



*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave*

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Diplomová práca

**Konečno-diferenčné modelovanie
voľného povrchu**

Peter Pažák

Vedúci diplomovej práce : Mgr. Jozef Kristek, PhD.

Bratislava, Máj 2005

*Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu
vypracoval samostatne a použitú literatúru som
uviedol v zozname.*

Ďakujem Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD., ktorý ma počas celého obdobia, kedy som prácu pripravoval, odborne viedol. Jeho postrehy, pripomienky a nápady mi boli veľkou inšpiráciou.

Vďaka patrí aj mnohým iným ľuďom, hlavne pracovníkom katedry, ktorí formovali môj pohľad na Prírodu a jej zákony.

OBSAH

Úvod	3
1 Motivácia	5
2 Mechanika kontinua	7
2.1 Pohybová rovnica kontinua.....	8
2.2 Voigtova reprezentácia	9
2.3 Formulácie pohybovej rovnice.....	10
2.4 Hraničné podmienky.....	10
2.5 Metódy riešenia úloh o pohybe kontinua	12
3 Základy metódy konečných diferencií.....	15
3.1 Konečno-diferenčná mriežka, sieť a schéma.....	16
3.2 Vlastnosti konečno-diferenčnej schémy	17
3.3 Aproximácie derivácií.....	17
3.4 Striedavo usporiadané siete	19
3.5 Kombinované a nerovnomerné pravouhlé siete	22
3.6 Podmienka stability a disperzné vzťahy.....	22
3.7 Simulovanie bodového zdroja.....	23
3.8 Simulácia neodrážajúcich hraníc	25
3.9 Dekompozícia vlnového poľa	26
4 Simulovanie vnútorných rozhraní	29
4.1 Homogénny prístup.....	30
4.1.1 Metóda vnorených rozhraní	30
4.2 Heterogénny prístup.....	35
4.2.1 Heterogénna formulácia pohybovej rovnice	35
4.2.2 Ekvivalent jemne zvrstveného anizotropného prostredia.....	38
4.2.3 Aplikácia pre konvenčné siete	41
4.2.4 Zjednodušenie pre striedavo usporiadané siete	42
5 Simulovanie voľného povrchu.....	43
5.1 Rovinný voľný povrch	43
5.1.1 Metóda zrkadlenia napätí.....	44
5.1.2 Metóda AFDA.....	46
5.2 Nerovinný voľný povrch.....	49

5.2.1	<i>Schéma LVTS</i>	50
5.2.2	<i>Zrkadlenie napätí v kombinácii s PML</i>	51
5.2.3	<i>Transformované mriežky</i>	52
5.2.4	<i>Sumarizácia súčasného stavu</i>	53
6	<i>Cieľ diplomovej práce</i>	55
7	<i>Heterogénny prístup pre voľný povrch</i>	57
7.1	<i>Efektívne materiálové parametre</i>	57
7.1.1	<i>Program na výpočet efektívnych materiálových parametrov</i>	61
7.1.2	<i>Výsledky</i>	62
7.1.3	<i>Zhodnotenie výsledkov</i>	64
7.2	<i>Rovinný voľný povrch</i>	65
7.2.1	<i>Oblasti výpočtu efektívnych materiálových parametrov</i>	66
7.2.2	<i>Testy simulácie horizontálneho voľného povrchu</i>	68
7.2.3	<i>Modifikovaný výpočet efektívnych materiálových parametrov</i>	77
7.2.4	<i>Testy modelovania nakloneného voľného povrchu</i>	79
	<i>Záver</i>	80
	<i>Literatúra</i>	81
	<i>Prílohy</i>	84
	<i>Dodatok 1</i>	84
	<i>Dodatok 2</i>	85
	<i>Dodatok 3</i>	86
	<i>Dodatok 4</i>	86

Úvod

V práci sa zaoberáme numerickým modelovaním šírenia seizmických vln v lokálnych štruktúrach metódou konečných diferencií. Pretože v tejto veľmi robustnej a efektívnej doménovej metóde je presné modelovanie problémov s topografiou voľného povrchu s optimálnymi výpočtovými nárokmi veľmi žiadané, zaoberáme sa práve touto problematikou.

V konečno-diferenčnom modelovaní existujú dva principiálne odlišné spôsoby ako zaručiť splnenie okrajových podmienok na rozhraniach – homogénny a heterogénny prístup. Homogénny prístup je možno považovať za klasický. Výpočtová schéma pre vnútorné body je pri rozhraniach modifikovaná s ohľadom na okrajové podmienky aby bol zachovaný rád aproximácie. Pri heterogénnom prístupe sa schéma – spôsob výpočtu konečno-diferenčných aproximácií – pri rozhraniach taktiež mení. Na rozdiel od homogénneho prístupu, pri ktorom ako diskrétny aproximácie materiálových parametrov vyberáme priamo hodnoty funkcií v uzloch mriežky, v heterogénnom prístupe sú tieto hodnoty vypočítané z lokálnych hodnôt v okolí miesta aproximácie. Výpočtová schéma je formálne rovnaká pre všetky body priestoru, pričom ale efektívne materiálové parametre, ktoré vystupujú v jej koeficientoch zabezpečujú priestorovú zmenu. Že je možné schémy na základe heterogénneho prístupu konštruovať a používať, nie je možné dokázať. Numerické testy ukazujú, že pre širokú triedu modelov s vnútornými rozhraniami je to vhodné (Moczo et al. 2002). Na voľnom povrchu, cez ktorý je posunutie nespojité, zatiaľ nebol heterogénny prístup úspešne aplikovaný. Preto prezentujeme algoritmus výpočtu materiálových parametrov v prípade rovinného voľného povrchu a ukazujeme dobrú zhodu s presným riešením. Ďalej testujeme modelovanie nakloneného voľného povrchu, pre ktorý sa nám zatiaľ nepodarilo nájsť parametrizáciu, ktorá by dávala stabilné riešenie. Za najperspektívnejšiu metódou vhodnú na modelovanie voľného povrchu podľa rozboru prístupov používaných na modelovanie voľného povrchu a vnútorných rozhraní považujeme metódu vnorených rozhraní, ktorej základom sa v práci v krátkosti venujeme.

V prvej kapitole sú naznačené najzávažnejšie dôvody, ktoré nás vedú k používaniu numerického modelovania. Druhá kapitola sa venuje formulácii fyzikálnych problémov v mechanike kontinua a metódam hľadania ich riešení. V tretej kapitole je stručný súhrn základných princípov v metóde konečných diferencií. Štvrtá kapitola obsahuje podrobnejší rozbor postupov používaných na simulovanie vnútorných rozhraní. V piatej kapitole sa venujeme rozboru prístupov pre modelovanie voľného povrchu. V šiestej kapitole sú sformulované ciele diplomovej práce. Siedma kapitola obsahuje popis nami navrhovaných spôsobov výpočtu efektívnych materiálových parametrov pre heterogénny prístup modelovania voľného povrchu a numerické testy, ktoré testujú presnosť týchto metód.

1 Motivácia

Dynamické procesy prebiehajúce v zemskom vnútre sú neustále námetom mnohých prác v oblasti fyziky. Nové informácie každodenne zväčšujú množstvo poznatkov, ktoré o Zemi máme a umožňujú nám hlbšie pochopiť mechanizmy dejov v Zemi, vytvárať a zdokonaľovať ich teoretické modely. Výskum zemetrasení a príbuzných javov má navyše aj nesporný praktický význam – pri silných pohyboch v zemskej kôre dochádza k ohrozeniu obyvateľstva a stavieb na jej povrchu. Riziko by bolo znížené na minimum, pokiaľ by seizmológia dokázala dať presné informácie o budúcich zemetraseniach : kedy a kde sa vyskytnú, akú budú mať veľkosť, účinky. Tieto údaje by umožňovali stavať budovy tak, aby boli seizmicky odolné a nepredstavovali riziko pre ľudí, ktorí sa v nich nachádzajú, prípadne by bolo možné zabezpečiť, aby sa v ohrozených oblastiach ľudia v čase zemetrasenia nenachádzali.

Ukazuje sa, že vďaka veľkej zložitosti zemského vnútra krátkodobá predpoveď zemetrasení je veľmi obtiažna, dlhodobejšia je v súčasnosti prakticky nemožná. Na jej realizáciu by bolo potrebné dokonale a detailne poznať vnútornú štruktúru Zeme a rozloženie stavových veličín, aby sme mohli presne určiť nasledujúce udalosti, pretože časový vývoj chaotických systémov je kriticky závislý na počiatkových podmienkach a parametroch systému. Keďže nie je možné priamo merať potrebné veličiny v zemskom vnútre, môžeme ich hodnoty určovať približne na základe pozorovaní na zemskom povrchu. Postup spočíva v postupnom spresňovaní modelu vnútornej štruktúry. Pre východiskový model vyriešime priamu úlohu – určíme seizmický pohyb na povrchu Zeme a porovnáme ho s pozorovaným. Pokiaľ je rozdiel príliš veľký snažíme sa zmeniť parametre modelu tak, aby sme v ďalšom kroku dostali lepšiu zhodu. Takto môžeme riešiť obrátenú úlohu. Doteraz získané údaje sú vzhľadom na komplikovanosť a chaotický charakter skúmaného systému nedostačujúce, preto predpovede na ich základe nemajú v podstate žiadnu výpovednú hodnotu a sú nepoužiteľné. Súčasne vieme, že objem dát vo výpočte je vždy konečný a prakticky nemôžeme vytvoriť dokonalý model. Z toho sa dá usudzovať, že aj pri neustálom zväčšovaní množstva údajov o zemskom telese je možné dostatočne presne vypočítať vývoj len v relatívne krátkom období, preto predpovede zemetrasení pravdepodobne nebudú možné ani v blízkej budúcnosti. Iná možnosť spočíva v existencii prekursora, ktorý by vyskytnutie sa zemetrasenia v predstihu signalizoval, ale dodnes nie je známy taký, ktorý by predchádzal každé zemetrasenie a spoľahlivo určoval čas výskytu.

