

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
v Bratislave



DIPLOMOVÁ PRÁCA

2005

Renáta Brozová

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
v Bratislave

KATEDRA ASTRONÓMIE, FYZIKY ZEME
A METEOROLÓGIE

**Výpočet šírenia seizmických vln
konečno-diferenčnou schémou
na čiastočne striedavo usporiadanej sieti**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Vypracovala: Renáta Brozová

Vedúci diplomovej práce : prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava, Apríl 2005

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne na základe vedomostí získaných štúdiom a konzultácií a uvádzam všetky literárne pramene, ktoré som použila.

Moje poďakovanie patrí v prvom rade prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. za cenné rady a venovaný čas. Ďakujem tiež za významnú pomoc Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD. a Mgr. Martinovi Gálishovi, ako i celému Oddeleniu seizmológie na GFÚ SAV za vytvorenie príjemných podmienok pri písaní diplomovej práce.

OBSAH

Úvod	4
1. Numerické modelovanie v seizmológii	6
1.1 Úvod do problematiky	6
1.2 Metóda konečných diferencií	7
1.3 Formulácia pohybových rovníc, konečno-diferenčné schémy a siete	9
2. Analýza konečno-diferenčných schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti	14
2.1 Pohybová rovnica a konečno-diferenčná schéma na čiastočne striedavo usporiadanej sieti	14
2.2 Konzistentnosť schémy	16
2.3 Podmienky stability pre neohraničené homogénne prostredie	18
2.4 Sieťová disperzia	22
2.5 Numerické výsledky pre sieťovú disperziu	25
2.6 Lokálna chyba	30
2.7 Numerické výsledky vyšetovania lokálnej chyby	32
2.8 Závěry k disperzii a lokálnej chybe	36
3. Numerické modelovanie šírenia seizmických vln na čiastočne striedavo usporiadanej sieti	37
3.1 Výpočtový program PSG_DVS	37
3.2 Pokrytie výpočtovej oblasti čiastočne striedavo usporiadanou sieťou	39
3.3 Simulácia zdroja	40
3.4 Vstupné údaje	45
3.5 Presné riešenie	47
4. Numerické výsledky	50
4.1 Bodový dislokačný zdroj	50
4.2 Analýza FD schém na PSG a SG	51
4.3 Explozívny zdroj	53
Záver	61
Literatúra	62
Príloha č.1	64
Príloha č.2	83

Úvod

Presnosť a výpočtová efektívnosť sú základnými aspektmi numerického modelovania šírenia seizmických vln a seizmického pohybu počas zemetrasení metódou konečných diferencií. Metóda konečných diferencií je formálne aplikovateľná na štruktúrne zložité prostredia. Je relatívne jednoduchá a ľahko programovateľná. Táto robustnosť metódy je dôvodom, prečo je metóda konečných diferencií v súčasnosti dominantnou metódou numerického modelovania seizmického pohybu v trojrozmerné nehomogénnych štruktúrach. Metóda má však obmedzenia, najmä pri implementácií zložitých okrajových podmienok, na ktoré nemožno zabúdať pri plánovaní numerických simulácií pre daný seizmologický problém. Dostatočnú výpočtovú efektívnosť možno dosiahnuť len na základe optimalizácie nárokov na pamäť počítača a výpočtový čas, ak má byť metóda aplikovaná na dostatočne zložitý model.

Toto sú dôvody, prečo aj po troch desaťročiach intenzívnej aplikácie metódy konečných diferencií seizmológovia stále hľadajú presnejšie a výpočtovo efektívnejšie schémy pre simuláciu seizmického pohybu v čoraz realistickejších modeloch vnútra Zeme.

Predložená práca je venovaná analýze konečno-diferenčných schém 4. rádu presnosti v priestore. Konkrétne ide o skúmanie presnosti troch konečno-diferenčných schém na tzv. čiastočne striedavo usporiadanej sieti (v literatúre aj „rotated staggered grid scheme“). Tento typ schém je v posledných rokoch znova využívaný, keďže nemožno vylúčiť, že v porovnaní so schémami na konvenčných sieťach a schémami na striedavo usporiadaných sieťach môže mať pri riešení niektorých problémov výhody.

V 1. kapitole práce je uvedený stručný úvod do problematiky numerického modelovania v seizmológii, popísaná je metóda konečných diferencií. Ďalej sú v kapitole formulované pohybové rovnice kontinua a popis viacerých konečno-diferenčných schém a sietí.

2. kapitola je venovaná popisu vybraných schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti, overená je podmienka konzistencie a určená podmienka stability pre tieto schémy. Analyzovaná je disperzia schém. Je porovnaná s disperziou konečno-diferenčnej schémy na striedavo usporiadanej sieti. Koniec kapitoly je venovaný určeniu lokálnej chyby schém a jej porovnaniu s lokálnou chybou na striedavo usporiadanej sieti.

V 3. kapitole je popísaný algoritmus výpočtu šírenia seizmických vln v homogénnom, elasticom a izotropnom prostredí, simulácia zdroja a vstupné údaje príslušného výpočtového programu.

Posledná 4. kapitola je venovaná numerickým výsledkom výpočtov seizmického pohybu. Uvedená je i krátka analýza konečno-diferenčných schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti a striedavo usporiadanej sieti a z nej vyplývajúce dôvody, ktoré nás viedli k použitiu explózívneho zdroja.

V Závěre práce sú zhrnuté výsledky analýzy schém a výsledky numerických výpočtov a z nich vyvedené ďalšie postupy analýzy schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti v numerickom modelovaní seizmického pohybu.

V Prílohe č.1 sú uvedené vybrané konečno-diferenčné schémy na čiastočne striedavo usporiadanej sieti, formulácia v posunutí a napätí, 3D, 4. rád presnosti v priestore, 2. rád presnosti v čase a ich obrázky a konečno-diferenčná schéma na čiastočne striedavo usporiadanej sieti pre schému A (16 bodovú), formulácia v posunutí, rýchlosti a napätí, 3D, 4. rád presnosti v priestore, 2. rád presnosti v čase. V Prílohe č. 2 sú schémy simulácie zdrojov použitých vo výpočtoch.

V práci sú použité výpočty získané výpočtovými programami:

- SOURTF program na výpočet časovej funkcie zdroja,
autor J. Kristek, KAFZM, FMFI UK v Bratislave
- PDS02 program na výpočet presného riešenia šírenia seizmických vln
v neohraničenom, homogénnom, elastickom priestore pre bodový
dislokačný zdroj, naprogramovaný podľa Aki & Richards (1980),
autor J. Kristek, KAFZM, FMFI UK v Bratislave
- DWN program na výpočet približného riešenia šírenia seizmických vln
vo zvrstvenom homogénnom, elastickom priestore metódou
diskrétnych vlnových čísel, naprogramovaný podľa Bouchon (1981),
autor O. Coutant, Université Joseph Fourier v Grenoble vo
Francúzsku.

Uvedeným autorom ďakujem za možnosť použiť ich výpočtové programy v mojej práci.

1. Numerické modelovanie v seizmológii

Obsahom kapitoly je stručný úvod do problematiky numerického modelovania v seizmológii. Uvedené sú viaceré výpočtové metódy, podrobnejšie je popísaná metóda konečných diferencií. Časť kapitoly je venovaná popisu konečno-diferenčných schém a sietí.

1.1 Úvod do problematiky

Zemské vnútro má zložitú štruktúru. Možno ho deliť na päť hlavných „častí“: kôra, vrchný plášť, spodný plášť, vonkajšie jadro a vnútorné jadierko. Tieto časti sú od seba oddelené výraznými hranicami – diskontinuitami hlavne hustoty prostredia a rýchlostí seizmických vln. Toto sú však len tie najvýraznejšie hranice. V zemskom vnútri sa nachádza mnoho menej výrazných hraníc. Okrem toho najvrchnejšia časť Zeme je značne nehomogénna (tektonické zlomy, ponárajúce sa litosférické dosky, sedimentárne bazény). Všetky tieto heterogenity ovplyvňujú šírenie seizmických vln a seizmický pohyb. Na všetkých diskontinuitách sa môžu seizmické vlny odrážať, lámať, meniť svoju polarizáciu, rýchlosť a amplitúdu.

Z uvedeného vyplýva, že na realistický popis šírenia seizmických vln a seizmického pohybu nám nestačia jednoduché modely, ktoré je možné riešiť analyticky. Často je nutné uvažovať zložité štruktúry a preto je nutné dané problémy riešiť približnými metódami. Výpočty musia zahŕňať spomínané diskontinuity (heterogenity) vo vnútri Zeme, realistický útlm, topografiu povrchu Zeme. Taktiež musia dávať dobré výsledky pre dostatočný rozsah frekvencií. Pri modelovaní seizmického zdroja je nutné zahrnúť realistickú geometriu zlomovej plochy, heterogenitu počiatočného napätia na zlome a zákon trenia. Pri tom všetkom je nutné brať do úvahy presnosť, výpočtovú náročnosť a efektívnosť výpočtu.

Je zrejmé, že pravdepodobne nie je možné vymyslieť jedinú metódu, ktorá by zahŕňala všetky vyššie spomenuté detaily, a zároveň by bola dostatočne presná a výpočtovo efektívna pre rôzne modely zemského vnútra. Preto vzniklo v seizmológii veľké množstvo približných výpočtových metód, z ktorých každá je vhodná pre určitý typ modelu. Zhruba ich možno deliť na vysokofrekvenčné metódy a nízkofrekvenčné metódy. Z prvej skupiny je najdôležitejšia lúčová metóda. Vysokofrekvenčné metódy sú dôležité najmä v štrukturálnej seizmológii a pri hľadaní nerastných surovín. Nízkofrekvenčné metódy môžeme deliť na hraničné metódy (napr. metóda diskretných vlnových čísel, hraničných integrálnych rovníc, hraničných prvkov), doménové metódy (napr. metóda konečných diferencií, konečných prvkov, spektrálnych prvkov) a hybridné metódy. Výhodou hraničných metód je, že umožňujú presné zahrnutie hraničných podmienok. Ich presnosť je vyššia ako doménových metód. Nevýhodou sú vysoké nároky na výpočtovú pamäť. Doménové metódy sú v porovnaní s hraničnými

metódami menej presné, ale umožňujú výpočet šírenia seizmických vln a seizmického pohybu aj v komplikovanejších modeloch, pretože nároky na výpočtovú pamäť sú menšie. Hybridné metódy kombinujú dve až tri výpočtové metódy. Rozlišujeme dva prístupy. Pri prvom prístupe je jednou metódou počítaná časť modelu a ďalšou zvyšná časť. V druhom prístupe sú jednou metódou počítané závislé premenné na určitých nezávislých premenných a ďalšou metódou závislé premenné na zvyšných nezávislých premenných. Takto možno využiť výhody daných metód a zároveň potlačiť ich nevýhody.

1.2 Metóda konečných diferencií

V súčasnosti v numerickom modelovaní šírenia seizmických vln a seizmického pohybu dominuje metóda konečných diferencií (ďalej ju budeme označovať FDM, podľa anglického finite-difference method). FDM je formálne aplikovateľná na štruktúrne zložité modely, výpočtovo efektívna a relatívne ľahko programovateľná. Metóda má problémy s implementáciou zložitých okrajových podmienok. Dostatočnú výpočtovú efektívnosť možno dosiahnuť len na základe optimalizácie nárokov na pamäť počítača a výpočtový čas. FDM je metódou priameho numerického riešenia diferenciálnych rovníc. Metóda používa aproximáciu derivácie funkcie v danom bode pomocou hodnôt danej funkcie v okolitých bodoch.

Pri aplikovaní FDM na daný problém postupujeme nasledovne:

Výpočtovú oblasť pokryjeme priestorovo-časovou sieťou. Uvažujme štvor-dimenzionálny priestor premenných (x, y, z, t) . Tento priestor pokryjeme sieťou diskretných bodov (x_i, y_k, z_l, t_m) , pričom

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad y_k = y_0 + k\Delta y, \quad z_l = z_0 + l\Delta z, \quad t_m = t_0 + m\Delta t, \\ \text{kde } i, k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2.$$

Δx , Δy a Δz nazývame sieťové kroky, Δt nazývame časový krok.

Funkcie, počiatkové a hraničné podmienky diskretizujeme v bodoch siete. Predpokladáme, že funkcie, ktoré diskretizujeme, sú spojité a hladké. Funkciu $u(x, y, z, t)$ aproximujeme diskretnou sieťovou funkciou $U(x_i, y_k, z_l, t_m)$. Hodnotu funkcie v danom bode označíme $u(x_i, y_k, z_l, t_m) = u_{i,k,l}^m$, jej diskretnú aproximáciu $U_{i,k,l}^m$.

V bodoch siete aproximujeme derivácie pomocou konečno-diferenčných formúl. Uvažujme funkciu $f(x)$, ktorá má spojitú prvú deriváciu. Potom prvú deriváciu v bode x_0 môžeme vyjadriť nasledovne

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\ \frac{df}{dx}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \\ \frac{df}{dx}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.\end{aligned}$$

V danej sieti je veľkosť h určená veľkosťou sieťového kroku (a teda je zdola ohraničená), preto nemožno dané limity vypočítať. Hodnota derivácie funkcie je určená len približne ako rozdiel funkčných hodnôt funkcie v bodoch siete, predelený vzdialenosťou bodov. Poznáme tri základné konečno-diferenčné formule, ktoré možno dostať použitím Taylorovho rozvoja funkcie $f(x)$ okolo bodu x_0 ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, \quad \text{kde } f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_{x=x_0}, \quad (1.1)$$

t.j. forward formulu, backward formulu a centrálnu formulu:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x_0) &\approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\ \frac{df}{dx}(x_0) &\approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \\ \frac{df}{dx}(x_0) &\approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.\end{aligned} \quad (1.2)$$

Prvé dve formule sú aproximácie prvej derivácie prvého rádu, tretia je aproximácia druhého rádu. Rád aproximácie je určený rádom chyby aproximácie. Napríklad aproximácia druhého rádu znamená, že hlavný chybový člen je úmerný h^2 .

V poslednom kroku je nutné overiť konzistenciu, konvergenciu a stabilitu modelu. Označme si pohybovú rovnicu a Hookov zákon ako systém parciálnych diferenciálnych rovníc PDR a systém konečno-diferenčných rovníc (ktoré sú ich aproximáciou) ako KDR.

Ak rozdiel medzi KDR a PDR sa blíži k nule pre časový a sieťový krok blížiaci sa k nule, potom je KDR konzistentný s PDR. Podmienku konzistencie môžeme zapísať ako

$$|PDR - KDR| \rightarrow 0, \quad \text{ak } \Delta t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Ak rozdiel medzi riešením KDR a presným riešením PDR sa blíži k nule pre časový a sieťový krok blížiaci sa k nule, potom je KDR konvergentný. T.j.

$$|u_{PDR} - u_{KDR}| \rightarrow 0, \text{ ak } \Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

kde u_{PDR} je riešenie PDR a u_{KDR} je riešenie KDR.

KDR je stabilný, ak jeho riešenie je ohraničené, keď riešenie PDR je ohraničené. KDR je nestabilný, ak jeho riešenie je neohraničené, keď riešenie PDR je ohraničené.

Podrobnejší úvod do metódy konečných diferencií je možné nájsť napríklad v prácach Mitchell a Griffiths (1994), Morton a Mayers (1994), Moczo (1998), Durran (1999), Moczo et al. (2004).

1.3 Formulácia pohybových rovníc, konečno-diferenčné schémy a siete

Pohybová rovnica kontinua a Hookov zákon (vzťah medzi napätím a deformáciou, konštitučný zákon) spolu s počiatočnými a hraničnými podmienkami plne popisujú šírenie seizmických vln a seizmický pohyb. Vo všeobecnosti sú pohybová rovnica a Hookov zákon parciálne diferenciálne rovnice. Pre elastické prostredie ich možno zapísať v tvare

$$r \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{t}_{ij,j} + f_i, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{t}_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}, \quad (1.6)$$

kde $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, $r(\mathbf{x})$ je hustota prostredia, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ je vektor posunutia, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ je tenzor napätia, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ je tenzor deformácie, $c_{ijkl}(\mathbf{x})$ je tenzor elastických koeficientov a $f(\mathbf{x}, t)$ je vonkajšia sila pôsobiaca na jednotkový objem. Pre uvedené rovnice platí sumačná konvencia a napr. $\mathbf{t}_{ij,j} = \frac{\partial \mathbf{t}_{ij}}{\partial x_j}$, $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$. V izotrópnom prostredí možno tenzor elastických koeficientov vyjadriť v tvare

$$c_{ijkl} = l d_{ij} d_{kl} + m (d_{ik} d_{jl} + d_{il} d_{jk}), \quad (1.7)$$

kde $l(\mathbf{x})$, $m(\mathbf{x})$ sú Laméove elastické koeficienty, d_{ij} je Kroneckerov delta symbol

$$d_{ij} = 1 \text{ ak } i = j, \quad d_{ij} = 0 \text{ ak } i \neq j.$$

Tenzor deformácií môžeme vyjadriť ako $e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$, potom pre izotrópne prostredie má Hookov zákon, rovnica (1.6), tvar

$$t_{ij} = l d_{ij} u_{k,k} + m(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.8)$$

Rozlišujeme štyri základné typy formulácií pohybových rovníc kontinua a Hookovho zákona. Vo formulácii v posunutí a napätí vystupuje pohybová rovnica oddelene od Hookovho zákona:

$$\begin{aligned} r \mathfrak{R}_i &= t_{ij,j} + f_i, \\ t_{ij} &= l d_{ij} u_{k,k} + m(u_{i,j} + u_{j,i}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ak v pohybovej rovnici použijeme miesto druhej časovej derivácie posunutia prvú časovú deriváciu rýchlosti (rýchlosti, ktorou sa pohybuje častica), ďalej Hookov zákon a doplnujúcu definíciu rýchlosti, hovoríme o formulácii v posunutí, rýchlosti a napätí:

$$\begin{aligned} r \mathfrak{R}_i &= t_{ij,j} + f_i, \\ t_{ij} &= l d_{ij} u_{k,k} + 2m u_{i,j}, \\ \mathfrak{V}_i &= v_i, \end{aligned} \quad (1.10)$$

kde $\mathfrak{v}(\mathbf{x}, t)$ je vektor rýchlosti a $\mathfrak{V}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}$.

Ak v pohybovej rovnici použijeme prvú časovú deriváciu rýchlosti a na Hookov zákon aplikujeme časovú deriváciu, hovoríme o formulácii v rýchlosti a napätí:

$$\begin{aligned} r \mathfrak{R}_i &= t_{ij,j} + f_i, \\ \mathfrak{T}_{ij} &= l d_{ij} v_{k,k} + m(v_{i,j} + v_{j,i}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde $\mathfrak{T}_{ij} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial t}$.

Ak Hookov zákon dosadíme do pohybovej rovnice, dostaneme formuláciu v posunutí:

$$r \mathfrak{R}_i = l_{,j} d_{ij} u_{k,kj} + m_{,j} (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + f_i, \quad (1.12)$$

kde, napr., $l_{,j} = \frac{\partial l}{\partial x_j}$, $u_{k,kj} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j}$.

Pomocou vyššie uvedených aproximácií derivácií a diskretizácií funkcií, môžeme pohybovú rovnicu kontinua a Hookov zákon prepísať na systém konečno-diferenčných algebraických rovníc. Spolu s konečno-diferenčnou sieťou tvoria konečno-diferenčnú schému. Konečno-diferenčné schémy sa nelíšia teda len výberom formulácie pohybových rovníc, ale aj voľbou konečno-diferenčnej siete. Siete sa líšia geometric-

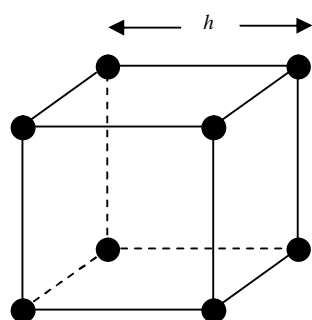
kým usporiadaním bodov a umiestnením zložiek vektora posunutia (rýchlosti), tenzora napätia, Laméových elastických koeficientov a hustoty prostredia v bodoch siete.

Uvažujme elastické, izotropné prostredie. Uzliami siete budeme nazývať body siete, v ktorých sú umiestnené zložky vektora posunutia \mathbf{u} (alebo rýchlosti \mathbf{v}), tenzora napätia \mathbf{t} a parametre prostredia - Laméove elastické koeficienty l, m a hustota prostredia r .

V praxi sa najčastejšie používajú pravouhlé siete. Uzly pravouhlých sietí sú vo vrchoch pravidelných štvoruholníkov v 2D prípade, resp. vo vrchoch pravidelných štvorbokých hranolov v 3D prípade. Existujú siete, ktoré nie sú pravouhlé. Ich uzly sú usporiadané napr. do nepravidelných štvoruholníkov, pravidelných šesťuholníkov (pre 2D prípad; pre 3D sú to k nim prislúchajúce telesá). Môžeme hovoriť o pravidelných a nepravidelných sieťach. V pravidelných sieťach je dĺžka sieťového kroku nemenná ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$), v nepravidelných sa mení. Ak hovoríme o pravidelnej pravouhlej sieti, uzly siete sú vo vrchoch štvorcov v 2D a vo vrchoch kociek v 3D prípade. Uvažujme, napríklad, numerické modelovanie šírenia seizmických vln v sedimentárnom údolí v skalnom podloží. Pri zachovaní presnosti výpočtu v pevnejšom prostredí môžeme zvoliť väčší sieťový krok ako v sedimentoch.

Podľa usporiadania zložiek vektora posunutia (rýchlosti), tenzora napätia a parametrov prostredia v sieti môžeme hovoriť o konvenčných sieťach, striedavo usporiadaných sieťach a čiastočne striedavo usporiadaných sieťach.

V konvenčnej sieti sú v každom uzle siete umiestnené všetky zložky vektora posunutia \mathbf{u} (rýchlosti \mathbf{v}) a parametre prostredia l, m a r . Najčastejšie sa pre túto sieť používa formulácia v posunutí pohybových rovníc. Nevýhodou konečno-diferenčnej schémy na konvenčnej sieti sú nestability vo výpočte a vysoká sieťová disperzia v prostrediach s vysokým Poissonovým pomerom (Poissonov pomer súvisí



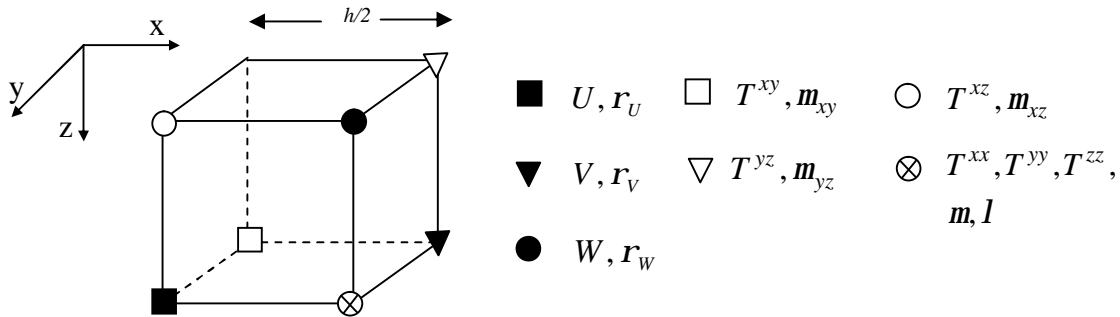
Obr. 1 Konvenčná sieť

● $U, V, W,$
 l, m, r

s pomerom medzi rýchlosťami pozdĺžnych a priečných seizmických vln). Ďalšou nevýhodou je nutnosť pamätať si všetky hodnoty zložiek posunutia a napätia počas výpočtu. Obrázok pravidelnej pravouhlej konvenčnej siete je na Obr.1. V praxi sa používajú aj iné geometrické usporiadania konvenčnej siete.

Striedavo usporiadaná sieť, ďalej ju budeme v práci označovať ako SG (podľa anglického staggered grid) je pravidelná pravouhlá sieť. Ak uvažujeme 3D prípad, potom SG vyzerá nasledovne. V pravom dolnom vrchole kocky sú umiestnené normálové zložky tenzora napätia. V smere osi x je vo vrchole kocky umiestnená U zložka posunutia (rýchlosti), v smere osi y je to V zložka a v smere osi z je W zložka. V smere osi z od vrcholu kocky, v ktorom je U zložka posunutia, je umiestnená T^{xz} zložka tenzora napätia. S rovnakou logikou sú umiestnené zvyšné zložky napätia. Jeden

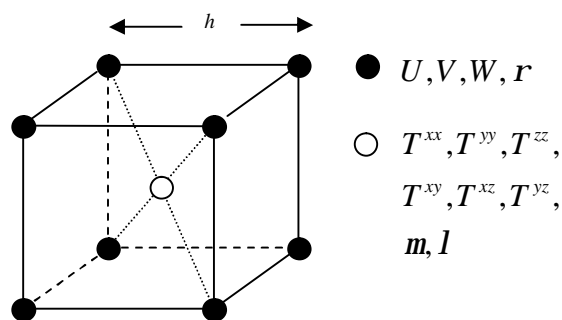
vrchol kocky zostáva prázdny, vid' Obr. 2. Laméove elastické koeficienty sú vo vrcholoch kocky, kde sú zložky tenzora napätia, hustota prostredia je vo vrcholoch kocky, kde sú zložky vektora posunutia (rýchlosti).



Obr. 2 Striedavo usporiadaná sieť

Logika SG spočíva v tom, že v $\pm h/2$ susedstve daného bodu sú práve tie veličiny, ktorých deriváciu treba aproximovať v danom bode. V súčasnosti je SG pravdepodobne najpoužívanejšia konečno-diferenčná sieť v numerickom modelovaní šírenia seizmických vln a seizmického pohybu metódou konečných diferencií. Má však tiež zásadné problémy, najmä so zahrnutím hraničných podmienok a topografie voľného povrchu.

Čiastočne striedavo usporiadaná sieť, ďalej ju budeme v práci označovať ako PSG (podľa anglického partly staggered grid), je význačná tým, že všetky zložky posunutia (rýchlosti) sú umiestnené v jednom uzle siete a všetky zložky tenzora napätia sú tiež umiestnené v jednom uzle siete, rôznom od predchádzajúceho uzla. Laméove elastické koeficienty sú v uzloch, v ktorých sú zložky tenzora napätia, hustota prostredia je



Obr. 3 Čiastočne striedavo usporiadaná sieť

v uzle, v ktorom sú zložky vektora posunutia (rýchlosti), vid' Obr. 3. PSG môže byť výhodnejšie použiť, v porovnaní so SG, v špecifických problémoch ako napr. pre anizotropné prostredie, pri modelovaní dynamiky zdroja. Práve preto, že všetky zložky posunutia (napätia) sú v jednom uzle siete. Pravdepodobne prvý použil PSG vo svojej práci Andrews (1973).

Magnier et al. (1994) použili vo svojej práci PSG, ktorá nie je pravouhlá, ale jej základ tvorí pravidelný šesťuholník. Bolo nutné vyvinúť nové konečno-diferenčné formuly, rôzne od (1.2), pretože hodnota derivácie funkcie je aproximovaná hodnotami funkcie v okolitých troch bodoch, pričom hodnota derivácie funkcie je umiestnená v ťažisku rovnostranného trojuholníka a body, pomocou ktorých aproximujeme, vo vrcholoch tohto trojuholníka (2D prípad). Zhang (1997) používa vo svojej práci PSG, ktorej základ tvoria nepravidelné štvoruholníky (2D prípad), ktoré mu umožňujú lepšie vystihnúť nerovinné diskontinuity. Hodnota derivácie funkcie je aproximovaná

hodnotami funkcie v okolitých štyroch bodoch, ktoré sú vrcholmi nepravidelného štvoruholníka. Saenger et al. (2000) uvažovali vo svojej práci tzv. „rotated staggered grid“. Tento názov siete vznikol zo spôsobu odvodenia konečno-diferenčného operátora pre PSG. Vznikol rotáciou konečno-diferenčného operátora pre štandardnú SG. Ak však uvažujeme aproximácie vyšších rádov, týmto spôsobom (rotáciou) je možné nájsť len jednu z veľkého počtu možností umiestnenia bodov, pomocou ktorých aproximujeme hodnotu derivácie funkcie.

V tejto práci sa budeme venovať analýze vybraných konečno-diferenčných schém na pravidelných pravouhlých PSG 4. rádu presnosti v priestore a 2. rádu presnosti v čase v 3D v elastickom, homogénnom, izotrópnom prostredí.

2. Analýza konečno-diferenčných schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti

Táto kapitola je venovaná popisu konečno-diferenčných schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti. Bola overená konzistencia, konvergencia a stabilita schém, určené podmienky stability. Ďalšia časť kapitoly je venovaná analýze sieťovej disperzie na daných schémach a jej porovnanie so sieťovou disperziou konečno-diferenčnej schémy na striedavo usporiadaných sieťach. Posledná časť kapitoly je venovaná výpočtu lokálnej chyby daných schém a táto je porovnaná s lokálnou chybou v konečno-diferenčnej schéme na striedavo usporiadanej sieti.

2.1 Pohybová rovnica a konečno-diferenčná schéma na čiastočne striedavo usporiadanej sieti

Uvažujme kartézsky súradnicový systém (x, y, z) a elastické, homogénne a izotropné prostredie. Hustota r a Laméove elastické koeficienty l a m sú teda priestorové konštanty. Uvažujme vektor posunutia $\mathbf{u}(u, v, w)$ a tenzor napätia $\mathbf{t}(t_{ij})$; $i, j \in \{x, y, z\}$ ako funkcie priestorových súradníc x, y, z a času t . Neuvažujme žiadne objemové sily v prostredí. Potom pohybová rovnica prostredia má tvar

$$\begin{aligned}ru_{tt} &= t_{xx,x} + t_{yx,y} + t_{zx,z}, \\rv_{tt} &= t_{xy,x} + t_{yy,y} + t_{zy,z}, \\rw_{tt} &= t_{xz,x} + t_{yz,y} + t_{zz,z}\end{aligned}\tag{2.1}$$

a Hookov zákon môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}t_{xx} &= (l + 2m)u_x + lv_y + lw_z, \\t_{yy} &= lu_x + (l + 2m)v_y + lw_z, \\t_{zz} &= lu_x + lv_y + (l + 2m)w_z, \\t_{xy} &= m(u_y + v_x), \\t_{yz} &= m(v_z + w_y), \\t_{zx} &= m(u_z + w_x),\end{aligned}\tag{2.2}$$

kde, napr., $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $t_{xx,x} = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Rovnice (2.1) a (2.2) sú formuláciou pohybových rovníc v posunutí a napätí. Formuláciu v posunutí a napätí budeme označovať symbolom DS (podľa anglického displacement-stress).

Uvažovanú oblasť pokryjeme čiastočne striedavo usporiadanou sieťou - PSG. Uvažujeme pravidelnú pravouhlú sieť 3D prostredí. Body siete (uzly), v ktorých je lokalizovaný vektor posunutia sú vo vrcholoch kocky, uzol, v ktorom je lokalizovaný tenzor napätia, je v strede kocky, viď Príloha č.1. Potrebujeme nájsť vzorec pre aproximáciu priestorovej derivácie v danom smere so 4. rádom presnosti. Na dosiahnutie 4. rádu presnosti aproximácie potrebujeme hodnoty funkcie v sieťových bodoch, ktoré sa nachádzajú v kocke $3h \cdot 3h \cdot 3h$, viď Obr. 1 v Prílohe č.1. Máme teda k dispozícii 64 sieťových bodov, ktoré môžeme použiť na aproximácie derivácií.

Pri odvodzovaní konečno-diferenčnej schémy pre PSG sme postupovali podľa Franeka (2004). Konečno-diferenčnú schému budeme ďalej označovať ako FD schému (podľa anglického finite-difference). Vo všeobecnosti Taylorov rozvoj pre funkciu $f(\mathbf{x})$ s n premennými v okolí bodu $\mathbf{a}(a_1, \dots, a_n)$ má tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[\sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \frac{d}{dx_k} \right]^j f(a_1, \dots, a_n) \right\}. \quad (2.3)$$

Predpokladajme, že v každom zo spomínaných 64 bodov poznáme hodnotu funkcie $f(x, y, z)$. Pre každý bod napíšeme Taylorov rozvoj danej funkcie so stredom v bode $(0, 0, 0)$ do 4. rádu. Dostaneme 64 rovníc. Vynásobme každú koeficientom b_i , $i \in \{1, \dots, 64\}$. Rovnice sčítajme a zlúčme členy stojace pri rovnakej derivácii. Na vyjadrenie prvej derivácie v smere x (resp. y , z) položíme súčet členov, ktoré stoja pri nej, rovný jednej, pri ostatných deriváciách položíme súčty členov rovné nule. Dostaneme tak preurčenú sústavu 35 rovníc (Taylorov rozvoj pre funkciu troch premenných do 4. rádu presnosti obsahuje 35 členov) o 64 neznámych b_i . Je rozumné predpokladať symetriu FD schém: funkčné hodnoty v bodoch (uzloch) rovnako vzdialených od osi (v smere ktorej hľadáme deriváciu a zároveň prechádza bodom, v ktorom aproximujeme deriváciu), budú mať rovnakú váhu, t.j. ich koeficienty b_i sa budú rovnať. Týmto spôsobom zmenšíme počet parametrov, pomocou ktorých máme vyjadrené ostatné koeficienty b_i , na dvanásť. Ďalej môžeme uvažovať rôzne doplňujúce podmienky, t.j. voliť za parametre rôzne hodnoty. Napríklad môžeme minimalizovať chybový člen, alebo minimalizovať počet bodov vstupujúcich do aproximácie (koeficienty b_i pri nich položíme rovné nule) a pod. Takto môžeme získať rôzne aproximácie pre danú deriváciu. Z dôvodu symetrie je vzorec pre aproximáciu derivácie v smere osi x rovnaký so vzorcom pre aproximáciu derivácie v smere osi y , resp. osi z , stačí len otočiť súradnú sústavu.

Bolo by časovo náročné preskúmať vlastnosti všetkých schém. Vybrali sme preto tri z nich. Schéma A pozostáva zo 16 bodov, je to najmenší možný počet bodov, ktoré je potrebné uvažovať, ak hľadáme FD schému 4. rádu presnosti v priestore. Schéma B je 32 bodová a zastupuje schémy s priemerným počtom bodov. Schéma F je 40 bodová a bola konštruovaná minimalizovaním chybového člena.

Ako sme uviedli v 1. kapitole, spojité funkcie $\mathbf{r} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{t}(\mathbf{r}, t)$ môžeme diskretizovať v bodoch siete. Pre rovnice (2.1) a (2.2) skonštruujeme explicitnú DS FD schému 4. rádu presnosti v priestore a 2. rádu presnosti v čase na PSG. Obrázky schém a ich FD schémy sú uvedené v Prílohe č. 1, pričom body v schémach sú očíslované podľa Obr. 1 v Prílohe č. 1 (str. 65). Ich súradnice, vzhľadom na stred so súradnicami (i, k, l) , sú uvedené na začiatku prílohy. Na Obr. 1 v Prílohe č. 1 je znázornených 64 bodov (biele krúžky), ktoré boli použité pri odvodzovaní FD schém na PSG. Na Obr. 2 v Prílohe č. 1 (str. 68) je znázornená FD schéma A, t.j. polohy 16 bodov, pomocou ktorých aproximujeme hodnotu derivácie funkcie (zložky vektora posunutia alebo zložky tenzora napätia) v bode so súradnicami (i, k, l) . Zápis FD schémy A v DS formulácií je na str. 66 – 68 v Prílohe č.1. Analogicky na Obr. 3 v Prílohe č. 1 (str. 73) je znázornená FD schéma B, 32 bodová, jej zápis je na str. 69 – 73 a na Obr. 4 v Prílohe č. 1 (str. 79) je znázornená FD schéma F, 40 bodová, jej zápis je na str. 74 – 79.

