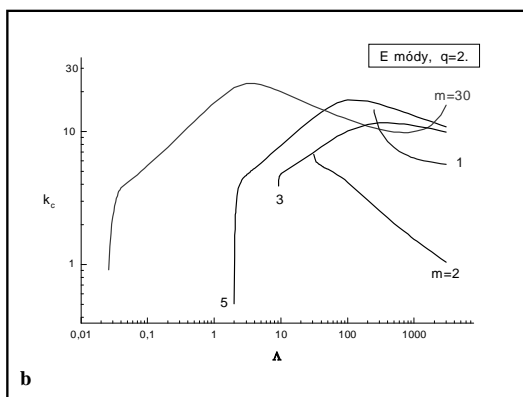
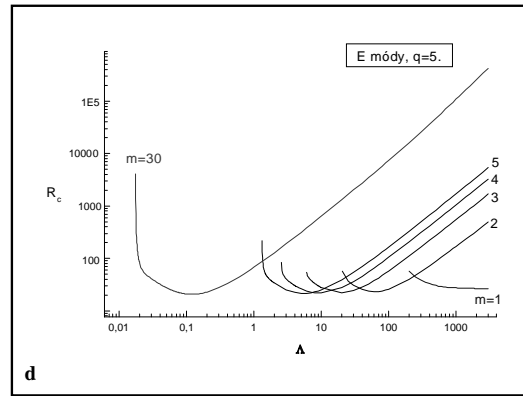
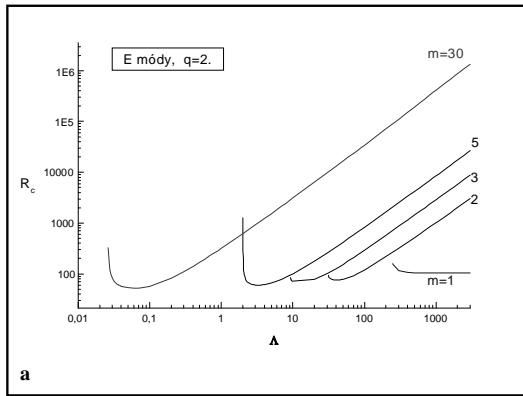
1

Obr. 8: Závislosti kritických čísel MAC(E) módov – Rayleighovoho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách Robertsovoho čísla $q = 1.05$ (a, b, c) a $q = 1.1$ (d, e, f) pre rôzne azimutálne vlnové čísla $m = 1, 2, 5, 30$.



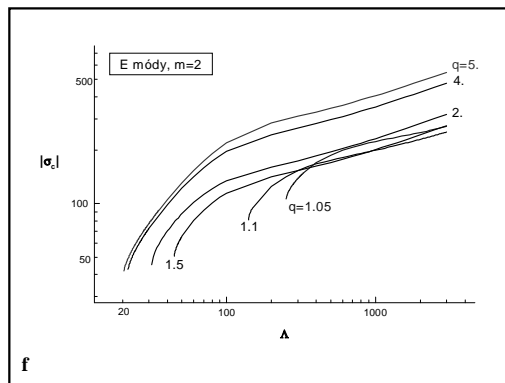
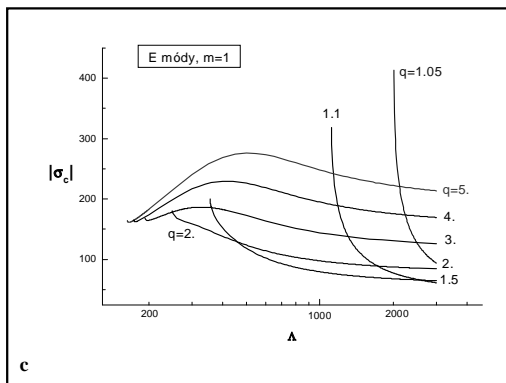
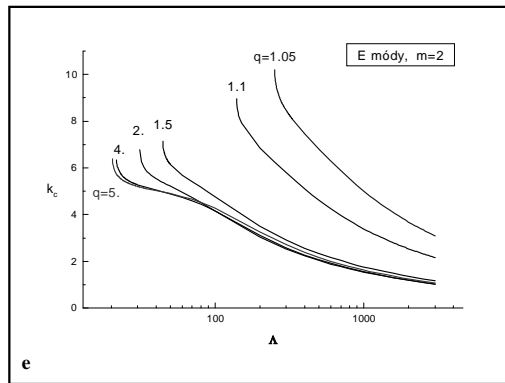
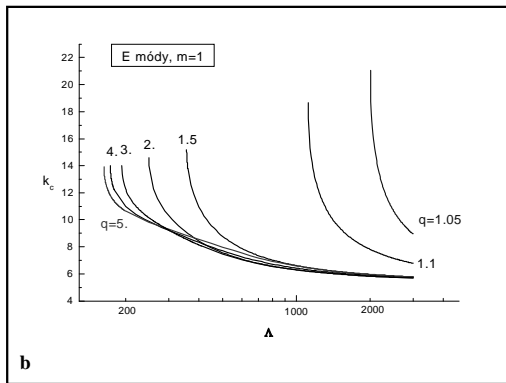
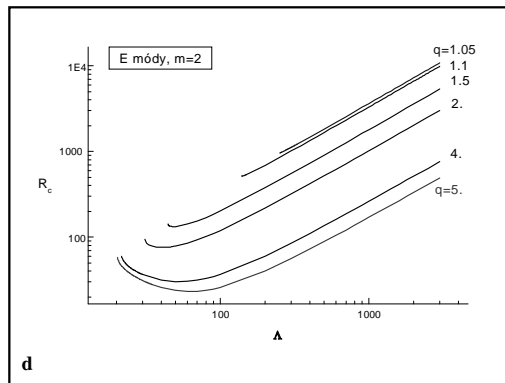
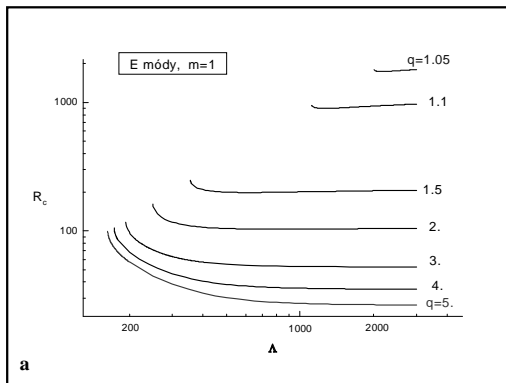
1

Obr. 9: Závislosti kritických čísel MAC(E) módov – Rayleighovho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách Robertsovho čísla $q = 2.0$ (a, b, c) a $q = 5.0$ (d, e, f) pre rôzne azimutálne vlnové čísla $m = 1, 2, 3, 5, 30$ ($+m = 4$ pri $q = 0.5$).



1

Obr. 10: Závislosti kritických čísel MAC(E) módov – Rayleighoveho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri azimutálnych vlnových číslach $m = 1$ (a, b, c) a $m = 2$ (d, e, f) pre rôzne hodnoty Robertsovo čísla $q = 1.05, 1.1, 1.5, 2., 3. 4. 5.$



1

Obr. 11: Závislosti kritických čísel MAC(E) módov – Rayleighovho R_c (a, d), radiálneho vlnového k_c (b, e) a frekvencie σ_c (c, f) na Elsasserovom čísle Λ pri azimutálnych vlnových číslach $m = 5$ (a, b, c) a $m = 30$ (d, e, f) pre rôzne hodnoty Robertsovoho čísla $q = 1.05, 1.1, 2, 5$.

čísla $m = \{1, 2, 5, 30\}$.

Prvá trojica grafov opisuje vlastnosti módu 1E pri Robertsových číslach $q = \{1.05, 1.1, 1.5, 2., 3., 4., 5.\}$. Na grafe EM1R (obr. 10a) je sedem kriviek, ktoré majú jednotnú logiku, čo sa týka tvaru kriviek. Mód 1E potrebuje ku svojej existencii vysoké hodnoty Elsasserovho čísla ($\Lambda \geq \mathcal{O}(100)$), pričom pokles Robertsovho čísla q korešponduje s nárastom hodnoty $\Lambda = \Lambda_{1E}^q$, od ktorej začína existovať 1E mód. Numerické výpočty ukázali, že východné MAC módy neexistujú pre $q \leq 1$ a z grafu vidíme, že čím viac sa s hodnotou q blížíme k 1, tým viac sa existencia módu posúva k veľkým hodnotám Λ . Graf EM1k (obr. 10b) obsahuje krivky, ktoré sa správajú opäť podľa rovnakej logiky. U všetkých kriviek je pokles radiálneho vlnového čísla k_c s Λ , pričom strmosť kriviek sa s poklesom q zväčšuje. Mód 1E má pri všetkých uvedených hodnotách čísla q relatívne nízke hodnoty radiálneho vlnového čísla $k_c = \mathcal{O}(10)$. Z grafu EM1s (obr. 10c) môžeme vidieť prechod kriviek z jednej kvality na inú. Krivky s $q = \{1.05, 1.1, 1.5, 2.\}$ znázorňujú pokles frekvencie $|\sigma_c|$ s nárastom Λ a u kriviek s $q = \{3., 4., 5.,\}$ sa objavuje maximum, po dosiahnutí ktorého začnú krivky pozvoľne klesať.

Druhú trojicu grafov, súvisiacich s módom 2E, označujeme EM2R, EM2k a EM2s (obr. 10d, e, f). Krivky na prvom grafe z tejto trojice, sa kvalitatívne líšia od kriviek na grafe EM1R (obr. 10a) z predchádzajúcej trojice. Krivky grafu EM1R ukazujú, že pre $q = \{3., 4., 5.\}$ sa Rayleighove číslo po počiatočnom poklese ustáli na konštantnej hodnote, zatiaľ čo na grafe EM2R (obr. 10d) všetky krivky po dosiahnutí minima začnú rásť s nárastom Λ , pričom sklon všetkých kriviek je rovnaký. Graf EM2k (obr. 10e) obsahuje krivky veľmi podobné krivkám na grafe EM1k (obr. 10b); ukazujú pokles radiálneho vlnového čísla k s nárastom Λ , pričom hodnoty k sú pre mód 2E ešte nižšie ako pre mód 1E.