Makroseizmické účinky, teda účinky na ľudí, objekty, stavby a prírodu, na danom mieste určujú podmienky v zdroji a prostredie, ktorým sa energia do daného miesta dostáva. Kým v homogénnom prostredí by účinky klesali rovnomerne so vzdialenosťou a je ich relatívne jednoducho možné vypočítať, ukazuje sa, že štruktúry v blízkosti lokality môžu výsledný pohyb výrazne ovplyvniť. Veľké úsilie v seizmologickom výskume bolo preto sústredené na nájdenie charakteristík silného seizmického pohybu v lokálnych štruktúrach. Aj keď nie je známe presne kedy, kde a aké veľké zemetrasenie vznikne, je možné odhadnúť maximálne účinky, ktoré by budúce zemetrasenie na danej lokalite mohlo mať a na základe toho stavať budovy s príslušným antiseizmickým dizajnom.

Pre riešenie obrátenej úlohy a určovanie seizmického pohybu na danej lokalite je veľmi dôležité čo najpresnejšie riešiť priamu úlohu. Možnosti experimentálneho zistenia údajov zaujímavých z hľadiska seizmickej bezpečnosti sú značne obmedzené. Vytvoriť v reálnej mierke situáciu, kedy je prostredie v napätom stave, dochádza ku kumulácii napätí a deformácie, potom k náhlemu uvoľ-

neniu energie v dôsledku nevratného posunutia na zlomovej ploche, je prakticky nemožné. Jedinou cestou ako získať experimentálne údaje na potvrdenie teoretických výskumov je sledovanie prírodných javov. Z toho dôvodu teoretický výskum a analýza zaznamenaných údajov sa vzájomne dopĺňajú a sú neoddeliteľné.

Pri popise systému používame objekty s idealizovanou vnútornou štruktúrou – v seizmológii je základom teoretických prístupov mechanika kontinua, ktorá umožňuje previesť mechanické úlohy na matematické a je aplikovateľná v mnohých situáciách, vyskytujúcich sa v geofyzike. Cieľom je zostaviť systém parciálnych diferenciálnych rovníc, stanoviť okrajové a počiatočné podmienky. Analytické riešenia získanej matematickej úlohy je však možné získať len pre relatívne jednoduché geometrie, ktoré sa reálne v prírode vyskytujú zriedka. Snahou je vyvinúť metódu, ktorá by bola pomerne jednoducho aplikovateľná na popis rozmanitých realistických modelov. V mnohých prípadoch je možné skúmaný jav simulovať použitím numerických prístupov.

Z viacerých dôvodov je v seizmológii často využívaná metóda konečných diferencií. O žiadnej z metód, používaných na numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc nie je možné tvrdiť, že by bola najlepšou. Metóda konečných diferencií má však pomerne veľa sympatických vlastností : výpočtovo efektívna, dobre programovateľná a robustná. Podobne ako pre iné doménové metódy najpresnejšie môžeme simulovať pohyb v oblastiach so spojitou zmenou parametrov prostredia. Modelovanie rozhraní, teda zostavenie konečno-diferenčnej schémy, ktorá spĺňa okrajové podmienky, je od začiatkov použitia metódy intenzívne riešenou otázkou. Moczo et al. (2002) navrhli spôsob akým vnútorné rozhrania modelovať a simulácie problémov zo seizmológie ukázali, že presnosť metódy je veľmi dobrá. Podmienky, za ktorých je možné autormi zavedené zjednodušenie aplikovať, nie sú splnené, pokiaľ sa jedná o kontakt "váku" a elastického kontinua – takto je aproximovaný kontakt horniny - atmosféra. Preto cieľom tejto práce je hľadať efektívne a zároveň čo najpresnejšie spôsoby ako modelovať rozhrania a predovšetkým voľný povrch v metóde konečných diferencií.

2 *Mechanika kontinua*

Vnútro zemského telesa je zložené z rozmanitých minerálov a hornín, ktoré majú atomárnu štruktúru. Správanie sa týchto materiálov určujú podmienky, v ktorých sa nachádzajú. Rovnaká chemická zlúčenina za premenlivého tlaku a teploty môže prechádzať rôznymi kryštalickými modifikáciami s rozdielnymi fyzikálnymi vlastnosťami. Na základe kvantových modelov je možné atomárnu štruktúru za daných podmienok vypočítať, v našom probléme vystupuje ale obrovské množstvo takýchto systémov. Štandardne sa pri opise mnohočasticových systémov využívajú štatistické prístupy. Stav systému charakterizujeme vybranými makroskopickými stavovými veličinami, pričom sa neprihliada na atomárnu štruktúru skúmaných objektov. Základom teórie v mechanike kontinua sú postuláty a hypotézy, ktoré sa tvoria na základe zákonitostí získaných z experimentov a pozorovaní.

Na popis parametrov prostredia aj dynamických premenných používame teóriu spojitéch funkcií. Hodnoty týchto funkcií reprezentujú priemerné hodnoty cez také objemy, aby fluktuácie v dôsledku reálnej atomárnej štruktúry boli zanedbateľné. Prostredie je teda reprezentované ako spojité rozloženie všetkých svojich charakteristík – kontinuum.

Pohyb kontinua je charakterizovaný z makroskopického hľadiska poľom posunutí, napät'ový stav poľom zložiek tenzora napätí, bezkontaktné sily poľom objemových síl. Mechanické úlohy je takto možné previesť na matematické, ako parametre a neznáme funkcie v nich vystupujú práve zvolené veličiny, ktorými kontinuum opisujeme. Ďalej budeme používať nasledujúce označenia :

materiálové parametre (sú len funkciami \vec{x})

ρ	hustota materiálu
λ, μ	Lamého elastické parametre
c_{ij}	zložky matice ¹ elastických koeficientov

dynamické premenné (sú funkciami \vec{x}, t)

$\vec{U} \equiv (U, V, W)$	vektor posunutia
$\vec{u} \equiv (u, v, w)$	vektor rýchlosti posunutia
τ_{ij}	zložky tenzora napätí
e_{ij}	zložky tenzora infinitezimálnej deformácie
f_i	zložky hustoty objemových síl

Reálne prostredia však obsahujú miesta, kde sa stýkajú spojité prostredia s rôznymi materiálovými parametrami, pričom zmena vlastností môže nastať aj na vzdialenosti porovnateľnej so vzdialenosťami medzi atómami. V mechanike kontinua takéto kontakty – rozhrania – sú reprezentované nespojitost'ami materiálových parametrov, potom priestorové rozloženie hustoty a elastických parametrov popisujú po častiach spojité funkcie.

¹ tenzor c_{ijkl} vo Voigtovej reprezentácii (kapitola 2.2)

2.1 Pohybová rovnica kontinua

Pri riešení mechanických úloh je možné uvažovať celý neobmedzený priestor pričom parametre prostredia poznáme všade. V realistických úlohách sa však zvyčajne vymedzí určitá oblasť, ktorej správanie nás zaujíma. Je to hlavne z dôvodu, že nikdy nemáme údaje o rozložení vlastností prostredia v celom nekonečnom priestore (to by vyžadovalo mať nekonečne veľa informácií) a väčšinou je možné vplyv okolia na deje v záujmovej oblasti buď zanedbať, alebo reprezentovať okrajovými podmienkami. Pokiaľ sú v určitej oblasti funkcie spojité, zo sformulovaného Newtonovho pohybového zákona v integrálnom tvare možno odvodiť platnosť diferenciálnej formy :

$$\iiint_V \rho a_i dV = \iint_{\partial V} T_i dS + \iiint_V f_i dV \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{du_i}{dt} = \partial_j \tau_{ij} + f_i, \quad (2.1)$$

ktorá sa nazýva pohybová rovnica kontinua a platí pre všeobecné anizotropné viskoelastické kontinuum. My sa ďalej budeme zaoberať len dokonale elastickým izotropným prostredím a budeme používať teóriu malých deformácií. Predpokladáme teda, že pri deformácii častice zostávajú v infintezimálnom okolí svojej pozície pred deformáciou. Za týchto podmienok je možné v (2.1) hustotu uvažovať časovo nezávislú, totálnu deriváciu rýchlosti posunutia nahradiť parciálnou deriváciou zanedbaním advekčného člena a rovnako rýchlosť posunutia je možné nahradiť len parciálnou deriváciou posunutia :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \tau_{ij} + f_i. \quad (2.2)$$

Pre napätia predpokladáme platnosť lineárneho konštitučného vzťahu – Hookovho zákona :

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}, \quad (2.3)$$

kde $e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i})$ sú zložky tenzora infintezimálnej deformácie. Ak dosadíme (2.3) do (2.2) dostaneme PDR 2. rádu, ktorá je podľa klasifikácie hyperbolická.