Pre aproximáciu druhej časovej derivácie 2. rádu presnosti sme použili centrálnu diferencnú formulu

$$\mathbf{f}''(t) \mathbf{B} \frac{1}{\Delta t^2} (f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)), \quad (2.4)$$

kde Δt je veľkosť časového kroku a $\mathbf{f}''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

2.2 Konzistentnosť schémy

Každá FD schéma musí spĺňať podmienku konzistencie, konvergenencie a stability. Pri overovaní konzistencie FD schém A, B, F sme vychádzali z práce Moczo (1998). Budeme analyzovať rovnicu pre zložku posunutia u a rovnicu pre zložku napätia t^{xx} . Označme lineárne diferenciálne operátory pre dané rovnice

$$L_u = u_{tt} - \frac{1}{r} (t^{xx,x} + t^{yx,y} + t^{zx,z}),$$

$$L_t = (1 + 2m)u_x + l v_y + l w_z.$$

Nech $U_{i,k,l}^m$ je diskrétna aproximácia $u_{i,k,l}^m = u(x_i, y_k, z_l, t_m)$ a $T_{i,k,l}^{xx,m}$ je diskrétna aproximácia $t_{i,k,l}^{xx,m} = t^{xx}(x_i, y_k, z_l, t_m)$. Potom operátor pre FD schému A pre dané rovnice má nasledujúci tvar (vyjadrené sú len aproximácie derivácií $\frac{\partial T^{xx}}{\partial x}$ a $\frac{\partial U}{\partial x}$ v operátoroch pre FD schému)

$$L_{\Delta u} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2U_{i,k,l}^m - U_{i,k,l}^{m-1} - U_{i,k,l}^{m+1}) + \frac{1}{hr} \cdot \left[a \cdot \left(T_{i+3/2,k-3/2,l-3/2}^{xx,m} - T_{i-3/2,k-3/2,l-3/2}^{xx,m} + T_{i+3/2,k+3/2,l-3/2}^{xx,m} - T_{i-3/2,k+3/2,l-3/2}^{xx,m} + T_{i+3/2,k-3/2,l+3/2}^{xx,m} - T_{i-3/2,k-3/2,l+3/2}^{xx,m} + T_{i+3/2,k+3/2,l+3/2}^{xx,m} - T_{i-3/2,k+3/2,l+3/2}^{xx,m} \right) + b \cdot \left(T_{i+1/2,k-1/2,l-1/2}^{xx,m} - T_{i-1/2,k-1/2,l-1/2}^{xx,m} + T_{i+1/2,k+1/2,l-1/2}^{xx,m} - T_{i-1/2,k+1/2,l-1/2}^{xx,m} + T_{i+1/2,k-1/2,l+1/2}^{xx,m} - T_{i-1/2,k-1/2,l+1/2}^{xx,m} + T_{i+1/2,k+1/2,l+1/2}^{xx,m} - T_{i-1/2,k+1/2,l+1/2}^{xx,m} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{i,k,l}^{xy,m}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{i,k,l}^{xz,m}}{\partial z},$$

$$L_{\Delta t} = (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \cdot \left(U_{i+2,k-1,l-1}^m - U_{i-1,k-1,l-1}^m + U_{i+2,k+2,l-1}^m - U_{i-1,k+2,l-1}^m + U_{i+2,k-1,l+2}^m - U_{i-1,k-1,l+2}^m + U_{i+2,k+2,l+2}^m - U_{i-1,k+2,l+2}^m \right) + b \cdot \left(U_{i+1,k,l}^m - U_{i,k,l}^m + U_{i+1,k+1,l}^m - U_{i,k+1,l}^m + U_{i+1,k,l+1}^m - U_{i,k,l+1}^m + U_{i+1,k+1,l+1}^m - U_{i,k+1,l+1}^m \right) \right] + I \cdot \frac{\partial V_{i+1/2,k+1/2,l+1/2}^m}{\partial y} + I \cdot \frac{\partial W_{i+1/2,k+1/2,l+1/2}^m}{\partial y},$$

kde $a = -\frac{1}{96}$, $b = \frac{9}{32}$.

Ak má byť schéma konzistentná, musí platiť

$$\begin{aligned} L_u - L_{\Delta u} &\rightarrow 0 \text{ pre } h \rightarrow 0 \quad \Delta t \rightarrow 0, \\ L_t - L_{\Delta t} &\rightarrow 0 \text{ pre } h \rightarrow 0 \quad \Delta t \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Do daných schém za jednotlivé členy dosadíme ich Taylorove rozvoje. Napríklad

$$U_{i,k,l}^{m-1} = U_{i,k,l}^m - U_{i,k,l}^{m,t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} U_{i,k,l}^{m,tt} \cdot \Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

$$T_{i+3/2,k,l}^{xx} = T_{i,k,l}^{xx} + T_{i,k,l}^{xx,x} \cdot \frac{3}{2}h + \frac{1}{2}T_{i,k,l}^{xx,xx} \cdot \frac{9}{4}h^2 + \frac{1}{3!}T_{i,k,l}^{xx,xxx} \cdot \frac{27}{8}h^3 + \\ + \frac{1}{4!}T_{i,k,l}^{xx,xxxx} \cdot \frac{81}{16}h^4 + O(h^5).$$

kde $T_{i,k,l}^{xx,x} = \frac{\partial T_{i,k,l}^{xx}}{\partial x}$, $U_{i,k,l}^{m,t} = \frac{\partial U_{i,k,l}^m}{\partial t}$.

Po úpravách dostaneme výrazy typu $L_u - L_{\Delta u} = O(\Delta t^2) + O(h^4)$ a $L_t - L_{\Delta t} = O(h^4)$ ktoré sa pre $h \rightarrow 0$ $\Delta t \rightarrow 0$ blížia k nule. Analogicky môžeme overiť splnenie podmienky konzistencie pre všetky zvyšné zložky vektora posunutia a tenzora napätia a postup opakovať pre FD schémy B a F. Na základe analýzy môžeme konštatovať, že naše FD schémy sú konzistentné.

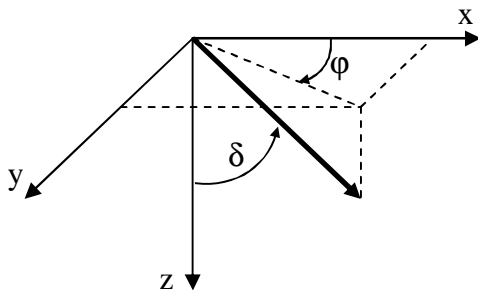
Platí teorém, ktorý hovorí o vzájomnom vzťahu medzi konzistenciou, konvergenciou a stabilitou schémy: Ak je daná schéma konzistentná a stabilná, potom je i konvergentná. V ďalšom nájdeme podmienku stability schém.

2.3 Podmienky stability pre neohraničené homogénne prostredie

Budeme postupovať podľa práce Moczo et al. (2000). Označme $U, V, W, T^{xx}, T^{yy}, T^{zz}, T^{xy}, T^{xz}, T^{yz}$ diskkrétne aproximácie $u, v, w, t^{xx}, t^{yy}, t^{zz}, t^{xy}, t^{xz}, t^{yz}$. Budeme predpokladať chyby v $U, V, W, T^{xx}, T^{yy}, T^{zz}, T^{xy}, T^{xz}, T^{yz}$ v bode $x = Ih, y = Kh, z = Lh$ a $t = m\Delta t$ v tvare

$$\begin{aligned} e(U) &= AE, & e(V) &= BE, & e(W) &= CE, \\ e(T^{xx}) &= D_1E, & e(T^{yy}) &= D_2E, & e(T^{zz}) &= D_3E, \\ e(T^{xy}) &= D_4E, & e(T^{xz}) &= D_5E, & e(T^{yz}) &= D_6E, \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde $E = \exp i(-wm\Delta t + k_x Ih + k_y Kh + k_z Lh)$, kde h je dĺžka sieťového kroku, w je



Obr. 1 Definícia uhlov δ a φ , ktoré určujú smer šírenia

uhlová frekvencia, k_x, k_y a k_z sú zložky vlnového vektora \mathbf{k}

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos j \sin d, & k_y &= k \cos j \cos d, \\ k_z &= k \cos d, & k &= |\mathbf{k}| \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definícia uhlov d, j v kartézskom súradnom systéme je zobrazená na Obr. 1, uhly d a j sú

z intervalu $0 \leq d \leq p$ a $0 \leq j \leq 2p$.

Vyšetríme šírenie chýb (2.6) v sieti. Dosadením (2.6) do FD schémy na PSG dostaneme deväť rovníc o deviatich neznámych $A, B, C, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$. Algebraické úpravy vedú k sústave rovníc, ktorú možno symbolicky zapísať nasledovne:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} x^2 X^2 + b^2 \Sigma & x^2 XY & x^2 XZ \\ x^2 XY & x^2 Y^2 + b^2 \Sigma & x^2 YZ \\ x^2 XZ & x^2 YZ & x^2 Z^2 + b^2 \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

kde $\mathbf{g} = \frac{S^2}{16\Delta^2}$, $S = \sin \frac{w\Delta t}{2}$, $\Delta = \frac{\Delta t}{h}$, $x^2 = a^2 - b^2$, $\Sigma = X^2 + Y^2 + Z^2$, a a b sú

rýchlosti šírenia seizmických vln definované ako $a^2 = \frac{l+2m}{r}$, $b^2 = \frac{m}{r}$, a je

rýchlosť pozdĺžnych vln, v literatúre označovaných ako P vlny a b je rýchlosť priečnych vln, označovaných ako S vlny.

Pre A schému majú X, Y, Z tvar

$$\begin{aligned} X &= a \sin\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \\ Y &= a \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + b \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \\ Z &= a \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + b \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde $a = -\frac{1}{96}$, $b = \frac{9}{32}$.

Sústava (2.8) je zhodná so sústavou riešenou pri hľadaní podmienky stability v práci Moczo et al. (2000). Rozdiel je len v tvare výrazov X, Y, Z a \mathbf{g} , čo však nemení postup riešenia sústavy. Postup riešenia sústavy (2.8) je uvedený v citovanom článku. Riešením získame dve podmienky, dve nezávislé rovnice, jednu pre P vlny, druhú pre S vlny v tvare

$$S^2 = 16\Delta^2 a^2 (X^2 + Y^2 + Z^2),$$

$$S^2 = 16\Delta^2 b^2 (X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Tie možno upraviť na konečný tvar

$$\sin \frac{w\Delta t}{2} = \pm 4 \frac{\Delta t}{h} a \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

$$\sin \frac{w\Delta t}{2} = \pm 4 \frac{\Delta t}{h} b \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Rovnica (2.10) prislúcha P vlnám, rovnica (2.11) S vlnám. Z rovníc (2.10) a (2.11) vyplývajú podmienky stability pre P a S vlny. Platí, že

$$\sin \frac{w\Delta t}{2} \leq 1,$$

pre ľubovoľné w a Δt . Potom z rovnice (2.10) dostávame podmienku stability pre P vlny

$$\Delta t \leq \frac{1}{4} \frac{h}{a} \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}. \quad (2.12)$$

Podobne pre S vlny dostávame z rovnice (2.11) podmienku

$$\Delta t \leq \frac{1}{4} \frac{h}{b} \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}. \quad (2.13)$$

Vo všeobecnosti je Σ funkciou štyroch premenných h, k, d, j , keďže k_x, k_y, k_z sú funkcie k, d, j . Je potrebné určiť aké maximum môže Σ nadobúdať, pretože potrebujeme určiť maximálny časový krok, ktorý môžeme voliť vo výpočte v tom najhoršom prípade tak, aby bola zachovaná podmienka stability schémy. Nájst maximum funkcie Σ je matematicky náročné, maximum Σ bolo určené na základe Halada (2004). Funkcia Σ je periodická v premenných d a j a nadobúda maximum vo „význačných“ hodnotách d a j , konkrétne pre $d = 0, \frac{p}{2} \wedge j = 0, \frac{p}{2}, p$. Číselne

$$\max \Sigma = (-a + b)^2 = \left(\frac{7}{24} \right)^2.$$

Vieme, že $a > b$, preto môžeme zobrať za spoločnú podmienku stability pre S aj P vlny podmienku (2.12). Po dosadení $\max \Sigma$ dostávame výsledný vzťah, podmienku stability pre FD schému A na PSG

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{h}{a}. \quad (2.14)$$

Definujme parameter stability p , ktorý nám neskôr umožní vo výpočtoch sieťovej disperzie uvažovať nie celý, ale iba určitý zlomok maximálneho možného časového kroku.

$$p = \frac{7 \Delta t}{6 h} a, \quad \text{t.j. } p \leq 1. \quad (2.15)$$

Pre B schému pri hľadaní podmienky stability postupujeme analogicky ako pre A schému. Predpokladáme chyby v tvare (2.6), tvar vlnového vektora (2.7). Algebraickými úpravami dostaneme sústavu troch rovníc o troch neznámých, ktorú možno zapísať v tvare (2.8). Rozdiel nastáva v tvare výrazov X, Y, Z . Pre B schému vyzerajú nasledovne:

$$\begin{aligned} X &= a \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + a \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + \\ &+ b \sin\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + c \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \\ Y &= a \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + a \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + \\ &+ b \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + c \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \\ Z &= a \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + a \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + \\ &+ b \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + c \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{kde } a = -\frac{1}{32}, b = -\frac{1}{96}, c = \frac{11}{32}.$$

Pre B schému platia výrazy (2.10)-(2.13), len pod X, Y, Z uvažujeme vzťahy (2.16). Ďalej platí, že Σ je funkciou štyroch premenných h, k, d, j a hľadáme jej maximum z rovnakých dôvodov ako pre A schému. Napriek tomu, že výrazy X, Y, Z pre A schému sú iné ako pre B schému, nadobúda Σ pre obe schémy rovnakú hodnotu maxima vo vyššie spomínaných význačných hodnotách d, j . Teda aj pre B schému platí ako podmienka stability nerovnosť (2.14) a platí i vzťah (2.15).

Pre F schému nastáva obdobná situácia ako pre B schému. Vyššie uvedené vzťahy zostávajú v platnosti, mení sa len tvar výrazov X, Y, Z a kde $a = \frac{1}{768}, b = -\frac{9}{256},$

$$c = -\frac{3}{256} \text{ a } d = \frac{45}{128}.$$

$$\begin{aligned}
X &= a \sin\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + \\
&+ b \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + \\
&+ c \sin\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + d \sin\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \\
Y &= a \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + \\
&+ b \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + b \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + \\
&+ c \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + d \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \\
Z &= a \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + \\
&+ b \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{3}{2}k_z h\right) + b \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + \\
&+ c \cos\left(\frac{3}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_z h\right) + d \cos\left(\frac{1}{2}k_x h\right) \cos\left(\frac{1}{2}k_y h\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_z h\right), \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Funkcia Σ pre F schému má rovnakú hodnotu maxima ako pre A schému a B schému, preto pre F schému tiež uvažujeme ako podmienku stability vzťah (2.14), vzťah (2.15) zostáva v platnosti.

2.4 Siet'ová disperzia

Rovnice (2.10) a (2.11), neuvažujúc záporné znamienko, môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{1}{2} w \Delta t = \arcsin \left[4 \frac{\Delta t}{h} c \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \tag{2.18}$$

kde c je v prípade P vln rýchlosť a , v prípade S vln rýchlosť b . Uhlovú frekvenciu w v sieti môžeme vyjadriť ako

$$w = 2p \frac{c^{GRID}}{l^{GRID}}, \tag{2.19}$$

kde c^{grid} a l^{grid} je fázová rýchlosť a vlnová dĺžka v sieti.

Definujme priestorový vzorkovací pomer s pre S vlny a pre P vlny priestorový vzorkovací pomer s_p :

$$s = \frac{h}{I_S^{GRID}}, \quad s_p = \frac{h}{I_P^{GRID}}. \quad (2.20)$$

Priestorový vzorkovací pomer určuje prevrátenú hodnotu počtu sieťových krokov na vlnovú dĺžku. V prostredí môžu byť generované a šíriť sa obidva typy vln súčasne. Musíme teda aplikovať jeden spoločný priestorový vzorkovací pomer. Pre danú frekvenciu f má S vlna kratšiu vlnovú dĺžku ako P vlna ($I = c/f$, c je rýchlosť a alebo b a $a > b \Rightarrow I_P > I_S$). Ak zvolíme pevnú maximálnu uvažovanú frekvenciu, t.j. minimálnu vlnovú dĺžku a pevný priestorový vzorkovací pomer (počet sieťových krokov na vlnovú dĺžku), bude $h_p > h_s$, kde h_p je sieťový krok pre P vlny a h_s je sieťový krok pre S vlny. Čím väčší sieťový krok, tým menšia výpočtová náročnosť FD schémy, ale je nutné brať do úvahy najhorší možný prípad, preto musíme do disperzných vzťahov dosadiť priestorový vzorkovací pomer pre S vlny. Vzorkovací pomer s_p pre P vlny môžeme vyjadriť pomocou s ako

$$s_p = \frac{s}{r}, \quad \text{kde } r = \frac{a}{b}. \quad (2.21)$$

Rovnicu (2.18) pre P vlny vydelíme a , pre S vlny b . Dosadíme vzťahy (2.7), (2.9), (2.15), (2.19), (2.20) a (2.21), z čoho dostávame normovaný disperzný vzťah pre P vlny a S vlny v tvare

$$\frac{a^{GRID}}{a} = \frac{7}{6} \frac{1}{p} \frac{r}{p \cdot s} \arcsin \left\{ 4 \cdot \frac{6}{7} p \sqrt{\Sigma_a} \right\}, \quad (2.22)$$

$$\frac{b^{GRID}}{b} = \frac{7}{6} \frac{1}{p} \frac{r}{p \cdot s} \arcsin \left\{ 4 \cdot \frac{6}{7} \frac{p}{r} \sqrt{\Sigma_b} \right\}, \quad (2.23)$$

kde, v prípade A schémy

$$\begin{aligned} \Sigma_h = & [a \sin(3pV \cos j \sin d) \cos(3pV \sin j \sin d) \cos(3pV \cos d) + \\ & + b \sin(pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d)]^2 + \\ & + [a \cos(3pV \cos j \sin d) \sin(3pV \sin j \sin d) \cos(3pV \cos d) + \\ & + b \cos(pV \cos j \sin d) \sin(pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d)]^2 \\ & + [a \cos(3pV \cos j \sin d) \cos(3pV \sin j \sin d) \sin(3pV \cos d) + \\ & + b \cos(pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \sin(pV \cos d)]^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

pričom $h = a \Rightarrow V = \frac{s}{r}$ a $h = b \Rightarrow V = s$.

Rovnako ako v prípade vyšetovania podmienky stability pre schémy A, B, F, kde sa výsledné vzťahy líšili len vo funkcii Σ , budú sa disperzné vzťahy pre schémy A, B, F líšiť len v tvare Σ_h . Pre B schému je

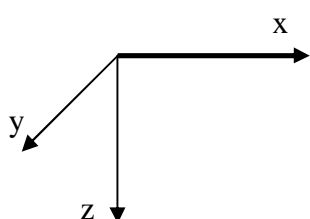
$$\begin{aligned}
\Sigma_h = & [a \sin(pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \cos(3pV \cos d) + \\
& + a \sin(pV \cos j \sin d) \cos(3pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d) + \\
& + b \sin(3pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d) + \\
& + c \sin(pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d)]^2 + \\
& + [a \cos(pV \cos j \sin d) \sin(pV \sin j \sin d) \cos(3pV \cos d) + \\
& + a \cos(pV \cos j \sin d) \sin(3pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d) + \\
& + b \cos(3pV \cos j \sin d) \sin(pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d) + \\
& + c \cos(pV \cos j \sin d) \sin(pV \sin j \sin d) \cos(pV \cos d)]^2 + \\
& + [a \cos(pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \sin(3pV \cos d) + \\
& + a \cos(pV \cos j \sin d) \cos(3pV \sin j \sin d) \sin(pV \cos d) + \\
& + b \cos(3pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \sin(pV \cos d) + \\
& + c \cos(pV \cos j \sin d) \cos(pV \sin j \sin d) \sin(pV \cos d)]^2
\end{aligned} \tag{2.25}$$

a pre F schému je

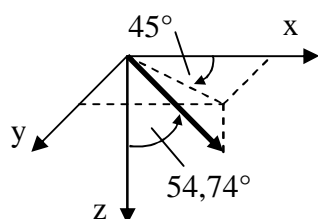
$$\begin{aligned}
\Sigma_h = & [a \sin(3pV \cos j \cos d) \cos(3pV \sin j \cos d) \cos(3pV \cos d) + \\
& + b \sin(pV \cos j \cos d) \cos(pV \sin j \cos d) \cos(3pV \cos d) + \\
& + b \sin(pV \cos j \cos d) \cos(3pV \sin j \cos d) \cos(pV \cos d) + \\
& + c \sin(3pV \cos j \cos d) \cos(pV \sin j \cos d) \cos(pV \cos d) + \\
& + d \sin(pV \cos j \cos d) \cos(pV \sin j \cos d) \cos(pV \cos d)]^2 + \\
& + [a \cos(3pV \cos j \cos d) \sin(3pV \sin j \cos d) \cos(3pV \cos d) + \\
& + b \cos(pV \cos j \cos d) \sin(pV \sin j \cos d) \cos(3pV \cos d) + \\
& + b \cos(pV \cos j \cos d) \sin(3pV \sin j \cos d) \cos(pV \cos d) + \\
& + c \cos(3pV \cos j \cos d) \sin(pV \sin j \cos d) \cos(pV \cos d) + \\
& + d \cos(pV \cos j \cos d) \sin(pV \sin j \cos d) \cos(pV \cos d)]^2 + \\
& + [a \cos(3pV \cos j \cos d) \cos(3pV \sin j \cos d) \sin(3pV \cos d) + \\
& + b \cos(pV \cos j \cos d) \cos(pV \sin j \cos d) \sin(3pV \cos d) + \\
& + b \cos(pV \cos j \cos d) \cos(3pV \sin j \cos d) \sin(pV \cos d) + \\
& + c \cos(3pV \cos j \cos d) \cos(pV \sin j \cos d) \sin(pV \cos d) + \\
& + d \cos(pV \cos j \cos d) \cos(pV \sin j \cos d) \sin(pV \cos d)]^2.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.5 Numerické výsledky pre sieťovú disperziu

Sieťová disperzia FD schém A, B a F bola analyzovaná na základe vzťahu (2.23) pre S vlny pre dva význačné smery šírenia vln, konkrétne smer šírenia v smere osi x, t.j. $j = 0^\circ$, $d = 90^\circ$, Obr. 2, a smer šírenia v smere telesovej uhlopriečky, t.j. $d = 54.74^\circ$,



Obr. 2 Šírenie v smere osi x



Obr. 3 Šírenie v smere tel. uhlopriečky

$j = 45^\circ$, Obr. 3. Pod pojmom telesová uhlopriečka (resp. smer telesovej uhlopriečky) budeme v tejto i v nasledujúcich kapitolách chápať telesovú uhlopriečku kvádra s rozmermi (1, 1, 1). Reálne prostredie, v ktorom sa vlny šíria, je nehomogénne. V určitej oblasti rozdiel rýchlosti P vln a S vln je veľký (napr. sedimenty), v iných relatívne malý (skalné podložie). Túto charakteristiku prostredia určuje Poissonov pomer s daný vzťahom (2.27)

$$s = \frac{a^2 - 2b^2}{2(a^2 - b^2)}. \quad (2.27)$$

Ku každému smeru šírenia boli vykreslené disperzné krivky pre hodnoty Poissonovho pomeru $s = 0.25$, $s = 0.45$ a $s = 0.495$. Boli uvažované aj rôzne hodnoty parametra stability p , vzťah (2.15). Disperzné krivky boli vykreslené pre hodnoty parametra stability $p = 1.0$, $p = 0.7$, $p = 0.4$ a $p = 0.1$. Disperzné krivky určujú závislosť pomeru b^{GRID} / b od s (vzorkovací pomer), t.j. ako sa mení rýchlosť šírenia S vln v sieti (b^{GRID}) vzhľadom na rýchlosť šírenie S vln v danom prostredí (b) od počtu sieťových krokov h na minimálnu vlnovú dĺžku I_S .

Na Obr. 4 sú vykreslené disperzné krivky S vln pre schémy A, B a F pre vyššie uvedené tri hodnoty Poissonovho pomeru, pre smer šírenia v smere osi x. Pre každú zo schém A, B a F sú v grafe vykreslené štyri krivky pre štyri hodnoty parametra stability p , ktoré boli uvedené vyššie. V grafe na osi x je vzorkovací pomer $s = h / I_S$, na osi y je pomer b^{GRID} / b . Pre daný vzorkovací pomer hodnota b^{GRID} / b rastie s hodnotou p . Ako môžeme vidieť, krivky sú pre všetky tri schémy totožné (nie je to spôsobené malou rozlišovacou schopnosťou; hodnoty, ktoré boli vykreslené, sú rovnaké). Dve vertikálne priamky vyznačujú hodnoty vzorkovacieho pomeru $s = 1/5$ a $s = 1/6$, ktoré seizmológovia používajú v numerických simuláciách FD schémami 4. rádu presnosti na SG.

Na Obr. 5 sú disperzné krivky S vln pre schémy A, B a F pre tri hodnoty Poissonovho pomeru, pre smer šírenia v smere telesovej uhlopriečky. Rovnako ako v prípade Obr. 4 sme vykreslili štyri krivky pre štyri hodnoty parametra p . V tomto

prípade sa disperzné krivky schém A, B a F značne líšia, najmenšiu disperziu vykazuje schéma F, väčšiu schéma B a najväčšiu schéma A.

Hodnoty pomeru b^{GRID}/b pre hodnotu vzorkovacieho pomeru $s = 1/5$ a $s = 1/6$ sú uvedené v Tab. 1. (pre smer šírenia v smere osi x) a v Tab. 2 (pre smer šírenia v smere telesovej uhlopriečky).

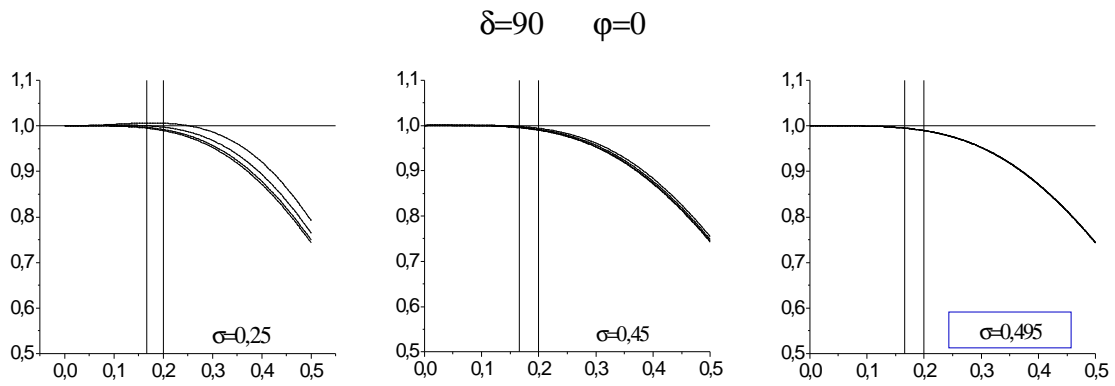
Z uvedených grafov vyplýva, že pre šírenie v smere osi x majú tri schémy na PSG totožnú disperziu, ale v smere telesovej uhlopriečky vykazuje schéma A podstatne väčšiu disperziu ako zvyšné dve schémy. Tieto schémy majú v tomto smere porovnateľnú disperziu. Z ďalšej analýzy môžeme vylúčiť schému F, ktorá má najväčšiu výpočtovú náročnosť, pretože z hľadiska disperzie neznamena žiadnu podstatnú výhodu oproti schéme B. Napriek veľkej disperzii schémy A v smere telesovej uhlopriečky budeme schému aj ďalej analyzovať a to pre jej relatívnu jednoduchosť.

Na Obr. 6 sú disperzné krivky S vln šíriacich sa v smere osi x pre schému A na PSG a pre FD schému na SG analyzovanú v práci Moczo et al. (2000). Krivky sú vykreslené pre tri hodnoty Poissonovho pomeru a štyri hodnoty parametra p , tak ako v predchádzajúcich grafoch. Hodnoty pomeru b^{GRID}/b pre vzorkovacie pomery $s = 1/5$ a $s = 1/6$ pre FD schému na SG sú uvedené v Tab. 1 a Tab. 2. Z uvedených grafov na Obr. 6 vidíme, že disperzia oboch schém je porovnateľná a rozdiely sa znižujú s rastúcim Poissonovým pomerom.

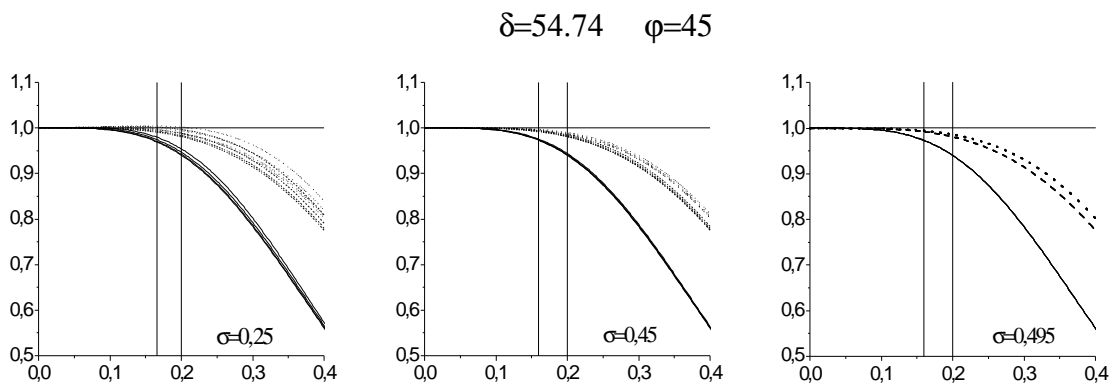
Na Obr. 7 sú disperzné krivky S vln pre FD schému A a FD schému na SG pre tri hodnoty Poissonovho pomeru, štyri hodnoty parametra stability p , pre smer šírenia v smere telesovej uhlopriečky. Je zrejmé, že schéma A vykazuje oveľa väčšiu disperziu ako FD schéma na SG.

Na Obr. 8 sú disperzné krivky S vln pre FD schému B a FD schému na SG pre tri hodnoty Poissonovho pomeru, štyri hodnoty parametra stability p , pre smer šírenia v smere osi x. Disperzia obidvoch schém je porovnateľná a rozdiely sa znižujú s rastúcim Poissonovým pomerom.

Na Obr. 9 sú disperzné krivky S vln pre FD schému B a FD schému na SG pre tri hodnoty Poissonovho pomeru, štyri hodnoty parametra stability p , pre smer šírenia v smere telesovej uhlopriečky. Schéma B má horšiu disperziu ako FD schéma na SG, ale jej disperzná krivka neklesá tak prudko, ako v prípade schémy A pre tento smer šírenia. Z Tab. 2 vidíme, že rozdiel medzi schémou B a schémou na SG je pre $s = 1/5$ približne 0,015 a $s = 1/6$ na úrovni tisícín.



Obr. 4 Disperzné krivky pre šírenie S vln v smere osi x. Na osi x grafu je pomer h/l_s , na osi y je pomer b^{GRID}/b , plná krivka – schéma A, čiarkovaná - schéma B, bodkovaná – schéma F



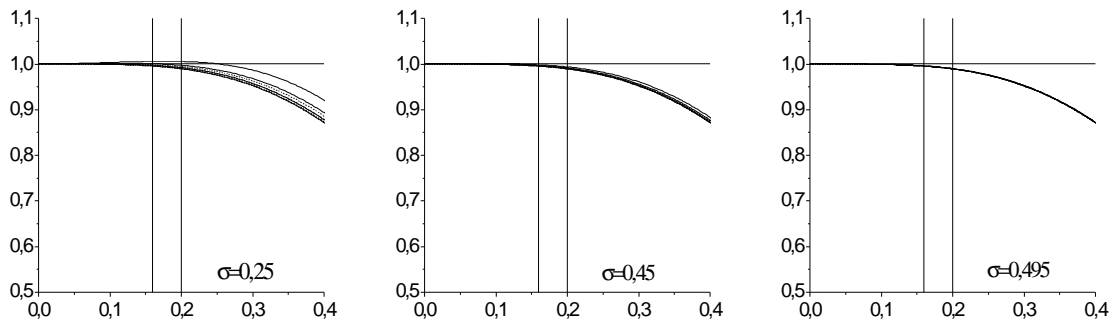
Obr. 5 Disperzné krivky pre šírenie S vln v smere telesovej uhlopriečky. Na osi x grafu je pomer h/l_s , na osi y je pomer b^{GRID}/b , plná krivka – schéma A, čiarkovaná - schéma B, bodkovaná – schéma F

$s=1/5$	$s=0.25$				$s=0.45$				$s=0.495$			
	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG
$p=1.0$	1,0057	1,0057	1,0057	0,9946	0,9937	0,9937	0,9937	0,9908	0,9898	0,9898	0,9898	0,9895
$p=0.7$	0,9972	0,9972	0,9972	0,9919	0,9915	0,9915	0,9915	0,9901	0,9896	0,9896	0,9896	0,9894
$p=0.4$	0,9919	0,9919	0,9919	0,9902	0,9900	0,9900	0,9900	0,9896	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894
$p=0.1$	0,9895	0,9895	0,9895	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894	0,9894

$s=1/6$	$s=0.25$				$s=0.45$				$s=0.495$			
	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG
$p=1.0$	1,0061	1,0061	1,0061	0,9986	0,9979	0,9979	0,9979	0,9959	0,9952	0,9952	0,9952	0,9950
$p=0.7$	1,0003	1,0003	1,0003	0,9967	0,9964	0,9964	0,9964	0,9954	0,9951	0,9951	0,9951	0,9950
$p=0.4$	0,9967	0,9967	0,9967	0,9955	0,9954	0,9954	0,9954	0,9951	0,9950	0,9950	0,9950	0,9949
$p=0.1$	0,9950	0,9950	0,9950	0,9950	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949

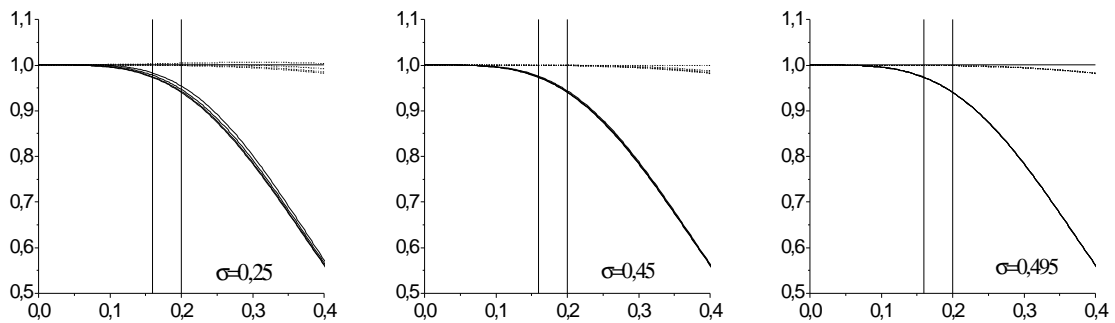
Tab. 1 Hodnoty b^{GRID}/b pre $s=1/5$ a $s=1/6$ pre šírenie S vln v smere osi x

$$\delta=90 \quad \varphi=0$$



Obr. 6 Disperzné krivky pre šírenie S vln v smere osi x. Na osi x grafu je pomer h/l_s , na osi y b^{GRID}/b , plná krivka – schéma A, čiarkovaná krivka - SG schéma

$$\delta=54.74 \quad \varphi=45$$

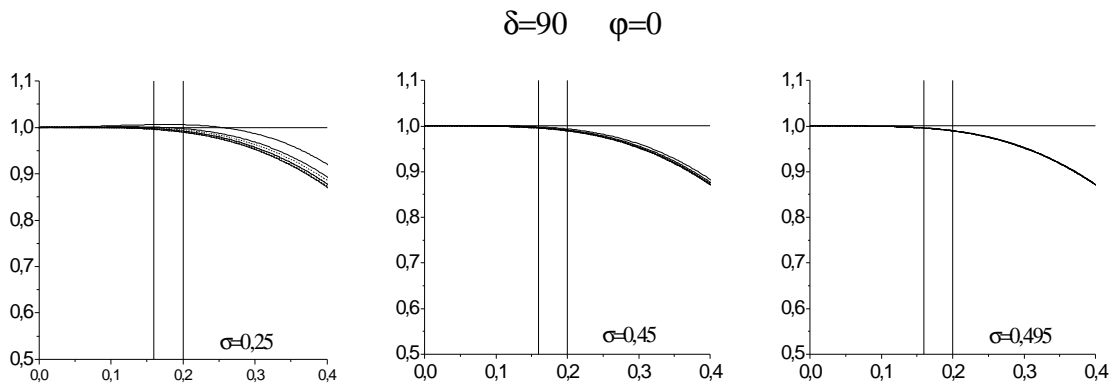


Obr. 7 Disperzné krivky pre šírenie S vln v smere telesovej uhlopriečky. Na osi x grafu je pomer h/l_s , na osi y b^{GRID}/b , plná krivka – schéma A, čiarkovaná krivka – SG schéma

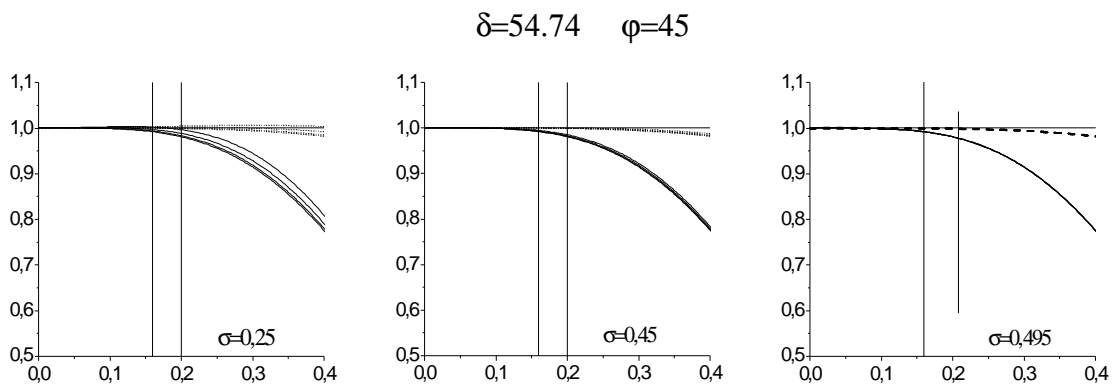
$s=1/5$	$s=0.25$				$s=0.45$				$s=0.495$			
	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG
$p=1.0$	0,9539	0,9965	1,0019	1,0042	0,9437	0,9848	0,9900	1,0002	0,9404	0,9811	0,9862	0,9989
$p=0.7$	0,9467	0,9882	0,9934	1,0014	0,9418	0,9827	0,9878	0,9995	0,9402	0,9809	0,9860	0,9988
$p=0.4$	0,9422	0,9831	0,9882	0,9996	0,9406	0,9813	0,9864	0,9990	0,9401	0,9807	0,9858	0,9988
$p=0.1$	0,9401	0,9808	0,9859	0,9988	0,9400	0,9807	0,9858	0,9988	0,9400	0,9806	0,9857	0,9987

$s=1/6$	$s=0.25$				$s=0.45$				$s=0.495$			
	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG	PSG A	PSG B	PSG F	SG
$p=1.0$	0,9799	1,0017	1,0044	1,0031	0,9724	0,9937	0,9963	1,0004	0,9699	0,9910	0,9937	0,9995
$p=0.7$	0,9746	0,9960	0,9987	1,0012	0,9710	0,9922	0,9948	0,9999	0,9698	0,9909	0,9935	0,9995
$p=0.4$	0,9713	0,9924	0,9951	1,0000	0,9701	0,9912	0,9938	0,9996	0,9697	0,9908	0,9934	0,9994
$p=0.1$	0,9697	0,9908	0,9935	0,9994	0,9697	0,9908	0,9934	0,9994	0,9697	0,9907	0,9934	0,9994

Tab. 2 Hodnoty b^{GRID}/b pre $s=1/5$ a $s=1/6$ pre šírenie sa S vln v smere telesovej uhlopriečky



Obr. 8 Disperzné krivky pre šírenie sa S vln v smere osi x. Na osi x grafu je pomer h/l_s , na osi y b^{GRID}/b , plná krivka – schéma B, čiarkovaná krivka – SG schéma



Obr. 9 Disperzné krivky pre šírenie sa S vln v smere telesovej uhlopriečky. Na osi x grafu je pomer h/l_s , na osi y b^{GRID}/b , plná krivka – schéma B, čiarkovaná krivka – SG schéma

2.6 Lokálna chyba

Chceme odhadnúť presnosť vybraných FD schém A, B na PSG a FD schémy na SG v jednom integračnom kroku porovnaním s analytickým riešením. Uvažujeme šírenie rovinnej harmonickej vlny v elastickom, homogénnom, izotrópnom a neohraničenom prostredí.