Ďalšia trojica grafov s označením EM5R, EM5k, EM5s (obr. 11a, b, c) opisuje vlastnosti módu 5E. Prvý graf, znázorňujúci závislosť $R_c = R_c(\Lambda)$, obsahuje štyri krivky pre $q = \{1.01, 1.1, 2., 5.\}$, na ktorých môžeme vidieť počiatočný pokles Rayleighovho čísla, ktorý sa po dosiahnutí minima zmení na mierny nárast s rovnakým sklonom pre všetky uvažované hodnoty q . Ďalej je možné vidieť, tak ako aj u predchádzajúcich grafov pre $m = 1$ a 2, pokles Rayleighovho čísla s nárastom q . Ak porovnáme graf EM5k (obr. 11b) s grafom EM2k (obr. 10e) z predchádzajúcej trojice, tak hneď vidíme zásadnú zmenu kvality kriviek. Hlavná zmena je v tom, že radiálne vlnové číslo módu 2E pre všetky hodnoty q klesá s nárastom Λ , ale pre mód 5E sa krivky začínajú prudkým nárastom, ktorý sa pre všetky q postupne zmierni a po dosiahnutí maxima začnú krivky zase mierne klesať okrem prípadu $q = 1.01$, ktorý na celom uvažovanom intervale hodnôt Λ rastie. Graf EM5s (obr. 11c) nedáva oproti grafu EM2s (obr. 10f) kvalitatívne nič nové.

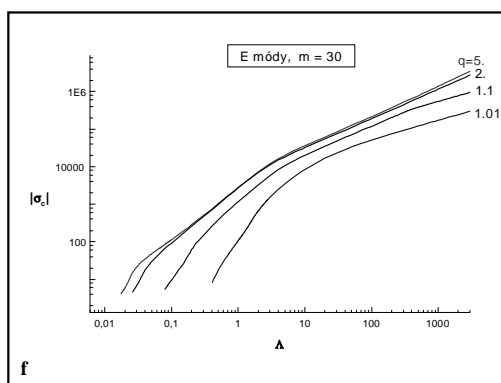
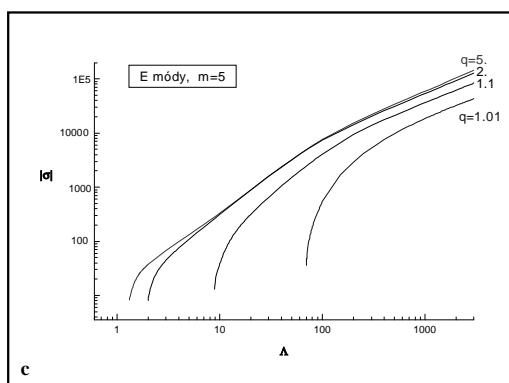
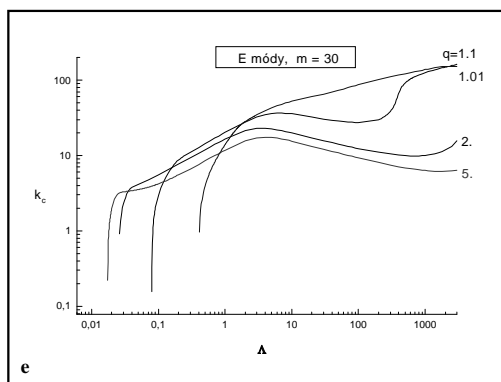
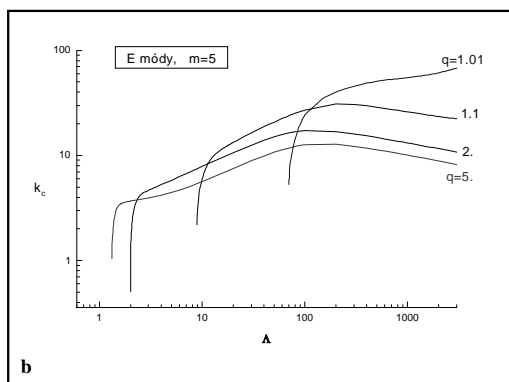
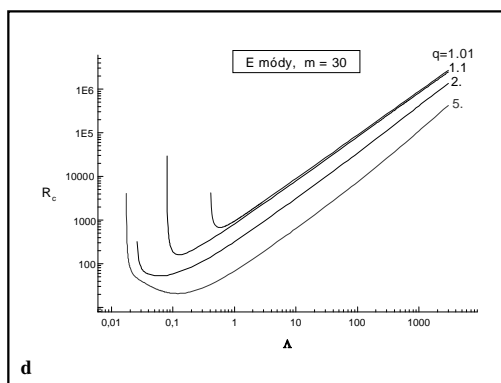
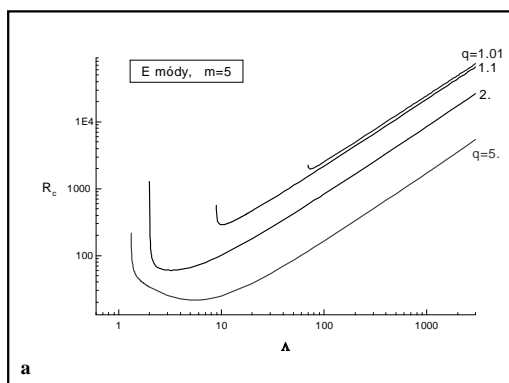
Grafy, opisujúce vlastnosti východných MAC módov, uzatvára trojica grafov EM30R, EM30k a EM30s (obr. 11d, e, f), týkajúcich sa módu 30E. Porovnaním tejto trojice s predchádzajúcou si môžeme všimnúť minimum zmien v tvare kriviek. Hoci sa azimutálne vlnové číslo m podstatne zväčšilo (z hodnoty 5 na hodnotu 30), kvalita kriviek ostala približne rovnaká, čo nám umožňuje vysloviť predpoklad, že ďalším zvyšovaním čísla m (t.j. rozdrobovaním v azimutálnom smere) by sa nová kvalita kriviek už nemala objavovať.

6.3 Prechod MAC(W) módov na MC(W) módy

Aj túto časť otvárame trojicou grafov, ktoré znázorňujú závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického radiálneho vlnového čísla k_c a kritickej frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle Λ . Grafy znázorňujú západný 1W mód pri hodnote Robertsovho čísla $q = 1$, pričom je dôležité poznamenať, že hodnota Ekmanovho čísla je $E = 10^{-3}$. Na prvom grafe (obr. 12a) máme jedenásť kriviek, ktoré znázorňujú závislosť $R_c = R_c(\Lambda)$ módu 1W pre jedenásť vertikálnych vlnových čísel $l = 1, 2, \dots, 10, 11$. Mód 1W pre prípad $l = 1$ má typický tvar MAC(W) módu, kde môžeme pozorovať prechod viskózneho módu na hydromagnetický mód.