Veličiny, ktoré vo vzťahoch vystupujú sú funkciami polohy pred deformáciou telesa, pretože však deformácie uvažujeme veľmi malé, obidva spôsoby opisu pohybu kontinua – Lagrangeov aj Eulerov je možné stotožniť.

Ak chceme nájsť neznáme funkcie (U_i, τ_{ij}) , musíme riešiť systém (2.2), (2.3). Aby bola úloha špecifikovaná úplne, je nutné zvoliť počiatočné podmienky² a sformulovať okrajové podmienky na hraniciach spojitých podoblastí (pretože v seizmológii väčšinou poznáme na hranici posunutia alebo napätia, sú to väčšinou Dirichletove alebo Neumannove okrajové podmienky).

² rovnica (2.2) je druhého rádu, počiatočné podmienky sa teda vzťahujú na hodnoty posunutí a rýchlostí v čase $t = 0$, napätia vypočítame z (2.3)

2.2 Voigtova reprezentácia

Kvôli názornosti a zjednodušeniu zápisov vzťahov je vhodné používať Voigtovu reprezentáciu. Použiť ju možno vďaka symetriám tenzorov τ_{ij} , e_{ij} a c_{ijkl} . Formálne spočíva v nahradení dvojice indexov jedným podľa schémy :

$$\begin{array}{lll} 11 \rightarrow 1 & 22 \rightarrow 2 & 33 \rightarrow 3 \\ 23 \rightarrow 4 & 13 \rightarrow 5 & 12 \rightarrow 6 \end{array}$$

Takto sa rank tenzorov zmení na polovičný, tenzor napätia a deformácie je možné zapísať ako vektory

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &\rightarrow \tau_\alpha, \\ e_{ij} &\rightarrow e_\alpha, \\ c_{ijkl} &\rightarrow c_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

Hookov zákon (2.3) má v tomto značení tvar $\tau_\alpha = c_{\alpha\beta} e_\beta$ alebo maticovo

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ \cdot & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ \cdot & \cdot & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{55} & c_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

kde \cdot nahrádza prvky symetrické podľa hlavnej diagonály.

Prvky matice c určujú, aký typ anizotropie má elastické teleso. Pre elastické izotropné teleso máme dva nezávislé elastické koeficienty λ a μ :

$$c = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Explicitne sme túto maticu uviedli, pretože niektorí autori, napr. Schönberg a Muir (1989) koeficient 2 v c_{44} , c_{55} , c_{66} zahŕňajú do vektora napätí, teda

$$\vec{e} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{44}, 2e_{55}, 2e_{66})$$

a preto c_{44} , c_{55} , c_{66} majú v ich prácach hodnotu μ .

2.3 Formulácie pohybovej rovnice

Podľa typu úlohy je často výhodné formulovať a riešiť systém (2.2), (2.3) spolu s okrajovými a počiatočnými podmienkami v iných premenných ako sú napätia a posunutia. Formuláciu v posunutíach a napätíach (DS – displacement - stress)

$$\begin{aligned}\rho\ddot{U}_i &= \partial_j \tau_{ij} + f_i, \\ \tau_{ij} &= c_{ijkl} U_{k,l},\end{aligned}\tag{2.6}$$

možno prepísať na formuláciu len v posunutíach (D – displacement)

$$\rho\ddot{U}_i = \partial_j (c_{ijkl} U_{k,l}) + f_i,\tag{2.7}$$

v rýchlostiach a napätíach (VS – velocity - stress)

$$\begin{aligned}\rho\dot{u}_i &= \partial_j \tau_{ij} + f_i, \\ \dot{\tau}_{ij} &= c_{ijkl} u_{k,l},\end{aligned}\tag{2.8}$$

alebo v posunutíach, rýchlostiach a napätíach (DVS – displacement - velocity - stress)

$$\begin{aligned}\rho\dot{u}_i &= \partial_j \tau_{ij} + f_i, \\ \dot{U}_i &= u_i, \\ \tau_{ij} &= c_{ijkl} U_{k,l}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Kritériom na výber formulácie môže byť napr. :

- jednoduchšie vyjadrenie okrajových podmienok,
- ak nás zaujímajú hodnoty konkrétnej veličiny, je výhodnejšie ak hodnoty dostaneme priamo z výpočtu a nie je ich potrebné zo získaných výsledkov počítať,
- jednoduchšie aproximácie jednotlivých členov (pri použití približných metód),
- efektívnejšia implementácia na počítači.

My budeme v ďalších úvahách používať hlavne formuláciu VS a DVS.

2.4 Hraničné podmienky

Vnútorne hranice predstavujú styk dvoch materiálov s rôznymi vlastnosťami. Priestorové ohraničenie modelu tvoria vonkajšie rozhrania. Na každom z nich vieme z fyzikálnych úvah určiť tzv. okrajové podmienky – podmienky, ktoré dynamické premenné spĺňajú na rozhraní. My sa síce budeme zaoberať najmä hranicami medzi dvoma pevnými látkami a pevnou látkou a "vákuom", uvedieme však aj podmienky pre iné typy. Uvažujeme tieto prostredia : pevné látky (S – solid), tekutiny (F – fluid, F_i – inviscid fluid) a vákuum (V – vacuum). Potom môžeme rozlíšiť nasledujúce typy hraníc s príslušnými hraničnými podmienkami :

rozhranie medzi	podmienky pre vektor napätia	podmienky pre posunutia
S / S, F / F, F / S	spojitý	spojité
F _i / S, F _i / F _i	spojitý	spojité normálové zložky
V / F, V / S	nulový	–

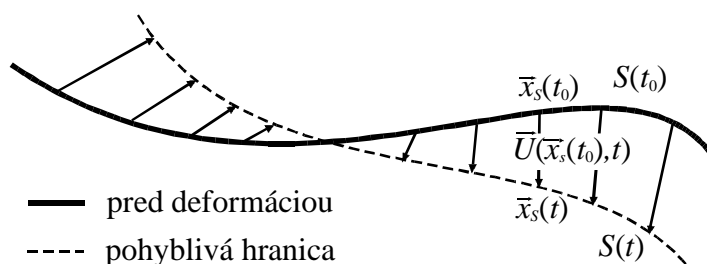
kde vektor napätia T_i môžeme vypočítať z tenzoru napätí podľa Cauchyho vzťahu $T_i = \tau_{ij}n_j$.

Reálne sa v prírode nikde nevyskytuje dokonalé vákuum. Je však časté, že za rozhraním sa nachádza prostredie charakterizované rádovo menšími hodnotami materiálových parametrov ako v ostatnej časti modelu. V takom prípade je možné zaviesť nasledujúce priblíženie :

- zanedbáme hustotu menej hmotného prostredia
- jeho prítomnosť môžeme reprezentovať nenulovou hodnotou tlaku / napätia na hranici

Toto zjednodušenie sa považuje za oprávnené, pretože do druhého prostredia prechádza len zanedbateľná časť energie vln. Pokiaľ zanedbáme aj tlak na rozhraní (menej hmotné prostredie nahradíme vákuom), hranica je "voľná", pretože z jednej strany nie je obmedzovaná. Tento typ rozhrania budeme nazývať **voľný povrch**. Podmienka na voľnom povrchu znamená potom nulovosť vektora napätí na hranici zo strany hmotnejšieho prostredia.

Hraničné podmienky platia presne na rozhraní medzi dvoma časťami kontinua, táto hranica je vo všeobecnosti pohyblivá. Pokiaľ je nutné presne sledovať polohu rozhrania, môže to do problému vniesť vážnu matematickú komplikáciu. Aj relatívne jednoduché úlohy často vyžadujú použitie numerických metód a špeciálny prístup k modelovaniu voľného povrchu. Je potrebné neustále poznať pozíciu rozhrania – počítat jeho časový vývoj a zaručiť platnosť okrajovej podmienky. V seizmológii je možné vyhnúť sa týmto ťažkostiam, pretože uvažujeme infinitezimálne deformácie. Namiesto splnenia okrajových podmienok na skutočnej pohybujúcej sa hranici predpisujeme ich platnosť pre polohu rozhrania pred deformovaním kontinua (Obr. 1).