Boli vytvorené tri výpočtové programy: PSG_A, PSG_B a SG. Prvé dva počítajú lokálnu chybu FD schémy A na PSG a FD schémy B na PSG, tretí pre porovnanie počíta lokálnu chybu FD schémy na SG. Všetky tri programy môžeme rozdeliť na tri časti. V prvej časti program načíta vstupné údaje (ktoré sú totožné pre všetky tri FD schémy), v druhej časti program analyticky vypočíta v potrebných bodoch siete hodnoty zložiek vektora posunutia a v tretej časti je numericky počítaná (použitím daných FD schém) hodnota u zložky vektora posunutia v danom sieťovom bode v nasledujúcej časovej hladine.

Vstupné údaje výpočtových programov PSG_A, PSG_B a SG (v zátvorke sú uvedené názvy veličín vo výpočtovom programe): súradnice bodu, v ktorom chceme posunutie vypočítať (XR, YR, ZR), časová hladina, v ktorej chceme posunutie vypočítať (M), rýchlosť šírenia S vln b v m/s (BETA) v prostredí, hustota prostredia r v kg/m^3 (DEN), Poissonov pomer s (SIGMA), parametre rovinnej harmonickej vlny (FI, DEL, PFI, PDEL - ich význam bude popísaný neskôr), parameter stability p (P), maximálna uvažovaná frekvencia f v Hz (F), maximálny uvažovaný sieťový vzorkovací pomer s (S), veľkosť kroku, s ktorým klesá hodnota vzorkovacieho pomeru (STEP) a počet krokov (N).

Zo zadaných vstupných dát sú vypočítané Laméove elastické koeficienty l , m a sieťový krok h . Elastické koeficienty sú určené vzťahmi

$$\begin{aligned}l &= r(a^2 - 2b^2), \\ m &= rb^2,\end{aligned}\tag{2.28}$$

kde a je rýchlosť P vln, ktorú môžeme vypočítať ako

$$a = b \sqrt{\frac{(2-2s)}{(1-2s)}},\tag{2.29}$$

kde s je Poissonov pomer. Veľkosť sieťového kroku h možno vypočítať zo vzťahu

$$h = \frac{s \cdot b}{f}.\tag{2.30}$$

Nech $\mathbf{\hat{N}}$ je smer šírenia a $\mathbf{\hat{A}}$ vektor polarizácie rovinnej harmonickej vlny:

$$\begin{aligned}\mathbf{\hat{N}} &= (N_1, N_2, N_3) = (\cos j \sin d, \sin j \sin d, \cos d), \\ \mathbf{\hat{A}} &= (A_1, A_2, A_3) = (\cos j_p \sin d_p, \sin j_p \sin d_p, \cos d_p).\end{aligned}\quad (2.31)$$

Uhly d, j, d_p, j_p sú z intervalu $d, d_p \in \langle 0, \rho \rangle, j, j_p \in \langle 0, 2\rho \rangle$. V programoch sú označené ako DEL, FI, PDEL a PFI. Ich definícia je rovnaká ako definícia uhlov d a j na Obr. 1.

Uvažujme S vlnu, t.j. priečnu vlnu, ktorá kmitá kolmo na smer šírenia. Platí pre ňu $\mathbf{\hat{N}} \cdot \mathbf{\hat{A}} = 0$. Zložky vektora posunutia $\mathbf{\hat{u}}(u, v, w)$ v bode so súradnicami (x, y, z) v čase t môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}u &= A_1 \cdot \cos \left[2\rho f \left(t - \frac{1}{b} (N_1 x + N_2 y + N_3 z) \right) \right] \\ v &= A_2 \cdot \cos \left[2\rho f \left(t - \frac{1}{b} (N_1 x + N_2 y + N_3 z) \right) \right] \\ w &= A_3 \cdot \cos \left[2\rho f \left(t - \frac{1}{b} (N_1 x + N_2 y + N_3 z) \right) \right].\end{aligned}\quad (2.32)$$

Pre jednoduchosť popisu výpočtového algoritmu programov PSG_A, PSG_B a SG označme bod, v ktorom chceme vypočítať výsledné posunutie, ako bod 1. úrovne. Označme body, v ktorých potrebujeme vedieť hodnoty zložiek tenzora napätia (ktoré sú potrebné na výpočet aproximácie derivácie zložiek tenzora napätia v bode 1. úrovne) ako body 2. úrovne. Označme body, v ktorých potrebujeme vedieť hodnoty zložiek vektora posunutia (ktoré sú potrebné na výpočet aproximácie derivácie zložiek vektora posunutia v bodoch 2. úrovne) ako body 3. úrovne. Vo všeobecnosti pre formuláciu v posunutí a napätí (pre FD schémy na PSG aj SG) platí, že z hodnôt vektora posunutia v danej časovej hladine sú počítané hodnoty zložiek tenzora napätia v tej istej časovej hladine a z nich sú počítané hodnoty zložiek vektora posunutia v ďalšej časovej hladine.

Algoritmus všetkých troch programov pri výpočte posunutia v zvolenom bode a čase je nasledovný. Zo zadaných súradníc bodu 1. úrovne sa vypočítajú súradnice bodov 2. úrovne a ku každému bodu 2. úrovne sa vypočítajú súradnice bodov 3. úrovne. Pre každú schému bude počet bodov 2. úrovne a 3. úrovne rôzny. Pre schému A to bude 16 bodov 2. úrovne, pričom ku každému z nich patrí 16 bodov 3. úrovne. Pre schému B to bude 32 a 32 bodov, pre SG schému 12 a 12 bodov. V ďalšom kroku sú vypočítané hodnoty zložiek posunutia v bodoch 3. úrovne v m -tej časovej hladine podľa analytického riešenia. Hodnoty zložiek tenzora napätia v bodoch 2. úrovne v m -tej časovej hladine sú potom určené ako funkcie hodnôt zložiek posunutia v bodoch 3. úrovne v m -tej časovej hladine. Hodnota zložky vektoru posunutia v bode 1. úrovne v

$(m+1)$ -tej časovej hladine je napokon vypočítaná zo zložky vektoru posunutia v bode 1. úrovne v m -tej a $(m-1)$ -tej časovej hladine a zložiek tenzora napätia v bodoch 2. úrovne v m -tej časovej hladine.

2.7 Numerické výsledky vyšetovania lokálnej chyby

V prípade rovinatej harmonickej vlny nezávisí lokálna chyba od súradníc bodu, v ktorom chybu určujeme, ani od času, resp. časovej hladiny, v ktorom chybu určujeme. Z toho dôvodu bola rovinná harmonickej vlny vybraná ako analytické riešenie.

Bolo zvolené prostredie s rýchlosťou S vln $b = 400\text{ms}^{-1}$, hustotou $r = 2000\text{kgm}^{-3}$, maximálna uvažovaná frekvencia $f = 1\text{Hz}$. Lokálna chyba FD schém bola počítaná pre tri rôzne hodnoty Poissonovho pomeru $s \in \{0.25, 0.45, 0.495\}$. Bola uvažovaná rovinná harmonickej vlna, šíriaca sa v smere osi y ($j = 90^\circ$, $d = 90^\circ$) a polarizovaná v smere $j_p = 0^\circ$, $d_p = 90^\circ$ a rovinná harmonickej vlna šíriaca sa v smere telesovej uhlopriečky ($j = 45^\circ$, $d = 54.74^\circ$) a polarizovaná v smere $j_p = 135^\circ$, $d_p = 90^\circ$. Porovnávaná bola hodnota u zložky vektoru posunutia vypočítaná numericky FD schémou A, B na PSG a FD schémou na SG s analyticky získanou hodnotou.

Na Obr. 10 sú vykreslené krivky závislosti pomeru numerického riešenia a presného riešenia od vzorkovacieho pomeru s pre FD schému A pre vlnu šíriacu sa v smere osi y . Vľavo sú krivky pre $p = 1$, vpravo pre $p = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$. Voľba druhej hodnoty súvisí s hodnotou parametra stability FD schémy na SG

$$p_{SG} = \frac{7\sqrt{3}}{6} \frac{\Delta t}{h} a. \quad (2.33)$$

Pre časový krok Δt_{SG} pre FD schémy na SG platí

$$\Delta t_{SG} \leq \frac{6}{7\sqrt{3}} \frac{h}{a},$$

kým pre časový krok Δt_{PSG} pre FD schému na PSG platí

$$\Delta t_{PSG} \leq \frac{6}{7} \frac{h}{a}.$$

V pravej časti Obr. 10 (pri daných h a a) sú krivky so zvolenou veľkosťou časového kroku, ktorý zodpovedá maximálnemu časovému kroku FD schémy na SG. Hodnoty pomeru numerického riešenia a presného riešenia pre hodnoty $s = 1/5$ a $s = 1/6$ pre tento a všetky ďalšie uvedené prípady sú v Tab. 3 a 4.

Na Obr. 11 sú vykreslené krivky závislosti pomeru numerického riešenia a presného riešenia od vzorkovacieho pomeru s pre FD schému A pre vlnu šíriacu sa v smere telesovej uhlopriečky.

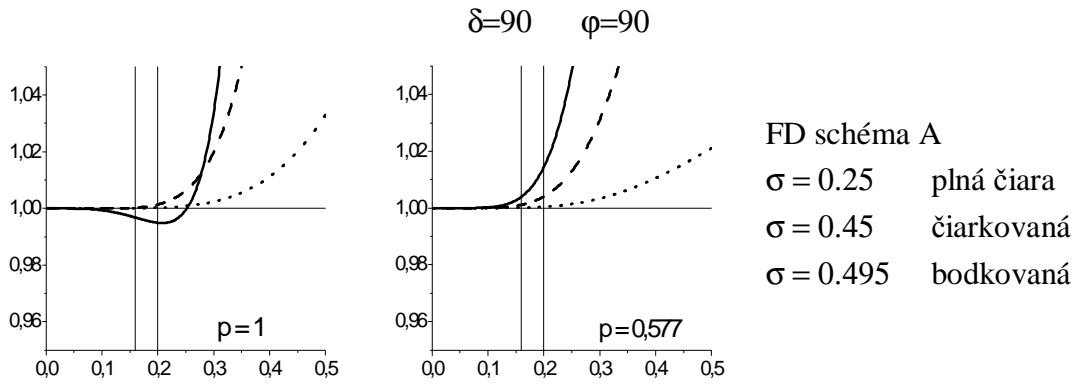
Obr. 12 a 13 sú analogické Obr. 10 a 11. Sú na nich vykreslené krivky závislosti pomeru numerického riešenia a presného riešenia od vzorkovacieho pomeru s pre FD schému B pre vlnu šíriacu sa v smere osi y (Obr. 12) a v smere telesovej uhlopriečky (Obr. 13). Krivky lokálnej chyby sú pre schémy A a B totožné pre vlnu šíriacu sa v smere súradnicovej osi pre $p = 1$. Pre $p = 0.577$ má schéma B približne o rád menšiu chybu (pozri Tab. 3). Pre vlnu šíriacu sa v smere telesovej uhlopriečky je lokálna chyba schémy B pre $p = 1$ menšia ako chyba schémy A.

Na Obr. 14 sú krivky závislosti pomeru numerického riešenia a presného riešenia pre FD schému na SG. Ľavá časť Obr. 14 zodpovedá šíreniu vlny v smere osi y , pravá šíreniu vlny v smere telesovej uhlopriečky. Lokálna chyba FD schémy na SG je pre dané s menšia ako lokálne chyby schém A a B. Z Tab. 3 však vidno, že pre šírenie vlny v smere súradnicovej osi je lokálna chyba schémy B veľmi blízka lokálnej chybe FD schémy na SG, ak $p = 0.577$, t.j. ak má schéma B rovnaký časový krok ako FD schéma na SG.

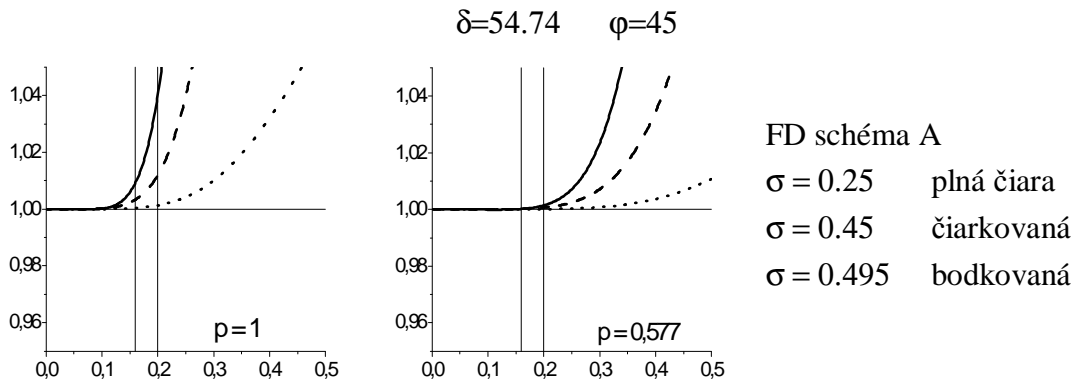
s=1/5	s=0.25			s=0.45			s=0.495		
	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG
p=1	0,99494	0,99494	1,00144	1,00138	1,00138	1,00065	1,00023	1,00023	1,00008
p=0.577	1,01441	1,00143	-	1,00404	1,00065	-	1,00045	1,00008	-

s=1/6	s=0.25			s=0.45			s=0.495		
	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG
p=1	0,99638	0,99638	0,99887	1,00034	1,00034	0,99999	1,00008	1,00008	1,00001
p=0.577	1,00513	1,0003	-	1,00149	1,00021	-	1,00017	1,00003	-

Tab. 3 Hodnoty pomeru numerického riešenia a presného riešenia pre $s=1/5$ a $s=1/6$ pre šírenie S vln v smere osi y



Obr. 10 Krivky lokálnej chyby pre zložku posunutia u . Na osi x grafu je pomer h/I_s , na osi y je pomer numerického a presného riešenia.

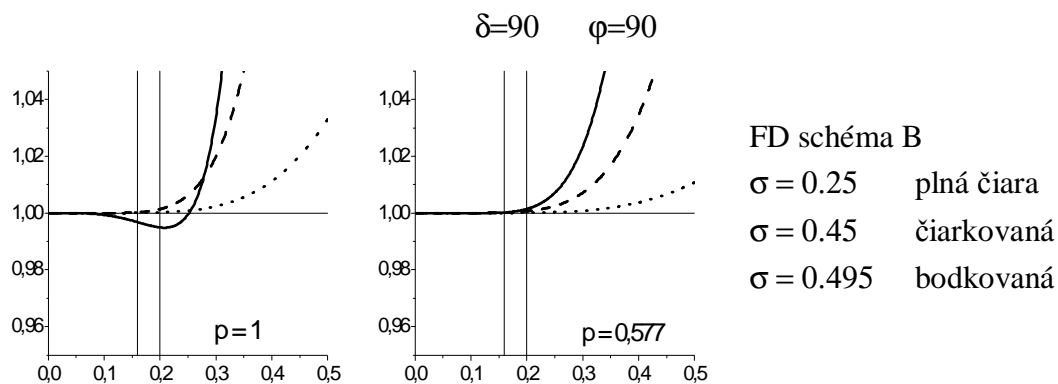


Obr. 11 Krivky lokálnej chyby pre zložku posunutia u . Na osi x grafu je pomer h/I_s , na osi y je pomer numerického a presného riešenia

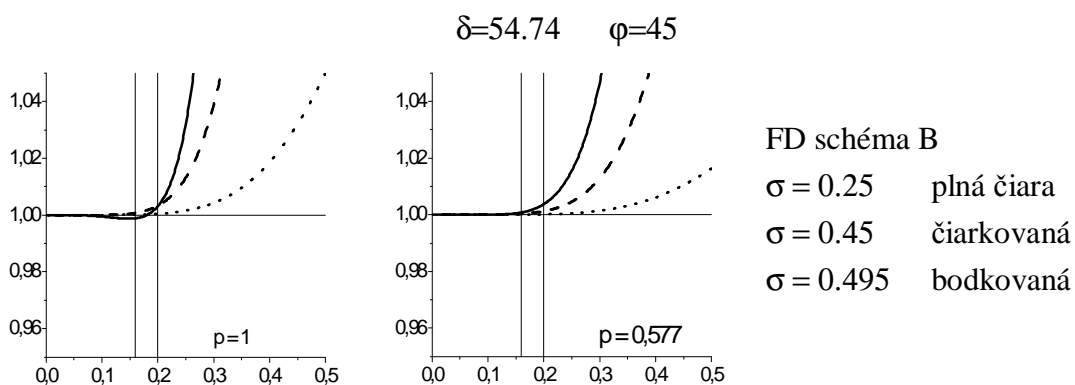
$s=1/5$	$s=0.25$			$s=0.45$			$s=0.495$		
	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG
$p=1$	1,04024	1,0031	1,0003	1,01198	1,00329	1,00021	1,00133	1,00043	1,00003
$p=0.577$	1,01441	1,00377	-	1,00404	1,00126	-	1,00045	1,00015	-

$s=1/6$	$s=0.25$			$s=0.45$			$s=0.495$		
	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG	PSG A	PSG B	SG
$p=1$	1,01247	0,99909	0,99941	1,0043	1,00101	0,99998	1,0005	1,00015	1
$p=0.577$	1,00513	1,00111	-	1,00149	1,00043	-	1,00017	1,00005	-

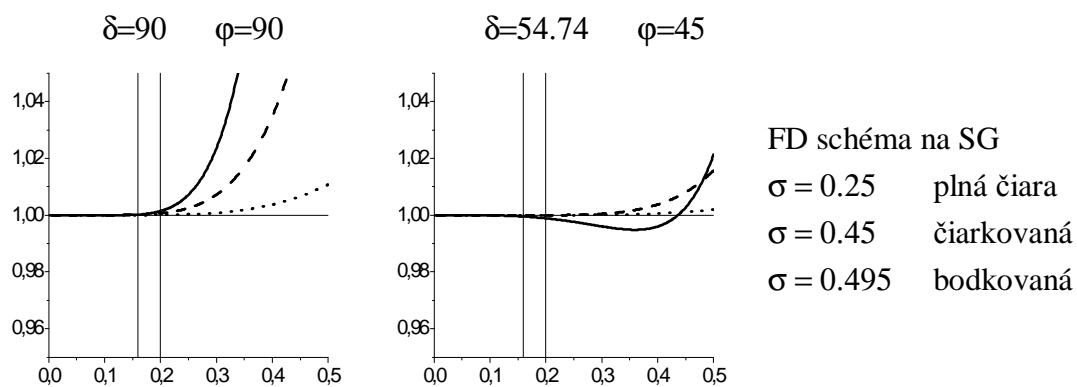
Tab. 4 Hodnoty pomeru numerického riešenia a presného riešenia pre $s=1/5$ a $s=1/6$ pre šírenie S vln v smere telesovej uhlopriečky



Obr. 12 Krivky lokálnej chyby pre zložku posunutia u . Na osi x grafu je pomer h/L_s , na osi y je pomer numerického a presného riešenia



Obr. 13 Krivky lokálnej chyby pre zložku posunutia u . Na osi x grafu je pomer h/L_s , na osi y je pomer numerického a presného riešenia



Obr. 14 Krivky lokálnej chyby pre zložku posunutia u . Na osi x grafu je pomer h/L_s , na osi y je pomer numerického a presného riešenia

2.8 Závěry k disperzii a lokální chybě

Sieťová disperzia rýchlosti šírenia S vlny FD schém A (16 bodová), B (32 bodová) a F (40 bodová) na PSG je rovnaká v smere súradnicovej osi. Rozdiely medzi b^{GRID} / b pre rôzne hodnoty parametra stability p klesajú s rastúcim s .

V smere telesovej uhlopriečky má schéma A podstatne väčšiu disperziu než schémy B a F, ktoré sa líšia len veľmi málo, pričom menšiu disperziu má schéma F. Keďže schéma F potrebuje až 40 bodov, 32 bodová schéma B je z hľadiska disperzie rozumným kompromisom.

Pre nízky počet bodov (16) schémy A boli porovnané disperzie schémy A aj schémy B s disperziou FD schémy na SG.

Disperzia schém A a B je porovnateľná s disperziou FD schémy na SG v smere súradnicovej osi. Rozdiely sa znižujú s rastúcim s .

FD schéma na SG má menšiu disperziu ako schémy A a B v smere telesovej uhlopriečky, pričom rozdiel je významný v prípade schémy A. V prípade schémy B je disperzia malá a blízka k disperzii FD schémy na SG pre $p = 1.0$ a $s = 0.25$.

Hlavný záver k disperzii je, že FD schémy na PSG majú väčšiu disperziu ako FD schéma na SG. Ak by sme z nejakého iného dôvodu chceli použiť FD schému na PSG, museli by sme použiť 32 bodovú schému B so vzorkovaním $s = 1/6$ alebo 16 bodovú schému A, avšak s hustejším vzorkovaním minimálnej vlnovej dĺžky, aby sme dosiahli presnosť blízku presnosti FD schémy na SG.

Lokálna chyba v smere súradnicovej osi v prípade $p = 1.0$ je najmenšia pre FD schému na SG, väčšia v schémach A a B. V schémach A a B je rovnaká. V prípade $p = 0.577$, t.j. ak je v schémach A a B použitý časový krok rovný max. časovému kroku FD schémy na SG, lokálna chyba schémy A sa zväčší, avšak lokálna chyba schémy B sa rádovo zmenší a bude veľmi blízka chybe FD schémy na SG.

Lokálna chyba v smere telesovej uhlopriečky v prípade $p = 1.0$ je najmenšia v FD schémy na SG, väčšia v schéme B a významne najväčšia v schéme A. V prípade $p = 0.577$, t.j. ak je v schémach A a B použitý časový krok rovný max. časovému kroku FD schémy na SG, sa chyby zmenšia, v prípade schémy B bude chyba pomerne blízka chybe FD schémy na SG.

Z hľadiska lokálnej chyby nie sú teda FD schémy A a B lepšie ako FD schéma na SG. Percentuálne rozdiely v prípade schémy B však nie sú veľké, najmä ak sa použije menší časový krok rovný maximálnemu časovému kroku FD schémy na SG.

Celkovo môžeme konštatovať, že napriek väčšiemu počtu bodov pre aproximáciu priestorovej derivácie v FD schémach na PSG, je aj sieťová disperzia aj lokálna chyba schém na PSG väčšia ako disperzia a lokálna chyba FD schémy na SG. Ani samotná sieťová disperzia ani samotná lokálna chyba v homogénnom prostredí teda nie sú dostatočným dôvodom pre uprednostnenie FD schém na PSG pred FD schémou na SG.

3. Numerické modelovanie šírenia seizmických vln na čiastočne striedavo usporiadanej sieti

Táto kapitola je venovaná popisu výpočtového programu PSG_DVS. Uvedený je spôsob pokrytia výpočtovej oblasti čiastočne striedavo usporiadanou sieťou, spôsob modelovania zdroja seizmických vln, popis výpočtového programu a algoritmus výpočtu, vstupné údaje výpočtového modelu a numerické výsledky. V celej kapitole uvažujeme homogénne, elastické a izotrópne prostredie.

3.1 Výpočtový program PSG_DVS_A

Výpočtový program PSG_DVS umožňuje výpočet šírenia seizmických vln v homogénnom, elastickom, izotrópnom prostredí s pevnými hranicami. Ako výpočtová metóda je použitá metóda konečných diferencií na čiastočne striedavo usporiadanej sieti pre schému A (16 bodovú), pričom je možné program jednoducho obmeniť pre schému B (32 bodovú). Použitá je formulácia pohybových rovníc kontinua v posunutí, rýchlosti a napätí. Formuláciu v posunutí, rýchlosti a napätí pohybových rovníc budeme v tejto práci označovať ako DVS (podľa anglického displacement-velocity-stress).

Uvažujme vektor posunutia $\mathbf{u}(u, v, w)$, vektor rýchlosti $\mathbf{\dot{u}}(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$, tenzor napätia $\mathbf{t}(t_{ij})$; $i, j \in \{x, y, z\}$ a vonkajšiu silu pôsobiacu na jednotkový objem $\mathbf{f}(f_x, f_y, f_z)$ ako funkcie priestorových súradníc x, y, z a času t . Hustota r a Laméove elastické koeficienty l a m sú pre homogénne prostredie priestorové konštanty. Potom DVS formuláciu pohybových rovníc môžeme zapísať v tvare (3.1). Zápis FD schémy A na PSG v DVS formulácií pre 3D 4. rád presnosti v priestore, 2. rád presnosti v čase je uvedený v Prílohe č. 1 (str. 80).

$$\begin{aligned}
 u_t &= \dot{u}, \\
 v_t &= \dot{v}, \\
 w_t &= \dot{w}, \\
 ru_t &= t_{xx,x} + t_{xy,y} + t_{xz,z} + f_x, \\
 rv_t &= t_{xy,x} + t_{yy,y} + t_{yz,z} + f_y, \\
 rw_t &= t_{xz,x} + t_{yz,y} + t_{zz,z} + f_z, \\
 t_{xx} &= (l + 2m)u_x + lv_y + lw_z, \\
 t_{yy} &= lu_x + (l + 2m)v_y + lw_z, \\
 t_{zz} &= lu_x + lv_y + (l + 2m)w_z,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$t_{xy} = m(u_y + v_x),$$

$$t_{xz} = m(u_z + w_x),$$

$$t_{yz} = m(v_z + w_y),$$

kde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $t_{xx} = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}$.

Program PSG_DVS môžeme rozdeliť na tri základné časti: načítanie vstupných dát a výpočet parametrov modelu, výpočet šírenia seizmických vln a zápis výstupných dát.

Načítanie vstupných dát a výpočet parametrov modelu zabezpečuje subrutina READ_OPEN. Vstupné údaje programu sú načítané zo vstupného súboru PSG_DVS.IN. Časová funkcia zdroja (bližšie v kapitole 3.3) je načítaná zo súboru SRC_001.DAT.

Vstupné parametre programu (v zátvorke sú uvedené názvy veličín vo výpočtovom programe): rýchlosť šírenia P vln a v m/s (ALFA), rýchlosť šírenia S vln b v m/s (BETA), hustota prostredia r v kg/m³ (DEN), rozmery výpočtovej oblasti v metroch (LENGTH, WIDTH, HEIGHT). Vzorkovací pomer s (S), maximálna uvažovaná frekvencia f v Hz (F), veľkosť časového kroku Δt v sekundách (DT), počet časových hladín výpočtu (MT), počet prijímačov (N), počet časových hladín časovej funkcie zdroja (NT). Parameter určujúci rovinu xz , v ktorej sa budú vykresľovať snapshoty v sieťových súradniciach (SNAP). Skalárny seizmický moment M_0 v Nm (M0), uhly určujúce rovinu zlomu a smer sklzu v stupňoch Φ_S (STRIKE), d (DIP) a l (RAKE) pre prípad bodového dislokačného zdroja, pre prípad explozívneho zdroja je to parameter p_e (P), dĺžka ramena síl s maximálnou amplitúdou v metroch (DMAX) a veľkosť maximálnej amplitúdy síl (HMAX). Súradnice zdroja a prijímačov sú zadávané ako sieťové súradnice. Súradnice zdroja sú (S1, S2, S3), súradnice prijímačov sú načítané do poľa RC. Časová funkcia zdroja je načítaná do poľa STF.

Laméove elastické koeficienty l (LAM) a m (MU) sú vypočítané zo vstupných údajov podľa vzťahu (2.28). Pre veľkosť sieťového kroku h (H) platí vzťah (2.30). Zvolené sú nulové počiatočné podmienky, t.j. vektor posunutia \underline{u} a vektor rýchlosti \underline{v} sú v čase $t = 0$ nulové v celom modeli.

Samotný výpočet šírenia seizmických vln prebieha v cykle. Z hodnôt zložiek posunutia v m -tej časovej hladine sú počítané hodnoty zložiek napätia v $(m+1)$ -tej časovej hladine v celom modeli (subrutina STRESS). Z hodnôt zložiek napätia v $(m+1)$ -tej časovej hladine sú počítané zložky rýchlostí v $(m+1)$ -tej časovej hladine v celom modeli (subrutina VELOCITY). V bodoch, pomocou ktorých aproximujeme bodový seizmický zdroj, sú „opravené“ hodnoty zložiek rýchlostí v danej časovej hladine (subrutina SOURCE). Z opravených hodnôt zložiek rýchlostí v $(m+1)$ -tej časovej hladine sú počítané hodnoty zložiek posunutia v $(m+1)$ -tej časovej hladine v celom modeli (subrutina DISPL_DVS_A). Tento cyklus sa opakuje MT - krát (MT-

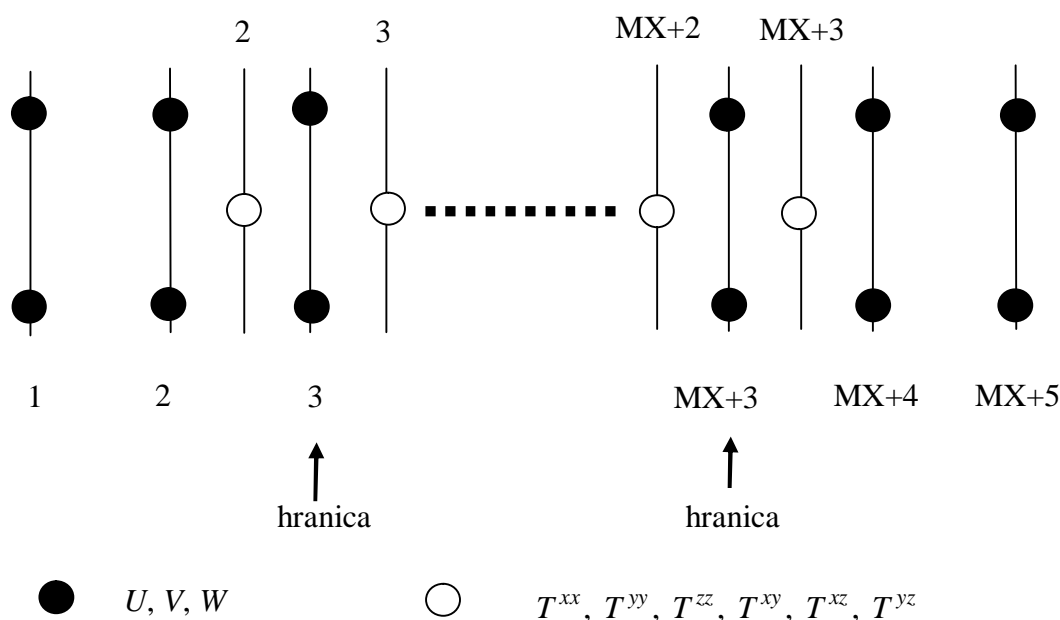
počet časových hladín výpočtu), pričom subrutina SOURCE je volaná len prvých NT–krát (NT–počet časových hladín časovej funkcie zdroja).

Subrutina OUTPUT vytvorí výstupné súbory, do ktorých sú zapísané hodnoty posunutia v bodoch prijímačov pre všetky počítané časové hladiny. Pre každý prijímač sú vytvorené tri súbory, pre každú zo zložiek posunutia U , V , W zvlášť. Číslo súboru je určené poradím prijímača vo vstupnom súbore PSG_DVS.IN

3.2 Pokrytie výpočtovej oblasti čiastočne striedavo usporiadanou sieťou

Uvažujme 3D oblasť v tvare kvádra. Počet uzlov siete vypočíta program ako celé číslo z podielu rozmerov výpočtovej oblasti (LENGTH, WIDTH, HEIGHT) a sieťového kroku. Počet uzlov v smere osi x je MX , počet uzlov v smere osi y je MY , počet uzlov v smere osi z je MZ . Pre potreby výpočtového programu označíme za sieťovú bunku dva uzly siete a to uzol, v ktorom sú umiestnené zložky tenzora napätia so súradnicami i, k, l spolu s uzlom, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia (rýchlosti) so súradnicami $i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$. Tieto dva uzly budú mať vždy rovnaké celočíselné sieťové súradnice i, k, l .