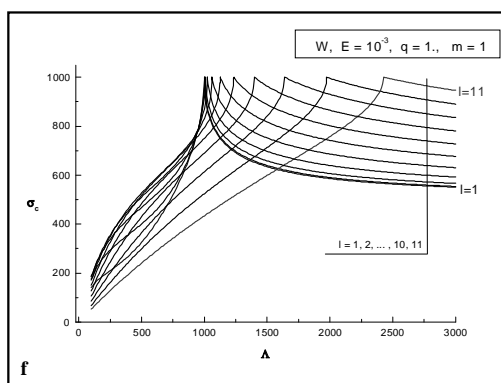
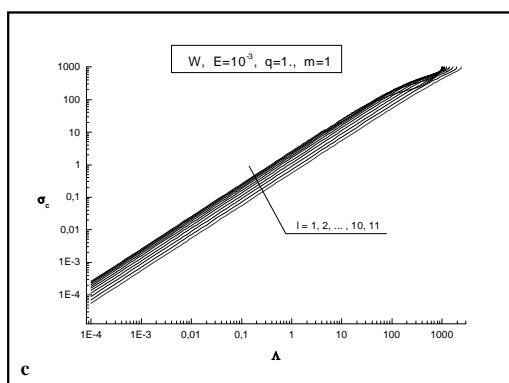
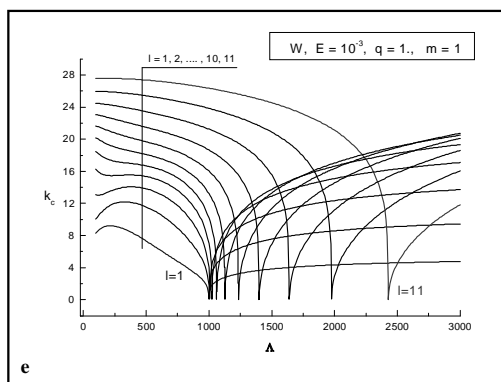
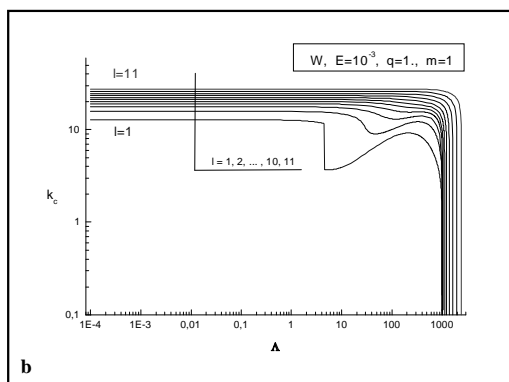
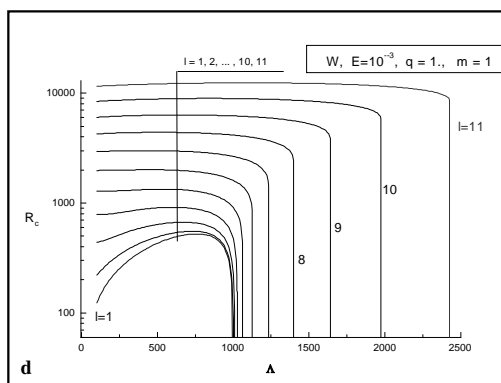
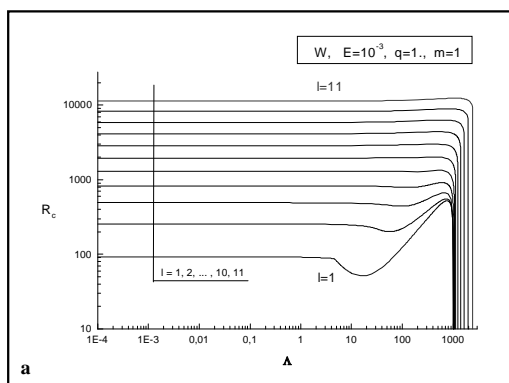
Podobný prechod je ešte naznačený v prípadoch $l = 2, 3, 4$ aj keď sa výraznosť h-módu postupne znižuje. v prípadoch $l > 4$ už o h-módoch nemôžeme hovoriť. Všetky krivky na tomto grafe majú spoločnú vlastnosť, ktorou je prudký pokles Rayleighovho čísla do záporných hodnôt. Jednotlivé módy s rôznymi číslami l sa odlišujú hodnotou Λ , pri ktorej krivka pretne os $R = 0$. Nestabilitu, ktorá vzniká pri $R = 0$, nazývame nestabilitou typu MC vln. Druhý graf (obr. 12b) znázorňujúci závislosť $k_c = k_c(\Lambda)$ obsahuje opäť jedenásť kriviek pre rôzne hodnoty l . Prechod v-módu na h-mód má v prípade $l = 1$ charakter skoku radiálneho vlnového čísla k , ale pre prípady $l > 1$ už žiaden skok neexistuje a postupne sa s nárastom l stráca rozdiel medzi v-módom a h-módom. Na tomto grafe môžeme vidieť, že prechod MAC módov na MC mód je charakterizovaný prudkým poklesom radiálneho vlnového čísla k nulovej hodnote. Tretí graf (obr. 12c) ukazuje, že frekvencie pre všetky vertikálne vlnové čísla l s nárastom Λ tiež rastú a približovaním sa ku hodnote Λ , pri ktorej dôjde k prechodu MAC módu na MC mód, sa s frekvenciou nič významné nedeje. Prechod v-módu na h-mód možno pozorovať nevýrazným skokom frekvencie jedine v prípade $l = 1$. Zatiaľ čo v predchádzajúcej trojici grafov sme sa zamerali na MAC(W) módy a ich správanie pri približovaní sa k hodnotám Λ , pri ktorých dochádza k prechodu na MC módy, v druhej časti prezentujeme trojicu grafov tých istých závislostí, ale s intervalom väčších $\Lambda \in \langle 100, 3000 \rangle$ (v logaritmickú škálu), v ktorom dochádza k prechodu MAC módov na MC módy pre všetky hodnoty $l = 1, \dots, 11$. Táto trojica grafov obsahuje na rozdiel od predchádzajúcej popri MAC módoch aj MC módy. Máme tak možnosť pozorovať prechod MAC módov na MC módy a zmeny základných parametrov: radiálneho vlnového čísla a frekvencie pri tomto prechode. Prvý graf (obr. 12d) ukazuje závislosť Rayleighovho čísla R na Elsasserovom čísle Λ . Všetkých jedenásť kriviek sa správa rovnako, čo znamená, že pri určitej hodnote Λ začne Rayleighove číslo prudko klesať k nule a pre vyššie hodnoty Λ ostane na nulovej hodnote. Hovoríme že MAC mód prešiel na MC mód. Hodnota prechodu Λ_l je pre každú krivku iná a súvisí s rôznosťou vertikálneho vlnového čísla l . Dá sa ukázať, že pre $E = 10^{-3}$ medzi hodnotou Λ_l a vertikálnym vlnovým číslom l platí približný vzťah $\Lambda_l \doteq 1000 + 0.097 l^4$, (Šoltis 2003, str. 15; príloha A). Na druhom grafe (obr. 12e) máme možnosť vidieť, ako sa pre jednotlivé čísla l správa radiálne vlnové číslo k_c , resp. k (pre MAC, resp. MC módy) v závislosti na Λ . Všetky MAC módy, prislúchajúce vertikálnym vlnovým číslam $l = 1, \dots, 11$, končia svoju existenciu poklesom radiálneho vlnového čísla k_c do nuly. Nulovú hodnotu dosiahnu jednotlivé módy práve v hodnotách Λ_l , pričom pre $\Lambda > \Lambda_l$ už existujú MC módy, pre ktoré radiálne vlnové číslo k (nie k_c) postupne opäť narastá. Posledný graf (obr. 12f) tejto trojice ukazuje správanie sa frekvencie σ_c , resp. σ pri prechode MAC módu na MC mód. Každá krivka má dve časti, kde prvá súvisí so σ_c pre MAC módy a druhá so σ pre MC módy. Prvá časť každej krivky rastie, až dosiahne hodnotu $\sigma_c = \sigma \doteq 1000$, pri ktorej MAC módy prechádzajú do MC módov. Frekvencie σ vzniknutých MC módov začínajú od tejto hodnoty s nárastom Λ klesať.

Nasledujúca trojica grafov (obr. 13a, b, c) ukazuje závislosti Rayleighovho čísla, radiálneho vlnového čísla a frekvencie na Ekmanovom čísle pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 2500$, Robertsovom čísle $q = 1$ a azimutálnom vlnovom čísle $m = 1$ (oproti predchádzajúcim grafom si E a Λ vymenili úlohu). Hodnoty Ekmanovho čísla sme brali z intervalu $E \in \langle 2 \cdot 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-3} \rangle$, pričom sú opäť zobrazené módy s vertikálnymi vlnovými číslami $l = 1, \dots, 11$. Na prvom grafe (obr. 13a) môžeme vidieť jedenásť kriviek vyjadrujúcich pokles kritického Rayleighovho čísla z relatívne vysokých hodnôt rádu $\mathcal{O}(1000)$ na nulu. Opäť máme prechody MAC módov na MC módy. K prechodu MAC módu na MC mód dôjde pre rôzne vertikálne vlnové čísla l pri rôznych hodnotách Ekmanovho čísla. Aj v tomto prípade sa dá odvodiť vzťah $E_l^{(1)} = (\Lambda - \sqrt{\Lambda^2 - 4\pi_l^4}) / (2\pi_l^4)$, ktorý určuje prechodové Ekmanove číslo $E_l^{(1)}$ ako funkciu Elsasserovho čísla Λ a vertikálneho vlnového čísla l , pri ktorom prejde MAC mód na MC mód (pozri časť 7.1). Veľmi zaujímavá sa správa



1

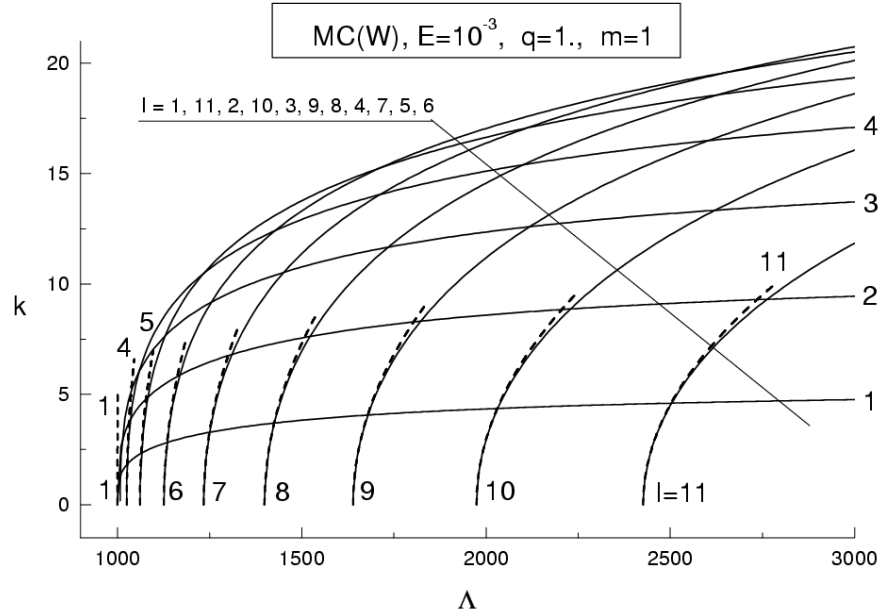
Obr. 12: Závislosti kritických čísel R_c , k_c a σ_c pre MAC(W) módy a čísel R , k a σ pre MC(W) módy na Elsasserovom čísle Λ pri hodnotách Robertsovoho čísla $q = 1.0$, azimutálneho vlnového čísla $m = 1$, Ekmanovho čísla $E = 10^{-3}$ pre rôzne hodnoty vertikálnych vlnových čísel $l = 1, \dots, 11$. Rayleighove čísla R_c a R (a, d), radiálne vlnové čísla k_c a k (b, e) a frekvencie σ_c a σ (c, f).



1

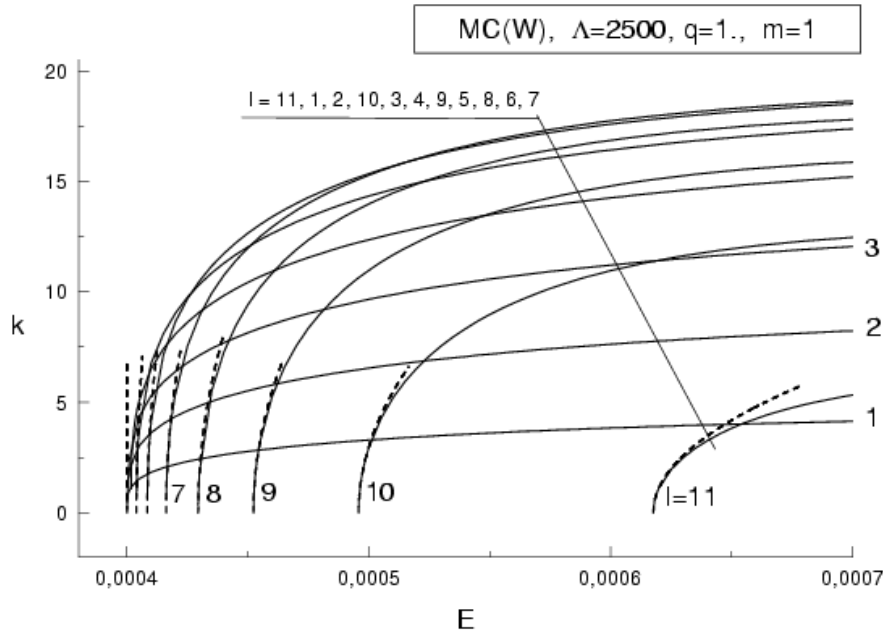
Obr. 13: Závislosti kritických čísel R_c , k_c a σ_c pre MAC(W) módy a čísel R , k a σ pre MC(W) módy na Ekmanovom čísle E pri hodnotách Robertsovoho čísla $q = 1.0$, azimutálneho vlnového čísla $m = 1$, Elsasserovho čísla $\Lambda = 2500$ pre rôzne hodnoty vertikálnych vlnových čísel $l = 1, \dots, 11$. Rayleighove čísla R_c a R (a, d), radiálne vlnové čísla k_c a k (b, e) a frekvencie σ_c a σ (c, f).