Obr. 1 Poloha rozhrania

Pokiaľ je vlnová dĺžka oveľa väčšia ako posunutia, požadujeme splnenie podmienok, ktoré vedú na matematicky jednoduchšiu úlohu :

$$\begin{aligned} \bar{x}_s(t) &= \bar{x}_s(t_0) + \bar{U}(\bar{x}_s(t_0), t) \\ P|_{\bar{x}_s(t)} &\doteq P|_{\bar{x}_s(t_0)} \quad |\bar{U}| \ll \lambda_{\min} \end{aligned}$$

kde P je symbolické označenie pre okrajovú podmienku a λ_{\min} minimálna vlnová dĺžka vlnenia, ktoré sa modelom bude šíriť. Medzi týmto predpokladom a metódami riešenia mechanických úloh o pohybe kontinua, ktoré sú stručne uvedené v ďalšej kapitole, existuje určitý vzťah – pri použití nízkofrekvenčných metód frekvencie budiaceho signálu sú zhora ohraničené, preto $\lambda_{\min} = v_{\min} / f_{\max}$ (kde v_{\min} je minimálna rýchlosť šírenia vlnenia) zdola ohraničuje vlnové dĺžky vlnenia.³

Pri modelovaní voľného povrchu budeme požadovať splnenie okrajovej podmienky spojitosti vektora napätia na rozhraní :

$$T_i = \tau_{ij} n_j = 0, \quad (2.10)$$

pretože vo vákuu sú napätia nulové. Pre posunutia nie je možné špecifikovať podobnú podmienku, pretože vo vákuu nie sú definované.

2.5 Metódy riešenia úloh o pohybe kontinua

Rovnice popisujúce pohyb kontinua je možné riešiť analyticky väčšinou v prípadoch relatívne jednoduchých modelov. Realistické modely často obsahujú zložité funkčné závislosti materiálových parametrov od priestorových súradníc a nepravidelné rozhrania. Pri zostavovaní matematického modelu zodpovedajúcemu danej mechanickej úlohe pre každú podoblasť bez rozhraní platí pohybová rovnica, ktorá je systémom parciálnych diferenciálnych rovníc. Na každom z rozhraní požadujeme splnenie okrajových podmienok. Pre jednoduché geometrie modelov sa nám môže podariť vďaka nejakej špeciálnej vlastnosti alebo symetrii nájsť riešenie v uzavretej forme alebo vo forme nekonečného radu. Vo všeobecnosti ale nemáme analytickú metódu, ktorá by bola dobre aplikovateľná na riešenie rozmanitých realistických úloh. Veľmi často je však napriek tomu, že presné riešenie nie je známe, možné nájsť s vysokou presnosťou jeho hodnoty v ľubovoľnom bode pomocou približných metód. Väčšinou postačuje, ak je možné určiť riešenie s dopredu zvolenou presnosťou .

Približné riešenie seizmologických úloh možno získať rôznymi metódami (uvádzame len najznámejšie z nich) :

- **vysokofrekvenčné** : lúčová metóda
- **nízkofrekvenčné** :
 - doménové metódy : metóda konečných diferencií (FDM), konečných prvkov (FEM), spektrálnych prvkov (SPEM), pseudospektrálna metóda (PSM)
 - hraničné metódy : metóda hraničných integrálov (BIEM), hraničných prvkov (BEM), diskretných vlnových čísel (DWNM)
- **hybridné metódy**

Základné delenie je podľa frekvencie, resp. vlnových dĺžok, pre ktoré je metóda určená. Pojem vysokofrekvenčná metóda znamená, že je použiteľná na výpočet poľa posunutí vlnenia s vlnovými dĺžkami $\lambda \ll L$, kde L je minimum veličín rozmeru dĺžky, ktoré charakterizujú nehomogenitu prostredia v danom modeli (rozmary nehomogenít, zakrivenie rozhraní, pomer veľkosti gradientu

³ Teraz nepripúšťame $v_{\min} = 0$. Minimum je určené z oblastí, kde prostredie má nenulové elastické parametre a hustoty (oblasti, kde sa nachádza vákuum sa uvažujú osobitne)

rýchlosti a veľkosti rýchlosti). Pri výbere metódy musíme brať do úvahy charakter úloh, ktorých riešenia chceme získať. V tejto práci našim cieľom nie je modelovať zemetrasenia z globálneho hľadiska, budeme sa sústreďovať na lokálne efekty zemetrasení. Vznikajú väčšinou v lokalizovaných štruktúrach v blízkosti zemského povrchu. Vlnové pole vyžiarené seizmickým zdrojom, ktorý sa môže nachádzať vnútri alebo mimo štruktúry, v nej po násobných odrazoch, lomoch a difrakcii interferuje, pričom môže dôjsť ku značnému zosilneniu a skomplikovaniu pohybu, čo sa prejavuje výraznými anomáliami charakteristík seizmického pohybu pôdy v porovnaní s priestorom mimo štruktúry.

Lúčová metóda je založená na asymptotickom priblížení $\omega \rightarrow \infty$, využíva sa hlavne pri určovaní štruktúr pod povrchom, stavby Zeme a pri vyhľadávaní nerastných surovín. Pre určovanie seizmického pohybu počas zemetrasení pri vzniku lokálnych efektov z nášho hľadiska sú dôležitejšie nízkofrekvenčné metódy.

Lokálne efekty sú skúmané hlavne preto, že najväčšie nebezpečenstvo pri zemetrasení nepredstavuje samotný pohyb horninového prostredia ale hlavne stavebné štruktúry, ktoré sa rozkmitajú na svojej rezonančnej frekvencii. Takto dôjde k presiahnutiu medze súdržnosti materiálu a po strate stability k zrúteniu stavieb. Interval rezonančných frekvencií bežných stavieb je 0,1 až 20 Hz. Interval rýchlostí šírenia seizmických vln je rádovo 100 – 1000 m/s. Pre základný mód vlnová dĺžka je blízka rozmerom celej štruktúry, teda pre rádový odhad rozmerov lokálnej štruktúry (a rezonančnej vlnovej dĺžky) máme :

$$l \approx c / f \doteq 10 - 10000 \text{ m},$$

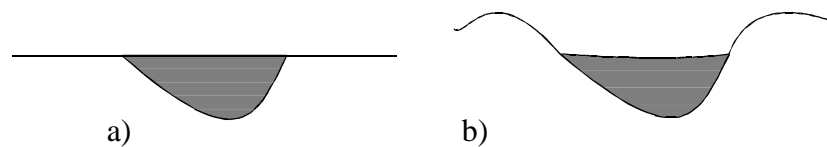
pričom v tomto intervale sú rozmery väčšiny geologických štruktúr v blízkosti povrchu Zeme. Nehomogenity majú teda rozmery porovnateľné s vlnovými dĺžkami vln, o ktoré sa zaujímate, a preto musíme použiť niektorú zo skupiny nízkofrekvenčných metód.

Hraničné metódy dávajú vo väčšine prípadov presnejšie riešenie ako doménové metódy, ich pamäťové aj výpočtové nároky ale značne narastajú pre komplikovanejšie geometrie modelov, pretože výpočtová oblasť musí byť rozdelená na homogénne podoblasti, čo môže byť problematické splniť. Doménové metódy sú vo všeobecnosti výpočtovo efektívnejšie ale súčasne menej presné (efektívnosť metódy znamená, že na dosiahnutie určitej presnosti je potrebný relatívne malý počet výpočtových operácií).

Využiť výhody a potlačiť nevýhody jednotlivých metód je možné ich kombináciou s ohľadom na ich efektívnosť a presnosť – tzv. hybridné metódy. Keďže algoritmy pracujú súčasne, najmenej efektívna z metód určuje celkovú efektívnosť, preto touto počítame čo najmenší objem. Ťažkosti pri hybridnom modelovaní môžu nastať, ak nie je možné zabezpečiť na styku oblastí počítaných rôznymi metódami ich dobrú komunikáciu – odovzdávanie si hodnôt počítaných veličín.

Bežne sa pri vyhodnocovaní seizmického ohrozenia používali iba odhady pohybov pri jednorozmernej vertikálnej rezonancii v systéme vrstiev na polpriestore. Už prvé detailnejšie štúdie z oblasti lokálnych efektov (Bard a Bouchon, 1980, 1985), ktoré sa zaoberali 2D modelovaním sedimentmi vyplnených údolí poukazujú na dôležitosť uvažovať pri výpočtoch seizmického pohybu laterálne nehomogenity a nerovinné, prípadne sklonené rozhrania. Ďalšie práce napr. Moczo a Bard (1993) ukazujú, že na výpočet lokálnych efektov je výhodné použiť metódu konečných diferencií (FDM – finite difference method). Trojrozmerné konečno-diferenčné (FD) modelovanie štruktúr

s vnútornými rozhraniami a rovinným voľným povrchom je rozoberané vo viacerých prácach. Z pozorovaní ale aj teoretických modelov je známe, že podobne ako nerovinné vnútorné rozhrania, má na seizmický vplyv významný účinok aj prítomnosť nerovinného voľného povrchu. Kým napríklad metóda konečných prvkov (FEM – finite element method) umožňuje prispôbením siete rozhraniu relatívne presne a prirodzene nerovinný voľný povrch modelovať, pre metódu konečných diferencií je to problematické, preto z tohoto hľadiska je výhodnejšie použiť metódu konečných prvkov.