Keďže uvažujeme homogénne, elastické a izotrópne prostredie, Laméove elastické koeficienty l, m a hustota prostredia r sú konštanty v celej uvažovanej oblasti. Výpočtová oblasť má tzv. pevné hranice. To znamená, že zložky posunutia, rýchlosti a napätia na hranici a za ňou sú nulové.



Obr. 1 Modelovanie pevnej hranice

Vo výpočtovom programe boli rozmery prostredia „zväčšené“ o tie uzly siete, ktoré sú nutné k výpočtu hodnôt posunutia, rýchlosti a napätia v okrajových oblastiach. Na Obr. 1 sú znázornené hranice modelu pre 1D prípad.

V bodoch siete, v ktorých sú umiestnené zložky vektora posunutia (rýchlosti) so sieťovými súradnicami 1, 2, 3 a MX+3, MX+4, MX+5 sú nulové hodnoty a počas behu programu sa nemenia (neprepočítavajú). Hodnoty zložiek napätia v bodoch so sieťovými súradnicami 2 a MX+3 sú nulové hodnoty a počas behu programu sa taktiež nemenia (neprepočítavajú). Tieto uzly „navyš“ slúžia na jednoduché naprogramovanie hraníc oblasti.

3.3 Simulácia zdroja

V programe PSG_DVS môžu byť seizmické vlny generované bodovým dislokačným zdrojom alebo explozívnyim zdrojom. Tektonické zemetrasenie môžeme popísať ako náhle uvoľnenie mechanickej energie nevratným posunutím na zlome vo forme seizmických vln. Tektonické zemetrasenie môžeme simulovať bodovým dislokačným zdrojom. Pri explóziách sa takisto generujú seizmické vlny, ktoré však sú iného typu ako v prípade tektonického zemetrasenia. Explóziu môžeme simulovať explozívnyim zdrojom.

Pre bodový dislokačný zdroj uvažujme objem V s vonkajšou plochou S . Definujme jednotkovú objemovú impulznú silu f_i pôsobiacu v smere osi x_n , aplikovanú v bode \mathbf{x} a v čase t ako

$$f_i(\mathbf{x}, t) = d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d(t - t') d_{in}, \quad (3.2)$$

kde d je Kroneckerov symbol.

Definujme Greenovu funkciu $G_{in}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$, ktorá je číselne rovná hodnote i -tej zložky posunutia v bode \mathbf{x} a v čase t . Toto posunutie je spôsobené jednotkovou impulznou silou, aplikovanou v bode \mathbf{x}' v čase t' v smere osi x_n . Greenova funkcia spĺňa rovnicu

$$r \mathcal{G}_{in}^{\mathbf{x}} = (c_{ijkl} G_{kn,l})_{,j} + d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d(t - t') d_{in}, \quad (3.3)$$

kde c_{ijkl} je tenzor elastických koeficientov (ak uvažujeme izotrópne prostredie, zostanú z neho len Laméove elastické koeficienty λ , μ). Rovnica (3.3) je pohybovou rovnicou kontinua.

Potom posunutie \mathbf{u} v bode \mathbf{x} a v čase t môžeme určiť z reprezentačného teorému

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint f_i(\mathbf{x}, t) G_{in}(\mathbf{x}, t-t, \mathbf{x}, 0) dV(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S G_{in}(\mathbf{x}, t-t, \mathbf{x}, 0) T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) dS(\mathbf{x}) - \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijkl}(\mathbf{x}) n_j G_{kn,l}(\mathbf{x}, t-t, \mathbf{x}, 0) dS(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

kde prvý člen je príspevok k celkovému posunutiu spôsobený silou \mathbf{f} v objeme V , druhý člen je príspevok od vektoru napätia \mathbf{T} na ploche S a tretí člen je príspevok od posunutia \mathbf{u} na ploche S , \mathbf{n} je normála na plochu S .

Uvažujme objem V s vonkajšou plochou S a vnútornou zlomovou plochou Σ . Predpokladajme, že S reprezentuje povrch Zeme a teda posunutie \mathbf{u} a G_{in} sú na S nulové. Pre zlomovú plochu Σ predpokladajme diskontinuitu v posunutí, t.j. $[\mathbf{u}] \neq 0$ na Σ a spojitost' vektoru napätia, t.j. $[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})] = 0$ na Σ , kde \mathbf{n} je normála na Σ . G_{in} a jej derivácia sú spojité na Σ . Predpokladajme, že $\mathbf{f} = 0$ v celom objeme V . \mathbf{x} určuje polohu na zlomovej ploche Σ . Potom zo vzťahu (3.4) dostávame

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_{\Sigma} [u_i(\mathbf{x}, t)] c_{ijkl} n_j \frac{\partial G_{nk}(\mathbf{x}, t-t, \mathbf{x}, 0)}{\partial x_l} d\Sigma, \tag{3.5}$$

kde $[u_i(\mathbf{x}, t)] = u_i(\mathbf{x}, t)|_{\Sigma_+} - u_i(\mathbf{x}, t)|_{\Sigma_-}$, t.j. hodnota diskontinuity posunutia na zlomovej ploche Σ . Ďalej budeme postupovať podľa práce Moczo (1998). Vo vzťahu (3.5) môžeme prvý integrál nahradiť konvolučným súčinom

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt, \tag{3.6}$$

ďalej definujme tenzor hustoty momentov m_{pq} a tenzor momentov M_{pq}

$$\begin{aligned}
m_{pq}(\mathbf{x}, t) &= c_{pqrs}(\mathbf{x}) [u_r(\mathbf{x}, t)] n_s(\mathbf{x}), \\
M_{pq} &= \iint_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

potom vzťah (3.5) môžeme prepísať ako

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma = M_{pq} * G_{np,q}. \quad (3.8)$$

$G_{np,q}$ je fyzikálny ekvivalent jednoduchej dvojice síl s ramenom v smere q a smerom pôsobenie v smere p (túto dvojicu síl budeme označovať ako (p, q) pár) na zlomovej ploche Σ v bode \mathbf{x} . Potom $m_{pq} * G_{np,q}$ určuje posunutie v bode \mathbf{x} spôsobené (p, q) párom síl v bode \mathbf{x} .

Uvažujme tangenciálny sklz na zlomovej ploche, t.j. $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0$, kde \mathbf{n} je normála na zlomovú plochu a $\dot{\mathbf{n}}$ je jednotkový vektor určujúci smer sklzu, $[\dot{\mathbf{u}}] = \Delta u \mathbf{n}$. Pre homogénne, izotropné prostredie potom zo vzťahu (3.7) dostávame

$$M_{pq} = m(n_p n_q + n_q n_p) \iint_{\Sigma} \Delta u(\mathbf{x}, t) d\Sigma. \quad (3.9)$$

Integrál vo vzťahu (3.9) môžeme približne určiť ako

$$\iint_{\Sigma} \Delta u(\mathbf{x}, t) d\Sigma = \overline{\Delta u} A s(t),$$

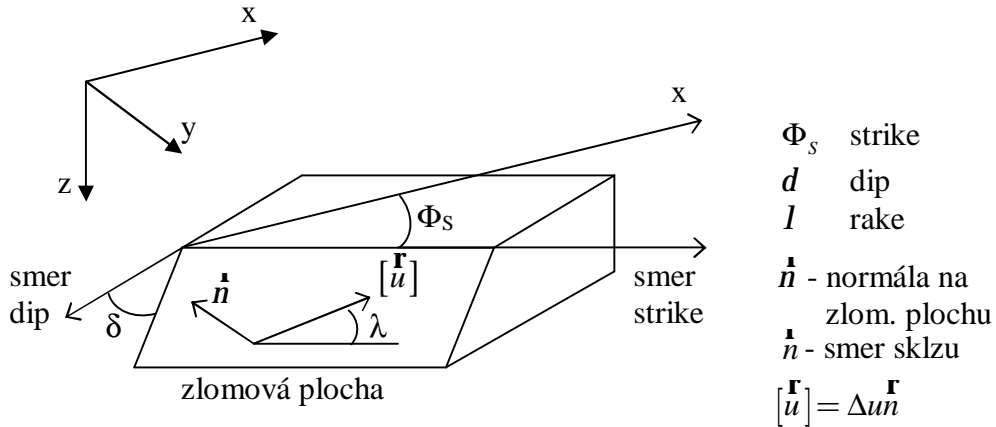
kde $\overline{\Delta u}$ je priemerná hodnota sklzu na zlome, A je plocha zlomu a $s(t)$ je časová funkcia zdroja. Pre tenzor momentov dostávame výsledný vzťah

$$M_{pq} = M_0 (n_p n_q + n_q n_p) s(t), \quad (3.10)$$

kde $M_0 = m A \overline{\Delta u}$ je skalárny seizmický moment. Tenzor momentov M_{pq} je symetrický. Orientácia zlomovej plochy a smeru sklzu v priestore je určená tromi uhlami Φ_S , d a l . Ich definícia je uvedená na Obr. 2. Uhol Φ_S určuje odklon zlomovej plochy od roviny xz , uhol d určuje odklon zlomovej plochy od roviny xy a uhol l určuje smer sklzu na zlomovej ploche. Zo vzťahu (3.10) a z definície uhlov Φ_S , d a l dostávame pre jednotlivé zložky tenzora momentov nasledujúce vzťahy

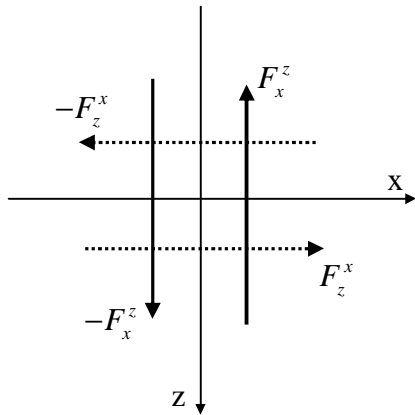
$$\begin{aligned} M_{xx}(t) &= -M_0 \left(\sin d \cos l \sin 2\Phi_S + \sin 2d \sin l \sin^2 \Phi_S \right) s(t), \\ M_{xy}(t) &= M_0 \left(\sin d \cos l \cos 2\Phi_S + \frac{1}{2} \sin 2d \sin l \sin 2\Phi_S \right) s(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
M_{xz}(t) &= -M_0 (\cos d \cos l \cos \Phi_S + \cos 2d \sin l \sin \Phi_S) s(t), \\
M_{yy}(t) &= M_0 (\sin d \cos l \sin 2\Phi_S - \sin 2d \sin l \cos^2 \Phi_S) s(t), \\
M_{yz}(t) &= -M_0 (\cos d \cos l \sin \Phi_S - \sin 2d \sin l \cos \Phi_S) s(t), \\
M_{zz}(t) &= M_0 (\sin 2d \sin l) s(t).
\end{aligned}$$



Obr. 2 Definícia orientácie zlomovej plochy

Bodový dislokačný zdroj v FD schéme môžeme simulovať dvojitou dvojicou síl. Jednu dvojicu síl tvorí (p, q) pár, druhú dvojicu síl (q, p) pár, pozri Obr. 3 (os y ide von



Obr. 3 Príklad dvojitej dvojice síl

v sieti a d je dĺžka ramena, potom veľkosť sily môžeme vyjadriť ako

$$F_p^q = \frac{1}{d} \frac{1}{h^3} M_{pq}(t), \quad (3.12)$$

kde p určuje smer ramena sily a q určuje smer pôsobenia sily. V samotnom výpočte pôsobisko síl umiestnime v tých bodoch siete, v ktorých sú umiestnené zložky vektora rýchlosti (pre DVS formuláciu). V danej časovej hladine potom hodnoty rýchlosti v bodoch, pomocou ktorých aproximujeme zdroj, vypočítame ako súčet príspevkov od

pôsobiacej sily, ktorú určíme zo vzťahu (3.12) a od zložiek napätia v okolitých bodoch, vid' DVS FD schému v Prílohe č. 1.

Simulovanie seizmického zdroja pomocou silového člena v pohybových rovniciach v spojitom prostredí použil vo svojej práci Aboudi (1971). Frankel (1993) použil tento spôsob simulácie zdroja na konvenčnej sieti pre formuláciu pohybových rovníc v posunutí. Graves (1996) použil tento spôsob simulácie zdroja na striedavo usporiadanej sieti pre formuláciu pohybových rovníc v rýchlosti a napätí.

Pre expozívny zdroj uvažujme objemovú silu v tvare

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = A \cdot \nabla S(x, y, z) \cdot s(t), \quad (3.13)$$

kde A je amplitúda sily, $s(t)$ je časová funkcia zdroja a funkcia S je daná vzťahom

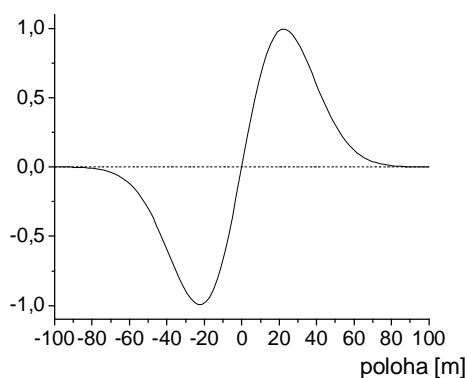
$$S(x, y, z) = \exp\left\{-p_e \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]\right\}, \quad (3.14)$$

kde (x_0, y_0, z_0) sú súradnice zdroja, parameter p_e určuje „šírku“ funkcie S , t.j. veľkosť zdroja. Pre zdroj konečnej veľkosti musí byť $p_e > 0$. Takto definovanú objemovú silu použil vo svojej práci Serón (1989). Pre 1D prípad môžeme silu F normovanú na jednotku objemu vyjadriť v tvare

$$F = \frac{M_0}{d \cdot h^3} S_1(x) \cdot s(t), \quad (3.15)$$

kde M_0 skalárny seizmický moment, d dĺžka priemerného ramena (určená ako vzdialenosť maxím funkcie S_1), h je jednotková dĺžka. Funkcia S_1 má tvar

$$S_1(x) = \frac{(x-x_0) \exp\left[-p_e (x-x_0)^2\right]}{\max_{x \in (-\infty, \infty)} \left\{ (x-x_0) \exp\left[-p_e (x-x_0)^2\right] \right\}}.$$



Obr. 4 Normovaná funkcia S_1
pre $p_e = 0.001$

To znamená, že zdroj je „umiestnený“ v jednom bode siete, jeho centrum je v bode (x_0, y_0, z_0) , ale simulujeme ho viacerými silami vo viacerých bodoch siete.

Funkcia S_1 pre $p_e = 0.001$ a $x_0 = 0$ je zobrazená na Obr. 4. Z grafu funkcie je zrejmé, že v bode centra zdroja je amplitúda sily F nulová, v smere od centra zdroja narastá (resp. klesá) do maxima (minima) a ďalej klesá (narastá) k nule.

Časovú funkciu pre oba typy zdroja reprezentuje Gaborov signál

$$s(t) = \exp\left\{-\left[w_p(t-t_s)/g_p\right]^2\right\} \cos\left[w_p(t-t_s) + q\right], \quad (3.16)$$

kde $w_p = 2\pi f_p$, f_p je dominantná frekvencia signálu, $t \in \langle 0, 2t_s \rangle$, t.j. trvanie signálu je $2t_s$, g_p určuje dĺžku signálu, q je fázové posunutie, $t_s = 0.45g_p / f_p$. Spojitú časovú funkciu zdroja je nutné pre potreby programu zdiskretizovať. To zabezpečuje program SOURTF. Pre zadané parametre Gaborovho signálu (f_p , g_p , q , t_s) a dĺžku časového kroku vypočíta diskkrétne hodnoty signálu, obálky signálu a amplitúdového spektra signálu.

3.4 Vstupné údaje

Bolo zvolené prostredie s hustotou $r = 2000\text{kg/m}^3$, rýchlosť P vln $a = 700\text{m/s}$ a rýchlosť S vln $b = 400\text{m/s}$. Môžeme hovoriť o vrstve sedimentov. Vzorkovací pomer $s = 0.125$, to znamená 8 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku. Táto hodnota vzorkovacieho pomeru bola zvolená na základe analýzy sieťovej disperzie v 2. kapitole. Pre dané hodnoty rýchlostí P a S vln môžeme hodnotu Poissonovho pomeru vypočítať ako

$$s = \frac{a^2 - 2b^2}{2(a^2 - b^2)}. \quad (3.17)$$

Pre zadané hodnoty rýchlostí je $s = 0.2576$. V 2. kapitole boli vykreslené disperzné krivky pre $s = 0.25$ a rôzne hodnoty parametra p (určuje, akú časť z maximálneho časového kroku uvažujeme).

$s=0,25$	$p = 1.0$		$p = 0.7$	
	s	b^{GRID} / b	s	b^{GRID} / b
0,5 %	0,125	0,9954	0,1125	0,9952
1 %	0,1425	0,9902	0,13	0,9906

$s=0,25$	$p = 0.4$		$p = 0.1$	
	s	b^{GRID} / b	s	b^{GRID} / b
0,5 %	0,105	0,9951	0,1	0,9954
1 %	0,125	0,9901	0,1225	0,99

Tab. 1 Výber hodnoty vzorkovacieho pomeru s , šírenie v smere telesovej uhlopriečky

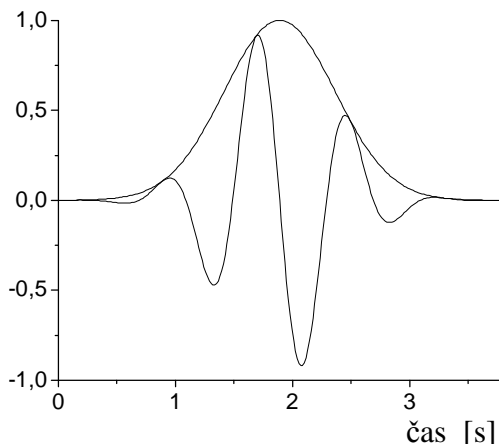
V Tab. 1 sú uvedené hodnoty s a pomeru b^{GRID} / b pre 0.5% a 1% odchýlky (t.j. odchýlka veľkosti rýchlostí b^{GRID} nie je rôzna od b o viac ako 0.5%, resp. 1%) pre rôzne hodnoty p pre smer šírenia v smere telesovej uhlopriečky (v tomto smere mala schéma horšiu disperziu). Volili sme veľkosť časového kroku približne polovicu z maximálneho, t.j. $p : 0.6$, podľa vzťahu (2.15).

Veľkosť sieťového kroku bola určená zo vzťahu (2.30), $h = 20$ m. Maximálnu veľkosť časového kroku pre zadané a a h možno určiť zo vzťahu (2.14), $\Delta t_{max} = 0.024$ s, vo výpočte bolo zvolené $\Delta t = 0.015$ s. Veľkosť maximálnej uvažovanej frekvencie bola $f = 2.5$ Hz (súvisí so zvolenou časovou funkciou zdroja, ktorá bude popísaná neskôr).

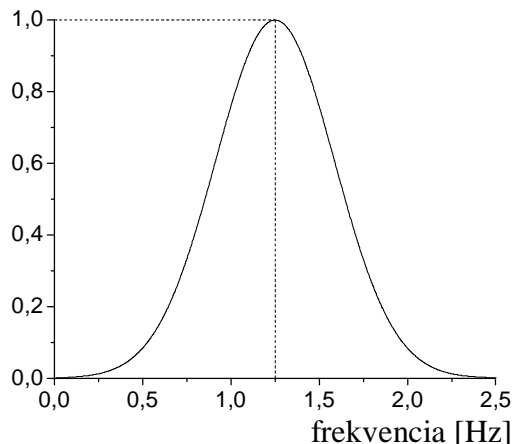
Parametre bodového dislokačného zdroja: skalárny seizmický moment $M_0 = 10^{10}$ Nm, zlomovou plochou je rovina $z = 0$, sklz je v smere osi x , t.j. $\Phi_S = 0^\circ$, $d = 0^\circ$ a $l = 0^\circ$. To znamená, že len zložka M_{xz} tenzora momentov je nenulová. Orientácia dvojitej dvojice síl je uvedená na Obr. 2. Táto orientácia zdroja bola vybraná zámerne pre jednoduché prvé overenie správnosti výpočtu. Tento zdroj generuje v smere osi x len vertikálne polarizované S vlny (smer šírenia je v smere osi x , výchylka je v smere osi z), v smere osi z generuje horizontálne polarizované S vlny (smer šírenia je v smere osi z , výchylka je v smere osi x), v smere telesovej uhlopriečky (resp. rovinnej uhlopriečky) generuje P vlny. Len z vyžarovania bodového zdroja simulovaného dvojitou dvojicou síl nie je možné určiť, ktorá z rovín je zlomovou plochou a ktorá pomocnou rovinou. Preto u zložka vektoru posunutia na prijímačoch umiestených v smere osi x od zdroja musí byť totožná s w zložkou vektoru posunutia na prijímačoch umiestených v smere osi z od zdroja. Taktiež musí byť totožná u zložka vektoru posunutia na prijímačoch umiestených v smere telesovej uhlopriečky od zdroja s w zložkou vektoru posunutia na tých istých prijímačoch. A to isté platí aj pre prijímače v smere rovinnej uhlopriečky od zdroja. Výpočty boli vykonané pre rôzny počet a polohy bodov, pomocou ktorých aproximujeme bodový zdroj. Ich obrázky a popis sú uvedené v Prílohe č. 2.

Parametre explozívneho zdroja: skalárny seizmický moment $M_0 = 10^{10}$ Nm. Výpočty boli vykonané pre rôzne hodnoty parametra p_e , t.j. pre rôzne efektívne veľkosti explozívneho zdroja. Explozívny zdroj vyžaruje do okolia len P vlny, čo nám umožňuje taktiež jednoduché prvé overenie správnosti výpočtu. Náčrt explozívneho zdroja je uvedený v Prílohe č. 2.

Časovou funkciou zdroja je Gaborov signál s parametrami $g_p = 5.25$, $f_p = 1.25$ Hz, $q = p / 2$, $t_s = 1.89$ s, trvanie signálu je 3.78 s. Pre veľkosť časového kroku $\Delta t = 0.015$ s, počet časový hladín signálu je 253. Signál spolu s jeho obálkou sú na Obr. 6, normované amplitúdové spektrum signálu je na Obr. 7.



Obr. 6 Časová funkcia zdroja:
Gaborov signál a jeho obálka



Obr. 7 Normované amplitúdové
spektrum časovej funkcie zdroja

Za hodnotu maximálnej uvažovanej frekvencie f bola zvolená hodnota frekvencie, na ktorej amplitúda spektra signálu klesla o tri rády z maxima, túto frekvenciu označme f_{ac} . Potom $f = f_{ac} = 2.5$ Hz. Pri výbere parametrov signálu bolo nutné zvoliť kompromis medzi dĺžkou trvania signálu a hodnotou f_{ac} . Čím dlhší signál, tým je nutný dlhší čas výpočtu a zároveň väčšie rozmery modelu (príchod odrazených vln), t.j. nárast výpočtových nárokov na pamäť počítača. Ak však volíme parametre signálu tak, aby jeho trvanie bolo čo najkratšie, hodnota f_{ac} rastie, čo vedie k zmenšovaniu sieťového kroku (hustejšie vzorkovanie) a tiež k nárastu výpočtových nárokov.

3.5 Presné riešenie

Keďže testujeme novú schému, je nutné numerické výsledky porovnať s presným riešením, resp. s riešením približnej metódy, o ktorej vieme, že dáva dobré výsledky.

V prípade bodového dislokačného zdroja v homogénnom, elastickom, izotropnom prostredí máme k dispozícii presné riešenie, ktoré vychádza zo vzťahu (3.8)

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q}.$$

Skalárny seizmický moment môžeme vyjadriť ako

$$M_0(t) = mA\bar{u}(t), \quad (3.18)$$

kde $\bar{u}(t)$ je priemerná hodnota sklzu na zlome v danom časovom okamihu, t.j.

$$\bar{u}(t) = \overline{\Delta u} \cdot s(t).$$

Potom posunutie $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ vyjadríme ako (presné odvodenie možno nájsť v Aki & Richards (1980, 4. kap.))

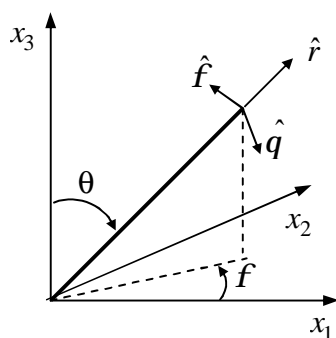
$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi r} A^N \frac{1}{r^4} \int_{r/a}^{r/b} t M_0(t-t) dt + \\ & \frac{1}{4\pi r a^2} A^{IP} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{4\pi r b^2} A^{IS} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{b}\right) + \\ & \frac{1}{4\pi r a^3} A^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{4\pi r b^3} A^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{b}\right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

pričom

$$\begin{aligned} A^N &= 9 \sin 2J \cos f \hat{r} - 6 \left(\cos 2J \cos f \hat{J} - \cos J \sin f \hat{f} \right), \\ A^{IP} &= 4 \sin 2J \cos f \hat{r} - 2 \left(\cos 2J \cos f \hat{J} - \cos J \sin f \hat{f} \right), \\ A^{IS} &= -3 \sin 2J \cos f \hat{r} + 3 \left(\cos 2J \cos f \hat{J} - \cos J \sin f \hat{f} \right), \\ A^{FP} &= \sin 2J \cos f \hat{r}, \\ A^{FS} &= \cos 2J \cos f \hat{J} - \cos J \sin f \hat{f}, \end{aligned}$$

kde a a b sú rýchlosti P a S vln, r je absolútna vzdialenosť od zdroja, ρ je hustota prostredia, $\dot{M}_0 = \frac{\partial M_0}{\partial t}$. Jednotkové vektory \hat{r} , \hat{q} a \hat{f} sú určené vzťahmi (3.20).

Definícia uhlov q a f je znázornená na Obr. 8.



$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\sin J \cos f, \sin J \sin f, \cos J), \\ \hat{J} &= (\cos J \cos f, \cos J \sin f, -\sin J), \\ \hat{f} &= (-\sin f, \cos f, 0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Obr. 8 Definícia uhlov q a f (Aki & Richards, 1980)

Vo vzťahu (3.19) prvý člen reprezentuje tzv. near-field člen. Druhý a štvrtý člen súvisí s P vlnami (tzv. intermediate-field a far-field člen), tretí a piaty člen je pre S vlny (intermediate-field a far-field člen). Pre dostatočne veľké vzdialenosti od zdroja môžeme near-field a intermediate-field zanedbať.

Presné riešenie pre bodový dislokačný zdroj bolo počítané programom PDS02, ktorý vychádza zo vzťahu (3.19).

Pre získanie presného riešenia pre explozívny zdroj v homogénom, elastickom prostredí program PDS02 nebolo možné použiť. Použitá bola približná výpočtová metóda diskretných vlnových čísel, ktorá je popísaná v Bouchon (1981). Metódu diskretných vlnových čísel budeme ďalej označovať ako DWN metódu (podľa anglického discrete wave number). Aby sme mohli určiť posunutie v danom bode prostredia, potrebujeme poznať Greenove funkcie. Pre elastické zvrstvené prostredie môžeme Greenove funkcie vyjadriť ako dvojný integrál cez frekvencie a horizontálne vlnové čísla. V DWN metóde je integrál cez vlnové čísla vyjadrený diskretnou sumáciou.

Použitá metóda, resp. výpočtový program DWN, dáva dobré výsledky a je ním možné overovať presnosť našich schém. Má však svoje obmedzenia. Prijímače nie je možné umiestniť do horizontálnej roviny, v ktorej sa nachádza zdroj. Taktiež nie je možné umiestniť prijímače nad a pod zdrojom. Pri porovnávaní výpočtov získaných pomocou DWN metódy a inej približnej metódy je nutné výsledky škálovať.

4. Numerické výsledky

V tejto kapitole sú uvedené numerické výsledky modelovania šírenia seizmického pohybu v homogénnom, elastickom, izotropnom prostredí s pevnými hranicami. Popis výpočtového programu a vstupné údaje sú v predchádzajúcej kapitole. Vo výpočtoch boli použité rôzne „typy“ bodového dislokačného zdroja (viď Príloha č.2), ako i rôzne explozívne zdroje, pretože sa ukázalo, že daná schéma je citlivá na tvar a veľkosť zdroja. V kapitole je tiež uvedené porovnanie FD schém na PSG a SG v prípade sústredenej sily v modeli.

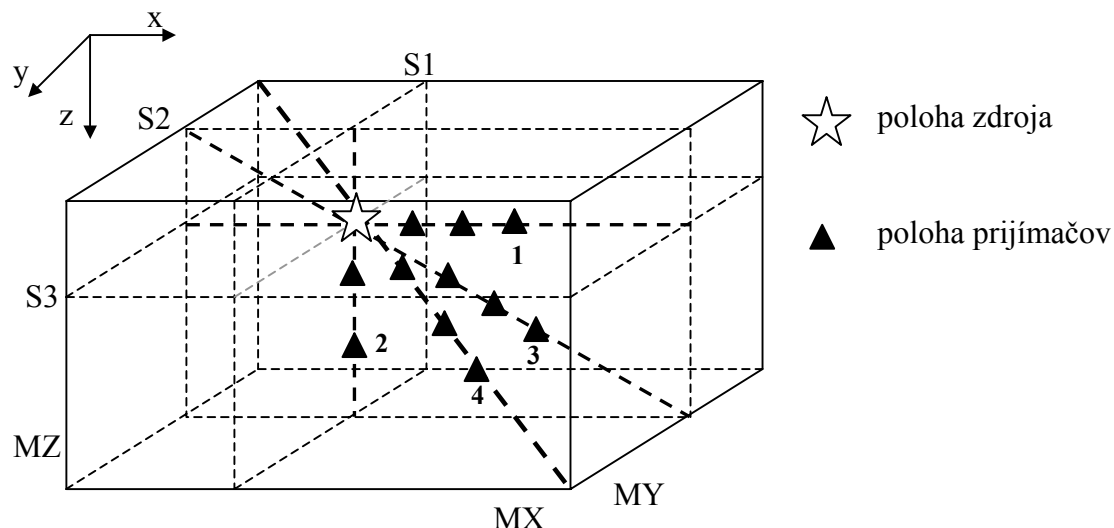
4.1 Bodový dislokačný zdroj

Pre simuláciu bodového dislokačného zdroja bolo použitých niekoľko „typov“ zdrojov. Líšia sa umiestneným centra zdroja v bodoch siete a počtom bodov, použitých na simuláciu. Centrum zdroja bolo umiestnené do bodu siete, v ktorom sú zložky tenzora napätia (modely P1 a P2), alebo do bodu siete, v ktorom sú zložky vektora posunutia (modely S1-S5). Pre všetky modely zdrojov boli sieťové súradnice centra zdroja (130, 130, 130) (tzv. sieťová bunka, viď kapitola 3.2).

Pre všetky modely zdrojov boli prijímače umiestnené v rovnakých bodoch siete a možno ich rozdeliť do štyroch skupín. Na prijímače umiestnené v bodoch siete v smere osi x od zdroja - Δ_1 , v smere osi z - Δ_2 , v smere telesovej uhlopriečky - Δ_3 a v smere rovinnej uhlopriečky - Δ_4 (pre jednoduché prvé overenie správnosti výpočtu, viď kapitola 3.4). Veľkosť výpočtového modelu je 5600 m x 5600 m x 5600 m. Pre veľkosť sieťového kroku $h = 20$ m, $MX = MY = MZ = 280$. Zdroj je umiestnený excentricky, aby boli rozmery modelu čo najlepšie využité. Musí platiť, že čas potrebný na príchod vlny do prijímača plus dĺžka trvania signálu musí byť menší ako čas príchodu ľubovoľnej odrazenej vlny do prijímača. Inak by v seizmogramoch boli zaznamenané aj príchody odrazených vln, ktoré by sťažovali interpretáciu. Počet časových hladín výpočtu $MT = 419$, pre daný časový krok je čas výpočtu 6.285 s. Po tomto čase prichádzajú do prijímačov aj odrazené vlny, preto nemá význam (pri daných rozmeroch modelu) dlhší čas výpočtu. Sieťové súradnice prijímačov sú uvedené v Tab.1. Model výpočtovej oblasti s umiestnením centra zdroja a prijímačov je znázornený na Obr. 1.

	1. prijímač	2. prijímač	3. prijímač	4. prijímač
Δ_1	(150, 130, 130)	(170, 130, 130)	(190, 130, 130)	(210, 130, 130)
Δ_2	(130, 130, 150)	(130, 130, 170)	(130, 130, 190)	(130, 130, 210)
Δ_3	(150, 150, 150)	(170, 170, 170)	(190, 190, 190)	(210, 210, 210)
Δ_4	(150, 130, 150)	(170, 130, 170)	(190, 130, 190)	(210, 130, 210)

Tab. 1 Sieťové súradnice prijímačov pre modely zdroja P1, P2 a S1-S5



Obr. 1 Poloha zdroja a prijímačov vo výpočtovom oblasti

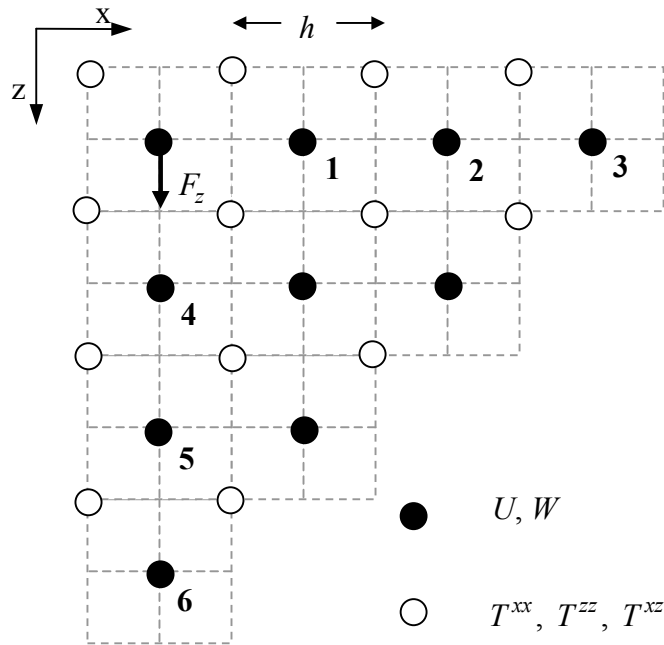
Prvé boli testované dislokačné zdroje, ktorých stredy sú umiestnené v bode siete, v ktorom sú zložky tenzora napätia. V Prílohe č. 2 sú uvedené ako model zdroja P1 a P2. Odlišujú sa počtom bodov, pomocou ktorých zdroj simulujem. Veľkosti síl v jednotlivých bodoch sú uvedené tiež v Prílohe č. 2. Vo výsledných seizmogramoch boli zachované „základné symetrie“ spomínané v kapitole 3.4 (t.j. zložky posunutia, ktoré mali byť totožné v rôznych prijímačoch boli totožné), avšak v porovnaní s presným riešením bol na zázname prijímača pozorovaný nárast amplitúd, predĺženie trvania signálu a fázový posun. Charakter záznamu sa nezmenil ani po zmene časovej funkcie zdroja (s ňou súvisí nárast f_{ac} a zmenšenie sieťového kroku h , vzťah 2.30), ani po zmenšení vzorkovacieho pomeru s (model je hustejšie navzorkovaný – nárast výpočtových nárokov, ale mala by sa zväčšiť presnosť výpočtu).

Pre spomínané problémy boli ďalej testované dislokačné zdroje, ktorých stredy sú umiestnené v bodoch, kde sú zložky posunutia. Ich obrázky a popis veľkosti síl sú v Prílohe č. 2. Jednotlivé zdroje (S1, S2, S3 G1, S3 G2, S4 a S5) sa líšia počtom bodov, ich polohami a spôsobom, akým sme volili koeficienty jednotlivých síl. Tieto zdroje taktiež nepriniesli dobré výsledky, charakter záznamov zostal ten istý ako v prípade modelov P1 a P2.