mód s vertikálnym vlnovým číslom $l = 11$, ktorý pri hodnote Ekmanovho čísla $E_{11}^{(1)}$ prejde z MAC módu na MC mód (Rayleighove číslo ostáva nulové), ale po dosiahnutí určitého Ekmanovho čísla znovu prejde (a teda vráti sa) na MAC mód. Tento prechod sa prejaví prudkým nárastom Rayleighovho čísla z nulovej hodnoty na hodnotu rádu $\mathcal{O}(1000)$. Na druhom grafe (obr. 13b), vyjadrujúcom závislosť radiálneho vlnového čísla k_c , resp. k na Ekmanovom čísle vidíme, že prechod MAC módu na MC mód je sprevádzaný poklesom radiálneho vlnového čísla k_c k nule. Vzniknutý MC mód začína svoju existenciu pri nulovej hodnote radiálneho vlnového čísla k , ktoré s nárastom Ekmanovho čísla rastie až po určité maximum, po dosiahnutí ktorého začne opäť klesať. Nulovú hodnotu čísla k dosiahnu módy s rôznymi vertikálnymi vlnovými číslami pri rôznych hodnotách Ekmanovho čísla. Mód s $l = 11$ existuje ako MC mód len na určitom intervale E , pričom prejde opäť na MAC mód. Tento prechod je znovu sprevádzaný poklesom radiálneho vlnového čísla k na nulu a vzniknutý MAC mód je charakterizovaný nárastom čísla k_c . Tretí graf (obr. 13c), vyjadrujúci závislosť $\sigma_c = \sigma_c(E)$, resp. $\sigma = \sigma(E)$, zobrazuje správanie sa frekvencie pri prechode MAC módov na MC módy. Môžeme si všimnúť, že frekvencia MAC módu rastie



Obr. 14: Závislosť radiálneho vlnového čísla k na Elsasserovom čísle Λ pre rôzne hodnoty vertikálneho vlnového čísla $l = 1, \dots, 11$ pri Ekmanovom čísle $E = 10^{-3}$ a azimutálnom vlnovom čísle $m = 1$. Plné krivky sú MC módy a čiarkované krivky sú ich asymptotické funkcie.

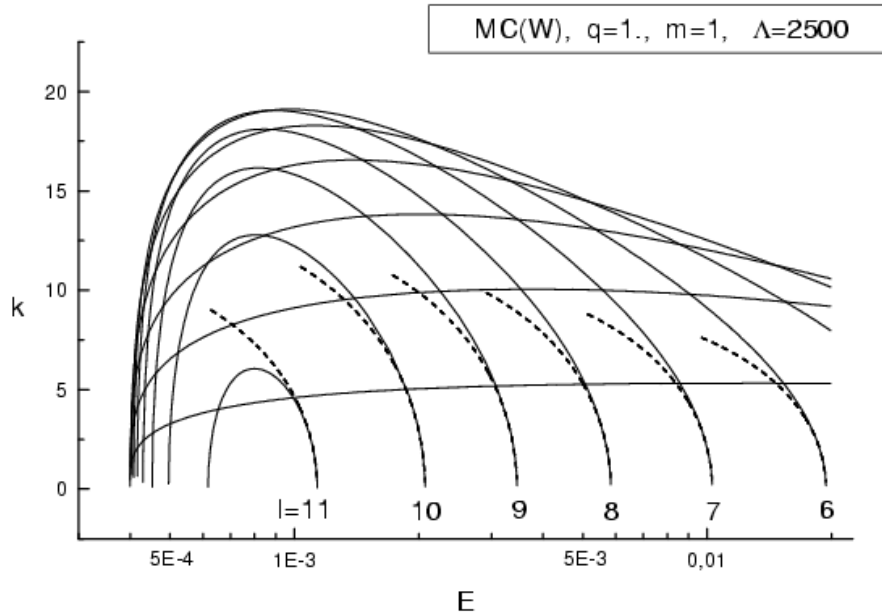
až po určitú hodnotu σ_l , pri ktorej dôjde k prechodu na MC mód. Tento prechod je sprevádzaný zmenou monotónnosti, keďže frekvencie MC módov s nárastom Ekmanovho čísla klesajú. Nasledujúca trojica grafov (obr. 13d, e, f) opisuje tie isté závislosti pri tých istých vstupných parametroch ($q = 1.$, $m = 1$, $\Lambda = 2500$) ako u predchádzajúcej trojice; odlišujú sa jedine väčším rozsahom Ekmanovho čísla na vodorovnej osi všetkých troch grafov. Natiahnutie intervalu pre E smerom k väčším hodnotám sme spravili preto, aby sme si overili, že zaujímave správanie sa módu s $l = 11$ kopírujú aj módy s menším vertikálnym číslom. Na prvom grafe (obr. 13d) máme možnosť vidieť okrem prudkého poklesu Rayleighovho čísla R_c u módov s vertikálnymi číslami $l = 1, \dots, 11$ (prechod MAC na MC), aj prudké nárasty čísla R_c u módov s vertikálnymi vlnovými číslami $l = 11, 10, 9, 8, 7, 6$ (prechod MC na



Obr. 15: Závislosť radiálneho vlnového čísla k na Ekmanovom čísle E pre rôzne hodnoty vertikálneho vlnového čísla $l = 1, \dots, 11$ pri Elsasserovom čísle $\Lambda = 2500$ a azimutálnom vlnovom čísle $m = 1$. Plné krivky sú MC módy a čiarkované krivky sú ich asymptotické funkcie.

MAC). Aj prechod MC na MAC sa pre rôzne vertikálne vlnové čísla l deje pri rôznych hodnotách Ekmanovho čísla E , pričom vzťah $E_l^{(2)} = (\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4\pi_l^4}) / (2\pi_l^4)$, ktorý dáva hodnotu E_l , pri ktorej dôjde k prechodu MC na MAC pre rôzne čísla l je veľmi podobný vzťahu súvisiacemu s prechodom MAC na MC. Z grafu vidíme, že interval Ekmanovho čísla, na ktorom existuje MC mód, sa s poklesom vertikálneho čísla l zväčšuje. Hodnoty $E_l^{(2)}$ sa s poklesom l veľmi prudko posúvajú smerom k veľkým a fyzikálne nezaujímavým hodnotám, čo je aj dôvod, prečo sme nezvolili taký rozsah E aby na grafe boli zobrazené prechody MC na MAC pre všetky čísla $l = 1, \dots, 11$. Druhý graf (obr. 13e) závislosti $k = k(E)$ ukazuje, že zaujímavé správanie sa módu s $l = 11$ je rovnaké aj pre módy s $l < 11$. Lokálne maximum radiálneho vlnového čísla k , ktoré MC módy dosahujú, tiež súvisí s vertikálnymi vlnovými číslami. Tretí graf (obr. 13f) ukazuje frekvenciu jednotlivých módov s $l = 1, \dots, 11$, ako funkciu Ekmanovho čísla E . Zmenu sklonu krivky, ktorá súvisí s prechodom MC na MAC možno pozorovať aj u módov s $l < 11$, pričom tak ako MC módy, aj z nich vzniknuté MAC módy majú klesajúci charakter, kde frekvencia postupne s nárastom Ekmanovho čísla klesá k nule.

Na predchádzajúcich grafoch, ktoré sa týkali prechodov MAC na MC, je možné vidieť, že každý takýto prechod je spojený s poklesom radiálneho vlnového čísla k do nuly. V prípade konštantného Ekmanovho čísla $E = 10^{-3}$, jednotlivé MAC módy s rôznymi vertikálnymi vlnovými číslami l prejdú na MC módy ($R = 0$) pri rôznych hodnotách Elsasserovho čísla Λ . V prípade konštantného Elsasserovho čísla $\Lambda = 2500$ existujú prechody MAC na MC ale aj MC na MAC pri rôznych Ekmanových číslach E pre rôzne l . Má zmysel vyšetriť, akým spôsobom sa radiálne vlnové číslo k blíži k nule v týchto prípadoch. Dá sa ukázať (pozri časť 7.1), že pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 10^{-3}$ sa radiálne vlnové číslo MC módu blíži k nule ako funkcia $k = A(\Lambda - \Lambda_l)^{1/2}$, kde koeficient A je vyjadrený v časti 7.1 a Λ_l je kritické Elsasserove číslo prechodu MAC na MC pri vertikálnom vlnovom čísle



Obr. 16: Závislosť radiálneho vlnového čísla k na Ekmanovom čísle E pre rôzne hodnoty vertikálneho vlnového čísla $l = 1, \dots, 11$ pri Elsasserovom čísle $\Lambda = 2500$ a azimutálnom vlnovom čísle $m = 1$. Plné krivky sú MC módy a čiarkované krivky sú ich asymptotické funkcie.