Obr. 2

Model sedimentárneho údolia

a) so zanedbaním topografie

b) s uvážením reálnej topografie

3 Základy metody konečných diferencíí

Táto metóda je neustále veľmi frekventovane používaná pri modelovaní dynamických dejov v rôznych oblastiach fyziky, predovšetkým kvôli svojim prednostiam, ktorými sú hlavne výpočtová efektívnosť, relatívne jednoduchá programová implementácia a robustnosť (t.j. použiteľnosť na širokú triedu modelov). Kým metóda konečných elementov dnes dominuje pri riešení eliptických problémov, v oblasti hyperbolických a dynamických úloh je to pravdepodobne metóda konečných diferencíí. Od jej počiatkov v 50. a 60. rokoch, kedy sa hľadali predovšetkým riešenia štandardných parciálnych diferenciálnych rovníc, sa neskôr výskum sústredil na rôzne špeciálne problémy, ktoré klasickými prístupmi nie sú riešiteľné. Za obdobie vývoja metódy boli jej vlastnosti v mnohých smeroch čoraz podrobnejšie skúmané. Napriek tomu dodnes zostali otvorené niektoré veľmi zaujímavé principiálne otázky, odpovede na ne by mohli priniesť skvalitnenie konečno-diferenčného modelovania.

V súlade s vybranou oblasťou aplikovania sa jedná o nízkofrekvenčnú metódu. Umožňuje simulovať vlnenie s vlnovými dĺžkami porovnateľnými s rozmermi charakterizujúcimi nehomogenitu prostredia v uvažovanom modeli. Výklad základov FDM, ktoré tu len stručne uvádzame, je napríklad v učebnici Moczo (1989). Tu sa obmedzíme len na metódy, ktoré súvisia s elastickým modelovaním, modelovaním voľného povrchu a zadefinujeme hlavne pojmy a prístupy, ktoré sú používané v ďalších úvahách alebo boli využité pri simuláciách. Dôkazy tvrdení, ktoré len slovné uvádzame možno nájsť napr. v Morton a Mayers (1994), Mitchell a Griffiths (1980) a inej literatúre.

Pretože metóda konečných diferencíí patrí tiež medzi tzv. mriežkové metódy (grid point methods), výpočtová oblasť je v nej reprezentovaná ako súbor hodnôt elastických (prípadne anelastických) parametrov, hustoty, a polí posunutí (napätí, rýchlostí – v závislosti na zvolenej formulácii) v mriežkových bodoch. Hodnoty spojitéch, prípadne po častiach spojitéch funkcií, ako ich zavádza mechanika kontinua, sa uchovávajú len v týchto bodoch. Podobne čas je reprezentovaný diskretnými hodnotami, väčšinou rovnomerne rozdelenými s časovým krokom Δt .

Pred samotným výpočtom je nutné vytvoriť konečno-diferenčný model úlohy:

- pokryť výpočtovú oblasť mriežkou,
- určiť diskretné hodnoty materiálových parametrov,
- aproximovať diferenciálne operátory konečno-diferenčnými a aproximovať okrajové podmienky \Rightarrow konštrukcia konečno-diferenčného systému rovníc,
- aproximovať počiatočné podmienky.

Taktiež je dôležité analyzovať vytvorenú schému – hlavne vyšetriť, či je s daným problémom konzistentná, či je stabilná a konvergentná.

3.1 Konečno-diferenčná mriežka, sieť a schéma

Mriežkou budeme nazývať množinu uzlových bodov, v ktorých môžu byť lokalizované diskrétné aproximácie materiálových parametrov a dynamických premenných. Princiipiálne je možné vytvoriť mriežku s ľubovoľnou geometriou, ale väčšinou nie je praktické používať mriežky komplikovaných tvarov, pretože to komplikuje aproximáciu derivácií. Deformovanie mriežky však môže byť výhodné, pokiaľ chceme sledovať tvar rozhrania, na ktorom je nutné aproximovať okrajové podmienky, alebo ju chceme zhustiť v miestach, kde je potrebné model vzorkovať jemnejšie. Niektoré metódy využívajú práve mriežky komplikovanej geometrie (FEM), ale na generovanie mriežky je potrebné používať veľmi komplikovaný algoritmus. V metóde konečných diferencií sa uprednostňujú rovnomerné mriežky a to dokonca aj pre problémy s pohybujúcimi sa rozhraniami. Namiesto lagrangeovských mriežok zviazaných s rozhraním sa používajú rovnomerné mriežky a metóda schopná modelovať rozhrania v polohe mimo mriežkových bodov (napr. metóda vnorených rozhraní, kapitola 4.1.1).

Pokiaľ sa snažíme skonštruovať schému aplikovateľnú na všeobecnú úlohu a nemôžeme o geometrii modelu dopredu nič predpokladať, štandardne sa používa rovnomerná kartézská priestorová mriežka definovaná ako množina bodov so súradnicami (x_i, y_j, z_k) :

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + ih \\y_j &= y_0 + jh \\z_k &= z_0 + kh\end{aligned}$$

v našom prípade s rovnakým krokom h v smere súradnicových osí. Čas možno považovať za štvrtý rozmer mriežky a je reprezentovaný časovými hladinami $t_m = t_0 + m\Delta t$.

Konečno-diferenčnú mriežku spolu s priestorovým rozmiestnením materiálových parametrov a diskrétnych aproximácií dynamických premenných budeme nazývať **konečno-diferenčná sieť**.⁴ Táto spolu so zostaveným systémom konečno-diferenčných rovníc tvoria výpočtovú **schému**.

Explicitné výpočtové schémy v každom bode počítajú aproximáciu v novom čase priamo z hodnot v predchádzajúcej hladine, sú výpočtovo nenáročné, veľkosť časového a priestorového kroku je však obmedzovaná podmienkou stability (kapitola 3.2). V implicitných schémach na nájdenie hodnoty aproximácie v novom čase je potrebné riešiť rovnicu, táto je zviazaná s rovnicami vo vedľajších bodoch. Na riešenie veľkého systému zviazaných rovníc je nutné použiť maticové alebo iteratívne metódy aby sme získali aproximáciu v novom čase, veľkosť časového a priestorového kroku však nie je obmedzená žiadnou podmienkou. Pretože však pri explicitnom výpočte na výpočet v jednotlivých časových hladinách je potrebných podstatne menej operácií, výpočtový čas je zredukovaný pričom aj pamäťové nároky sú menšie. V ďalšom schéma znamená vždy explicitnú výpočtovú schému.

⁴ väčšinou sa v literatúre nerozlišuje mriežka (mesh, grid) a sieť

3.2 Vlastnosti konečno-diferenčnej schémy

V krátkosti uvedieme definície spojené s matematickými predpokladmi kladenými na schému. Konečno-diferenčná schéma je **konzistentná** so systémom diferenciálnych rovníc ak pri zmenšovaní Δt a h je rozdiel diferenciálneho operátora L a konečno-diferenčného operátora L_{Δ} (ktoré pôsobia na ľubovoľnú spojité funkciu u) v limite rovný nule v každom bode výpočtovej oblasti. Tento rozdiel nazývame aj lokálna zaokrúhľovacia chyba (local truncation error). Pokiaľ aproximujeme derivácie použitím Taylorových rozvojov je rozdiel operátorov veličina rádu $O(\Delta t^n) + O(h^k)$, a teda vlastnosť konzistencie je splnená.

Hovoríme, že konečno-diferenčné riešenie **konverguje** k presnému riešeniu, ak v každom bode výpočtovej oblasti pri zmenšovaní časového a priestorového kroku je rozdiel konečno-diferenčného riešenia a presného riešenia pri zmenšovaní Δt a h v limite rovný nule. Konečno-diferenčná schéma je konvergentná, ak na určitej triede vstupných údajov konečno-diferenčné riešenia konvergujú k presnému riešeniu.

Stabilita schémy znamená, že vzdialenosť dvoch riešení nesmie s postupom času neobmedzene rásť vzhľadom na vzdialenosť počiatočných podmienok. Častejšie sa ale využíva iná definícia stability, ktorá hovorí, že amplitúdy jednotlivých Fourierových módov, ktoré sa šíria schémou nesmú s časom neobmedzene rásť (vzhľadom na to, že očakávame fyzikálne riešenia, ktoré sú väčšinou ohraničené), alebo sa utlmovať. Používa sa pri von Neumannovej analýze stability FD schém.

Konzistenciu, konvergenciu a stabilitu viaže spolu tvrdenie :

Ak je schéma konzistentná s daným problémom a stabilná, konečno-diferenčné riešenie konverguje k presnému riešeniu (tzv. **Laxova veta o ekvivalencii**).

Pokiaľ niektorú z uvedených podmienok nie je možné splniť pri ľubovoľných hodnotách h a Δt , ale len pri určitom vzťahu medzi nimi, potom hovoríme o podmienenej konzistentnosti, konvergencii alebo stabilite. Väčšinou schému zostavíme tak, aby bola konzistentná. Zistíme za akej podmienky je stabilná. Potom z Laxovej vety vyplýva, že schéma je podmienene konvergentná.