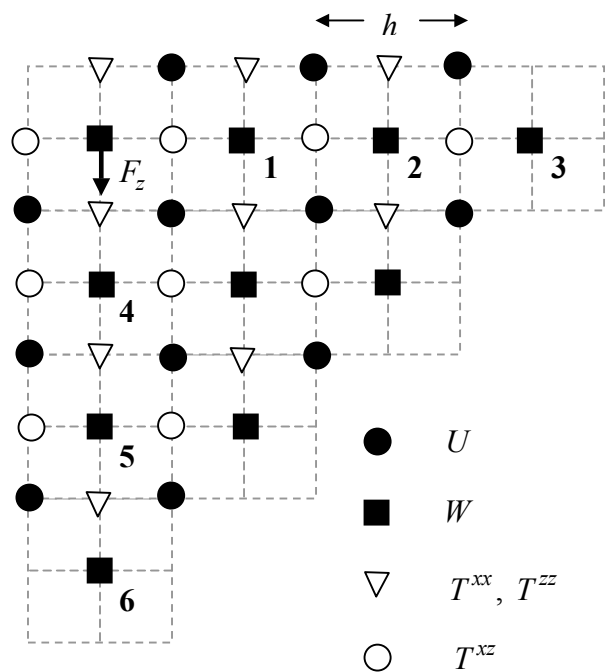
4.2 Analýza FD schém na PSG a SG

Zistili sme, že FD schéma A na PSG je citlivá na tvar a veľkosť zdroja, t.j. na štruktúru a priestorovú veľkosť silového modelu, ktorým simulujeme zdroj. V seizmogramoch dochádza k fázovému posunu signálu, taktiež i k nárastu amplitúd, ktorý nezodpovedá presnému riešeniu. Tieto dôvody nás viedli k podrobnejšej analýze správania sa FD schémy v DVS formulácii na PSG pre 2D prostredie 2. rádu presnosti v priestore a v čase, ktoré sme porovnávali so správaním sa FD schémy na SG 2. rádu presnosti v priestore a v čase.

Danú oblasť sme pokryli PSG a SG tak, aby sa nám určité uzly siete prekrývali. Do uzlu siete, v ktorom sú umiestnené zložky posunutia u, w – pre PSG (pre SG je to uzol siete, v ktorom je umiestnená zložka posunutia w), sme umiestnili bodovú silu, pôsobiacu v smere osi z , ozn. F_z . Náčrt oboch schém je na Obr. 2. Zaujímali nás



Obr. 2 Náčrt 2D PSG



Obr. 3 Náčrt 2D SG

hodnoty posunutia v najbližších troch bodoch v smere osi x a osi z od zdroja (t.j. od pôsobiska F_z), konkrétne v bodoch 1, 2, 3, 4, 5, 6 (označené na Obr. 2).

V smere osi x sa majú šíriť vertikálne polarizované S vlny, v smere osi z sa majú šíriť P vlny. To znamená, že v označených bodoch majú byť u zložky posunutia nulové. Pre SG v týchto bodoch nevieme určiť u zložku, pre PSG ju určiť vieme a vo všetkých šiestich bodoch je skutočne nulová (vypočítaná podľa FD schémy).

V Tab. 2 sú hodnoty w zložky posunutia pre PSG a SG v označených bodoch. Ako vidno z Tab. 2, ich hodnoty sa líšia. Čo sa týka amplitúd, PSG sa šíri kruhová vlnoplocha, kým v SG sa šíri vlnoplocha v tvare elipsy. Ale bližšia interpretácia nie je jednoznačná. Podstatné však je všimnúť si, že pre PSG výchylka v bodoch v smere osi x mení znamienko. To môže byť indikácia, že PSG má problém, ak zdrojom vln je sústredená sila v jednom bode. A teda je citlivá na veľkosť zdroja.

	Bod 1	Bod 2	Bod 3
PSG	$-\frac{(\Delta t)^4}{\rho^2 h^2} \frac{\lambda + \mu}{2} F_z$	$\frac{(\Delta t)^6}{\rho^3 h^4} \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{4} F_z$	$-\frac{(\Delta t)^8}{\rho^4 h^6} [(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2] (\lambda + \mu) F_z$
	Bod 4	Bod 5	Bod 6
PSG	$\frac{(\Delta t)^4}{\rho^2 h^2} \frac{\lambda + \mu}{2} F_z$	$\frac{(\Delta t)^6}{\rho^3 h^4} \frac{(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{4} F_z$	$\frac{(\Delta t)^8}{\rho^4 h^6} [(\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2] (\lambda + \mu) F_z$

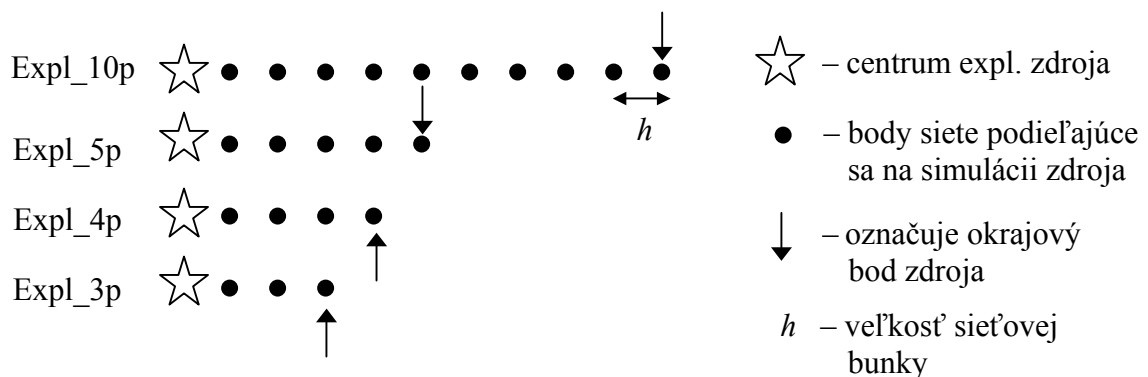
	Bod 1	Bod 2	Bod 3
SG	$\frac{(\Delta t)^4}{\rho^2 h^2} \mu F_z$	$\frac{(\Delta t)^6}{\rho^3 h^4} \mu^2 F_z$	$\frac{(\Delta t)^8}{\rho^4 h^6} \mu^3 F_z$
	Bod 4	Bod 5	Bod 6
SG	$\frac{(\Delta t)^4}{\rho^2 h^2} (\lambda + 2\mu) F_z$	$\frac{(\Delta t)^6}{\rho^3 h^4} (\lambda + 2\mu)^2 F_z$	$\frac{(\Delta t)^8}{\rho^4 h^6} (\lambda + 2\mu)^3 F_z$

Tab. 2 Veľkosť w zložky posunutia v označených bodoch na Obr. 2 pre PSG a SG

4.3 Explozívny zdroj

Pre ďalšie testovanie bol zvolený explozívny zdroj označený ako E1 v Prílohe č. 2. Centrum zdroja je umiestené v bode posunutia. Opäť, v porovnaní s DWN riešením, bol pozorovaný nárast amplitúd, predĺženie trvania a fázový posun. Vzhľadom na výsledky analýzy z kapitoly 4.2, sme preto zvolili väčší zdroj, t.j. je simulovaný väčším počtom bodov. Bolo testovaných viac modelov zdrojov, ich veľkosť sme menili parametrom p_e (kapitola 3.4). Pre dostatočne veľký zdroj bola dosiahnutá zhoda s DWN riešením.

Testované boli modely zdrojov s polomerom 10, 5, 4 a 3 sieťové bunky. Označme ich v tomto poradí Expl_10p, Expl_5p, Expl_4p a Expl_3p. Ekvipotenciálne plochy funkcie S (danej vzťahom 3.14) sú guľové plochy. My však máme pravouhlú sieť. Preto rozloženie bodov, pomocou ktorých simulujeme zdroj, nemôže byť v guľi, ale v kocke. Pod polomerom zdroja budeme teda chápať počet sieťových buniek v smere osi x od centra zdroja, vid' Obr. 3.



Obr. 3 Modely explozívneho zdroja

Parameter p_e bol volený tak, aby amplitúda sily v okrajovom bode zdroja poklesla na 1% z maximálnej hodnoty. Napr. pre $p_e = 0.001$ hodnota funkcie S_1 poklesne na 0,01 vo vzdialenosti 80m od stredu (obr. 4, kap. 3), t.j. vo vzdialenosti 4 sieťových buniek od stredu ($h = 20m$). V Tab.3 sú hodnoty parametra p_e pre testované zdroje. Pod veľkosťou zdroja budeme chápať jeho polomer. Označme veľkosť zdroja Expl_10p ako R_Expl_10p, Expl_5p ako R_Expl_5p, atď. Veľkosti zdrojov v sieťových bunkách i v metroch sú uvedené v Tab. 3 (pre $h = 20m$).

Ako bolo spomínané na konci kapitoly 3.5, je nutné naše numerické riešenie škálovať vzhľadom na DWN riešenie. V Tab.3 sú uvedené škálovacie faktory SF pre dané veľkosti zdrojov. Ako základ bol zvolený škálovací faktor pre Expl_4p, pričom $SF_{4p} = 17.24$.

	p_e	R_Expl_Xp [násobky kroku h]	R_Expl_Xp [m]	SF
Expl_10p	0,00016	10	200	$12.86 \cdot SF_{4p}$
Expl_5p	0,00064	5	100	$1.91 \cdot SF_{4p}$
Expl_4p	0,001	4	80	$1 \cdot SF_{4p}$
Expl_3p	0,00177	3	60	$0.44 \cdot SF_{4p}$

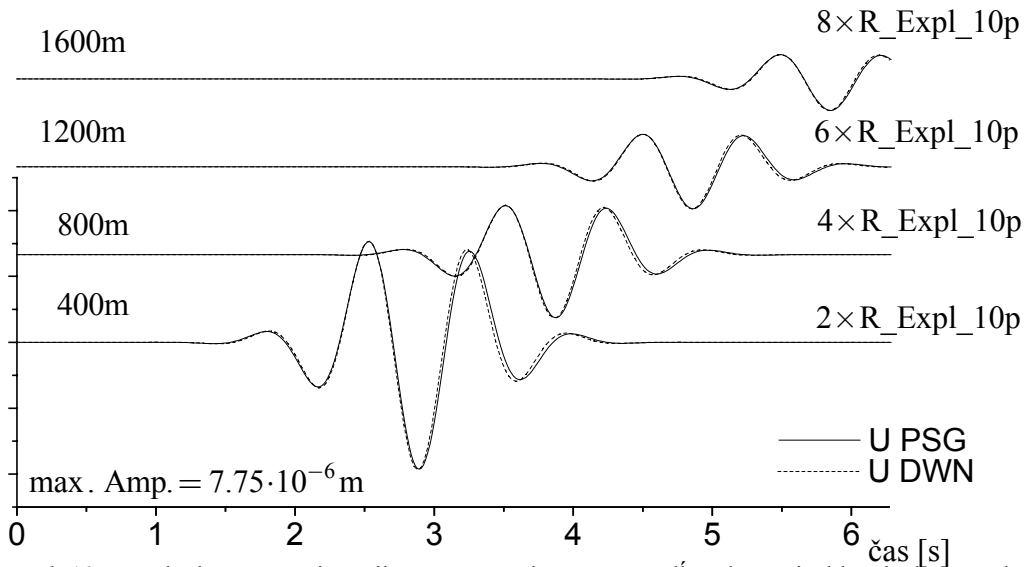
Tab. 3 Hodnoty p_e pre modely explozívnych zdrojov, ich veľkosti a škálovacie faktory

Polohy prijímačov môžeme rozdeliť na dva typy. Na prijímače v smere telesovej uhlopriečky, t.j. x -ové, y -ové a z -ové súradnice meníme vzhľadom na stred zdroja o rovnaký počet sieťových krokov. Pri druhom type prijímačov sa x -ové súradnice menia o jeden sieťový krok, y -ové o dva a z -ové o tri sieťové kroky vzhľadom na stred zdroja, označme tento smer ako smer „123“.

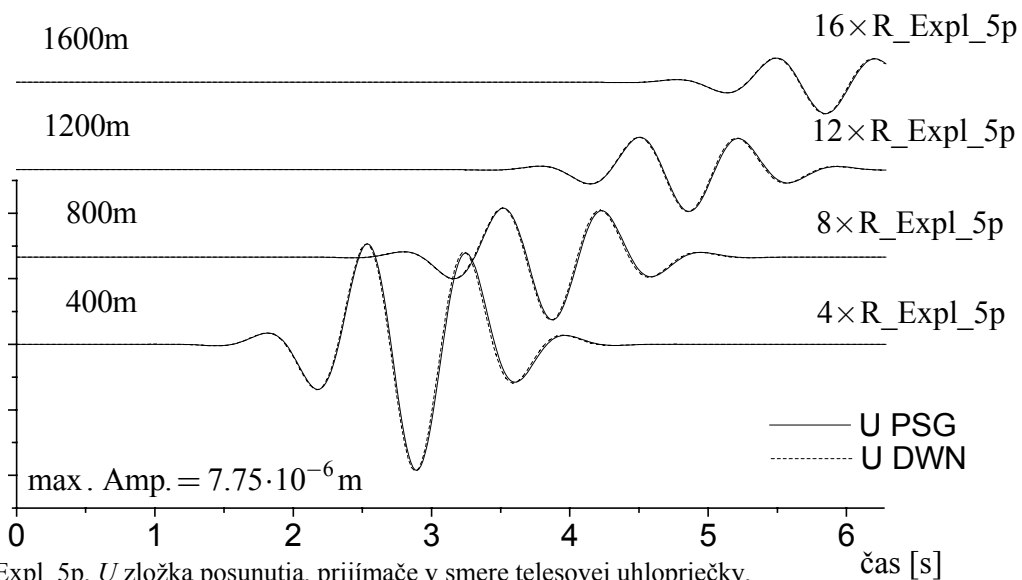
Na nasledujúcich obrázkoch je vždy vpravo nad seizmogramom vzdialenosť prijímača od centra zdroja v násobkoch polomeru daného zdroja. Vľavo je potom vzdialenosť v metroch. V oboch prípadoch ide o vzdialenosť na x -ovej osi (t.j. rozdiel x -ových súradníc centra zdroja a prijímača), nie o absolútnu vzdialenosť, ktorá by mohla byť v tomto prípade zavádzajúca. Ďalej je uvedená hodnota maximálnej amplitúdy v absolútnej hodnote, ktorá zodpovedá druhému minimu signálu na danom obrázku.

Na Obr. 4, 5, 6, 7, 8, 9 veľkosť výpočtového modelu bola 5600m x 5600m x 5600m, pre veľkosť sieťového kroku $h = 20$ m, $MX = MY = MZ = 280$. Sieťové súradnice zdroja boli (130, 130, 130). Počet časových hladín $MT = 419$, t.j. trvanie výpočtu bolo 6.285s.

Na Obr. 10, 11, 12, 13, 14 bol výpočtový model zväčšený na 7200m x 7200m x 7200m, t.j. $MX = MY = MZ = 360$. Sieťové súradnice zdroja boli (170, 170, 170). Počet časových hladín $MT = 596$, trvanie výpočtu 8.94s.



Obr. 4 Expl_10p, U zložka posunutia, prijímače sú umiestnené pozdĺž telesovej uhlopriečky, uvedené sú x -ové súradnice prijímačov v metroch a v násobkoch polomerov zdroja, centrum zdroja je v počiatku, $SF = 12.86 \cdot SF_{4p}$

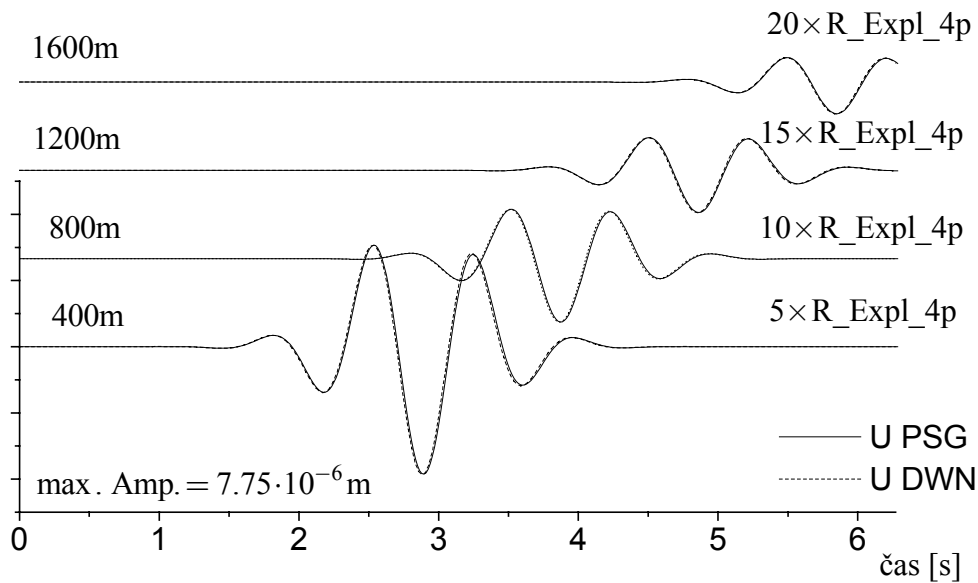


Obr. 5 Expl_5p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky, $SF = 1.91 \cdot SF_{4p}$

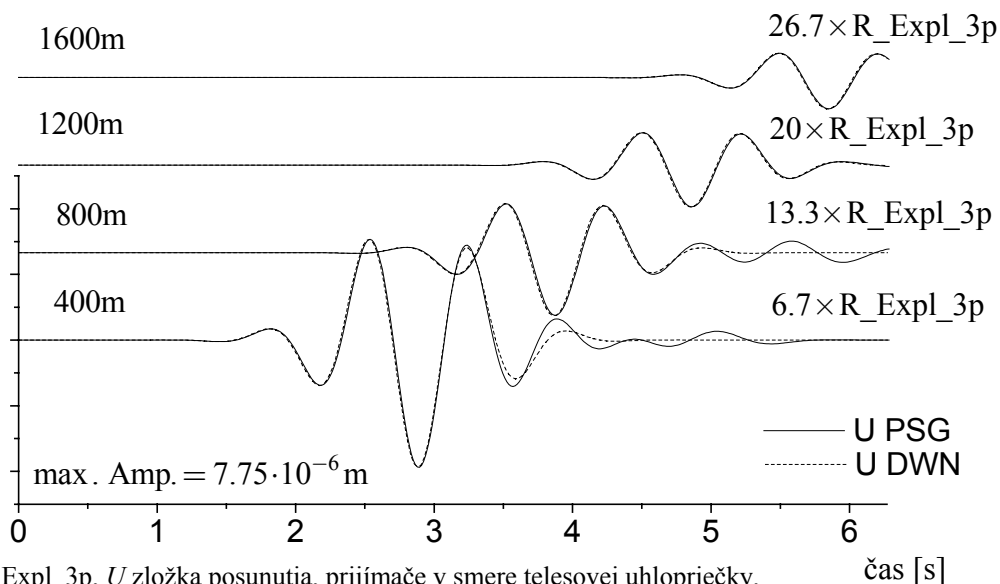
Na Obr. 4 sú seizmogramy pre Expl_10p pre prijímače vzdialené 400m, 800m, 1200m a 1600m od stredu zdroja, t.j. vo vzdialenosti 2, 4, 6 a 8 krát R_{Expl_10p} . Prijímače sú umiestnené v smere telesovej uhlopriečky.

Obr. 5, 6 a 7 sú analogické k Obr. 4. Polohy prijímačov sa nemenia, od centra daného zdroja sú stále vzdialené postupne 400m, 800m, 1200m a 1600m a sú v smere telesovej uhlopriečky. Mení sa veľkosť zdroja. V prípade Expl_5p sú prijímače vo vzdialenosti 4, 8, 12 a 16 krát R_{Expl_5p} . V prípade Expl_4p je to 5, 10, 15 a 20 krát R_{Expl_4p} a pre Expl_3p 6.7, 13.3, 20 a 26.7 krát R_{Expl_3p} .

Seizmogramy boli vykreslené len pre U zložku posunutia, pretože v prijímačoch umiestnených v smere telesovej uhlopriečky od zdroja (pre explozívny zdroj), sú všetky tri zložky vektoru posunutia totožné.

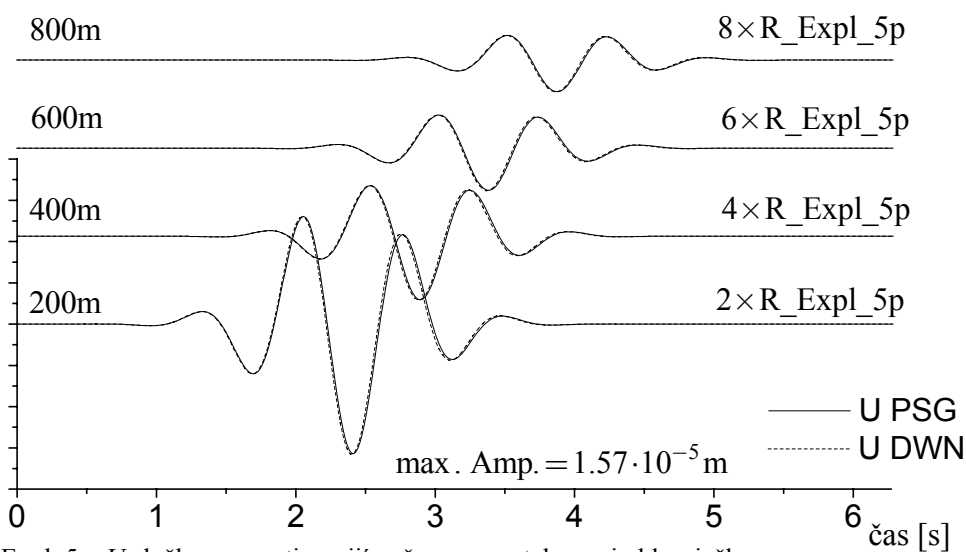


Obr. 6 Expl_4p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky,
 $SF_{4p} = 17.24$

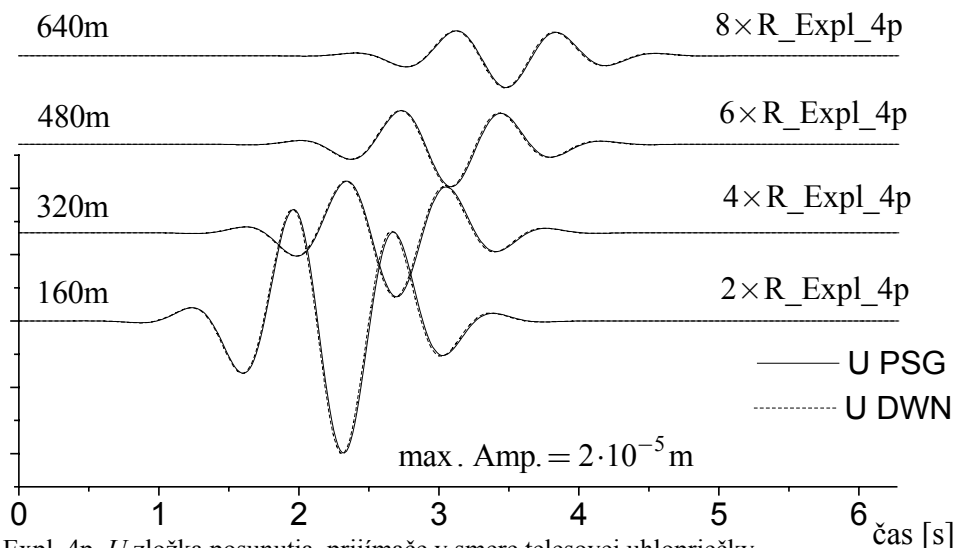


Obr. 7 Expl_3p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky,
 $SF = 0.44 \cdot SF_{4n}$

Z obrázkov vidíme, že pre Expl_10p na prvom prijímači sa koniec signálu oneskoruje za riešením DWN. Toto môže byť spôsobené jednak blízkosťou zdroja (prijímač je iba v dvojnásobku polomeru zdroja), alebo samotnou veľkosťou zdroja. Pre Expl_5p a Expl_4p toto oneskorenie nepozorujeme. Veľkosť Expl_3p už nie je dostatočná. Nastáva predĺženie trvania signálu vzhľadom na DWN riešenie, čo je jeden z problémov, ktoré sa objavovali v prípade dislokačného zdroja. Preto nemá zmysel skúmať zdroje s menším polomerom a ani Expl_3p nie je použiteľný. Pre iné vstupné údaje (napr. veľkosť sieťového kroku h) môže byť táto hranica samozrejme iná.



Obr. 8 Expl_5p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky,
 $SF = 1.91 \cdot SF_{4p}$

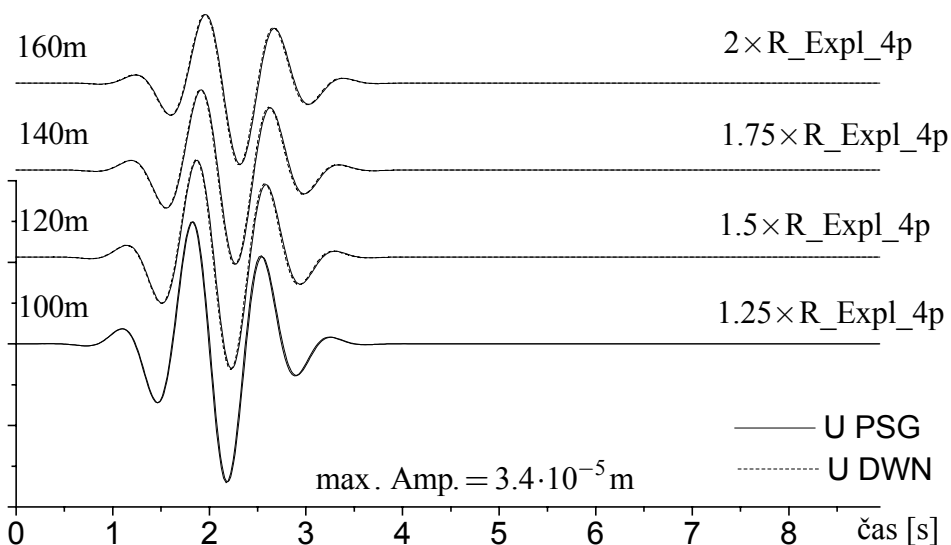


Obr. 9 Expl_4p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky,
 $SF_{4p} = 17.24$

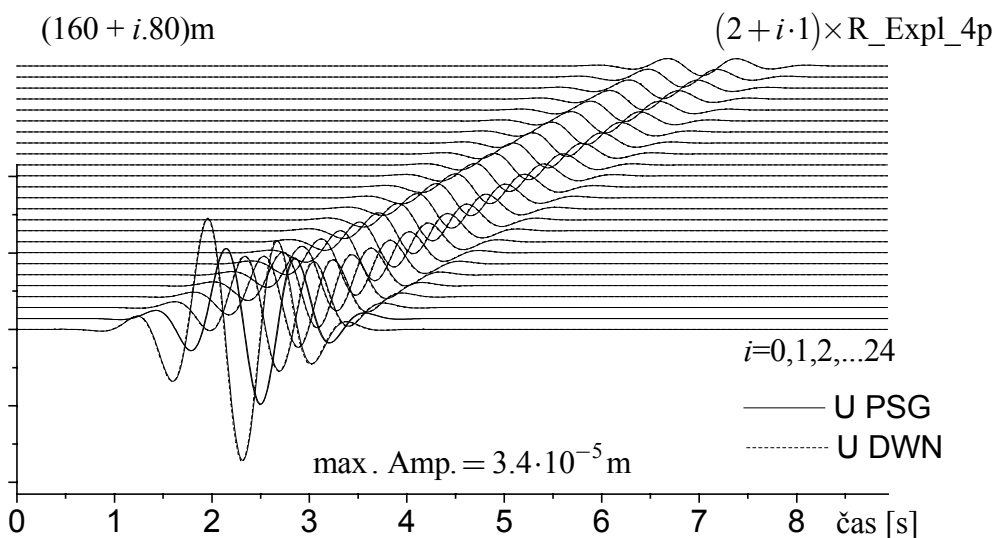
Ak uvážime, že pre dobré výsledky potrebujeme zdroj s polomerom štyri sieťové bunky. A v prípade dislokačného zdroja sme použili zdroj najviac s polomerom dve sieťové bunky. Je možné, že pri zväčšení počtu bodov dislokačného zdroja by sme dostali tiež dobré výsledky.

Na Obr. 8 sú seizmogramy pre Expl_5p. Prijímače sú v smere telesovej uhlopriečky vo vzdialenosti 2, 4, 6 a 8 krát R_{Expl_5p} , t.j. 200m, 400m, 600m a 800m. Vzdialenosti prijímačov, vzhľadom na veľkosť zdroja, sú v tom istom pomere ako pre Expl_10 na Obr. 4.

Obr. 9 je analogický Obr. 8, ale pre Expl_4p. Napriek tomu, že prijímače sú len vo vzdialenosti dvojnásobku polomeru daného zdroja, nepozorujeme oneskorenie signálu ako na Obr. 4. Túto skutočnosť môžeme interpretovať tak, že Expl_10p (pre dané vstupné údaje) je príliš veľký, t.j. je to horná hranica veľkosti zdroja.



Obr. 10 Expl_4p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky,
 $SF_{4p} = 17.24$

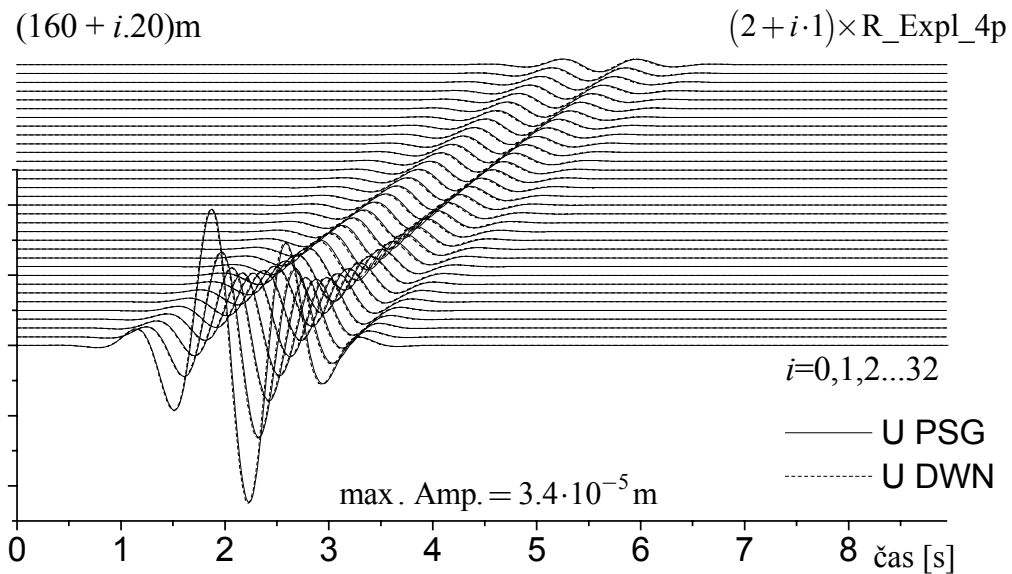


Obr. 11 Expl_4p, U zložka posunutia, prijímače v smere telesovej uhlopriečky,
 $SF_{4p} = 17.24$

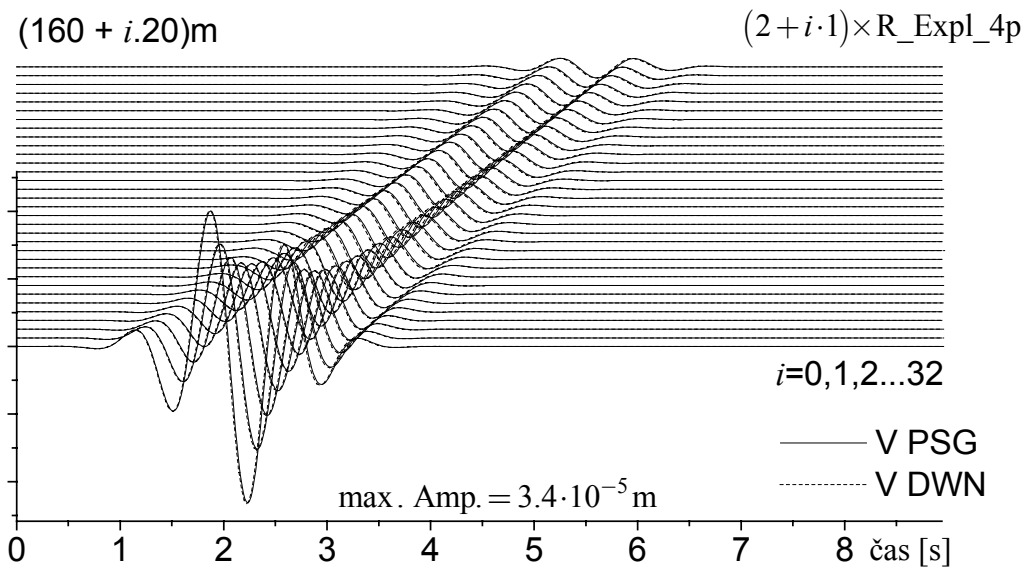
Pre ďalšie testovanie sme vybrali zdroj Expl_4p, pretože je to zdroj s najmenším polomerom, ktorý zároveň dáva dobré výsledky.

Na Obr. 10 sú seizmogramy pre Expl_4p pre blízke vzdialenosti v smere telesovej uhlopriečky. Napriek tomu, že prijímače sú bližšie ako dvojnásobok polomeru zdroja, dostávame zhodu s DWN riešením.

Na Obr. 11 sú seizmogramy pre Expl_4p. Prijímače sú v smere telesovej uhlopriečky, pričom prvý je vo vzdialenosti 2 krát R_{Expl_4p} (160m) a každý ďalší prijímač je od predchádzajúceho vzdialený o R_{Expl_4p} (80m). Spolu je na obrázku 25 seizmogramov. Posledný prijímač je teda vzdialený od centra zdroja 26 krát R_{Expl_4} (2080m).



Obr. 12 Expl_4p, U zložka posunutia, prijímače v smere „123“, $SF_{4p} = 17.24$

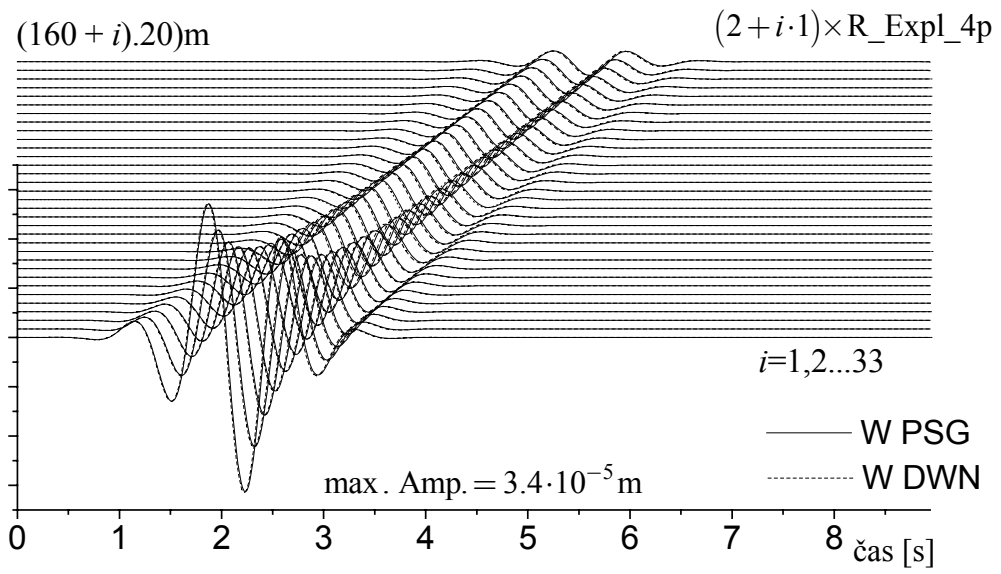


Obr. 13 Expl_4p, V zložka posunutia, prijímače v smere „123“, $SF_{4p} = 17.24$

Na Obr. 12 sú seizmogramy pre Expl_4p, pre prijímače umiestnené v smere „123“. Prvý prijímač je vzdialený dvojnásobok R_{Expl_4p} (160m), každý ďalší je vzdialený o 0,25 krát R_{Expl_4p} (20m). Spolu je na obrázku 33 seizmogramov. Posledný prijímač je teda vzdialený 10 krát R_{Expl_4p} (800m). Na Obr. 12 je U zložka posunutia.