l . Pri konštantnom Elsasserovom čísle $\Lambda = 2500$ sa radiálne vlnové číslo MC módu (tesne za prechodom MAC na MC) blíži k nule ako funkcia $k = B(E - E_l^{(1)})^{1/2}$, kde $E_l^{(1)}$ je prechodové Ekmanove číslo, pri ktorom MAC mód prejde na MC mód pri vertikálnom vlnovom čísle l a koeficient B je vyjadrený v časti 7.1. Radiálne vlnové číslo MC módu tesne pred prechodom na MAC mód klesá k nule ako funkcia $k = C(E_l^{(2)} - E)^{1/2}$, pričom $E_l^{(2)}$ je opäť kritické Ekmanove číslo prechodu, ale keďže v tomto prípade ide o prechod MC na MAC, má iné hodnoty ako v prípade prechodu MAC na MC. Nasledujúca trojica grafov znázorňuje práve tieto spomínané prechody. Prvý graf (obr. 14) vyjadruje závislosť $k = k(\Lambda)$ pri Ekmanovom čísle $E = 10^{-3}$. Na grafe je jedenásť MC módov s rôznymi vertikálnymi číslami $l = 1, \dots, 11$ (MAC módy sme zámerne odstránili, lebo zneprehľadňovali graf). K MC módom sú pridané krivky, ktoré veľmi dobre aproximujú MC módy v prípadoch $k \rightarrow 0$. Z grafu vidieť, že čím viac sa vzdialujeme od Λ_l , teda od prechodu MAC na MC, tým je táto aproximácia horšia. Druhý graf (obr. 15) ukazuje závislosť $k = k(E)$ pri $\Lambda = 2500$. Ekmanove číslo sme brali v intervale $E \in \langle 4 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3} \rangle$, aby sme zachytili prechod MAC na MC u všetkých módov s $l = 1, \dots, 11$, teda zamerali sme sa na tú časť Ekmanových čísel, kde začínajú MC módy existovať. K základným krivkám MC módov sú pridané krivky, ktoré aproximujú pokles radiálneho vlnového čísla do nuly (poklesom E). Aj v tomto prípade platí, že čím sme bližšie k hodnote $E_l^{(1)}$, t.j. ku kritickej hodnote pri ktorej začína MC mód s daným vertikálnym vlnovým číslom l existovať (prechodom z MAC módu), tým je aproximácia lepšia. Tretí graf (obr. 16) zobrazuje tie isté MC módy pri tých istých vstupných parametroch ako u druhého grafu (obr. 15), pričom odlišnosť je iba v inom intervale Ekmanovho čísla $E \in \langle 4 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-2} \rangle$, ktorý sme rozšírili z dôvodu zachytenia prechodu MC na MAC (a teda zánik MC módov) pre niektoré ďalšie vertikálne vlnové čísla l . MC módy s $l = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ máme na grafe zobrazené celé, teda od vzniku prechodom z MAC módov až po zánik opäť na MAC módy. Módy s $l = 1, 2, 3, 4, 5$

nie sú zobrazené celé, lebo Ekmanove čísla, pri ktorých dochádza k ich zániku (prechodom na MAC módy), sú už mimo nášho intervalu. K MC módom, ktoré sú na grafe zobrazené celé, sú pridané krivky, ktoré aproximujú pokles čísla k k nule, kde je aproximácia lepšia, ak sme bližšie k Ekmanovmu číslu $E_l^{(2)}$, pri ktorom dôjde k zániku MC módu.

7 Vysvetlenie niektorých numerických výsledkov

7.1 Vlastnosti MC módom pri prechodoch MAC→MC a MC→MAC

Na grafoch, ktoré vyjadrujú závislosti Rayleighovho čísla, radiálneho vlnového čísla a frekvencie na Ekmanovom čísle, môžeme vidieť prechod MAC módom na MC módy, ktoré existujú v určitom intervale Ekmanových čísel, pričom na konci tohto intervalu dôjde k prechodu MC módu opäť na MAC mód. Veľkosť intervalu súvisí s vertikálnym vlnovým číslom l a s Elsasserovým číslom Λ . V prílohe A (Šoltis 2003) boli prezentované vzťahy, pomocou ktorých sa veľmi jednoducho dajú spočítať hranice intervalu hodnôt Ekmanovho čísla E , v ktorom MAC mód prešiel na MC mód.

Základná rovnica, z ktorej vychádza nasledujúca úvaha, je polynomiálna rovnica

$$[1 + \alpha x(1 + \varepsilon_l x^2)]^2 = 4 \frac{\alpha^2}{m^2} x,$$

ktorá je v prílohe A označená číslom (37), pričom x , α , ε_l , π_l sú vyjadrené nasledovne

$$x = 1 + \frac{k^2}{\pi_l^2}, \quad \alpha = m^2 E \Lambda, \quad \varepsilon_l = \pi_l^4 \varepsilon = \frac{\pi_l^4 E}{m^2 \Lambda}, \quad \pi_l = l \pi.$$

Z prezentovaných grafov (obr. 14 – 16) je zrejmé, že tak, ako prechod MAC → MC, tak aj MC → MAC je sprevádzaný poklesom radiálneho vlnového čísla k do nulovej hodnoty. Ak položíme $k = 0$, potom sa x zmení jednoducho na jednotku a rovnica (37) prejde po odmocnení na veľmi jednoduchú rovnicu

$$\alpha - \alpha \varepsilon_l = 1,$$

pričom sme za azimutálne vlnové číslo m zvolili hodnotu 1, lebo MC módy môžu existovať len pri tejto najnižšej hodnote (pozri napr. Tabuľku 1 v prílohe A). Ak do tejto rovnice dosadíme výrazy α a ε_l , dostaneme rovnicu

$$\pi_l^4 E^2 - \Lambda E + 1 = 0,$$

čo je kvadratická rovnica pre neznámu E . Korene tejto rovnice sú

$$E_l^{(2,1)} = \frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - 4\pi_l^4}}{2\pi_l^4}$$

a dávajú nám dolnú a hornú hranicu intervalu Ekmanových čísel, pre ktorý existuje MC mód. Ak požadujeme, aby korene boli reálne čísla, potom pre výraz $\Lambda^2 - 4\pi_l^4$, ktorý je pod odmocninou, musí platiť podmienka $\Lambda^2 - 4\pi_l^4 > 0$. Táto podmienka nám umožní určiť kritickú hodnotu vertikálneho vlnového čísla l_c , ktorá dáva maximálne vertikálne vlnové číslo, s akým môže pri danej hodnote Λ existovať MC mód. Toto kritické číslo súvisí s Λ nasledovne: $l_c = (\Lambda/2)^{1/2}/\pi$. Zo vzťahu $(E\sigma)^2 x = 1$, ktorý je v prílohe A číslovaný (38), ľahko spočítame frekvencie σ , pri ktorých prechádza MAC mód na MC mód a naopak. Vieme, že v oblastiach prechodov MAC → MC a MC → MAC je $k = 0$ a teda $x = 1$, čo nám dá triviálny vzťah $\sigma = 1/E$.

Keď budeme uvažovať hodnotu Elsasserovho čísla $\Lambda = 2500$, kritické vertikálne číslo je rovné $l_c = 11$ a hodnoty Ekmanových čísel a frekvencií, ktoré súvisia s už spomínanými prechodmi $MAC \rightarrow MC$ a $MC \rightarrow MAC$, sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 3

l	$E^{(2)} \cdot 10^3$	$E^{(1)}$	$\sigma^{(2)}$	$\sigma^{(1)}$
1	.40001	25.6646	2500.0	0.0390
2	.40010	1.6037	2499.4	0.6236
3	.40051	.3165	2496.8	3.1600
4	.40161	.0999	2490.0	10.01
5	.40397	.0407	2475.4	24.59
6	.40842	.0194	2448.4	51.56
7	.41621	.0103	2402.7	97.34
8	.42943	.0058	2328.7	171.34
9	.45230	.0035	2210.9	289.06
10	.49577	.0021	2017.1	482.92
11	.61758	.0011	1619.4	880.77

Pri študovaní grafu, ktorý vyjadruje závislosť radiálneho vlnového čísla k na Ekmanovom čísle E , vzniká otázka, podľa akej funkcie sa správa radiálne vlnové číslo MC módu v blízkosti týchto prechodov. Analýzou rovnice (37) použitím asymptotického priblíženia $k \rightarrow 0$, sa podarilo ukázať, že radiálne vlnové číslo sa v blízkosti prechodu MAC módu na MC mód správa ako funkcia

$$k = (E - E_l^{(1)})^{1/2} \frac{\pi_l}{\sqrt{3E_l^{(1)}}} \sqrt{\frac{2 - E_l^{(1)}\Lambda}{E_l^{(1)}\Lambda - 1}}. \quad (47)$$

V prípade prechodu MC módu na MAC mód sa radiálne vlnové číslo správa ako funkcia

$$k = (E_l^{(2)} - E)^{1/2} \frac{\pi_l}{\sqrt{3E_l^{(2)}}} \sqrt{\frac{E_l^{(2)}\Lambda - 2}{E_l^{(2)}\Lambda - 1}}. \quad (48)$$

$E_l^{(1)}$ a $E_l^{(2)}$ sú korene vyššie spomínanej kvadratickej rovnice, ktoré dávajú kritické hodnoty Ekmanovho čísla, pri ktorom dochádza k prechodu MAC módov na MC mód, resp. MC módu na MAC mód. Ďalej si ukážeme matematický postup, ktorý nás priviedol k vyjadreniu týchto aproximatívnych funkcií $k = k(E)$. Odvodenie spravíme len pre prípad prechodu $MAC \rightarrow MC$, nakoľko odvodenie pre prípad $MC \rightarrow MAC$ je až na drobné detaily rovnaké.

Vychádzame z rovnice (37), ktorú najprv odmocníme, využijeme substitúciu $z = x^{1/2}$ a po ďalších jednoduchých úpravách dostaneme rovnicu

$$\varepsilon_l z^6 - 1 + \alpha^{-1} + (z - 1)^2 = 0.$$

Zavedením novej pomocnej premennej $\xi = z - 1$, predchádzajúcu rovnicu zmeníme na

$$\varepsilon_l (1 + \xi)^6 - 1 + \alpha^{-1} + \xi^2 = 0.$$

V prípade $\xi \ll 1$ ($k \rightarrow 0$, čiže v blízkosti prechodu MAC na MC) zanedbaním malých členov zjednodušíme túto rovnicu na tvar $\varepsilon_l(1 + 6\xi) - 1 + \alpha^{-1} = 0$, z ktorého vyjadríme ξ

$$\xi = -\frac{1}{6} + \frac{E\Lambda - 1}{6\pi_l^4 E^2}.$$

Nás zaujíma oblasť hodnôt Ekmanovho čísla o málo väčších od kritickej hodnoty E_l , preto budeme Ekmanove číslo ďalej označovať $E = E_l + e$, kde e je malý parameter, pre ktorý platí $e \ll E_l$. Po zavedení tejto substitúcie do výrazu pre ξ a po ďalších algebraických úpravach sa jeho tvar zmení na

$$\xi = \frac{e}{6} \frac{\Lambda - 2\pi_l^4 E_l}{E_l \Lambda - 1}.$$

Ak si pripomenieme, že $1 + \xi = z$ a $z = x^{1/2}$, môžeme písať

$$x^{1/2} = 1 + \frac{e}{6} \frac{\Lambda - 2\pi_l^4 E_l}{E_l \Lambda - 1},$$

pričom x je definované výrazom $x = 1 + k^2/\pi_l^2$. Pre malé hodnoty k platí

$$\left(1 + \frac{k^2}{\pi_l^2}\right)^{1/2} \doteq 1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\pi_l^2} = 1 + \frac{e}{6} \frac{\Lambda - 2\pi_l^4 E_l}{E_l \Lambda - 1}.$$