3.3 Aproximácie derivácií

Keďže chceme riešiť systém parciálnych diferenciálnych rovníc pre funkcie, ktoré popisujú časový vývoj systému, a ich hodnoty sú známe len v určitých diskretných bodoch a časoch, je potrebné aproximovať priestorové aj časové derivácie konečno-diferenčnými vzorcami. Aproximovať deriváciu spojitaj funkcie pomocou jej diskretných hodnôt možno využitím Taylorových rozvojov. Pritom väčšinou postačuje brať do úvahy len niekoľko prvých členov aj vzhľadom na to, že priestorové a časové zmeny riešenia sú malé vzhľadom na diskretizačné kroky h a Δt . Dobré vlastnosti pri aproximovaní priestorových derivácií vykazujú centrálné FD vzťahy. Je ich možné jednoducho odvodiť napr. metódou neurčitých koeficientov, ktoré nájdeme ako riešenie systému rovníc. Zapíšeme Taylorove rozvoje s presnosťou do 4. rádu :

$$f(x+d, y, z, t) = f(x, y, z, t) + d \partial_x f(x, y, z, t) + \frac{1}{2} d^2 \partial_x^2 f(x, y, z, t) + \frac{1}{6} d^3 \partial_x^3 f(x, y, z, t) + O(d^4) \quad (3.1)$$

$$f(x-d, y, z, t) = f(x, y, z, t) - d \partial_x f(x, y, z, t) + \frac{1}{2} d^2 \partial_x^2 f(x, y, z, t) - \frac{1}{6} d^3 \partial_x^3 f(x, y, z, t) + O(d^4) \quad (3.2)$$

Neznámymi sú $\partial_x f$ a $\partial_x^2 f$. Odčítaním (3.2) od (3.1) dostaneme vzťah pre aproximáciu derivácie s presnosťou do 2. rádu :

$$\partial_x f(x, y, z, t) = \frac{1}{2d} (f(x+d, y, z, t) - f(x-d, y, z, t)) + O(d^2) \quad (3.3)$$

tento sa využíva hlavne pri aproximácii časových derivácií :

$$\partial_t f(x, y, z, t) = \frac{1}{2\Delta t} (f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t - \Delta t)) + O(\Delta t^3) \quad (3.4)$$

sčítaním (3.1) a (3.2) dostávame vzťah pre aproximáciu druhej derivácie s presnosťou do 2. rádu :

$$\partial_x^2 f(x, y, z, t) = \frac{1}{d^2} (f(x+d, y, z, t) - 2f(x, y, z, t) + f(x-d, y, z, t)) + O(d^2)$$

Ak napíšeme (3.1) a (3.2) pre $d = h$ a $d = 3h$, dostaneme sústavu rovníc :

$$\begin{pmatrix} f(x+h, y, z, t) \\ f(x-h, y, z, t) \\ f(x+3h, y, z, t) \\ f(x-3h, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 3 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ 1 & -3 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x, y, z, t) \\ h f_x(x, y, z, t) \\ h^2 f_{xx}(x, y, z, t) \\ h^3 f_{xxx}(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

ktorú riešime vzhľadom na derivácie, môžeme získať centrálnu konečno-diferenčnú aproximáciu pre prvú deriváciu s presnosťou do 4. rádu :

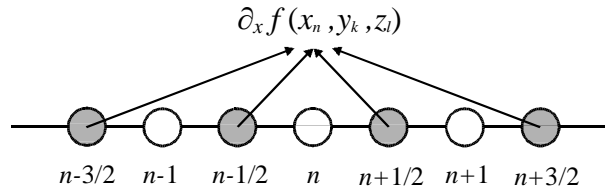
$$\partial_x f(x, y, z, t) = \frac{9}{16h} (f(x+h, y, z, t) - f(x-h, y, z, t)) - \frac{1}{48h} (f(x+3h, y, z, t) - f(x-3h, y, z, t)) + O(h^4) \quad (3.5)$$

Priestorovú deriváciu môžeme teda aproximovať lineárnou kombináciou hodnôt v okolitých bodoch a nepotrebujeme pritom poznať hodnotu funkcie v samotnom bode, kde ju počítame.

Analogickým postupom je možné odvodiť aj aproximácie vyššieho rádu. Ak ich pri výpočte používame, na dosiahnutie porovnateľnej presnosti nám stačí voliť väčší priestorový krok h , aký by sme potrebovali pri aproximáciách 2. rádu. Používať aproximácie vyššieho rádu je vhodné, pretože redukujú pamäťové aj výpočtové nároky, hlavne pokiaľ sa funkcie menia pomaly. Za voľným povrchom nie sú posunutia definované, preto je schému potrebné modifikovať, aby pri aproximáciách bol zachovaný rád aproximácie (homogénny prístup, kapitola 4.1). Pri modelovaní vnútorných rozhraní sa používa presnosť do 4. rádu v priestore a do 2. rádu v čase (FD schéma je uvedená v prílohe 1). Pretože pri heterogénnom prístupe voľný povrch modelujeme ako vnútorné rozhranie, takýto rád budeme aplikovať aj na voľný povrch.

3.4 Striedavo usporiadané siete

Pokiaľ použijeme vzťahy (3.4) a (3.5), môžeme zostaviť konvenčnú konečno-diferenčnú schému kde v každom bode priestorovej mriežky máme lokalizované všetky premenné. Keď si pripomenieme formulácie pohybovej rovnice (2.8) a (2.9), pri výpočte napätí používame priestorové derivácie posunutí a naopak. Posuňme vzájomne polohy napätí a posunutí o polovicu priestorového kroku. Toto je ekvivalentné použitiu mriežky s polovičným priestorovým krokom pri vynechaní pozícií s celočíselným indexom pre posunutia a poločíselným pre napätia.



Obr. 3 Výpočet derivácie na striedavo usporiadanej sieti

Z Obr. 3, ktorý zobrazuje túto situáciu v jednom priestorovom rozmere, je zrejmé, že pri aproximácii (3.5) pokiaľ f reprezentuje napríklad jednu zložku posunutia nie je potrebné ju pri danom rozložení uchovávať pre pozície s poločíselným indexom. Takto dostávame mriežku s priestorovým krokom $h/2$, kde počet premenných, ktoré je potrebné uchovávať, je polovičný ako je pre konvenčnú sieť. Redukciu je možné urobiť aj pre materiálové parametre (hustota je potrebná v miestach posunutí, elastické parametre v miestach napätí). Pre 3D schému je úspora ešte znásobená. Vzťah (3.5) má potom tvar :

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y, z, t) = & \frac{9}{8h} \left(f(x + \frac{1}{2}h, y, z, t) - f(x - \frac{1}{2}h, y, z, t) \right) \\ & - \frac{1}{24h} \left(f(x + \frac{3}{2}h, y, z, t) - f(x - \frac{3}{2}h, y, z, t) \right) + O(h^4) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Takéto schémy prvý krát použil Madariaga (1976), populárnymi sa stali po ich úspešnom použití v prácach Virieux (1984, 1986). V trojrozmernej sieti je usporiadanie materiálových parametrov a premenných veľmi dobre prispôsobené práve vzhľadom na aproximovanie derivácií podľa (3.6). Vytvoriť ju možno periodickým umiestňovaním základnej bunky s hranou h .

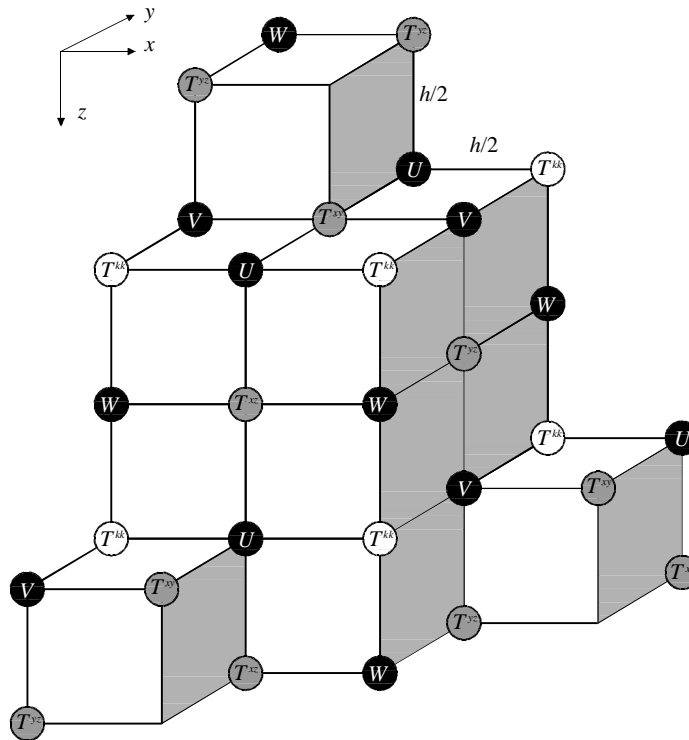
Na Obr. 4 sú pozície diskretných premenných v 3D striedavo usporiadanej sieti. Teleso, ktoré je na obrázku, je vytvorené odobratím niektorých osmín základných buniek a umožňuje predstaviť si sieť v priestore. Jednoducho možno v danom bode aproximovať derivácie tých funkcií, ktorých hodnoty máme k dispozícii v bezprostrednej blízkosti danej polohy v smere niektorej súradnej osi. Smer spojnice pozícií pritom určuje, či je možné počítat' x , y alebo z -ovú deriváciu veličiny. U , V , W označujú polohy, kde uchováваме hodnoty diskretných aproximácií zložiek posunutí (rýchlostí u , v , w pokiaľ sa jedná o formuláciu DVS alebo VS), T^{ij} zložiek tenzora napätí.