Obr. 13 a 14 sú analogické Obr. 12, na Obr. 13 je však V zložka posunutia a na Obr.14 je W zložka posunutia. Pre smer „123“ zložky vektoru posunutia nie sú totožné.

Z obrázkov vidíme, že aj pre smer, ktorý nie je význačný (smer súr. osi, smer teles. uhlopriečky) dostávame zhodu s DWN riešením.



Obr. 14 Expl_4p, W zložka posunutia, prijímače v smere „123“, $SF_{4p} = 17.24$

Záver

Predložená práca sa zaoberá analýzou konečno–diferenčných schém na čiastočne striedavo usporiadanej sieti.

V súčasnosti je metóda konečných diferencií jednou z najpreferovanejších približných metód v numerickom modelovaní seizmického pohybu. Je jednoducho programovateľná a výpočtovo efektívna. Má však svoje zásadné problémy, najmä s implementáciou okrajových podmienok. Preto sa neustále hľadajú nové postupy, ktoré by viedli k lepším výsledkom.

V striedavo usporiadanej sieti sa okrajové podmienky relatívne problematicky implementujú do schémy, keďže striedavo usporiadaná sieť má jednotlivé zložky vektora posunutia a zložky tenzora napätia v rôznych bodoch siete.

Čiastočne striedavo usporiadaná sieť má všetky zložky vektora posunutia v jednom bode, všetky zložky tenzora napätia v inom jednom bode. Implementácia okrajových podmienok by mohla byť jednoduchšia. Preto sme sa rozhodli preskúmať vlastnosti FD schémy na tejto sieti a porovnať ich s vlastnosťami FD schémy na striedavo usporiadanej sieti.

1. kapitola je venovaná úvodu do problematiky a stručnému popisu metódy konečných diferencií, popisu konečno–diferenčných schém a sietí.

V 2. kapitole sme vybrali tri rôzne FD schémy: A (16 bodovú), B (32 bodovú) a F (40bodovú). Našli sme podmienku stability pre vybrané FD schémy na PSG. Z nej vyplýva, že môžeme zvoliť $\sqrt{3}$ krát väčší časový krok pre dané parametre modelu ako v prípade SG. Ďalej sme skúmali sieťovú disperziu. Vo všeobecnosti platí, že schémy na PSG majú väčšiu disperziu ako schéma na SG. Preto, ak chceme zachovať presnosť výpočtu, musíme voliť pre FD schému na PSG hustejšie vzorkovanie ako v prípade SG. Bola tiež vypočítaná lokálna chyba schém. Lokálna chyba schém na PSG je väčšia ako lokálna chyba schémy na SG.

3. kapitola popisuje výpočtový program PSG_DVS, ktorý umožňuje výpočet šírenia seizmických vln v homogénnom, elastickom, izotrópnom prostredí s pevnými hranicami metódou konečných diferencií na PSG.

V 4. kapitole sú uvedené numerické výsledky získané pomocou programu PSG_DVS. Ukazuje sa, že PSG je extrémne citlivá na štruktúru a priestorovú veľkosť silového modelu, ktorým simulujeme zdroj. Pre dané parametre prostredia a vstupné údaje dal dobré výsledky explozívny zdroj, ktorého polomer bol 4 sieťové bunky (t.j. zdroj simulujeme pomocou bodov v kocke s objemom $8 \times 8 \times 8$ sieťových buniek). Toto môže byť zásadný problém v modelovaní šírenia seizmického pohybu pomocou PSG.

Literatúra

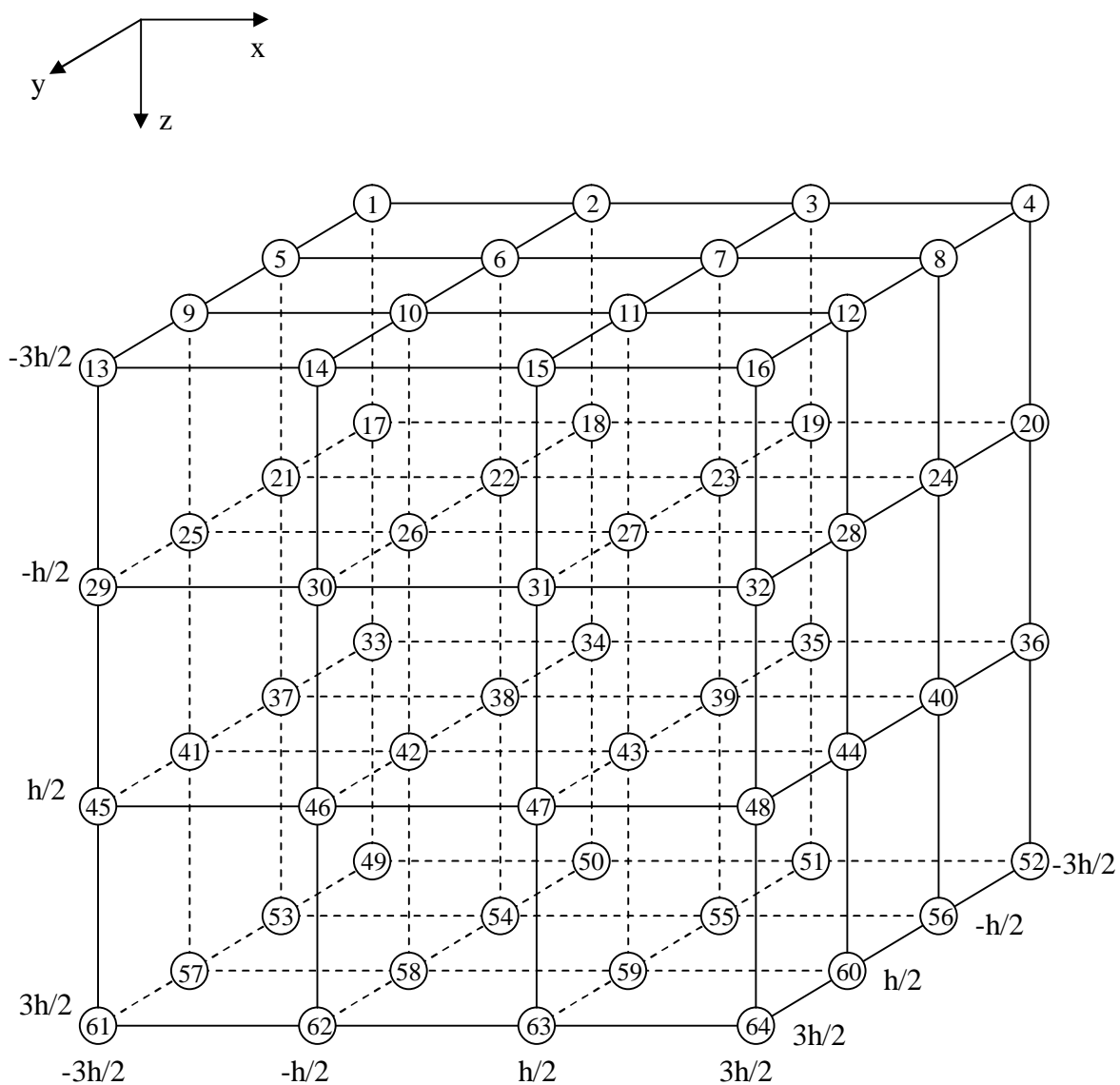
- Aboudi, J., 1971.** Numerical simulation of seismic sources. *Geophysics* 36, 810-821.
- Aki, K., P. G. Richards, 1980.** Quantitative Seismology. Theory and Methods. *W. H. Freeman & Co.*, San Francisco.
- Andrews, D. J., 1973.** A numerical study of tectonic stress release by underground explosions. *Bull. Seism. Soc. Am.* 63, 1375-1391.
- Bouchon, M., 1981.** A simple method to calculate Green's function for elastic layered media. *Bull. Seism. Soc. Am.* 71, 959-971
- Durrant, D. R., 1999.** Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. *Springer*.
- Franek, P., 2004.** Osobná konzultácia.
- Frankel, A., 1993.** Three-dimensional simulations of ground motions in the San Bernardino Valley, California, for hypothetical earthquakes on San Andreas fault. *Bull. Seism. Soc. Am.* 83, 1020-1041.
- Graves, R. W., 1996.** Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bull. Seism. Soc. Am.* 86, 1091-1106.
- Halada, L., 2004.** Osobná konzultácia.
- Magnier, S-A., P. Mora, A. Tarantola, 1994.** Finite difference on minimal grids. *Geophysics* 59, 1435-1443.
- Mitchell, A. R., D. F. Griffiths, 1994.** The finite difference method in partial differential equations. *J. Wiley & Sons*, New York.
- Moczo, P., 1998.** Introduction to modeling seismic wave propagation by the finite-difference method. Lecture Notes. *Kyoto University*.
- Moczo, P., J. Kristek, L. Halada, 2000.** 3D 4th-order staggered-grid finite-difference schemes: stability and grid dispersion. *Bull. Seism. Soc. Am.* 90, 587-603.
- Moczo, P., J. Kristek, L. Halada, 2004.** The finite-difference method for seismologists, An Introduction. *Comenius University*. Bratislava.
- Morton, K. W., D. F. Mayers, 1994.** Numerical solutions of partial differential equations. *Cambridge University Press*.
- Orlowsky, B., E. H. Saenger, Y. Guéguen, S. A. Shapiro, 2003.** Effect of parallel crack distributions on effective elastic properties: a numerical study. *Int. J. of Fracture* 124, L171 - L178.

- Saenger, E. H., N. Gold, S. A. Shapiro, 2000.** Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion* 31,77-92.
- Saenger, E. H., S. A. Shapiro, 2002.** Effective velocities in fractured media: a numerical study using the rotated staggered finite-difference grid. *Geophys. Prosp.* 50,183-194.
- Saenger, E. H., O. S. Krüger, S. A. Shapiro, 2004.** Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3D numerical experiments. *Geophys. Prosp.* 52, 183-195.
- Saenger, E. H., T. Bohlen, 2004.** Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. *Geophysics* 69, 583-591.
- Saenger, E. H., O. S. Krüger, S. A. Shapiro, 2004.** Numerical considerations of fluid effects on wave propagation: Influence of the tortuosity. *Geophys. R. Lett.* 31, L21613.
- Serón, F. J., Sanz, F. J., Kindelan, M., 1989.** Elastic wave propagation with the Finite Element Method, IBM, European center for science and engineering computing, ICE – 0028.
- Zhang, J., 1997.** Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation. *Geophys. J. Int.* 131,127-134.

Príloha č. 1

Súradnice sieťových bodov pre FD schémy A, B, F

$1 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$17 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$33 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$49 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$2 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$18 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$34 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$50 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$3 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$19 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$35 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$51 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$4 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$20 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$36 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$52 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$5 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$21 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$37 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$53 = i - \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$6 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$22 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$38 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$54 = i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$7 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$23 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$39 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$55 = i + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$8 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$24 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$40 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$56 = i + \frac{3}{2}, k - \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$9 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$25 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$41 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$57 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$10 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$26 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$42 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$58 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$11 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$27 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$43 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$59 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$12 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}$	$28 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$	$44 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$	$60 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, l + \frac{3}{2}$
$13 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$29 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$45 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$61 = i - \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$14 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$30 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$46 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$62 = i - \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$15 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$31 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$47 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$63 = i + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$
$16 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{3}{2}$	$32 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}$	$48 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}$	$64 = i + \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}, l + \frac{3}{2}$



Obr. 1

**3D DS FD schéma 4. rádu na čiastočne striedavo usporiadanej sieti
schéma A**

$$\begin{aligned}
 U_{i,k,l}^{m+1} &= 2U_{i,k,l}^m - U_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r} \cdot \\
 &\left[a \left(T_4^{xx,m} - T_1^{xx,m} + T_{16}^{xx,m} - T_{13}^{xx,m} + T_{52}^{xx,m} - T_{49}^{xx,m} + T_{64}^{xx,m} - T_{61}^{xx,m} \right) + \right. \\
 &+ b \left(T_{23}^{xx,m} - T_{22}^{xx,m} + T_{27}^{xx,m} - T_{26}^{xx,m} + T_{39}^{xx,m} - T_{38}^{xx,m} + T_{43}^{xx,m} - T_{42}^{xx,m} \right) + \\
 &+ a \left(T_{13}^{xy,m} - T_1^{xy,m} + T_{16}^{xy,m} - T_4^{xy,m} + T_{61}^{xy,m} - T_{49}^{xy,m} + T_{64}^{xy,m} - T_{52}^{xy,m} \right) + \\
 &+ b \left(T_{26}^{xy,m} - T_{22}^{xy,m} + T_{27}^{xy,m} - T_{23}^{xy,m} + T_{42}^{xy,m} - T_{38}^{xy,m} + T_{43}^{xy,m} - T_{39}^{xy,m} \right) + \\
 &+ a \left(T_{49}^{xz,m} - T_1^{xz,m} + T_{52}^{xz,m} - T_4^{xz,m} + T_{61}^{xz,m} - T_{13}^{xz,m} + T_{64}^{xz,m} - T_{16}^{xz,m} \right) + \\
 &\left. + b \left(T_{38}^{xz,m} - T_{22}^{xz,m} + T_{39}^{xz,m} - T_{23}^{xz,m} + T_{42}^{xz,m} - T_{26}^{xz,m} + T_{43}^{xz,m} - T_{27}^{xz,m} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{i,k,l}^{m+1} &= 2V_{i,k,l}^m - V_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r} \cdot \\
 &\left[a \left(T_4^{yx,m} - T_1^{yx,m} + T_{16}^{yx,m} - T_{13}^{yx,m} + T_{52}^{yx,m} - T_{49}^{yx,m} + T_{64}^{yx,m} - T_{61}^{yx,m} \right) + \right. \\
 &+ b \left(T_{23}^{yx,m} - T_{22}^{yx,m} + T_{27}^{yx,m} - T_{26}^{yx,m} + T_{39}^{yx,m} - T_{38}^{yx,m} + T_{43}^{yx,m} - T_{42}^{yx,m} \right) + \\
 &+ a \left(T_{13}^{yy,m} - T_1^{yy,m} + T_{16}^{yy,m} - T_4^{yy,m} + T_{61}^{yy,m} - T_{49}^{yy,m} + T_{64}^{yy,m} - T_{52}^{yy,m} \right) + \\
 &+ b \left(T_{26}^{yy,m} - T_{22}^{yy,m} + T_{27}^{yy,m} - T_{23}^{yy,m} + T_{42}^{yy,m} - T_{38}^{yy,m} + T_{43}^{yy,m} - T_{39}^{yy,m} \right) + \\
 &+ a \left(T_{49}^{yz,m} - T_1^{yz,m} + T_{52}^{yz,m} - T_4^{yz,m} + T_{61}^{yz,m} - T_{13}^{yz,m} + T_{64}^{yz,m} - T_{16}^{yz,m} \right) + \\
 &\left. + b \left(T_{38}^{yz,m} - T_{22}^{yz,m} + T_{39}^{yz,m} - T_{23}^{yz,m} + T_{42}^{yz,m} - T_{26}^{yz,m} + T_{43}^{yz,m} - T_{27}^{yz,m} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{i,k,l}^{m+1} &= 2W_{i,k,l}^m - W_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r} \cdot \\
 &\left[a \left(T_4^{zx,m} - T_1^{zx,m} + T_{16}^{zx,m} - T_{13}^{zx,m} + T_{52}^{zx,m} - T_{49}^{zx,m} + T_{64}^{zx,m} - T_{61}^{zx,m} \right) + \right. \\
 &+ b \left(T_{23}^{zx,m} - T_{22}^{zx,m} + T_{27}^{zx,m} - T_{26}^{zx,m} + T_{39}^{zx,m} - T_{38}^{zx,m} + T_{43}^{zx,m} - T_{42}^{zx,m} \right) + \\
 &+ a \left(T_{13}^{zy,m} - T_1^{zy,m} + T_{16}^{zy,m} - T_4^{zy,m} + T_{61}^{zy,m} - T_{49}^{zy,m} + T_{64}^{zy,m} - T_{52}^{zy,m} \right) + \\
 &+ b \left(T_{26}^{zy,m} - T_{22}^{zy,m} + T_{27}^{zy,m} - T_{23}^{zy,m} + T_{42}^{zy,m} - T_{38}^{zy,m} + T_{43}^{zy,m} - T_{39}^{zy,m} \right) + \\
 &+ a \left(T_{49}^{zz,m} - T_1^{zz,m} + T_{52}^{zz,m} - T_4^{zz,m} + T_{61}^{zz,m} - T_{13}^{zz,m} + T_{64}^{zz,m} - T_{16}^{zz,m} \right) + \\
 &\left. + b \left(T_{38}^{zz,m} - T_{22}^{zz,m} + T_{39}^{zz,m} - T_{23}^{zz,m} + T_{42}^{zz,m} - T_{26}^{zz,m} + T_{43}^{zz,m} - T_{27}^{zz,m} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xx,m} = & (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{yy,m} = & I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{zz,m} = & I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

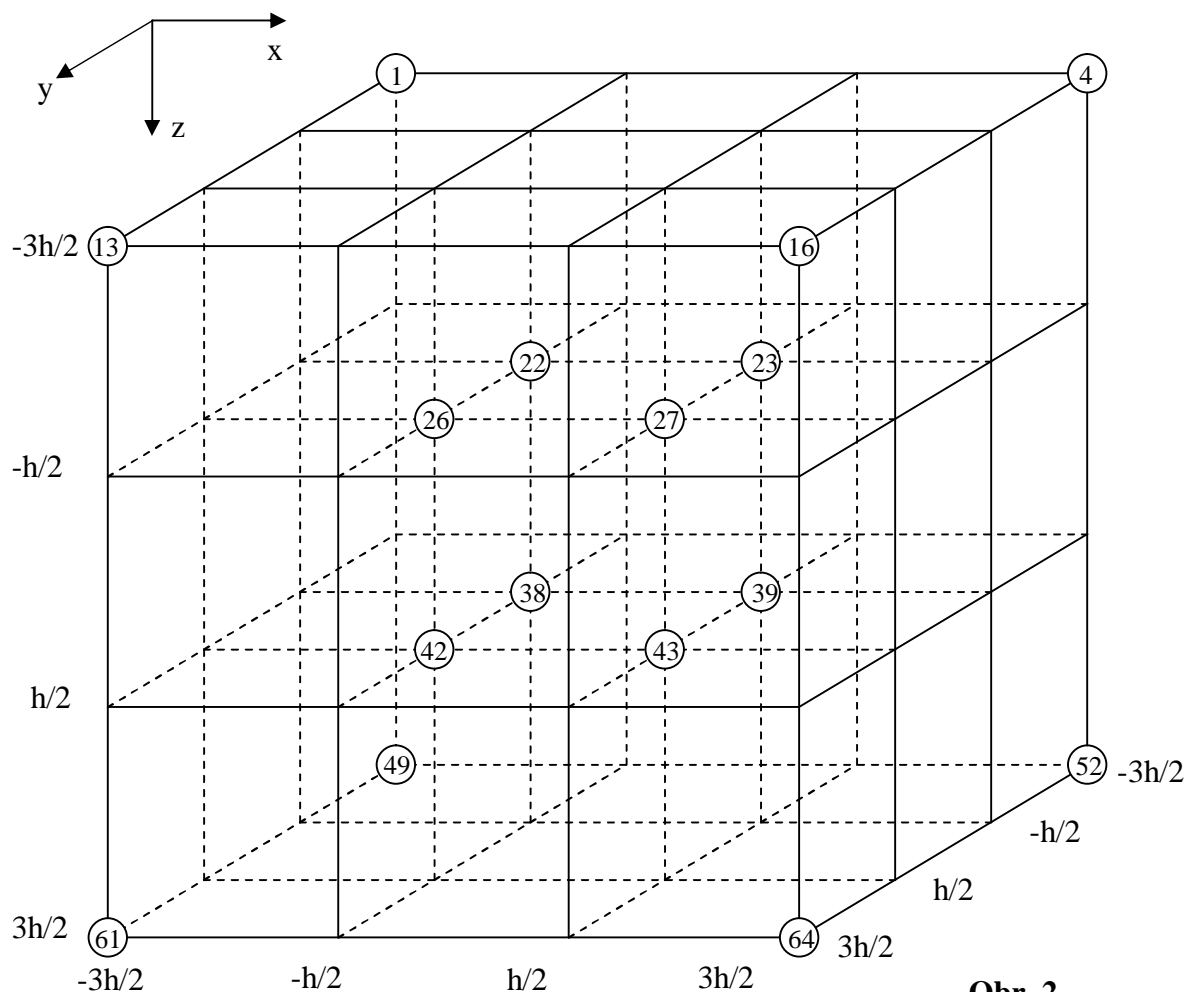
$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xy,m} = & m \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_{13}^m - U_1^m + U_{16}^m - U_4^m + U_{61}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{52}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(U_{26}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{39}^m \right) + \right. \\
& \left. + a \left(V_4^m - V_1^m + V_{16}^m - V_{13}^m + V_{52}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{61}^m \right) + \right. \\
& \left. + b \left(V_{23}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{26}^m + V_{39}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{42}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$T_{i,k,l}^{xz,m} = m \frac{1}{h} \left[a \left(U_{49}^m - U_1^m + U_{52}^m - U_4^m + U_{61}^m - U_{13}^m + U_{64}^m - U_{16}^m \right) + \right. \\ \left. + b \left(U_{38}^m - U_{22}^m + U_{39}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{26}^m + U_{43}^m - U_{27}^m \right) + \right. \\ \left. + a \left(W_4^m - W_1^m + W_{16}^m - W_{13}^m + W_{52}^m - W_{49}^m + W_{64}^m - W_{61}^m \right) + \right. \\ \left. + b \left(W_{23}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{26}^m + W_{39}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{42}^m \right) \right]$$

$$T_{i,k,l}^{yz,m} = m \frac{1}{h} \left[a \left(V_{49}^m - V_1^m + V_{52}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{13}^m + V_{64}^m - V_{16}^m \right) + \right. \\ \left. + b \left(V_{38}^m - V_{22}^m + V_{39}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{26}^m + V_{43}^m - V_{27}^m \right) + \right. \\ \left. + a \left(W_{13}^m - W_1^m + W_{16}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{49}^m + W_{64}^m - W_{52}^m \right) + \right. \\ \left. + b \left(W_{26}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{39}^m \right) \right]$$

$$a = -\frac{1}{96}, \quad b = \frac{9}{32}$$

Čiastočne striedavo usporiadaná sieť - schéma A



**3D DS FD schéma 4. rádu na čiastočne striedavo usporiadanej sieti
schéma B**

$$\begin{aligned}
 U_{i,k,l}^{m+1} = & 2U_{i,k,l}^m - U_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r} \cdot \\
 & \left[a \left(T_7^{xx,m} - T_6^{xx,m} + T_{11}^{xx,m} - T_{10}^{xx,m} + T_{55}^{xx,m} - T_{54}^{xx,m} + T_{59}^{xx,m} - T_{58}^{xx,m} \right) + \right. \\
 & + a \left(T_{19}^{xx,m} - T_{18}^{xx,m} + T_{31}^{xx,m} - T_{30}^{xx,m} + T_{35}^{xx,m} - T_{34}^{xx,m} + T_{47}^{xx,m} - T_{46}^{xx,m} \right) + \\
 & + b \left(T_{24}^{xx,m} - T_{21}^{xx,m} + T_{28}^{xx,m} - T_{25}^{xx,m} + T_{40}^{xx,m} - T_{37}^{xx,m} + T_{44}^{xx,m} - T_{41}^{xx,m} \right) + \\
 & + c \left(T_{23}^{xx,m} - T_{22}^{xx,m} + T_{27}^{xx,m} - T_{26}^{xx,m} + T_{39}^{xx,m} - T_{38}^{xx,m} + T_{43}^{xx,m} - T_{42}^{xx,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{10}^{xy,m} - T_6^{xy,m} + T_{11}^{xy,m} - T_7^{xy,m} + T_{58}^{xy,m} - T_{54}^{xy,m} + T_{59}^{xy,m} - T_{55}^{xy,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{25}^{xy,m} - T_{21}^{xy,m} + T_{28}^{xy,m} - T_{24}^{xy,m} + T_{41}^{xy,m} - T_{37}^{xy,m} + T_{44}^{xy,m} - T_{40}^{xy,m} \right) + \\
 & + b \left(T_{30}^{xy,m} - T_{18}^{xy,m} + T_{31}^{xy,m} - T_{19}^{xy,m} + T_{46}^{xy,m} - T_{34}^{xy,m} + T_{47}^{xy,m} - T_{35}^{xy,m} \right) + \\
 & + c \left(T_{26}^{xy,m} - T_{22}^{xy,m} + T_{27}^{xy,m} - T_{23}^{xy,m} + T_{42}^{xy,m} - T_{38}^{xy,m} + T_{43}^{xy,m} - T_{39}^{xy,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{34}^{xz,m} - T_{18}^{xz,m} + T_{35}^{xz,m} - T_{19}^{xz,m} + T_{46}^{xz,m} - T_{30}^{xz,m} + T_{47}^{xz,m} - T_{31}^{xz,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{37}^{xz,m} - T_{21}^{xz,m} + T_{40}^{xz,m} - T_{24}^{xz,m} + T_{41}^{xz,m} - T_{25}^{xz,m} + T_{44}^{xz,m} - T_{28}^{xz,m} \right) + \\
 & + b \left(T_{54}^{xz,m} - T_6^{xz,m} + T_{55}^{xz,m} - T_7^{xz,m} + T_{58}^{xz,m} - T_{10}^{xz,m} + T_{59}^{xz,m} - T_{11}^{xz,m} \right) + \\
 & \left. + c \left(T_{38}^{xz,m} - T_{22}^{xz,m} + T_{39}^{xz,m} - T_{23}^{xz,m} + T_{42}^{xz,m} - T_{26}^{xz,m} + T_{43}^{xz,m} - T_{27}^{xz,m} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{i,k,l}^{m+1} = & 2V_{i,k,l}^m - V_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r} \cdot \\
 & \left[a \left(T_7^{yx,m} - T_6^{yx,m} + T_{11}^{yx,m} - T_{10}^{yx,m} + T_{55}^{yx,m} - T_{54}^{yx,m} + T_{59}^{yx,m} - T_{58}^{yx,m} \right) + \right. \\
 & + a \left(T_{19}^{yx,m} - T_{18}^{yx,m} + T_{31}^{yx,m} - T_{30}^{yx,m} + T_{35}^{yx,m} - T_{34}^{yx,m} + T_{47}^{yx,m} - T_{46}^{yx,m} \right) + \\
 & + b \left(T_{24}^{yx,m} - T_{21}^{yx,m} + T_{28}^{yx,m} - T_{25}^{yx,m} + T_{40}^{yx,m} - T_{37}^{yx,m} + T_{44}^{yx,m} - T_{41}^{yx,m} \right) + \\
 & + c \left(T_{23}^{yx,m} - T_{22}^{yx,m} + T_{27}^{yx,m} - T_{26}^{yx,m} + T_{39}^{yx,m} - T_{38}^{yx,m} + T_{43}^{yx,m} - T_{42}^{yx,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{10}^{yy,m} - T_6^{yy,m} + T_{11}^{yy,m} - T_7^{yy,m} + T_{58}^{yy,m} - T_{54}^{yy,m} + T_{59}^{yy,m} - T_{55}^{yy,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{25}^{yy,m} - T_{21}^{yy,m} + T_{28}^{yy,m} - T_{24}^{yy,m} + T_{41}^{yy,m} - T_{37}^{yy,m} + T_{44}^{yy,m} - T_{40}^{yy,m} \right) + \\
 & + b \left(T_{30}^{yy,m} - T_{18}^{yy,m} + T_{31}^{yy,m} - T_{19}^{yy,m} + T_{46}^{yy,m} - T_{34}^{yy,m} + T_{47}^{yy,m} - T_{35}^{yy,m} \right) + \\
 & + c \left(T_{26}^{yy,m} - T_{22}^{yy,m} + T_{27}^{yy,m} - T_{23}^{yy,m} + T_{42}^{yy,m} - T_{38}^{yy,m} + T_{43}^{yy,m} - T_{39}^{yy,m} \right) + \\
 & + a \left(T_{34}^{yz,m} - T_{18}^{yz,m} + T_{35}^{yz,m} - T_{19}^{yz,m} + T_{46}^{yz,m} - T_{30}^{yz,m} + T_{47}^{yz,m} - T_{31}^{yz,m} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a\left(T_{37}^{yz,m} - T_{21}^{yz,m} + T_{40}^{yz,m} - T_{24}^{yz,m} + T_{41}^{yz,m} - T_{25}^{yz,m} + T_{44}^{yz,m} - T_{28}^{yz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{54}^{yz,m} - T_6^{yz,m} + T_{55}^{yz,m} - T_7^{yz,m} + T_{58}^{yz,m} - T_{10}^{yz,m} + T_{59}^{yz,m} - T_{11}^{yz,m}\right) + \\
& +c\left(T_{38}^{yz,m} - T_{22}^{yz,m} + T_{39}^{yz,m} - T_{23}^{yz,m} + T_{42}^{yz,m} - T_{26}^{yz,m} + T_{43}^{yz,m} - T_{27}^{yz,m}\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$W_{i,k,l}^{m+1} = 2W_{i,k,l}^m - W_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned}
& \Big[a\left(T_7^{zx,m} - T_6^{zx,m} + T_{11}^{zx,m} - T_{10}^{zx,m} + T_{55}^{zx,m} - T_{54}^{zx,m} + T_{59}^{zx,m} - T_{58}^{zx,m}\right) + \\
& +a\left(T_{19}^{zx,m} - T_{18}^{zx,m} + T_{31}^{zx,m} - T_{30}^{zx,m} + T_{35}^{zx,m} - T_{34}^{zx,m} + T_{47}^{zx,m} - T_{46}^{zx,m}\right) + \\
& +b\left(T_{24}^{zx,m} - T_{21}^{zx,m} + T_{28}^{zx,m} - T_{25}^{zx,m} + T_{40}^{zx,m} - T_{37}^{zx,m} + T_{44}^{zx,m} - T_{41}^{zx,m}\right) + \\
& +c\left(T_{23}^{zx,m} - T_{22}^{zx,m} + T_{27}^{zx,m} - T_{26}^{zx,m} + T_{39}^{zx,m} - T_{38}^{zx,m} + T_{43}^{zx,m} - T_{42}^{zx,m}\right) + \\
& +a\left(T_{10}^{zy,m} - T_6^{zy,m} + T_{11}^{zy,m} - T_7^{zy,m} + T_{58}^{zy,m} - T_{54}^{zy,m} + T_{59}^{zy,m} - T_{55}^{zy,m}\right) + \\
& +a\left(T_{25}^{zy,m} - T_{21}^{zy,m} + T_{28}^{zy,m} - T_{24}^{zy,m} + T_{41}^{zy,m} - T_{37}^{zy,m} + T_{44}^{zy,m} - T_{40}^{zy,m}\right) + \\
& +b\left(T_{30}^{zy,m} - T_{18}^{zy,m} + T_{31}^{zy,m} - T_{19}^{zy,m} + T_{46}^{zy,m} - T_{34}^{zy,m} + T_{47}^{zy,m} - T_{35}^{zy,m}\right) + \\
& +c\left(T_{26}^{zy,m} - T_{22}^{zy,m} + T_{27}^{zy,m} - T_{23}^{zy,m} + T_{42}^{zy,m} - T_{38}^{zy,m} + T_{43}^{zy,m} - T_{39}^{zy,m}\right) + \\
& +a\left(T_{34}^{zz,m} - T_{18}^{zz,m} + T_{35}^{zz,m} - T_{19}^{zz,m} + T_{46}^{zz,m} - T_{30}^{zz,m} + T_{47}^{zz,m} - T_{31}^{zz,m}\right) + \\
& +a\left(T_{37}^{zz,m} - T_{21}^{zz,m} + T_{40}^{zz,m} - T_{24}^{zz,m} + T_{41}^{zz,m} - T_{25}^{zz,m} + T_{44}^{zz,m} - T_{28}^{zz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{54}^{zz,m} - T_6^{zz,m} + T_{55}^{zz,m} - T_7^{zz,m} + T_{58}^{zz,m} - T_{10}^{zz,m} + T_{59}^{zz,m} - T_{11}^{zz,m}\right) + \\
& +c\left(T_{38}^{zz,m} - T_{22}^{zz,m} + T_{39}^{zz,m} - T_{23}^{zz,m} + T_{42}^{zz,m} - T_{26}^{zz,m} + T_{43}^{zz,m} - T_{27}^{zz,m}\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xx,m} = & (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \Big[a\left(U_7^m - U_6^m + U_{11}^m - U_{10}^m + U_{55}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{58}^m\right) + \\
& +a\left(U_{19}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{30}^m + U_{35}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{46}^m\right) + \\
& +b\left(U_{24}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{25}^m + U_{40}^m - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{41}^m\right) + \\
& +c\left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m\right) \Big] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \Big[a\left(V_{10}^m - V_6^m + V_{11}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{55}^m\right) + \\
& +a\left(V_{25}^m - V_{21}^m + V_{28}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{40}^m\right) + \\
& +b\left(V_{30}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{35}^m\right) + \\
& +c\left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m\right) \Big] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{34}^m - W_{18}^m + W_{35}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{30}^m + W_{47}^m - W_{31}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(W_{37}^m - W_{21}^m + W_{40}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{25}^m + W_{44}^m - W_{28}^m \right) + \\
& \quad + b \left(W_{54}^m - W_6^m + W_{55}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{10}^m + W_{59}^m - W_{11}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right] \\
T_{i,k,l}^{yy,m} = & \quad I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_7^m - U_6^m + U_{11}^m - U_{10}^m + U_{55}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{58}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(U_{19}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{30}^m + U_{35}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{46}^m \right) + \\
& \quad + b \left(U_{24}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{25}^m + U_{40}^m - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{41}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{10}^m - V_6^m + V_{11}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{55}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(V_{25}^m - V_{21}^m + V_{28}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{40}^m \right) + \\
& \quad + b \left(V_{30}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{35}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{34}^m - W_{18}^m + W_{35}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{30}^m + W_{47}^m - W_{31}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(W_{37}^m - W_{21}^m + W_{40}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{25}^m + W_{44}^m - W_{28}^m \right) + \\
& \quad + b \left(W_{54}^m - W_6^m + W_{55}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{10}^m + W_{59}^m - W_{11}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right] \\
T_{i,k,l}^{zz,m} = & \quad I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_7^m - U_6^m + U_{11}^m - U_{10}^m + U_{55}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{58}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(U_{19}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{30}^m + U_{35}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{46}^m \right) + \\
& \quad + b \left(U_{24}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{25}^m + U_{40}^m - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{41}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{10}^m - V_6^m + V_{11}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{55}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(V_{25}^m - V_{21}^m + V_{28}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{40}^m \right) + \\
& \quad + b \left(V_{30}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{35}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{34}^m - W_{18}^m + W_{35}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{30}^m + W_{47}^m - W_{31}^m \right) + \right. \\
& \quad + a \left(W_{37}^m - W_{21}^m + W_{40}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{25}^m + W_{44}^m - W_{28}^m \right) + \\
& \quad + b \left(W_{54}^m - W_6^m + W_{55}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{10}^m + W_{59}^m - W_{11}^m \right) + \\
& \quad \left. + c \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xy} = m \frac{1}{h} \cdot & \left[a \left(U_{10}^m - U_6^m + U_{11}^m - U_7^m + U_{58}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{55}^m \right) + \right. \\
& + a \left(U_{25}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{24}^m + U_{41}^m - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{40}^m \right) + \\
& + b \left(U_{30}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{19}^m + U_{46}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{35}^m \right) + \\
& + c \left(U_{26}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{39}^m \right) + \\
& + a \left(V_7^m - V_6^m + V_{11}^m - V_{10}^m + V_{55}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{58}^m \right) + \\
& + a \left(V_{19}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{30}^m + V_{35}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{46}^m \right) + \\
& + b \left(V_{24}^m - V_{21}^m + V_{28}^m - V_{25}^m + V_{40}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{41}^m \right) + \\
& \left. + c \left(V_{23}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{26}^m + V_{39}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{42}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