Z tejto rovnice dostaneme veľmi jednoduchými algebraickými úpravami požadovanú funkciu $k = k(E)$

$$k = (E - E_l)^{1/2} \frac{\pi_l}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\Lambda - 2\pi_l^4 E_l}{E_l \Lambda - 1}}.$$

Aj v prípade grafu závislosti radiálneho vlnového čísla k na Elsasserovom čísle Λ (pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 10^{-3}$), pozorujeme prechod MAC módov na MC módy, pričom hodnota Elsasserovho čísla Λ_l , pri ktorej dôjde k tomuto prechodu, súvisí s vertikálnym vlnovým číslom l . Tiež je zaujímavé preskúmať, podľa akej funkcie sa správa radiálne vlnové číslo k v blízkosti Λ_l . Pomocou asymptotických priblížení sa dá ukázať, že táto funkcia má tvar

$$k = (\Lambda - \Lambda_l)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3}\Lambda_l} \left(\pi_l^2 + \frac{1}{\pi_l^2 E^2} \right)^{1/2}. \quad (49)$$

Začiatok odvodenia je taký istý, ako v predchádzajúcom prípade, čiže opäť dostaneme rovnicu $\varepsilon_l z^6 - 1 + \alpha^{-1} + (z - 1)^2 = 0$ a výraz pre pomocnú premennú ξ

$$\xi = -\frac{1}{6} + \frac{E\Lambda - 1}{6\pi_l^4 E^2}$$

Pretože riešime prípad závislosti $k = k(\Lambda)$, zaujíma nás oblasť hodnôt Elsasserovho čísla, ktoré sa opäť veľmi málo líšia od hodnoty Λ_l , čiže zaujíma nás správanie sa radiálneho vlnového čísla k v intervale $(\Lambda_l, \Lambda_l + \ell)$, kde ℓ je malý parameter, pre ktorý platí $\ell \ll \Lambda_l$. Zavedieme substitúciu $\Lambda = \Lambda_l + \ell$, čím sa vyjadrenie pre ξ zmení na tvar

$$\xi = \frac{\ell}{6\pi_l^4 E}.$$

Z definícií ξ a z môžeme vyjadriť $x^{1/2}$ v tvare

$$x^{1/2} = \left(1 + \frac{k^2}{\pi_l^2}\right)^{1/2} \doteq 1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\pi_l^2} = 1 + \frac{\ell}{6\pi_l^4 E},$$

z ktorého pomocou jednoduchých úprav určíme funkciu $k = k(\Lambda)$ v hľadanom tvare

$$k = \frac{\ell^{1/2}}{(3\pi_l^2 E)^{1/2}} = (\Lambda - \Lambda_l)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3\Lambda_l}} \left(\pi_l^2 + \frac{1}{\pi_l^2 E^2} \right)^{1/2}.$$

Tieto asymptotické priblíženia (47–49) priebehov $k = k(E)$ pri $E \rightarrow E_l^{(1)}$, resp. $E \rightarrow E_l^{(2)}$ a $k = k(\Lambda)$ sú postupne na obrázkoch 14, 15 a 16.

7.2 Vlastnosti MAC(E) módov

Už letmý pohľad na obrázky 8–11 vyvoláva otázky. Prečo E módy existujú len pre $q > 1$? Prečo krivky pre rôzne azimutálne vlnové čísla m sú u všetkých kritických čísel R_c , k_c a σ_c rozdelené do troch skupín (1) $m = 1$, (2) $m = 2$ a (3) $m \geq 3$? Prečo MAC(E) módy existujú len pre väčšie Λ , t.j. pre $\Lambda \geq \Lambda_E(m, q, \dots)$?

Dôkazy niektorých týchto vlastností len naznačíme. Hlavne však len v miere, ako krivky súvisia so základnými rovnicami, určujúcimi ich vlastnosti. Fyzikálnym dôsledkom týchto vlastností tiež nevenujeme pozornosť, aj keď chápanie matematických príčin vlastností grafov je nutnou podmienkou štúdia fyzikálnej podstaty odpovedajúcich módov.

Dôkaz neexistencie MAC(E) módov pre $q = 1$ je kľúčový, a pritom jednoduchý. Pre MAC(E) módy musí byť $\sigma < 0$. Sledujme podmienky pre $\sigma < 0$ (pozri časť 3.1 na stranách 7 a 8). Substitúciou $\sigma \rightarrow -\sigma$ prejde (27) na tvar $-C_5\sigma^5 + C_4\sigma^4 - C_3\sigma^3 + C_2\sigma^2 - C_1\sigma + C_0 = 0$ (27'). Ak $q = 1$, tak $C_3 > 0$, $C_1 > 0$. Takisto platí $C_5 > 0$, $C_4 < 0$, $C_2 < 0$, $C_0 < 0$. Je zrejmé, že všetky koeficienty (27') sú < 0 , čo implikuje v zmysle Descartesovej vety (pozri napr. Schwarz 1968) neexistenciu záporných σ , teda neexistenciu MAC(E) módov pre $q = 1$.

Venujme sa teraz podmienkam, ktoré musia platiť, aby MAC(E) módy existovali pre $q > 1$. Stále platí $C_5 > 0$, $C_4 < 0$, $C_0 < 0$. Pretože $b > 0$, tak aj $C_2 < 0$. Takisto pri $a > 0$ a pre $\varepsilon \ll 1$ platí $C_3 > 0$. Až na vlastnosti koeficientu C_1 všetky ostatné majú tie isté znamienka ako v predchádzajúcom prípade $q = 1$. Teda nutnou podmienkou pre $\sigma < 0$ pri $q > 1$ je, aby $c > 0$, čím by mohlo byť $C_1 < 0$. Pri $\varepsilon = 0$ máme

$$C_1 = \delta^2 \frac{2\pi_n^2}{m^2\Lambda} + (1 - q^{-1}) \left((4\pi_n^2 - m^2\delta)\Lambda - \delta^2 \frac{\pi_n^2}{m^2\Lambda} \right) \quad \text{a potrebujeme, aby } C_1 < 0. \quad (50)$$

Pri $\delta = \pi_n^2 + k^2$ vidíme tri rôzne nutné podmienky splnenia poslednej nerovnosti $C_1 < 0$: (1) ak $m = 1$, tak $4\pi_n^2 - (\pi_n^2 + k^2) < 0 \Rightarrow k^2 > 3\pi^2 (\Rightarrow k > \sqrt{3}\pi)$; (2) ak $m = 2$, tak nerovnosť je splnená pri $-k^2 < 0$ pri ľubovoľnom $k > 0$; (3) ak $m \geq 3$, tak $(4 - m^2) - k^2 < 0$ je splnená nielen pre $k > 0$, ale dokonca aj pre $k = 0$. Zrejme toto vysvetľuje 3 rôzne skupiny kriviek spomínaných v jednej z vyššie položených otázok.

Okolnosti, pri ktorých rastom Λ pri $\Lambda \lesssim \Lambda_E$ sa zrazu objavajú MAC(E) módy sú zložitejšie. Uvedomme si napr., že východný mód nevznikne zo západného zmenou znamienka σ prechodom cez $\sigma = 0$ pri zmene Λ . Na základe toho, že $C_0 \neq 0$, nemôže totiž byť $\sigma = 0$, teda prípad stacionárnej konvekcie. Okolnosti vzniku MAC(E) módov jednoducho pochopíme neviskóznym priblížením ($E = \varepsilon = 0$) nášho zložitejšieho viskózneho prípadu. Rovnica (27), prejde na kubickú rovnicu $\tilde{C}_3\sigma^3 + \tilde{C}_2\sigma^2 + \tilde{C}_1\sigma + \tilde{C}_0 = 0$ (27) [kde $\tilde{C}_3 = (1 + q^{-1})\pi_n^2/m^2\Lambda$, $\tilde{C}_2 = -4\pi_n^2/m$, $\tilde{C}_1 = C_1$ v (50) a $\tilde{C}_0 = \delta^2\tilde{C}_2$], ktorú môžeme podrobiť štandardnej analýze v zmysle riešenia cez Cardanove vzorce. Pripomíname, že (27) možno upraviť na rovnicu⁴ $x^3 + px + q = 0$, riešenia ktorej majú vlastnosti určované hodnotou diskriminantu $D_3 = -108 [(p/3)^3 + (q/2)^2]$.

Kvalita koreňov sa výrazne mení pri $D_3 = 0$, a preto možno očakávať, že z podmienok $D_3 = 0$ a $k = 0$ sa bude dať vypočítať Λ_E , určujúce pre $\Lambda \geq \Lambda_E$ rozsah Λ , pri ktorých

⁴ q tu neznamená Robertsovo číslo

Obr. 17: Vplyv viskozity na vlastnosti MAC(E) módov. Závislosti kritických čísel – Rayleighoveho R_c (a), radiálneho vlnového k_c (c) a frekvencie σ_c (d) na Elsasserovom čísle Λ pri Robertsovom čísle $q = 1.05$ pre azimutálne vlnové čísla $m = 5, 30$. Plné krivky súvisia s viskóznym prípadom a čiarkované krivky s neviskóznym prípadom. Závislosť diskriminantu kubickej rovnice na Elsasserovom čísle Λ (b) pri Robertsovom čísle $q = 1.05$ a azimutálnom vlnovom čísle $m = 30$ v neviskóznom prípade.

existujú MAC(E) módy. Tieto podmienky vedú k rovnici

$$y^3 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0 \quad \text{pre } y = \left[\frac{qm\Lambda_E}{\delta(q+1)} \right]^2 \quad (51)$$

s týmito koeficientami

$$\alpha_1 = \frac{A^2 + 32B}{A^3/3 + 16B^2}, \quad \alpha_2 = \frac{A + 16}{A^3/3 + 16B^2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{A^3 + 48B^2},$$

pričom parametre A a B sú definované nasledovne

$$A = -\frac{q^2 - 1}{q^2} (m^2 - 4) - \frac{16}{3}, \quad B = \frac{q^2 - 1}{2q^2} (m^2 - 4) + \frac{16}{9},$$

kde q ako zvyčajne je Robertsove číslo. Vypočítané $\Lambda_E = (1 + q^{-1}) \delta y_+^{1/2} / m$ pomocou kladného koreňa y_+ rovnice (51) je vo veľmi dobrej zhode (na 3 platné cifry) s nábehovými Λ_E vypočítanými numericky podľa kapitoly 5.