Jednoduchým aplikovaním (3.6) možno aproximovať nasledujúce derivácie v pozícii posunutí :

$$\begin{aligned}
U &: \tau_{xz,z}, \tau_{xy,y}, \tau_{xx,x}, \tau_{yy,y}, \tau_{zz,x} \\
V &: \tau_{xy,x}, \tau_{yz,z}, \tau_{xx,y}, \tau_{yy,y}, \tau_{zz,y} \\
W &: \tau_{xz,x}, \tau_{yz,y}, \tau_{xx,z}, \tau_{yy,z}, \tau_{zz,z}
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

Vo formulácii DVS (tiež VS) majú zložky pohybovej rovnice tvar :

$$\begin{aligned}
\rho \dot{u} &= \tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x \\
\rho \dot{v} &= \tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{xz,z} + f_y \\
\rho \dot{w} &= \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \tau_{zz,z} + f_z
\end{aligned}$$



Obr. 4 Umiestnenie diskrétnych aproximácií v sieti

Pri danom usporiadaní môžeme teda potrebné derivácie zložiek tenzora napätí bez problémov aproximovať, podľa (3.7) by bolo možné počítať aj derivácie zložiek tenzora napätí, ktoré nepotrebujeme – sú to derivácie tvaru $\tau_{ii,j}$ ($i \neq j$).

Pri výpočte zložiek tenzora napätí podľa Hookovho zákona (2.4) nemáme k dispozícii všetky priestorové derivácie, ktoré by vyžadoval výpočet pre teleso so všeobecnou anizotropiou. Sieť je usporiadaná tak, aby bolo možné aproximovať derivácie, ktoré je nutné poznať pri výpočte pre izotropné teleso. Podľa Obr. 4 možno počítať v pozíciách napätí nasledujúce derivácie posunutí (namiesto zložiek posunutí možno všade písať zložky rýchlostí posunutí) :

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz} &: U_{,x}, V_{,y}, W_{,z} \\
\tau_{xy} &: U_{,y}, V_{,x} \\
\tau_{xz} &: U_{,z}, W_{,x} \\
\tau_{yz} &: V_{,z}, W_{,y}
\end{aligned}$$

Všetky sa vyskytujú vo vzťahu pre výpočet napätí – Hookovom zákone pre izotropné teleso :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ W_{,z} \\ \frac{1}{2}(V_{,z} + W_{,y}) \\ \frac{1}{2}(U_{,z} + W_{,x}) \\ \frac{1}{2}(U_{,y} + V_{,x}) \end{pmatrix}$$

Neskôr sa ukáže, že pri modelovaní rozhraní je potrebné na ich presnejšiu simuláciu zaviesť do schémy anizotropiu. Môžeme urobiť zovšeobecnenie a namiesto 2 nezávislých elastických koeficientov ich budeme uvažovať 9 – pre každú pozíciu v matici c (2.5), na ktorej je nenulová hodnota v prípade izotropného telesa. Maximálne je teda možné, aby teleso malo ortorombickú anizotropiu :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x & l_{xy} & l_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ l_{xy} & q_y & l_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ l_{xz} & l_{yz} & q_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ W_{,z} \\ \frac{1}{2}(V_{,z} + W_{,y}) \\ \frac{1}{2}(U_{,z} + W_{,x}) \\ \frac{1}{2}(U_{,y} + V_{,x}) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

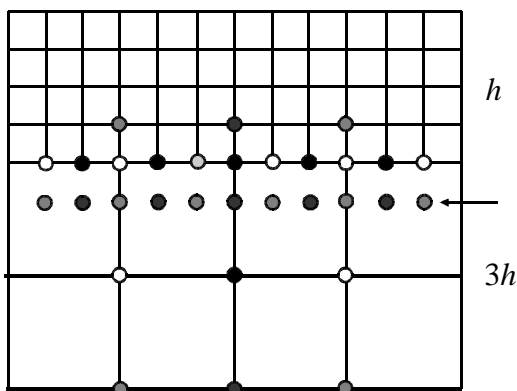
Teraz je možné si uvedomiť jednu z nevýhod striedavo usporiadanej siete. Pre teleso so všeobecnou anizotropiou pri zostavovaní schémy nie je možné použiť priamo vzťah (3.6), bolo by potrebné odvodiť vzťahy pre chýbajúce derivácie.

Ďalším dôležitým faktom o striedavo usporiadaných sieťach je aj to, že v jednom bode nepoznáme celý vektor posunutia ale najviac len jednu jeho zložku. Pri použití metódy konečných diferencií najpresnejšiu hodnotu riešenia dostávame práve pre body, kde je lokalizovaná diskretná aproximácia danej veličiny. Celý vektor posunutia v striedavo usporiadanej sieti nemáme v žiadnom bode, teda nikde nedostávame kompletný seizmogram alebo velocigram (záznam časového priebehu posunutia alebo rýchlosti na danom mieste), a vždy je nutné získať ho interpoláciou aspoň dvoch zložiek (táto nevýhoda nie je však závažná). Oveľa dôležitejší sa tento fakt zdá byť z pohľadu dynamického modelovania seizmického zdroja, kde táto vlastnosť znamená komplikované implementovanie okrajových podmienok na zlomovej ploche. Vhodnejšie na túto úlohu pravdepodobne budú v súčasnosti testované čiastočne striedavo usporiadané siete (partly staggered grid – PSG), ktoré v jednom uzle majú lokalizované všetky zložky posunutia a v druhom všetky zložky tenzora napätí.

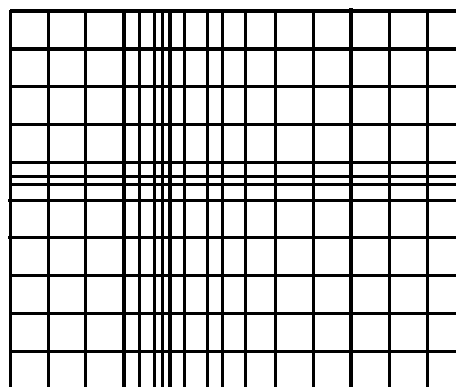
3.5 Kombinované a nerovnomerné pravouhlé siete

Pokiaľ časť modelu tvorí oblasť s pomalou zmenou materiálových parametrov bez ostrých rozhraní, ktorú preto nie je potrebné vzorkovať s takou hustotou, ako iný priestor, je výhodné pre tieto oblasti sieť "zriediť" prechodom ku sieti s väčším priestorovým krokom (napríklad ak pod modelom simulujeme homogénny polpriestor). Prechod môže byť diskontinuuitný alebo spojitý. V prvom prípade sa priestorový krok v redšej sieti volí ako celočíselný násobok kroku h . Tieto siete sa nazývajú kombinované alebo diskontinuuitné pravouhlé siete.

Na Obr. 5 je sieť s prechodom $h \rightarrow 3h$. Na styku sietí pre redšiu sieť máme k dispozícii všetky veličiny v pozíciách, kde ich potrebujeme. Je teda možné použiť štandardné konečno-diferenčné aproximácie, ktoré používame vo vnútri každej siete. Pre jemnejšiu sieť by sme na styku potrebovali hodnoty v pozíciách, kde ich nepoznáme (označené šípkou), aby sme mohli použiť štandardné FD aproximácie. Na hranici v jemnejšej sieti použijeme aproximácie 2. rádu, potom je nutné interpolovať len jednu chýbajúcu hodnotu za hranicou. Interpolácia znižuje presnosť používanej schémy, prechod je však v takej časti modelu, kde toto nespôsobuje tak závažnú chybu. Podrobnejšie sa tejto metóde venovať nebudeme, pri výpočtoch nebola využitá, predstavuje ale určitú možnosť ako zefektívniť modelovanie napríklad aj voľného povrchu.



Obr. 5 Kombinovaná sieť



Obr. 6 Nerovnomerná sieť

Niekedy je vhodné využiť aj nerovnomerné siete, ktoré môžu mať inú veľkosť priestorového kroku v rôznych smeroch. Tento sa môže spojitým meniť alebo je v určitej oblasti konštantný. Nevýhodou je, že pokiaľ sa v sieti zjemnenie zavedie, prebieha celou mriežkou v jednom smere a dochádza k prevzorkovaniu. FD aproximácie je možné odvodiť analogicky, presnosť je charakterizovaná chybou $O(h^k)$, pričom h sa v priestore mení. Typická dvojrozmerná sieť s premenlivým priestorovým krokom je na Obr. 6.