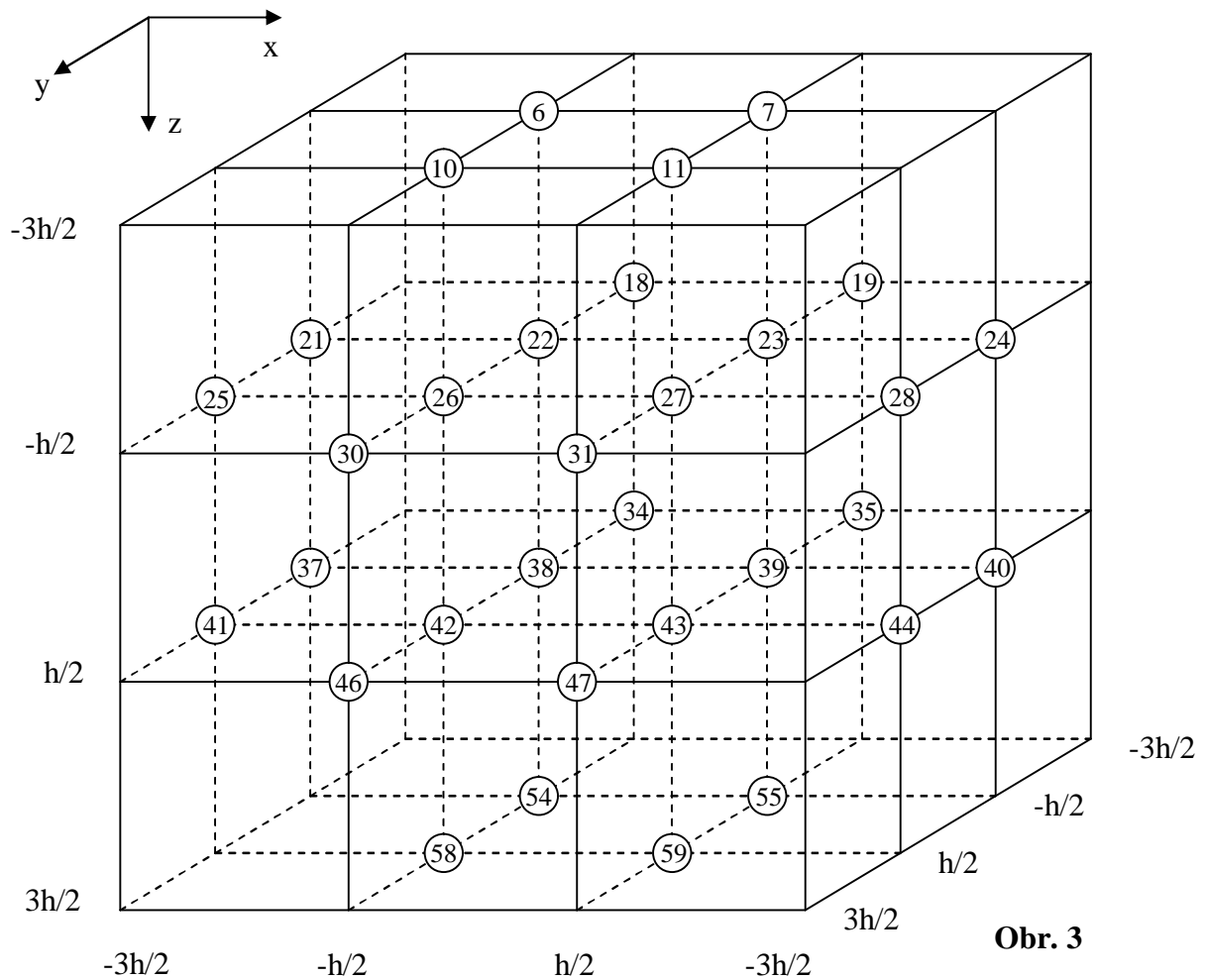
$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xz} = m \frac{1}{h} \cdot & \left[a \left(U_{34}^m - U_{18}^m + U_{35}^m - U_{19}^m + U_{46}^m - U_{30}^m + U_{47}^m - U_{31}^m \right) + \right. \\
& + a \left(U_{37}^m - U_{21}^m + U_{40}^m - U_{24}^m + U_{41}^m - U_{25}^m + U_{44}^m - U_{28}^m \right) + \\
& + b \left(U_{54}^m - U_6^m + U_{55}^m - U_7^m + U_{58}^m - U_{10}^m + U_{59}^m - U_{11}^m \right) + \\
& + c \left(U_{38}^m - U_{22}^m + U_{39}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{26}^m + U_{43}^m - U_{27}^m \right) + \\
& + a \left(W_7^m - W_6^m + W_{11}^m - W_{10}^m + W_{55}^m - W_{54}^m + W_{59}^m - W_{58}^m \right) + \\
& + a \left(W_{19}^m - W_{18}^m + W_{31}^m - W_{30}^m + W_{35}^m - W_{34}^m + W_{47}^m - W_{46}^m \right) + \\
& + b \left(W_{24}^m - W_{21}^m + W_{28}^m - W_{25}^m + W_{40}^m - W_{37}^m + W_{44}^m - W_{41}^m \right) + \\
& \left. + c \left(W_{23}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{26}^m + W_{39}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{42}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{yz} = m \frac{1}{h} \cdot & \left[a \left(V_{34}^m - V_{18}^m + V_{35}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{30}^m + V_{47}^m - V_{31}^m \right) + \right. \\
& + a \left(V_{37}^m - V_{21}^m + V_{40}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{25}^m + V_{44}^m - V_{28}^m \right) + \\
& + b \left(V_{54}^m - V_6^m + V_{55}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{10}^m + V_{59}^m - V_{11}^m \right) + \\
& \left. + c \left(V_{38}^m - V_{22}^m + V_{39}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{26}^m + V_{43}^m - V_{27}^m \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a \left(W_{10}^m - W_6^m + W_{11}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{54}^m + W_{59}^m - W_{55}^m \right) + \\
& + a \left(W_{25}^m - W_{21}^m + W_{28}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{37}^m + W_{44}^m - W_{40}^m \right) + \\
& + b \left(W_{30}^m - W_{18}^m + W_{31}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{34}^m + W_{47}^m - W_{35}^m \right) + \\
& + c \left(W_{26}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{39}^m \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{32}, b = -\frac{1}{96}, c = \frac{11}{32}$$

Čiastočne striedavo usporiadaná sieť - schéma B



**3D DS FD schéma 4. rádu na čiastočne striedavo usporiadanej sieti
schéma F**

$$U_{i,k,l}^{m+1} = 2U_{i,k,l}^m - U_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned} & \left[a \left(T_4^{xx,m} - T_1^{xx,m} + T_{16}^{xx,m} - T_{13}^{xx,m} + T_{52}^{xx,m} - T_{49}^{xx,m} + T_{64}^{xx,m} - T_{61}^{xx,m} \right) + \right. \\ & + b \left(T_7^{xx,m} - T_6^{xx,m} + T_{11}^{xx,m} - T_{10}^{xx,m} + T_{55}^{xx,m} - T_{54}^{xx,m} + T_{59}^{xx,m} - T_{58}^{xx,m} \right) + \\ & + b \left(T_{19}^{xx,m} - T_{18}^{xx,m} + T_{31}^{xx,m} - T_{30}^{xx,m} + T_{35}^{xx,m} - T_{34}^{xx,m} + T_{47}^{xx,m} - T_{46}^{xx,m} \right) + \\ & + c \left(T_{24}^{xx,m} - T_{21}^{xx,m} + T_{28}^{xx,m} - T_{25}^{xx,m} + T_{40}^{xx,m} - T_{37}^{xx,m} + T_{44}^{xx,m} - T_{41}^{xx,m} \right) + \\ & + d \left(T_{23}^{xx,m} - T_{22}^{xx,m} + T_{27}^{xx,m} - T_{26}^{xx,m} + T_{39}^{xx,m} - T_{38}^{xx,m} + T_{43}^{xx,m} - T_{42}^{xx,m} \right) + \\ & + a \left(T_{13}^{xy,m} - T_1^{xy,m} + T_{16}^{xy,m} - T_4^{xy,m} + T_{61}^{xy,m} - T_{49}^{xy,m} + T_{64}^{xy,m} - T_{52}^{xy,m} \right) + \\ & + b \left(T_{10}^{xy,m} - T_6^{xy,m} + T_{11}^{xy,m} - T_7^{xy,m} + T_{58}^{xy,m} - T_{54}^{xy,m} + T_{59}^{xy,m} - T_{55}^{xy,m} \right) + \\ & + b \left(T_{25}^{xy,m} - T_{21}^{xy,m} + T_{28}^{xy,m} - T_{24}^{xy,m} + T_{41}^{xy,m} - T_{37}^{xy,m} + T_{44}^{xy,m} - T_{40}^{xy,m} \right) + \\ & + c \left(T_{30}^{xy,m} - T_{18}^{xy,m} + T_{31}^{xy,m} - T_{19}^{xy,m} + T_{46}^{xy,m} - T_{34}^{xy,m} + T_{47}^{xy,m} - T_{35}^{xy,m} \right) + \\ & + d \left(T_{26}^{xy,m} - T_{22}^{xy,m} + T_{27}^{xy,m} - T_{23}^{xy,m} + T_{42}^{xy,m} - T_{38}^{xy,m} + T_{43}^{xy,m} - T_{39}^{xy,m} \right) + \\ & + a \left(T_{49}^{xz,m} - T_1^{xz,m} + T_{52}^{xz,m} - T_4^{xz,m} + T_{61}^{xz,m} - T_{13}^{xz,m} + T_{64}^{xz,m} - T_{16}^{xz,m} \right) + \\ & + b \left(T_{34}^{xz,m} - T_{18}^{xz,m} + T_{35}^{xz,m} - T_{19}^{xz,m} + T_{46}^{xz,m} - T_{30}^{xz,m} + T_{47}^{xz,m} - T_{31}^{xz,m} \right) + \\ & + b \left(T_{37}^{xz,m} - T_{21}^{xz,m} + T_{40}^{xz,m} - T_{24}^{xz,m} + T_{41}^{xz,m} - T_{25}^{xz,m} + T_{44}^{xz,m} - T_{28}^{xz,m} \right) + \\ & + c \left(T_{54}^{xz,m} - T_6^{xz,m} + T_{55}^{xz,m} - T_7^{xz,m} + T_{58}^{xz,m} - T_{10}^{xz,m} + T_{59}^{xz,m} - T_{11}^{xz,m} \right) + \\ & \left. + d \left(T_{38}^{xz,m} - T_{22}^{xz,m} + T_{39}^{xz,m} - T_{23}^{xz,m} + T_{42}^{xz,m} - T_{26}^{xz,m} + T_{43}^{xz,m} - T_{27}^{xz,m} \right) \right] \end{aligned}$$

$$V_{i,k,l}^{m+1} = 2V_{i,k,l}^m - V_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned} & \left[a \left(T_4^{yx,m} - T_1^{yx,m} + T_{16}^{yx,m} - T_{13}^{yx,m} + T_{52}^{yx,m} - T_{49}^{yx,m} + T_{64}^{yx,m} - T_{61}^{yx,m} \right) + \right. \\ & + b \left(T_7^{yx,m} - T_6^{yx,m} + T_{11}^{yx,m} - T_{10}^{yx,m} + T_{55}^{yx,m} - T_{54}^{yx,m} + T_{59}^{yx,m} - T_{58}^{yx,m} \right) + \\ & + b \left(T_{19}^{yx,m} - T_{18}^{yx,m} + T_{31}^{yx,m} - T_{30}^{yx,m} + T_{35}^{yx,m} - T_{34}^{yx,m} + T_{47}^{yx,m} - T_{46}^{yx,m} \right) + \\ & + c \left(T_{24}^{yx,m} - T_{21}^{yx,m} + T_{28}^{yx,m} - T_{25}^{yx,m} + T_{40}^{yx,m} - T_{37}^{yx,m} + T_{44}^{yx,m} - T_{41}^{yx,m} \right) + \\ & \left. + d \left(T_{23}^{yx,m} - T_{22}^{yx,m} + T_{27}^{yx,m} - T_{26}^{yx,m} + T_{39}^{yx,m} - T_{38}^{yx,m} + T_{43}^{yx,m} - T_{42}^{yx,m} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a\left(T_{13}^{yy,m} - T_1^{yy,m} + T_{16}^{yy,m} - T_4^{yy,m} + T_{61}^{yy,m} - T_{49}^{yy,m} + T_{64}^{yy,m} - T_{52}^{yy,m}\right) + \\
& +b\left(T_{10}^{yy,m} - T_6^{yy,m} + T_{11}^{yy,m} - T_7^{yy,m} + T_{58}^{yy,m} - T_{54}^{yy,m} + T_{59}^{yy,m} - T_{55}^{yy,m}\right) + \\
& +b\left(T_{25}^{yy,m} - T_{21}^{yy,m} + T_{28}^{yy,m} - T_{24}^{yy,m} + T_{41}^{yy,m} - T_{37}^{yy,m} + T_{44}^{yy,m} - T_{40}^{yy,m}\right) + \\
& +c\left(T_{30}^{yy,m} - T_{18}^{yy,m} + T_{31}^{yy,m} - T_{19}^{yy,m} + T_{46}^{yy,m} - T_{34}^{yy,m} + T_{47}^{yy,m} - T_{35}^{yy,m}\right) + \\
& +d\left(T_{26}^{yy,m} - T_{22}^{yy,m} + T_{27}^{yy,m} - T_{23}^{yy,m} + T_{42}^{yy,m} - T_{38}^{yy,m} + T_{43}^{yy,m} - T_{39}^{yy,m}\right) + \\
& +a\left(T_{49}^{yz,m} - T_1^{yz,m} + T_{52}^{yz,m} - T_4^{yz,m} + T_{61}^{yz,m} - T_{13}^{yz,m} + T_{64}^{yz,m} - T_{16}^{yz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{34}^{yz,m} - T_{18}^{yz,m} + T_{35}^{yz,m} - T_{19}^{yz,m} + T_{46}^{yz,m} - T_{30}^{yz,m} + T_{47}^{yz,m} - T_{31}^{yz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{37}^{yz,m} - T_{21}^{yz,m} + T_{40}^{yz,m} - T_{24}^{yz,m} + T_{41}^{yz,m} - T_{25}^{yz,m} + T_{44}^{yz,m} - T_{28}^{yz,m}\right) + \\
& +c\left(T_{54}^{yz,m} - T_6^{yz,m} + T_{55}^{yz,m} - T_7^{yz,m} + T_{58}^{yz,m} - T_{10}^{yz,m} + T_{59}^{yz,m} - T_{11}^{yz,m}\right) + \\
& +d\left(T_{38}^{yz,m} - T_{22}^{yz,m} + T_{39}^{yz,m} - T_{23}^{yz,m} + T_{42}^{yz,m} - T_{26}^{yz,m} + T_{43}^{yz,m} - T_{27}^{yz,m}\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$W_{i,k,l}^{m+1} = 2W_{i,k,l}^m - W_{i,k,l}^{m-1} + \frac{\Delta t^2}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned}
& \left[a\left(T_4^{zx,m} - T_1^{zx,m} + T_{16}^{zx,m} - T_{13}^{zx,m} + T_{52}^{zx,m} - T_{49}^{zx,m} + T_{64}^{zx,m} - T_{61}^{zx,m}\right) + \right. \\
& +b\left(T_7^{zx,m} - T_6^{zx,m} + T_{11}^{zx,m} - T_{10}^{zx,m} + T_{55}^{zx,m} - T_{54}^{zx,m} + T_{59}^{zx,m} - T_{58}^{zx,m}\right) + \\
& +b\left(T_{19}^{zx,m} - T_{18}^{zx,m} + T_{31}^{zx,m} - T_{30}^{zx,m} + T_{35}^{zx,m} - T_{34}^{zx,m} + T_{47}^{zx,m} - T_{46}^{zx,m}\right) + \\
& +c\left(T_{24}^{zx,m} - T_{21}^{zx,m} + T_{28}^{zx,m} - T_{25}^{zx,m} + T_{40}^{zx,m} - T_{37}^{zx,m} + T_{44}^{zx,m} - T_{41}^{zx,m}\right) + \\
& +d\left(T_{23}^{zx,m} - T_{22}^{zx,m} + T_{27}^{zx,m} - T_{26}^{zx,m} + T_{39}^{zx,m} - T_{38}^{zx,m} + T_{43}^{zx,m} - T_{42}^{zx,m}\right) + \\
& +a\left(T_{13}^{zy,m} - T_1^{zy,m} + T_{16}^{zy,m} - T_4^{zy,m} + T_{61}^{zy,m} - T_{49}^{zy,m} + T_{64}^{zy,m} - T_{52}^{zy,m}\right) + \\
& +b\left(T_{10}^{zy,m} - T_6^{zy,m} + T_{11}^{zy,m} - T_7^{zy,m} + T_{58}^{zy,m} - T_{54}^{zy,m} + T_{59}^{zy,m} - T_{55}^{zy,m}\right) + \\
& +b\left(T_{25}^{zy,m} - T_{21}^{zy,m} + T_{28}^{zy,m} - T_{24}^{zy,m} + T_{41}^{zy,m} - T_{37}^{zy,m} + T_{44}^{zy,m} - T_{40}^{zy,m}\right) + \\
& +c\left(T_{30}^{zy,m} - T_{18}^{zy,m} + T_{31}^{zy,m} - T_{19}^{zy,m} + T_{46}^{zy,m} - T_{34}^{zy,m} + T_{47}^{zy,m} - T_{35}^{zy,m}\right) + \\
& +d\left(T_{26}^{zy,m} - T_{22}^{zy,m} + T_{27}^{zy,m} - T_{23}^{zy,m} + T_{42}^{zy,m} - T_{38}^{zy,m} + T_{43}^{zy,m} - T_{39}^{zy,m}\right) + \\
& +a\left(T_{49}^{zz,m} - T_1^{zz,m} + T_{52}^{zz,m} - T_4^{zz,m} + T_{61}^{zz,m} - T_{13}^{zz,m} + T_{64}^{zz,m} - T_{16}^{zz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{34}^{zz,m} - T_{18}^{zz,m} + T_{35}^{zz,m} - T_{19}^{zz,m} + T_{46}^{zz,m} - T_{30}^{zz,m} + T_{47}^{zz,m} - T_{31}^{zz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{37}^{zz,m} - T_{21}^{zz,m} + T_{40}^{zz,m} - T_{24}^{zz,m} + T_{41}^{zz,m} - T_{25}^{zz,m} + T_{44}^{zz,m} - T_{28}^{zz,m}\right) + \\
& +c\left(T_{54}^{zz,m} - T_6^{zz,m} + T_{55}^{zz,m} - T_7^{zz,m} + T_{58}^{zz,m} - T_{10}^{zz,m} + T_{59}^{zz,m} - T_{11}^{zz,m}\right) + \\
& \left. +d\left(T_{38}^{zz,m} - T_{22}^{zz,m} + T_{39}^{zz,m} - T_{23}^{zz,m} + T_{42}^{zz,m} - T_{26}^{zz,m} + T_{43}^{zz,m} - T_{27}^{zz,m}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xx,m} = & (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m \right) + \right. \\
& + b \left(U_7^m - U_6^m + U_{11}^m - U_{10}^m + U_{55}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{58}^m \right) + \\
& + b \left(U_{19}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{30}^m + U_{35}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{46}^m \right) + \\
& + c \left(U_{24}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{25}^m + U - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{41}^m \right) + \\
& \left. + d \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + m \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m \right) + \right. \\
& + b \left(V_{10}^m - V_6^m + V_{11}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{55}^m \right) + \\
& + b \left(V_{25}^m - V_{21}^m + U_{28}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{40}^m \right) + \\
& + c \left(V_{30}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{35}^m \right) + \\
& \left. + d \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] + \\
& + m \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(W_{34}^m - W_{18}^m + W_{35}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{30}^m + W_{47}^m - W_{31}^m \right) + \\
& + b \left(W_{37}^m - W_{21}^m + W_{40}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{25}^m + W_{44}^m - W_{28}^m \right) + \\
& + c \left(W_{54}^m - W_6^m + W_{55}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{10}^m + W_{59}^m - W_{11}^m \right) + \\
& \left. + d \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{yy,m} = & I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m \right) + \right. \\
& + b \left(U_7^m - U_6^m + U_{11}^m - U_{10}^m + U_{55}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{58}^m \right) + \\
& + b \left(U_{19}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{30}^m + U_{35}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{46}^m \right) + \\
& + c \left(U_{24}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{25}^m + U - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{41}^m \right) + \\
& \left. + d \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m \right) + \right. \\
& + b \left(V_{10}^m - V_6^m + V_{11}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{55}^m \right) + \\
& \left. + b \left(V_{25}^m - V_{21}^m + U_{28}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{40}^m \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c \left(V_{30}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{35}^m \right) + \\
& + d \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \Big] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(W_{34}^m - W_{18}^m + W_{35}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{30}^m + W_{47}^m - W_{31}^m \right) + \\
& + b \left(W_{37}^m - W_{21}^m + W_{40}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{25}^m + W_{44}^m - W_{28}^m \right) + \\
& + c \left(W_{54}^m - W_6^m + W_{55}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{10}^m + W_{59}^m - W_{11}^m \right) + \\
& \left. + d \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right] \\
T_{i,k,l}^{zz,m} = & I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m \right) + \right. \\
& + b \left(U_7^m - U_6^m + U_{11}^m - U_{10}^m + U_{55}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{58}^m \right) + \\
& + b \left(U_{19}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{30}^m + U_{35}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{46}^m \right) + \\
& + c \left(U_{24}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{25}^m + U_{37}^m - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{41}^m \right) + \\
& \left. + d \left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m \right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m \right) + \right. \\
& + b \left(V_{10}^m - V_6^m + V_{11}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{55}^m \right) + \\
& + b \left(V_{25}^m - V_{21}^m + U_{28}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{40}^m \right) + \\
& + c \left(V_{30}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{35}^m \right) + \\
& \left. + d \left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m \right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(W_{34}^m - W_{18}^m + W_{35}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{30}^m + W_{47}^m - W_{31}^m \right) + \\
& + b \left(W_{37}^m - W_{21}^m + W_{40}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{25}^m + W_{44}^m - W_{28}^m \right) + \\
& + c \left(W_{54}^m - W_6^m + W_{55}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{10}^m + W_{59}^m - W_{11}^m \right) + \\
& \left. + d \left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xy,m} = m \frac{1}{h} & \left[a \left(V_4^m - V_1^m + V_{16}^m - V_{13}^m + V_{52}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{61}^m \right) + \right. \\
& + b \left(V_7^m - V_6^m + V_{11}^m - V_{10}^m + V_{55}^m - V_{54}^m + V_{59}^m - V_{58}^m \right) + \\
& + b \left(V_{19}^m - V_{18}^m + V_{31}^m - V_{30}^m + V_{35}^m - V_{34}^m + V_{47}^m - V_{46}^m \right) + \\
& + c \left(V_{24}^m - V_{21}^m + V_{28}^m - V_{25}^m + V_{40}^m - V_{37}^m + V_{44}^m - V_{41}^m \right) + \\
& + d \left(V_{23}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{26}^m + V_{39}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{42}^m \right) + \\
& + a \left(U_{13}^m - U_1^m + U_{16}^m - U_4^m + U_{61}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{52}^m \right) + \\
& + b \left(U_{10}^m - U_6^m + U_{11}^m - U_7^m + U_{58}^m - U_{54}^m + U_{59}^m - U_{55}^m \right) + \\
& + b \left(U_{25}^m - U_{21}^m + U_{28}^m - U_{24}^m + U_{41}^m - U_{37}^m + U_{44}^m - U_{40}^m \right) + \\
& + c \left(U_{30}^m - U_{18}^m + U_{31}^m - U_{19}^m + U_{46}^m - U_{34}^m + U_{47}^m - U_{35}^m \right) + \\
& \left. + d \left(U_{26}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{39}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

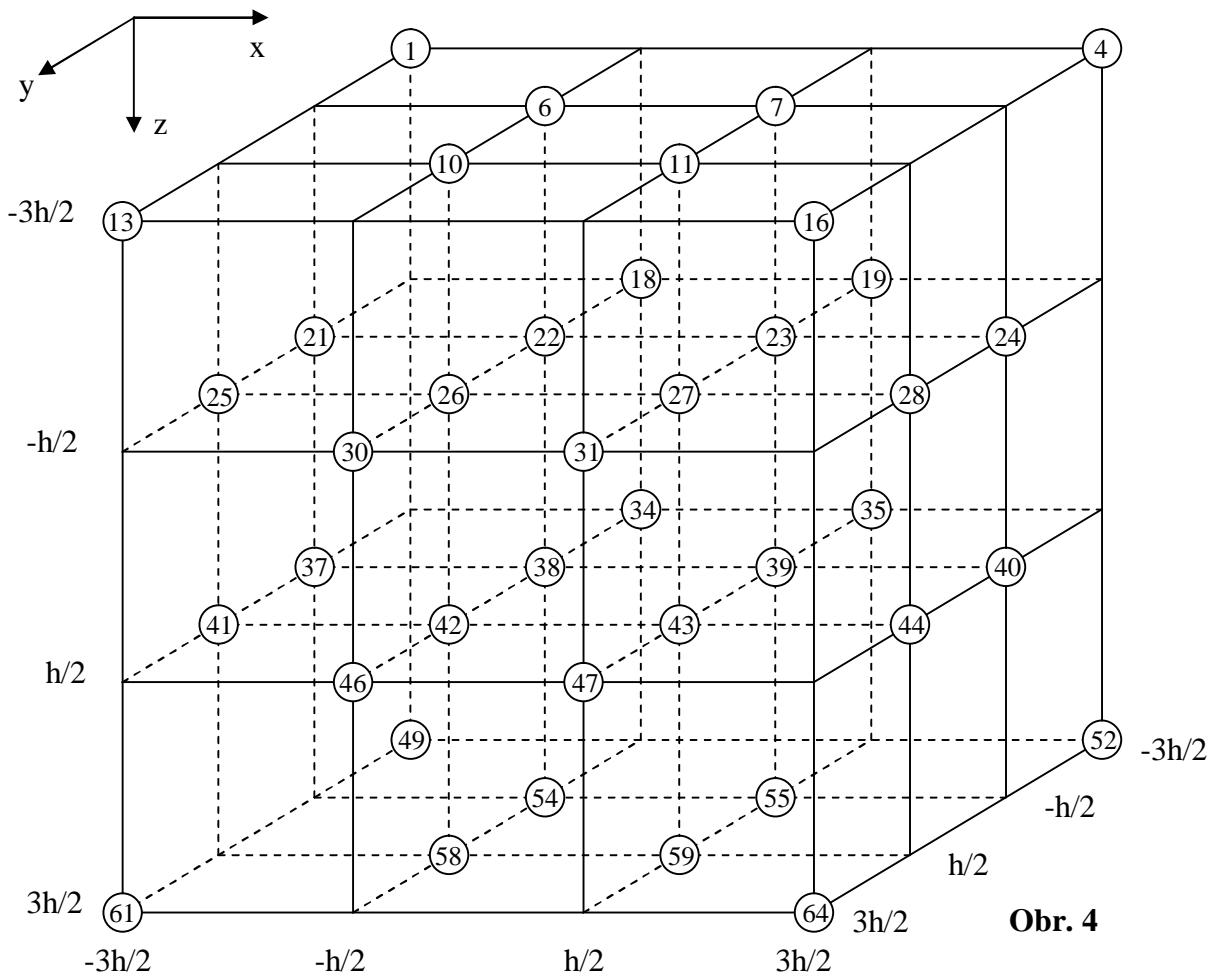
$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xz,m} = m \frac{1}{h} & \left[a \left(U_{49}^m - U_1^m + U_{52}^m - U_4^m + U_{61}^m - U_{13}^m + U_{64}^m - U_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(U_{34}^m - U_{18}^m + U_{35}^m - U_{19}^m + U_{46}^m - U_{30}^m + U_{47}^m - U_{31}^m \right) + \\
& + b \left(U_{37}^m - U_{21}^m + U_{40}^m - U_{24}^m + U_{41}^m - U_{25}^m + U_{44}^m - U_{28}^m \right) + \\
& + c \left(U_{54}^m - U_6^m + U_{55}^m - U_7^m + U_{58}^m - U_{10}^m + U_{59}^m - U_{11}^m \right) + \\
& + d \left(U_{38}^m - U_{22}^m + U_{39}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{26}^m + U_{43}^m - U_{27}^m \right) + \\
& + a \left(W_4^m - W_1^m + W_{16}^m - W_{13}^m + W_{52}^m - W_{49}^m + W_{64}^m - W_{61}^m \right) + \\
& + b \left(W_7^m - W_6^m + W_{11}^m - W_{10}^m + W_{55}^m - W_{54}^m + W_{59}^m - W_{58}^m \right) + \\
& + b \left(W_{19}^m - W_{18}^m + W_{31}^m - W_{30}^m + W_{35}^m - W_{34}^m + W_{47}^m - W_{46}^m \right) + \\
& + c \left(W_{24}^m - W_{21}^m + W_{28}^m - W_{25}^m + W_{40}^m - W_{37}^m + W_{44}^m - W_{41}^m \right) + \\
& \left. + d \left(W_{23}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{26}^m + W_{39}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{42}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{yz,m} = m \frac{1}{h} & \left[a \left(V_{49}^m - V_1^m + V_{52}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{13}^m + V_{64}^m - V_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(V_{34}^m - V_{18}^m + V_{35}^m - V_{19}^m + V_{46}^m - V_{30}^m + V_{47}^m - V_{31}^m \right) + \\
& + b \left(V_{37}^m - V_{21}^m + V_{40}^m - V_{24}^m + V_{41}^m - V_{25}^m + V_{44}^m - V_{28}^m \right) + \\
& + c \left(V_{54}^m - V_6^m + V_{55}^m - V_7^m + V_{58}^m - V_{10}^m + V_{59}^m - V_{11}^m \right) + \\
& \left. + d \left(V_{38}^m - V_{22}^m + V_{39}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{26}^m + V_{43}^m - V_{27}^m \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+a(W_{13}^m - W_1^m + W_{16}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{49}^m + W_{64}^m - W_{52}^m) + \\
&+b(W_{10}^m - W_6^m + W_{11}^m - W_7^m + W_{58}^m - W_{54}^m + W_{59}^m - W_{55}^m) + \\
&+b(W_{25}^m - W_{21}^m + W_{28}^m - W_{24}^m + W_{41}^m - W_{37}^m + W_{44}^m - W_{40}^m) + \\
&+c(W_{30}^m - W_{18}^m + W_{31}^m - W_{19}^m + W_{46}^m - W_{34}^m + W_{47}^m - W_{35}^m) + \\
&+d(W_{26}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{39}^m) \Big]
\end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{768}, \quad b = -\frac{9}{256}, \quad c = -\frac{3}{256}, \quad d = \frac{45}{128}$$

Čiastočne striedavo usporiadaná sieť - schéma F



3D DVS FD schéma 4. rádu na čiastočne striedavo usporiadanej sieti schéma A

$$U_{i,k,l}^{m+1} = U_{i,k,l}^m + \Delta t \cdot \mathcal{U}_{i,k,l}^{m+1/2}$$

$$V_{i,k,l}^{m+1} = V_{i,k,l}^m + \Delta t \cdot \mathcal{V}_{i,k,l}^{m+1/2}$$

$$W_{i,k,l}^{m+1} = W_{i,k,l}^m + \Delta t \cdot \mathcal{W}_{i,k,l}^{m+1/2}$$

$$\mathcal{U}_{i,k,l}^{m+1/2} = \mathcal{U}_{i,k,l}^{m-1/2} + \frac{\Delta t}{r} F_{i,k,l}^{x,m} + \frac{\Delta t}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned} & \left[a \left(T_4^{xx,m} - T_1^{xx,m} + T_{16}^{xx,m} - T_{13}^{xx,m} + T_{52}^{xx,m} - T_{49}^{xx,m} + T_{64}^{xx,m} - T_{61}^{xx,m} \right) + \right. \\ & + b \left(T_{23}^{xx,m} - T_{22}^{xx,m} + T_{27}^{xx,m} - T_{26}^{xx,m} + T_{39}^{xx,m} - T_{38}^{xx,m} + T_{43}^{xx,m} - T_{42}^{xx,m} \right) + \\ & + a \left(T_{13}^{xy,m} - T_1^{xy,m} + T_{16}^{xy,m} - T_4^{xy,m} + T_{61}^{xy,m} - T_{49}^{xy,m} + T_{64}^{xy,m} - T_{52}^{xy,m} \right) + \\ & + b \left(T_{26}^{xy,m} - T_{22}^{xy,m} + T_{27}^{xy,m} - T_{23}^{xy,m} + T_{42}^{xy,m} - T_{38}^{xy,m} + T_{43}^{xy,m} - T_{39}^{xy,m} \right) + \\ & + a \left(T_{49}^{xz,m} - T_1^{xz,m} + T_{52}^{xz,m} - T_4^{xz,m} + T_{61}^{xz,m} - T_{13}^{xz,m} + T_{64}^{xz,m} - T_{16}^{xz,m} \right) + \\ & \left. + b \left(T_{38}^{xz,m} - T_{22}^{xz,m} + T_{39}^{xz,m} - T_{23}^{xz,m} + T_{42}^{xz,m} - T_{26}^{xz,m} + T_{43}^{xz,m} - T_{27}^{xz,m} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_{i,k,l}^{m+1/2} = \mathcal{V}_{i,k,l}^{m-1/2} + \frac{\Delta t}{r} F_{i,k,l}^{y,m} + \frac{\Delta t}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned} & \left[a \left(T_4^{yx,m} - T_1^{yx,m} + T_{16}^{yx,m} - T_{13}^{yx,m} + T_{52}^{yx,m} - T_{49}^{yx,m} + T_{64}^{yx,m} - T_{61}^{yx,m} \right) + \right. \\ & + b \left(T_{23}^{yx,m} - T_{22}^{yx,m} + T_{27}^{yx,m} - T_{26}^{yx,m} + T_{39}^{yx,m} - T_{38}^{yx,m} + T_{43}^{yx,m} - T_{42}^{yx,m} \right) + \\ & + a \left(T_{13}^{yy,m} - T_1^{yy,m} + T_{16}^{yy,m} - T_4^{yy,m} + T_{61}^{yy,m} - T_{49}^{yy,m} + T_{64}^{yy,m} - T_{52}^{yy,m} \right) + \\ & + b \left(T_{26}^{yy,m} - T_{22}^{yy,m} + T_{27}^{yy,m} - T_{23}^{yy,m} + T_{42}^{yy,m} - T_{38}^{yy,m} + T_{43}^{yy,m} - T_{39}^{yy,m} \right) + \\ & + a \left(T_{49}^{yz,m} - T_1^{yz,m} + T_{52}^{yz,m} - T_4^{yz,m} + T_{61}^{yz,m} - T_{13}^{yz,m} + T_{64}^{yz,m} - T_{16}^{yz,m} \right) + \\ & \left. + b \left(T_{38}^{yz,m} - T_{22}^{yz,m} + T_{39}^{yz,m} - T_{23}^{yz,m} + T_{42}^{yz,m} - T_{26}^{yz,m} + T_{43}^{yz,m} - T_{27}^{yz,m} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_{i,k,l}^{m+1/2} = \mathcal{W}_{i,k,l}^{m-1/2} + \frac{\Delta t}{r} F_{i,k,l}^{z,m} + \frac{\Delta t}{h} \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned} & \left[a \left(T_4^{zx,m} - T_1^{zx,m} + T_{16}^{zx,m} - T_{13}^{zx,m} + T_{52}^{zx,m} - T_{49}^{zx,m} + T_{64}^{zx,m} - T_{61}^{zx,m} \right) + \right. \\ & + b \left(T_{23}^{zx,m} - T_{22}^{zx,m} + T_{27}^{zx,m} - T_{26}^{zx,m} + T_{39}^{zx,m} - T_{38}^{zx,m} + T_{43}^{zx,m} - T_{42}^{zx,m} \right) + \\ & + a \left(T_{13}^{zy,m} - T_1^{zy,m} + T_{16}^{zy,m} - T_4^{zy,m} + T_{61}^{zy,m} - T_{49}^{zy,m} + T_{64}^{zy,m} - T_{52}^{zy,m} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b\left(T_{26}^{zy,m} - T_{22}^{zy,m} + T_{27}^{zy,m} - T_{23}^{zy,m} + T_{42}^{zy,m} - T_{38}^{zy,m} + T_{43}^{zy,m} - T_{39}^{zy,m}\right) + \\
& +a\left(T_{49}^{zz,m} - T_1^{zz,m} + T_{52}^{zz,m} - T_4^{zz,m} + T_{61}^{zz,m} - T_{13}^{zz,m} + T_{64}^{zz,m} - T_{16}^{zz,m}\right) + \\
& +b\left(T_{38}^{zz,m} - T_{22}^{zz,m} + T_{39}^{zz,m} - T_{23}^{zz,m} + T_{42}^{zz,m} - T_{26}^{zz,m} + T_{43}^{zz,m} - T_{27}^{zz,m}\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xx,m} = & (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m\right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m\right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{yy,m} = & I \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m\right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m\right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{zz,m} = & I \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(U_4^m - U_1^m + U_{16}^m - U_{13}^m + U_{52}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{61}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(U_{23}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{26}^m + U_{39}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{42}^m\right) \right] + \\
& + I \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(V_{13}^m - V_1^m + V_{16}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{52}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(V_{26}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{39}^m\right) \right] + \\
& + (I + 2m) \frac{1}{h} \cdot \left[a\left(W_{49}^m - W_1^m + W_{52}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{13}^m + W_{64}^m - W_{16}^m\right) + \right. \\
& \left. + b\left(W_{38}^m - W_{22}^m + W_{39}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{26}^m + W_{43}^m - W_{27}^m\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xy,m} = & \mathbf{m} \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_{13}^m - U_1^m + U_{16}^m - U_4^m + U_{61}^m - U_{49}^m + U_{64}^m - U_{52}^m \right) + \right. \\
& + b \left(U_{26}^m - U_{22}^m + U_{27}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{38}^m + U_{43}^m - U_{39}^m \right) + \\
& + a \left(V_4^m - V_1^m + V_{16}^m - V_{13}^m + V_{52}^m - V_{49}^m + V_{64}^m - V_{61}^m \right) + \\
& \left. + b \left(V_{23}^m - V_{22}^m + V_{27}^m - V_{26}^m + V_{39}^m - V_{38}^m + V_{43}^m - V_{42}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{xz,m} = & \mathbf{m} \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(U_{49}^m - U_1^m + U_{52}^m - U_4^m + U_{61}^m - U_{13}^m + U_{64}^m - U_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(U_{38}^m - U_{22}^m + U_{39}^m - U_{23}^m + U_{42}^m - U_{26}^m + U_{43}^m - U_{27}^m \right) + \\
& + a \left(W_4^m - W_1^m + W_{16}^m - W_{13}^m + W_{52}^m - W_{49}^m + W_{64}^m - W_{61}^m \right) + \\
& \left. + b \left(W_{23}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{26}^m + W_{39}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{42}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i,k,l}^{yz,m} = & \mathbf{m} \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(V_{49}^m - V_1^m + V_{52}^m - V_4^m + V_{61}^m - V_{13}^m + V_{64}^m - V_{16}^m \right) + \right. \\
& + b \left(V_{38}^m - V_{22}^m + V_{39}^m - V_{23}^m + V_{42}^m - V_{26}^m + V_{43}^m - V_{27}^m \right) + \\
& + a \left(W_{13}^m - W_1^m + W_{16}^m - W_4^m + W_{61}^m - W_{49}^m + W_{64}^m - W_{52}^m \right) + \\
& \left. + b \left(W_{26}^m - W_{22}^m + W_{27}^m - W_{23}^m + W_{42}^m - W_{38}^m + W_{43}^m - W_{39}^m \right) \right]
\end{aligned}$$

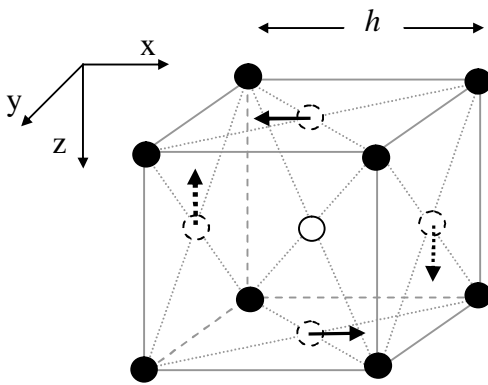
Príloha č.2

Vo všetkých obrázkoch tejto prílohy platí, že čierne krúžky reprezentujú body siete, v ktorých sú umiestnené zložky vektora posunutia (rýchlosti) a biele krúžky reprezentujú body siete, v ktorých sú umiestnené zložky tenzora napätia. Pre prehľadnosť sú body, pomocou ktorých simulujem zdroj, označené číslom. Pre každý bod siete je vyjadrenie sily uvedené zvlášť. Zachováva sa konvencia, že sila v bode s menšou sieťovou súradnicou má záporné znamienko, t.j. smeruje proti nárastu súradníc.