Ak diskriminant $D_3 > 0$, tak kubická rovnica má 3 reálne korene. Pri hodnote $D_3 = 0$ ostávajú ešte 3 reálne korene, ale do hry vstupuje dvojnásobný koreň. Pri $D_3 < 0$ máme už len jeden reálny koreň a 2 komplexné, ktoré sú komplexne združené.

Zrejme v zmysle vzťahu (50) rastom Λ je najprv situácia $D_3 < 0$ a pri hodnote $\Lambda = \Lambda_E$ je diskriminant rovný nule $D_3 = 0$. Pre $\Lambda > \Lambda_E$ už bude diskriminant kladný $D_3 > 0$ s maximálnym počtom reálnych koreňov. Teda pre $\Lambda < \Lambda_E$ [$\Lambda > \Lambda_E$] MAC(E) módy neexistujú [existujú]. Práve nárastom počtu reálnych koreňov kubickej rovnice (27) z 1 na 3 možno vysvetliť aj “zákmity” na krivkách u grafov pre MAC(W) módy (pozri časť 6.1 a obr. 4 až 7). Pritom hodnoty zákmitových Λ u západných MAC módov korešpondujú všetkým Λ_E^m , resp. Λ_{mE}^q .

Správanie sa MAC(E) módov a ich závislosť na viskozite je znázornená na obrázku 17. Na prvom grafe (Obr. 17a) je závislosť kritického Rayleighovho čísla R_c na Elsasserovom čísle Λ . Vidíme dve dvojice kriviek, ktoré súvisia s dvojicou azimutálnych vlnových čísel $m = 5, 30$. Plná krivka každej dvojice súvisí s viskóznym prípadom a čiarkovaná krivka s neviskóznym prípadom. V oboch prípadoch $m = 5$ aj $m = 30$ si môžeme všimnúť, že viskóznym prípad dáva menšie Rayleighove čísla ako neviskóznym, čo znamená, že viskozita napomáha vybudeniu MAC(E) módov. S nárastom Λ sa však tento rozdiel v Rayleighových číslach znižuje. Na druhom grafe (Obr. 17b) je závislosť diskriminantu základnej kubickej rovnice (27) na Elsasserovom čísle Λ v okolí Λ_E . Táto krivka súvisí s neviskóznym prípadom pri azimutálnom vlnovom čísle $m = 30$ a pri Robertsovom čísle $q = 1.05$. Ak sa poklesom hodnoty Λ blížíme k nábehovej hodnote Λ_E , pri ktorej začína existovať MAC(E) mód, tak diskriminant prudko klesá k nulovej hodnote, čo sa z predchádzajúcej analýzy kubickej rovnice dalo očakávať. Ďalší graf (Obr. 17c), znázorňujúci závislosť $k_c = k_c(\Lambda)$, ukazuje rozdielne správanie sa MAC(E) módov vo viskóznom a v neviskóznom prípade, pričom v oboch prípadoch začínajú MAC(E) módy svoju existenciu prudkým nárastom kritického radiálneho vlnového čísla z veľmi malých (pravdepodobne nulových) hodnôt. Na poslednom grafe (Obr. 17d) je znázornená závislosť kritickej frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle Λ . Z tohto grafu jasne vidieť, ako sú MAC(E) módy citlivé na viskozite, keďže pri niektorých hodnotách Elsasserovho čísla Λ môže byť rozdiel v kritických frekvenciách až o jeden rád pre viskóznym, resp. neviskóznym prípad.

Grafy na obr. 17 indikujú opodstatnenosť aproximácie správania sa MAC(E) módov pomocou neviskózneho priblíženia v oblasti $\Lambda \rightarrow \Lambda_E$ pre $\Lambda - \Lambda_E > 0$. Zaujímavé sú však ďalšie zistenia “prekvapujúco” ukazujúce na pozitívny vplyv viskozity pre vznik MAC(E) módov. Najprv viskozita mierne znižuje nábehovú hodnotu Λ_E pre $m = 5$ i $m = 30$ [teda mierne zväčšuje rozsah Λ existencie MAC(E) módov] a ďalej práve v oblasti preferencie módov v oblasti minimálnych kriviek $R_c = R_c(\Lambda)$ pre $m = 5, 30$ na obr. 17a pre viskóznym i neviskóznym prípad viskozita výrazne napomáha vzniku módov, pretože R_c pre viskóznym prípad je výrazne menšie oproti neviskóznemu prípadu. Opäť sa ukazuje, že u difúzných nestabilit jeden z difúzných procesov (tu viskozita) uľahčuje vznik nestability.

8 Záver

Využitím možnosti zjednodušenia všeobecného problému v prípade voľných nekonečne elektricky vodivých hraníc $\mathcal{F}_\infty^\infty$ sme problém zjednodušili na matematicky oveľa jednoduchší a numericky menej komplikovanejší. To umožnilo zostavenie rýchleho a z programátorského hľadiska jednoduchého programu na výpočet základných parametrov, hlavne kritické čísla (Rayleighove číslo R_c , radiálne vlnové číslo k_c a frekvenciu σ_c), charakterizujúcich **MAC módy** a ich závislosť na rôznych vstupných parametroch (azimutálne vlnové číslo m , Robertsove číslo q , Elsasserove číslo Λ a Ekmanove číslo E). Jedným z hlavných cieľov tejto práce bolo vysvetliť tzv. viskózne skoky v radiálnych vlnových číslach a frekvenciách

v prípade závislosti týchto parametrov na Elsasserovom čísle (pri zložitejších hraničných podmienkach). Numerické výpočty ukázali, že v prípade jednoduchých hraničných podmienok $\mathcal{F}_\infty^\infty$ skoky neexistujú v celom rozsahu uvažovaných Robertsovych čísel q . Teda pre $q < 1$ s minimálnou hodnotou $q = 0.1$, ako sa aj očakávalo; pre $q = 1$, ako sa aj analyticky dokázalo; a pre $q > 1$ s maximálnou hodnotou $q = 5$, čo sa však už analyticky nepodarilo dokázať. Podarilo sa však ukázať, že nutnou podmienkou skokov je nenulová viskozita. Ďalším dôležitým výsledkom je aj preskúmanie vlastnosti MAC módov pri menších, čiže fyzikálne reálnejších hodnotách Elsasserovho čísla Λ . Ukázalo sa tiež, že pre všetky m každému západnému MAC módu pre menšie Λ úspešne konkuruje viskózný mód a pre $\Lambda < \Lambda_{vh}^m$ je preferovaný. Avšak tieto viskózne módy nie sú nikdy preferované. Totiž ak pri nejakej hodnote Elsasserovho čísla Λ máme nejaký viskózný mód s azimutálnym vlnovým číslom m_1 , tak vždy môžeme vybrať MAC mód s vyšším azimutálnym vlnovým číslom m_2 , ktorý má menšie R_c , a teda je viac preferovaný.

Využitím faktu, že Rayleighove číslo MC módov je $R = 0$, sa podarilo vlastnohodnotový problém preformulovať a zjednodušiť natoľko, že takmer všetky nasledujúce vlastnosti západných MC módov katalyzovaných viskozitou sa podarilo vysvetliť a dokázať analýzou nie veľmi zložitej algebraickej rovnice.

Podrobne sa študovali **vlastnosti MC(W) módov**, teda “viskózných” západných MC módov. Hovoríme o MC módoch a nie o MAC módoch preto, lebo vychádzame zo základného predpokladu, že Rayleighovo číslo $R = 0$, a teda teplotný gradient, resp. zdroje tepla sú nulové. Dokázalo sa, že frekvencia vznikajúcich MC módov je vždy kladná $\sigma > 0$, čo znamená, že MC módy sa šíria západným smerom. Preto hovoríme o západných MC(W) módoch. Tieto módy nazývame “viskózne” (alebo katalyzované viskozitou), lebo nutnou podmienkou ich vzniku je nenulová viskozita ($E \neq 0$). Podarilo sa tiež ukázať, že MC(W) módy vznikajú len pri azimutálnom vlnovom čísle $m = 1$. Do hry vstupuje veľké množstvo MC(W) módov s rozmanitými frekvenciami σ a radiálnymi vlnovými číslami k , kde veľké množstvo súvisí s veľkým množstvom vertikálnych vlnových čísel l , pričom sa dá jednoznačne vyjadriť maximálne vertikálne vlnové číslo, s akým ešte môže existovať MC(W) mód. Ďalšou dôležitou vlastnosťou MC(W) módov je, že vznikajú prechodom z MAC(W) módov. Pri konštantnom Elsasserovom čísle Λ a pri premennom Ekmanovom čísle E každý MC(W) mód, charakterizovaný príslušným vertikálnym vlnovým číslom l , vzniká prechodom z MAC(W) módu pri určitej hodnote Ekmanovho čísla, ale aj zaniká prechodom opäť na MAC(W) mód (ale už pri inej väčšej hodnote Ekmanovho čísla, ktorá je pre malé vertikálne vlnové čísla veľmi veľká, a teda fyzikálne nezaujímavá). Pri konštantnom Ekmanovom čísle E a pri premennom Elsasserovom čísle Λ opäť vznikajú MC(W) módy prechodom z MAC(W) módov pri určitej hodnote Elsasserovho čísla, ale už k zániku MC(W) módu prechodom na MAC(W) módu rastom Λ nedochádza. Hodnoty Ekmanových čísel, pri ktorých MC(W) módy vznikajú a zanikajú a hodnoty Elsasserových čísel, pri ktorých MC(W) módy vznikajú, sa podarilo jednoznačne určiť. Existencia a vlastnosti vznikajúcich MC(W) módov, študovaných v diplomovej práci (v prípade $\mathcal{F}_\infty^\infty$), sú nezávislé od hraničných podmienok [na rozdiel od MC(E) módov s $m = 1$ (Roberts & Loper 1979, Brestenský et al 2001)], a takisto sú nezávislé na Robertsovom čísle $q = \kappa / \eta$.

Pri mnohých zvládnutých detailoch štúdia MAC a MC vln v oblasti parametrov pokrývajúcich aj podmienky v zemskom jadre sa očakávané získali nové fyzikálne poznatky v problematike hydromagnetických nestabilití najmä o nezanedbateľnom vplyve nízkej viskozity na ich vývin. Navyše v priestore študovaných parametrov boli nájdené oblasti, kde dokonca malá viskozita výrazne ovplyvnila nestability kvalitatívne i kvantitatívne. Výrazne nové kvality a existencia módov nečakaných vlastností boli zistené pre prípad Ekmanových čísel $E \sim 10^{-3}$ a Elsasserových čísel $\Lambda \sim 10^3$ (tak, že $\Lambda E \sim 1$). Vysoké E a takisto Λ treba pre pomery v zemskom jadre spájať s mimoriadne malou pravdepodobnosťou. Napr. E s neurčitými znalosťami o turbulentnom stave v zemskom jadre. Veľké Λ je prirodzené

pre kvadrupólovú symetriu východiskového vysoko stabilného azimutálneho poľa (Dormy et al 2000). Výsledky štúdia MC(W) módov sú však aj tak silne heuristické, pretože dá sa predpokladať, že v náročnejšom probléme s východiskovým poľom s dipólovou symetriou vznik MC(W) módov, dá sa tušiť, bude možné spájať s $\Lambda \sim 1 - 10$ pravdepodobnejším pre zemské jadro.

Literatúra

- Bod'a J. (1988) Thermal and magnetically driven instabilities in a non-constantly stratified fluid layer, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 44: 77–90
- Braginsky S.I. (1964) Magnetohydrodynamics of the Earth's Core, *Geomagn. Aeron.*, 4: 898–916 (Engl. Transl. 698–712)
- Brestenský J. and Ševčík S. (1994) Mean electromotive force due to magnetoconvection in rotating horizontal layer with rigid boundaries, in: M.R.E. Proctor, ed., Geodynamo Modelling, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 77 (1-4): 191–208
- Brestenský J., Ševčík S. a Šimkanin J. (1995) The boundary conditions influence on a magnetoconvection of a rapidly rotating horizontal fluid layer stratified either uniformly or non-uniformly (mathematical approaches). In: *Proc. of the 1st conference of Slovak geophysicists*, ed(s). I. Túnyi et al., Geophys. Inst. of SAS, Bratislava, 80–85
- Brestenský J., Ševčík S. and Šimkanin J. (1998) Magnetoconvection in dependence on Roberts number. In: *Planetary and Cosmic Dynamos*, eds. R. Hollerbach, M.R.E. Proctor and A. Shukurov, *Studia geoph. et geod.*, **42**, 280–288 (denoted as BSS98)
- Brestenský J., Ševčík S. and Šimkanin J. (2001) Rotating magnetoconvection in dependence on stratification, diffusive processes and boundary conditions. In: *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, eds. P. Chossat, D. Armbruster and I. Oprea, NATO Science Series, Sub-Series II, vol. **26**, Kluwer Academic Publishers, 133–144
- Brestenský J. and Ševčík S. (2000) Magnetoconvection influenced by viscosity in dependence on Roberts number and boundary conditions, *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comeniana*, **XXI–XXII**, 61–76 (denoted as BS00)
- Chandrasekhar S. (1961) Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Clarendon press, Oxford
- Dormy E., Valet J.-P., and Courtillot V. (2000) Numerical Models of the Geodynamo and Observational Constraints, *G³: Geochemistry, Geophysics, Geosystems, An Electronic Journal of the Earth Sciences, AGU*, 1, 1–42
- Fearn D.R. (1989) Differential Rotation and Thermal Convection in a Rapidly Rotating Hydromagnetic System, in: D.R. Fearn and M.R.E. Proctor, eds., Earth's Core Boundary and Geodynamos, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 49: 173–194
- Fearn D.R. (1998) Hydromagnetic flow in planetary cores, *Rep. Prog. Phys.*, **61**, pp. 175–235
- Glatzmaier G. A. and Roberts P. H. (1995) A three-dimensional self-consistent computer simulation of geomagnetic field reversal, *Nature*, **377**, pp. 203–209
- Glatzmaier G. A. and Roberts P. H. (1997) Numerical Simulations of the Geodynamo, in J. Brestenský and S. Ševčík, eds., Stellar and Planetary Magnetoconvection (Bratislava 1996), *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comeniana*, **XIX**, pp. 125–143
- Guba P. (2001) On the finite-amplitude steady convection in rotating mushy layers, *J. Fluid Mech.*, **437**, 337–365
- Hide R. (1966) Free Hydromagnetic Oscillations of the Earth's Core and the Theory of the Geomagnetic Secular Variations, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 259: 615–650
- Lindelof T. (1987) CERN Program Library 1987.03.01

Proctor M.R.E. (1994) Convection and Magnetoconvection in a Rapidly Rotating Sphere, in: M.R.E. Proctor and A.D. Gilbert eds., *Lectures on Solar and Planetary Dynamos* (Cambridge University Press).

Revallo M., Ševčovič D., Ševčík S. a Brestenský J. (1999) Viscously controlled nonlinear magnetoconvection in a non-uniformly stratified horizontal layer, *PEPI*, **111**, 83–92

Roberts P.H. and Loper D. (1979) On the diffusive instability of some simple steady magnetohydrodynamic flows. *J. Fluid Mech.*, 90: 641–668

Ševčík S. (1996) Hydromagnetické vlny a nestability v podmienkach kvapalného jadra Zeme, *Habilitačná práca*, FMFI UK, Bratislava

Ševčík S., Brestenský J. and Šimkanin J. (2000) MAC waves and related instabilities influenced by viscosity in dependence on boundary conditions, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **122 (3-4)**, pp. 161–174

Šimkanin J., Brestenský J., and Ševčík S. (1997) Dependence of rotating magnetoconvection in horizontal layer on boundary conditions and stratification, in: J. Brestenský and S. Ševčík, eds., *Stellar and Planetary Magnetoconvection* (Bratislava 1996), *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comeniana*, 19: 195–220

Šimkanin J. (2001) Boundary conditions' influence on magnetoconvection in the non-uniformly stratified Earth's core (in Slovak), *PhD thesis*, Comenius University, Bratislava

Šimkanin J., Brestenský J. and Ševčík S. (2001) Hydromagnetic instabilities of MAC waves kind in non-uniformly stratified fluid layer in dependence on boundary conditions, Parts I, II, *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comeniana*, **XXIII**, 3–16, 17–30

Soward A.M. (1979) Thermal and magnetically driven convection in a rapidly rotating fluid layer, *J. Fluid Mech.*, 90: 669–684

Tagare S.G., Rameshwar Y., Brestenský J. and Ševčík S. (2001) Thermohaline magnetoconvection in Earth's outer core, *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comeniana*, **XXIII**, 31–44

Doplňená literatúra

Braginsky S. I., Meytlis V. P. (1990) Local turbulence in the Earth's core, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **55**, 71–87

Braginsky S. I., Roberts P. H. (1994) Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **79**, 1–97

Brestenský J. and Rädler K.-H. (1989) Mean electromotive forces resulting from instabilities in a stratified rapidly rotating fluid layer permeated by a magnetic field, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **49**, 57–70

Dobler W., Frick P., Stepanov R. (2003) Screw dynamo in time-dependent pipe flow, *Physical Review E*, **67**, 056309, 1–10

Fearn D.F. (1993) Magnetic instabilities in rapidly rotating systems, in: M.R.E. Proctor, P.C. Matthews & A.M. Rucklidge eds., *Solar and Planetary Dynamos*, Cambridge University Press

Fearn D.F. (1993) Nonlinear Planetary Dynamos, in: M.R.E. Proctor and A.D. Gilbert eds., *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, Cambridge University Press

Frick P., S. Denisov, S. Khripchenko, V. Noskov, D. Sokoloff, R. Stepanov (2001) *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, edited by P.Chossat, D. Armbruster, and I. Oprea (Kluwer, Dordrecht), 1–8

Gailitis A., Lielausis O., Platacis E., Gerbeth G., Stefani P. (2002) Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos, *Reviews of modern physics*, **74**, 973–990

Jones C. A. (2003) Dynamos in Planets, príspevok prezentovaný na konferencii Mathematical Aspect of Natural Dynamo, Caramulo (Portugalsko), september 2003

Kono M., Roberts P.H. (2002) Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field, *Reviews of Geophysics*, **40**, 1–53

Krause F., Rädler K.-H. (1980) Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory, Akademie-Verlag, Berlin and Pergamon Press, Oxford

Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. (1989) Numerical recipes, Cambridge University Press, Cambridge

Schwarz Š. (1968) Základy náuky o riešení rovníc, Vydavateľstvo SAV, Bratislava.

Šimkanin J., Brestenský J., Ševčík S. (2003) Problem of the rotating magnetoconvection in variously stratified fluid layer Revisited, *Studia geoph. et geod.*, **47**, 827–845

Príspevky diplomanta na domácich a zahraničných konferenciách a seminároch (in Books of Abstracts)

Šoltis T. (2003), Magnetické nestability v podmienkach zemského jadra, Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Sekcia Fyzika, Bratislava 2003

Šoltis T. (2003), Magnetické nestability v podmienkach zemského jadra, celoštátne kolo Študentskej vedeckej konferencie vo fyzike, FMFI UK Bratislava 2003

Brestenský J., Ševčík S., Šoltis T. (2003), Magnetické nestability v podmienkach zemského jadra, 5. celoslovenská geofyzikálna konferencia, FMFI UK Bratislava 2003

Brestenský J., Ševčík S., Šoltis T. (2003), Magnetic instabilities catalyzed by viscosity in the Earth's core, Mathematical Aspect of Natural Dynamo, Caramulo (Portugalsko), september 2003

Brestenský J., Ševčík S., Šoltis T. (2003), Instabilities of the MC waves type in the Earth's core, 6. MHD Tage v rámci valného zhromaždenia Nemeckej Astronomickej Spoločnosti, in: *Astronomische Nachrichten*, Supplementary Issue 3, vol. 324, 76–77, Freiburg, september 2003

Brestenský J., Ševčík S., Šimkanin J., Šoltis T. (2003), Instabilities of the MAC-waves type and MC-waves type in the Earth's core, Colloquium at Kiepenheuer Institute für Sonnenphysik, Freiburg, september 2003

Brestenský J., Ševčík S., Šoltis T. (2004), Hydromagnetic instabilities in rotating layer in azimuthal magnetic field at various diffusive coefficients, 1. valné zhromaždenie European Geosciences Union, Nice, apríl 2004, (pripravený príspevok)

Šoltis T., Brestenský J., Ševčík S. (2004), Influence of thermal conductivity anisotropy on rotating magnetoconvection, Study of the Earth's Deep Interior (SEDI) v sekcii Core Dynamics and Geodynamo, Garmisch-Partenkirchen, júl 2004, (prihlásený príspevok)