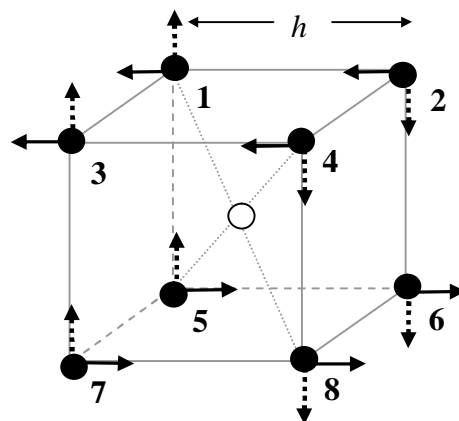
Pre dané vstupné dáta bodového dislokačného zdroja ($\Phi_S = 0^\circ, d = 0^\circ, l = 0^\circ$) len zložka M_{xz} tenzora momentov je nenulová, preto v nasledujúcich obrázkoch sú vykreslené len sily F_x^z a F_z^x , pretože len tie sa podieľajú na simulovaní bodového zdroja. Sila F_x^z je znázornená na obrázkoch bodkovane (rameno v smere osi x, pôsobenie v smere osi z), sila F_z^x je znázornená plnou čiarou.

Model zdroja P1

Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky tenzora napätia. Simulovaný je dvojité dvojicou síl, ktoré majú ramená v smere osi x a osi z a smer pôsobenia v smere osi z a osi x. Vid' Obr. 1a). V čiarkovaných krúžkoch však nemáme umiestnené zložky vektora posunutí (rýchlosti), preto je daná sila aproximovaná hodnotou síl v okolitých štyroch bodoch, Obr. 1b). Označme $K_{P1} = \frac{1}{h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$ pričom $M_{xz} = M_{zx}$, pretože tenzor momentov M_{pq} je symetrický tenzor.



Obr. 1a) Model dislokačného zdroja



Obr. 1b) Model zdroja P1

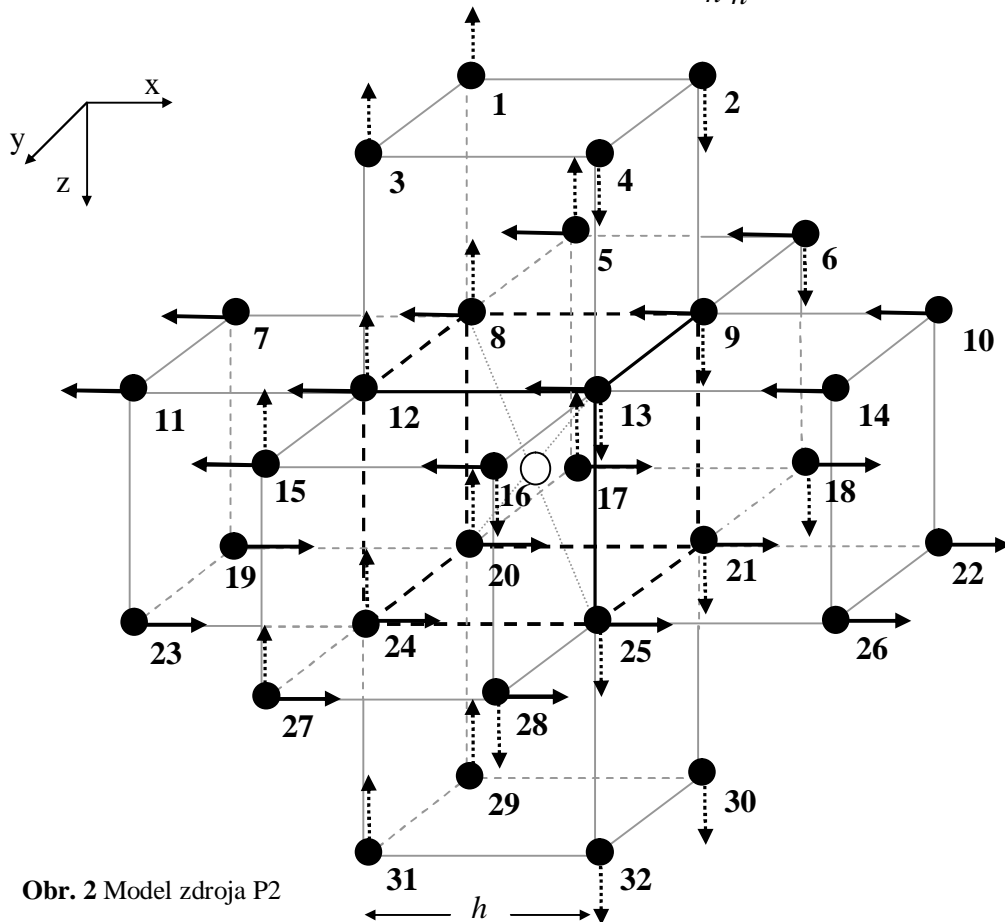
$$1: F_z^x = -\frac{1}{4} K_{P1} \quad F_x^z = -\frac{1}{4} K_{P1} \quad 5: F_z^x = \frac{1}{4} K_{P1} \quad F_x^z = -\frac{1}{4} K_{P1}$$

2: $F_z^x = -\frac{1}{4}K_{P1}$	3: $F_x^z = -\frac{1}{4}K_{P1}$	6: $F_z^x = \frac{1}{4}K_{P1}$	7: $F_x^z = \frac{1}{4}K_{P1}$
3: $F_z^x = -\frac{1}{4}K_{P1}$	4: $F_x^z = -\frac{1}{4}K_{P1}$	7: $F_z^x = \frac{1}{4}K_{P1}$	8: $F_x^z = \frac{1}{4}K_{P1}$
4: $F_z^x = -\frac{1}{4}K_{P1}$	8: $F_x^z = \frac{1}{4}K_{P1}$	8: $F_z^x = \frac{1}{4}K_{P1}$	

Model zdroja P2

Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky tenzora napätia. Simulovaný je dvojitou dvojicou síl, tak ako v predchádzajúcom prípade, Obr. 1a). Daná sila je však apoximovaná silami vo viacerých bodoch, ako v prípade zdroja P1, vid' Obr. 2. Jednotlivé koeficienty síl boli určené tak, aby súčet koeficientov síl, ktoré

aproximujú jednu silu, dával jednotku. Označme $K_{P2} = \frac{1}{h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$.

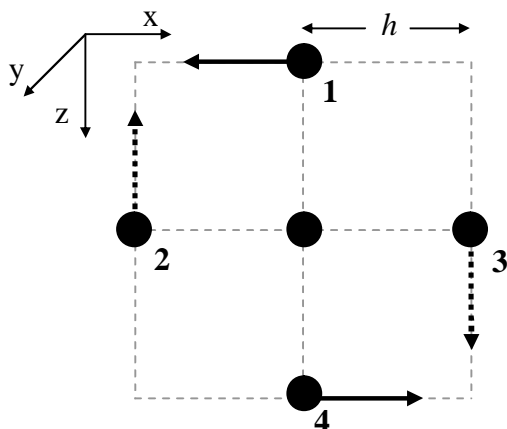


Obr. 2 Model zdroja P2

1: $F_x^z = -\frac{1}{16}K_{P2}$	17: $F_z^x = \frac{1}{16}K_{P2}$	2: $F_x^z = -\frac{1}{16}K_{P2}$	18: $F_z^x = \frac{1}{16}K_{P2}$
2: $F_x^z = \frac{1}{16}K_{P2}$	17: $F_z^x = -\frac{1}{16}K_{P2}$	18: $F_x^z = \frac{1}{16}K_{P2}$	2: $F_z^x = -\frac{1}{16}K_{P2}$

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 3: | $F_x^z = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 19: | $F_z^x = \frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 4: | $F_x^z = \frac{1}{16} K_{P2}$ | 20: | $F_z^x = \frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{8} K_{P2}$ |
| 5: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 21: | $F_z^x = \frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{8} K_{P2}$ |
| 6: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{16} K_{P2}$ | 22: | $F_z^x = \frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 7: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 23: | $F_z^x = \frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 8: | $F_z^x = -\frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{8} K_{P2}$ | 24: | $F_z^x = \frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{8} K_{P2}$ |
| 9: | $F_z^x = -\frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{8} K_{P2}$ | 25: | $F_z^x = \frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{8} K_{P2}$ |
| 10: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 26: | $F_z^x = \frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 11: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 27: | $F_z^x = \frac{1}{16} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 12: | $F_z^x = -\frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{8} K_{P2}$ | 28: | $F_z^x = \frac{1}{16} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 13: | $F_z^x = -\frac{1}{8} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{8} K_{P2}$ | 29: | $F_x^z = -\frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 14: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 30: | $F_x^z = \frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 15: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ $F_x^z = -\frac{1}{16} K_{P2}$ | 31: | $F_x^z = -\frac{1}{16} K_{P2}$ |
| 16: | $F_z^x = -\frac{1}{16} K_{P2}$ $F_x^z = \frac{1}{16} K_{P2}$ | 32: | $F_x^z = \frac{1}{16} K_{P2}$ |

Model zdroja S1



Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Simulovaný je dvojťou dvojicou síl, ktoré majú ramená v smere osi x a osi z a smer pôsobenia v smere osi z a osi x, vid' Obr. 3. Všetky sily pôsobia v jednej rovine.

Obr. 3 Model zdroja S1

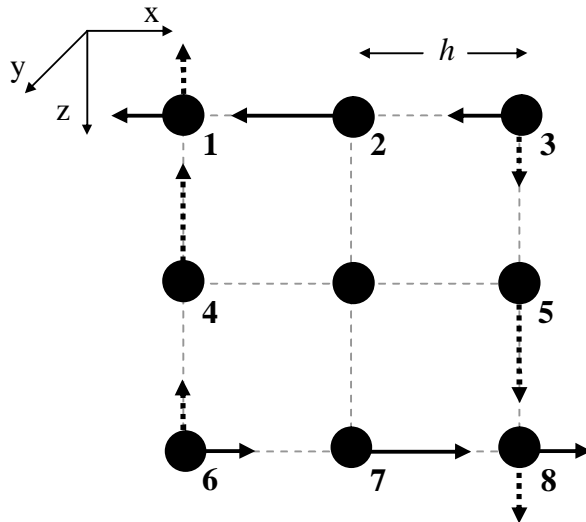
$$1: F_z^x = -\frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$$

$$2: F_x^z = -\frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{zx} s(t)$$

$$3: F_x^z = \frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{zx} s(t)$$

$$4: F_z^x = \frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$$

Model zdroja S2



Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Simulovaný je dvojitou dvojicou síl, tak ako v prípade zdroja S1. Daná sila je však aproximovaná silami vo viacerých bodoch vid' Obr. 4. Jednotlivé koeficienty síl boli určené tak, aby súčet koeficientov síl, ktoré aproximujú jednu silu z dvojitej dvojice síl, dával jednotku.

Označme $K_{S2} = \frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$.

Obr. 4 Model zdroja S2

$$1: F_z^x = -\frac{1}{4} K_{S2}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{4} K_{S2}$$

$$2: F_z^x = -\frac{1}{2} K_{S2}$$

$$3: F_z^x = -\frac{1}{4} K_{S2}$$

$$F_x^z = \frac{1}{4} K_{S2}$$

$$4: F_x^z = -\frac{1}{2} K_{S2}$$

$$5: F_x^z = \frac{1}{2} K_{S2}$$

$$6: F_z^x = \frac{1}{4} K_{S2} \quad F_x^z = -\frac{1}{4} K_{S2}$$

$$7: F_z^x = \frac{1}{2} K_{S2}$$

$$8: F_z^x = \frac{1}{4} K_{S2} \quad F_x^z = \frac{1}{4} K_{S2}$$

Model zdroja S3 G1

Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Simulovaný je dvojitou dvojicou síl, tak ako v prípade zdroja S1. Pôsobisko jednotlivých síl je však rozložené do viacerých bodov, vid' Obr. 5. Koeficienty jednotlivých síl v bodoch siete sú určené jednak absolútnou vzdialenosťou od bodu siete, v ktorom je zdroj umiestnený a ďalej sú zhladené Gaussovým rozdelením

$\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4p}\right)$, kde x, y, z sú súradnice daného bodu siete, vzhľadom na bod

siete, v ktorom je umiestené centrum zdroja. Tak ako v prípade zdroja S2 označme

$$K_{S3} = \frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{xz} S(t).$$

$$1: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3}$$

$$2: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$3: F_z^x = -\frac{1}{2} e^{-1/p} K_{S3}$$

$$8: F_z^x = - e^{-1/4p} K_{S3}$$

$$4: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$5: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3}$$

$$F_x^z = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3}$$

$$6: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-4/5p} K_{S3}$$

$$7: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$9: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$F_x^z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$10: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-4/5p} K_{S3}$$

$$11: F_x^z = -\frac{1}{2} e^{-1/p} K_{S3}$$

$$12: F_x^z = - e^{-1/4p} K_{S3}$$

$$14: F_x^z = e^{-1/4p} K_{S3}$$

$$15: F_x^z = \frac{1}{2} e^{-1/p} K_{S3}$$

$$16: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-4/5p} K_{S3}$$

$$17: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$18: F_z^x = e^{-1/4p} K_{S3}$$

$$23: F_z^x = \frac{1}{2} e^{-1/p} K_{S3}$$

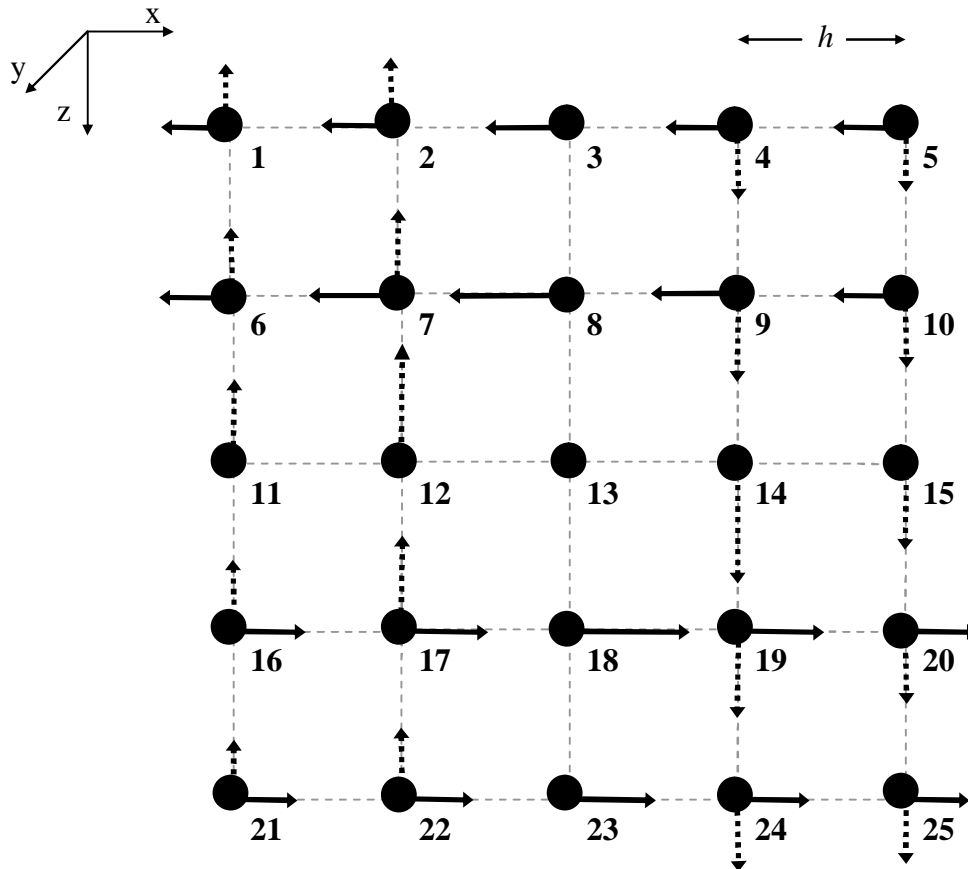
$$19: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$F_x^z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2p} K_{S3}$$

$$20: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3}$$

$$F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-4/5p} K_{S3}$$

$$\begin{aligned}
 21: F_z^x &= \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3} & F_x^z &= -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3} \\
 22: F_z^x &= \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3} & F_x^z &= -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3} \\
 24: F_z^x &= \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3} & F_x^z &= \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/4p} K_{S3} \\
 25: F_z^x &= \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3} & F_x^z &= \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-2/p} K_{S3}
 \end{aligned}$$



Obr. 5 Model zdroja S3

Model zdroja S3 G2

Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Simulovaný je dvojitou dvojicou síl, tak ako v prípade zdroja S1. Pôsobisko jednotlivých síl je však rozložené do viacerých bodov, tak ako v prípade zdroja S3 G1, vid' Obr. 5. Koeficienty jednotlivých síl v bodoch siete sú určené jednak absolútnou vzdialenosťou od bodu siete, v ktorom je zdroj umiestnený a ďalej sú zhladené

Gaussovým rozdelením $\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2p}\right)$.

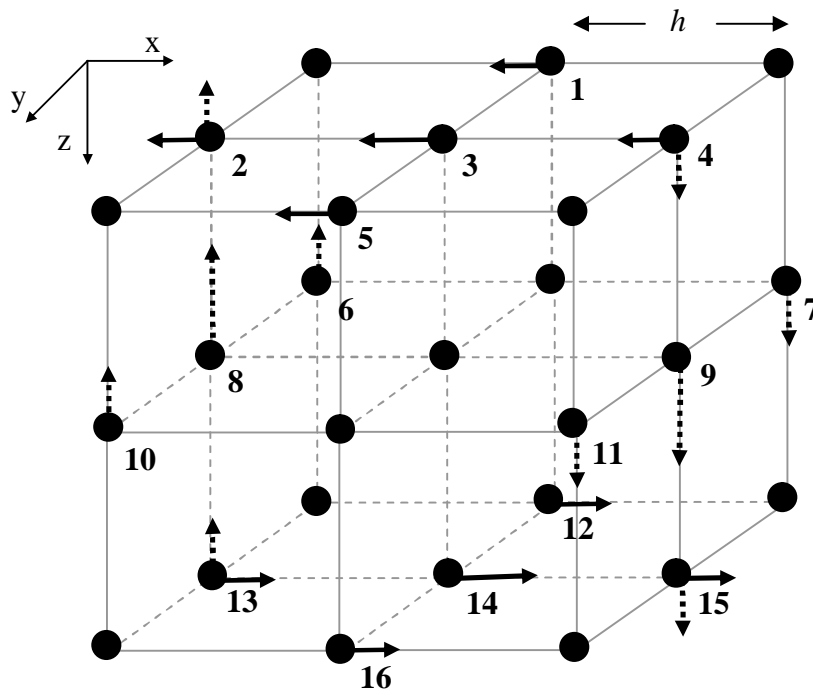
$$\begin{array}{ll}
1: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} \\
2: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
3: F_z^x = -\frac{1}{2} e^{-2/p} K_{S3} & 8: F_z^x = - e^{-1/2p} K_{S3} \\
4: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
5: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} \\
6: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
7: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} \\
9: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} \\
10: F_z^x = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
11: F_x^z = -\frac{1}{2} e^{-2/p} K_{S3} & 12: F_x^z = - e^{-1/2p} K_{S3} \\
14: F_x^z = e^{-1/2p} K_{S3} & 15: F_x^z = \frac{1}{2} e^{-2/p} K_{S3} \\
16: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
17: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} \\
18: F_z^x = e^{-1/2p} K_{S3} & 23: F_z^x = \frac{1}{2} e^{-2/p} K_{S3} \\
19: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/p} K_{S3} \\
20: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
21: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} \\
22: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} \\
24: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3} & F_x^z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-5/2p} K_{S3}
\end{array}$$

$$25: F_z^x = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3} \quad F_x^z = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-4/p} K_{S3}$$

Model zdroja S4

Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Simulovaný je dvojitou dvojicou síl, tak ako v prípade zdroja S1. Pôsobisko jednotlivých síl je však rozložené do viacerých bodov v priestore, vid' Obr. 6. Jednotlivé koeficienty síl boli určené tak, aby súčet koeficientov síl, ktoré aproximujú

jednu silu, dával jednotku. Označme $K_{S4} = \frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$.



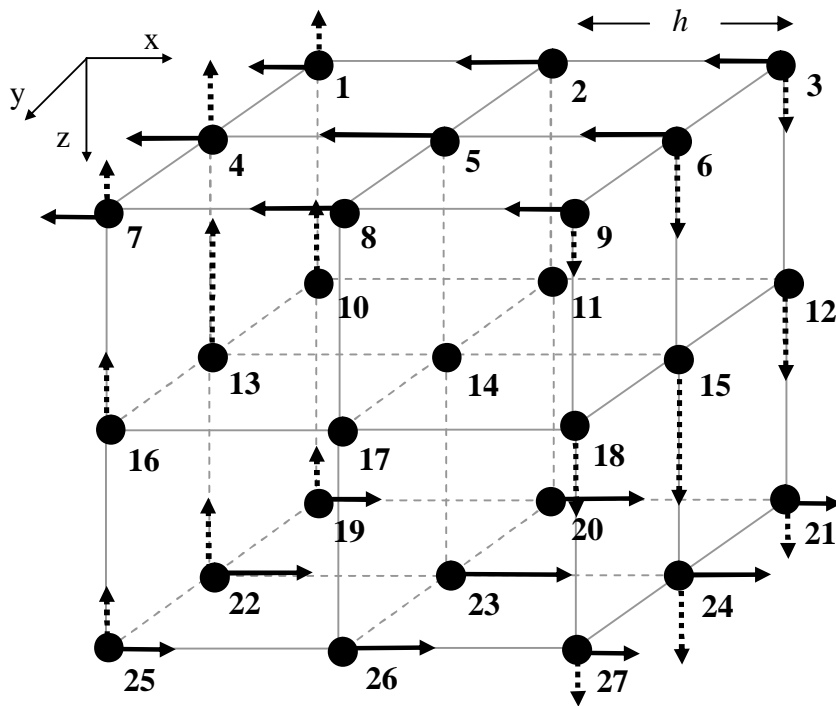
Obr. 6 Model zdroja S4

1: $F_z^x = -\frac{1}{6} K_{S4}$		9: $F_x^z = \frac{1}{3} K_{S4}$
2: $F_z^x = -\frac{1}{6} K_{S4}$	$F_x^z = -\frac{1}{6} K_{S4}$	10: $F_x^z = -\frac{1}{6} K_{S4}$
3: $F_z^x = -\frac{1}{3} K_{S4}$		11: $F_x^z = \frac{1}{6} K_{S4}$
4: $F_z^x = -\frac{1}{6} K_{S4}$	$F_x^z = \frac{1}{6} K_{S4}$	12: $F_z^x = \frac{1}{6} K_{S4}$
5: $F_z^x = -\frac{1}{6} K_{S4}$		13: $F_z^x = \frac{1}{6} K_{S4}$
		$F_x^z = -\frac{1}{6} K_{S4}$

6:	$F_x^z = -\frac{1}{6}K_{S4}$	14:	$F_z^x = \frac{1}{3}K_{S4}$	
7:	$F_x^z = \frac{1}{6}K_{S4}$	15:	$F_z^x = \frac{1}{6}K_{S4}$	$F_x^z = \frac{1}{6}K_{S4}$
8:	$F_x^z = -\frac{1}{3}K_{S4}$	16:	$F_z^x = \frac{1}{6}K_{S4}$	

Model zdroja S5

Zdroj je umiestnený v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Simulovaný je dvojitou dvojicou síl, tak ako v prípade zdroja S1. Pôsobisko jednotlivých síl je však rozložené do viacerých bodov v priestore, vid' Obr. 7. Jednotlivé koeficienty síl boli určené tak, aby súčet koeficientov síl, ktoré aproximujú jednu silu z dvojitej dvojice síl, dával jednotku. Označme $K_{S5} = \frac{1}{2h} \frac{1}{h^3} M_{xz} s(t)$.



Obr. 7 Model zdroja S5

1:	$F_z^x = -\frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = -\frac{1}{16}K_{S5}$	15:	$F_x^z = \frac{5}{12}K_{S4}$
2:	$F_z^x = -\frac{1}{12}K_{S5}$		16:	$F_x^z = -\frac{1}{12}K_{S4}$
3:	$F_z^x = -\frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = \frac{1}{16}K_{S5}$	18:	$F_x^z = \frac{1}{12}K_{S4}$

4:	$F_z^x = -\frac{1}{12}K_{S5}$	$F_x^z = -\frac{1}{12}K_{S4}$	19:	$F_z^x = \frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = -\frac{1}{16}K_{S5}$
5:	$F_z^x = -\frac{5}{12}K_{S5}$		20:	$F_z^x = \frac{1}{12}K_{S5}$	
6:	$F_z^x = -\frac{1}{12}K_{S5}$	$F_x^z = \frac{1}{12}K_{S4}$	21:	$F_z^x = \frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = \frac{1}{16}K_{S5}$
7:	$F_z^x = -\frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = -\frac{1}{16}K_{S5}$	22:	$F_z^x = \frac{1}{12}K_{S5}$	$F_x^z = -\frac{1}{12}K_{S4}$
8:	$F_z^x = -\frac{1}{12}K_{S5}$		23:	$F_z^x = \frac{5}{12}K_{S5}$	
9:	$F_z^x = -\frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = \frac{1}{16}K_{S5}$	24:	$F_z^x = \frac{1}{12}K_{S5}$	$F_x^z = \frac{1}{12}K_{S4}$
10:		$F_x^z = -\frac{1}{12}K_{S4}$	25:	$F_z^x = \frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = -\frac{1}{16}K_{S5}$
12:		$F_x^z = \frac{1}{12}K_{S4}$	26:	$F_z^x = \frac{1}{12}K_{S5}$	
13:		$F_x^z = -\frac{5}{12}K_{S4}$	27:	$F_z^x = \frac{1}{16}K_{S5}$	$F_x^z = \frac{1}{16}K_{S5}$

Model zdroja E1

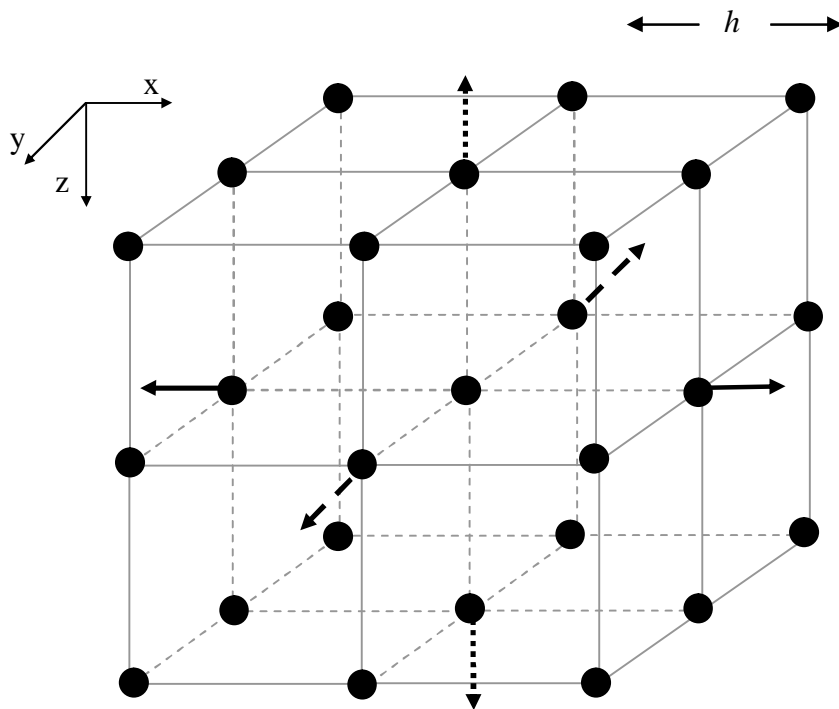
Centrum zdroja je umiestnené v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Ide o tzv. explozívny zdroj, pri ktorom sú nenulové len normálové zložky tenzora momentov, t.j. $M_{xx} = M_{yy} = M_{zz} = M_0$ (M_0 je skalárny seizmický moment), ostatné zložky tenzora sú nulové, viď Obr. 8. Sila F_x^x j znázornená plnou čiarou, F_y^y čiarkovane, F_z^z bodkovane. Veľkosti síl v daných bodoch sú určené vzťahmi

$$F_x^x = \frac{M_{xx}}{2h \cdot h^3} s(t), F_y^y = \frac{M_{yy}}{2h \cdot h^3} s(t), F_z^z = \frac{M_{zz}}{2h \cdot h^3} s(t),$$

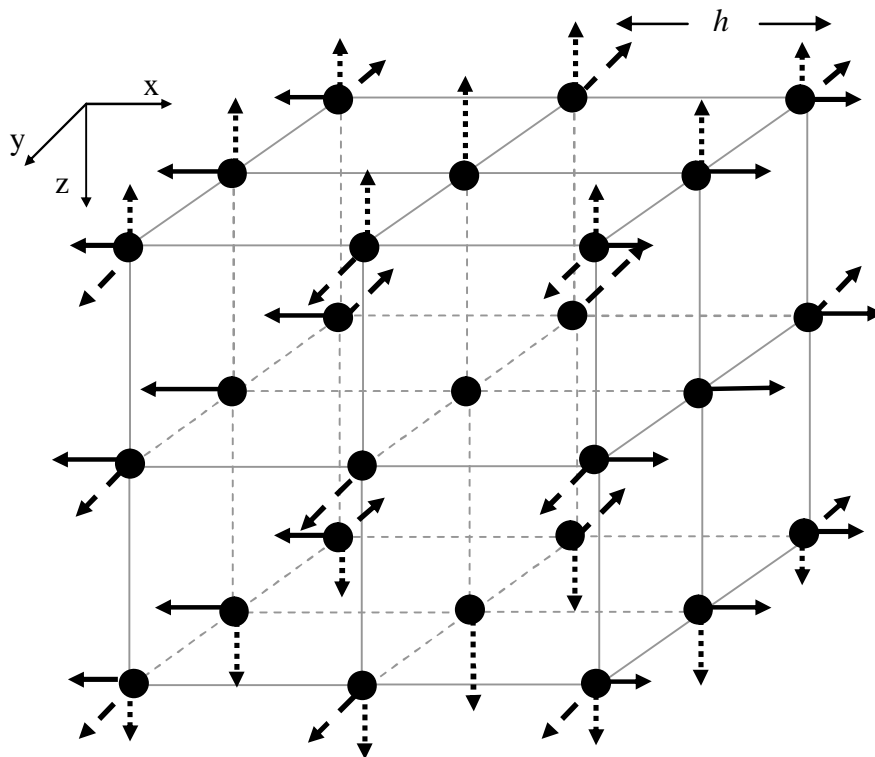
kde $s(t)$ je časová funkcia zdroja.

Model zdroja E2

Centrum zdroja je umiestnené v bode siete, v ktorom sú umiestnené zložky vektora posunutia. Ide o tzv. explozívny zdroj, ako v prípade zdroja E1, sily sú však rozložené do viacerých bodov. Na Obr. 9. je explozívny zdroj s polomerom jeden sieťový krok (merané od centra zdroja), zmenou veľkosti parametra p_e je možné meniť polomer (veľkosť, resp. počet bodov) explozívneho zdroja, pozri kapitolu 3.3.



Obr. 8 Model zdroja E1



Obr. 9 Model zdroja E2