3.6 Podmienka stability a disperzné vzťahy

Existujú viaceré metódy, ktorými možno stabilitu konečno-diferenčnej schémy vyšetriť. Medzi najpoužívanejšie patria von Neumannova metóda, maticová metóda, metóda diskretných porúch, alebo energetická metóda. Podrobnejšie sú spomínané v matematických učebniciach napr. Morton

a Mayers (1994), Mitchell a Griffiths (1980).

Relatívne jednoduchá a často používaná je von Neumannova metóda. Jedná sa o fourierovskú analýzu šírenia vln v schéme. Je možné overiť, že isté Fourierove módy sú riešeniami a súčasne ľubovoľné riešenie možno vytvoriť ako ich integrálnu superpozíciu. Vyšetrovať teda možno osobitne jednotlivé módy a získané vlastnosti sa potom prenášajú aj do riešenia, ktoré je ich kombináciou. Toto nám umožňuje zaviesť poruchy v tvare harmonických vln, stabilita vyžaduje aby ich amplitúdy s časom nerástli neobmedzene. Z týchto požiadaviek možno odvodiť podmienku stability pre P a S vlny v neobmedzenom homogénnom prostredí na striedavo usporiadaných sieťach (schéma s priestorovými aproximáciami do 4. rádu a časovými do 2. rádu presnosti) :

$$\Delta t \leq \frac{6}{7\sqrt{3}} \frac{h}{\alpha} \qquad \Delta t \leq \frac{6}{7\sqrt{3}} \frac{h}{\beta}$$

Pretože $\alpha > \beta$ za podmienku stability možno zobrať prvý z týchto vzťahov, druhý bude splnený automaticky.

Takýmto spôsobom sme teda získali podmienku pre veľkosť časového kroku Δt pre zvolenú veľkosť priestorového kroku h , ak by sme simulovali šírenie vlnenia v neobmedzenom homogénnom prostredí. V našich modeloch sa samozrejme vyskytujú rôzne prostredia oddelené rozhraniami, presné vyšetrovanie stability pre zložité modely je komplikované a prakticky je ho ťažké vykonať. Pri odhade veľkosti časového kroku preto nájdeme najmenšiu hodnotu rýchlosti šírenia S vln v modeli a pomocou nej určíme časový krok. Takto však stabilitu zaručenú nemáme, pokiaľ je výpočet nestabilný je nutné časový krok zmenšiť.

Mriežková disperzia je závislosť fázovej rýchlosti šírenia v mriežke od frekvencie. V homogénnom reálnom prostredí fázová rýchlosť nezávisí od frekvencie, v mriežke však áno. Úplne odstrániť ju nie je možné, snažíme sa ju minimalizovať. Jej vyšetrovaním možno určiť ďalšiu dôležitú podmienku na veľkosť priestorového kroku. Z grafov závislostí $\alpha/\alpha_{\text{grid}}$ a $\beta/\beta_{\text{grid}}$ (kde index grid znamená, že sa jedná o hodnotu určenú zo šírenia v sieti) od pomeru h/λ pre zvolenú hodnotu pomeru $\Delta t/h$ a zvolený smer šírenia je možné urobiť závery, aký minimálny môže byť pomer λ_{min}/h (určíme teda maximálnu hodnotu priestorového kroku) aby disperzia bola akceptovateľná. Pre vyšetrovanú schému (Dodatok 1) Moczo et al. (2000) odporúčajú voliť λ_{min}/h minimálne 6. Táto hodnota teda bola základnou aj pri našich simuláciách. Pre porovnanie sme počítali aj s hustejším vzorkovaním $\lambda_{\text{min}}/h = 10$.

3.7 Simulovanie bodového zdroja

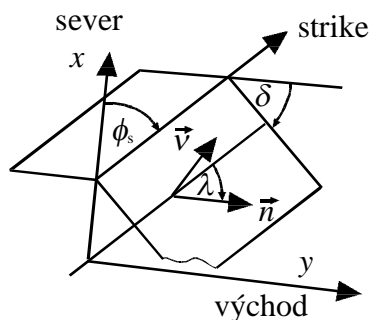
Zdrojom seizmických vln v prírode môžu byť viaceré deje. Najčastejšie sú to tektonické a vulkanické udalosti prípadne zrútenie podzemných priestorov (borivé zemetrasenia). Taktiež dopady extraterestriálnych telies na povrch planét alebo pohyb oceánov môže byť zdrojom rozruchov, ktoré sa šíria vnútro planéty. V poslednej dobe je to aj ľudská činnosť, ktorú seizmometre taktiež zaznamenávajú. Najviac zemetrasení (90 %) je tektonického pôvodu. Vznikajú keď v oslabenej zóne medzi dvoma horninovými blokmi dôjde k presiahnutiu kritickej hodnoty šmykového napätia a deformácia, ktorá sa kumulovala počas dlhšieho obdobia, sa náhle začne odstraňovať. Proces

vzniku a šírenia trhliny je komplikovaný a ťažko matematicky popísateľný, pretože má chaotický charakter.

Kinematické modelovanie seizmického zdroja je jednoduchšie matematicky zvládnuteľné. Väčšinou sa uvažuje dopredu vymedzená zlomová plocha, na ktorej sa predpísaným spôsobom šíri trhlina – diskontinuita v posunutí. Fundamentálnym je poznatok, že vo veľkých vzdialenostiach od zdroja vlnové pole neobsahuje zložky s vyššími frekvenciami, ktoré sú utlmané viac, a teda nenesie informáciu o tvare zlomovej plochy. Efektívny bodový zdroj je dobrou aproximáciou reálneho procesu na zlomovej ploche ak je prijímač v dostatočnej vzdialenosti v prostredí s útlmom, alebo ak zdroj vyžaruje vlnenie s vlnovými dĺžkami oveľa väčšími ako je jeho lineárny rozmer.

Matematicky možno posunutie (seizmogram), ktoré je dôsledkom časového vývoja diskontinuity v posunutí na zlomovej ploche odvodiť pomocou vety o reprezentácii (Aki a Richards, 1980). Na základe matematických identít je možné odvodiť ekvivalenciu medzi takýmto zdrojom vlnenia a systémom objemových síl. Veľkosti ich momentov charakterizuje rozloženie tenzora hustoty momentov a v prípade bodového zdroja je to tenzor momentov v jednom bode.

V prípade, že diskontinuita v posunutí je dotyčnicová k zlomovej ploche, je bodový zdroj možné charakterizovať parametrami :



- M_0 – seizmický moment
- \vec{v} – normála na zlomovú plochu (v tomto priblížení rovinu)
- \vec{n} – má smer diskontinuity v posunutí
- ϕ_s – uhol medzi severom a priesečnicou roviny zlomu s horizontálnou rovinou (strike)
- δ – odklon roviny zlomu od horizontálnej roviny (dip)
- λ – uhol medzi smerom diskontinuity v posunutí a priesečnicou (rake)

Obr. 7 Parametre bodového zdroja

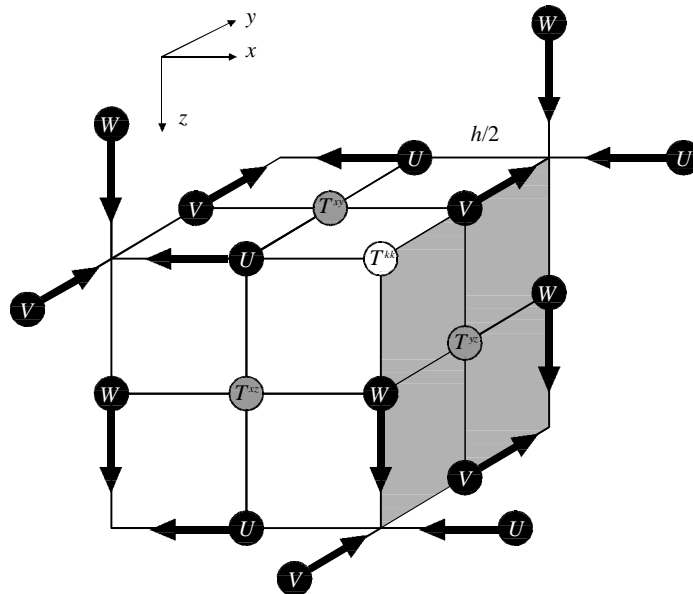
Ak celú plochu Σ nemôžeme reprezentovať ako jeden efektívny bodový zdroj, v istom priblížení ju je možné rozdeliť na menšie plôšky, každej z nich priradiť tenzor momentov síl, a priebeh diskontinuity na Σ reprezentovať ako časopriestorové rozloženie efektívnych bodových zdrojov. Každý z nich má vlastnú zdrojovú časovú funkciu $s(t)$, ktorá je definovaná ako pomer medzi aktuálnou diskontinuitou v posunutí a konečnou diskontinuitou, ktorá sa dosiahne, keď sa sklz materiálu v danom bode (na danej plôške) skončí. Pokiaľ prvá nenulová hodnota $s(t)$ nastáva pre efektívne bodové zdroje v rôznych časoch, vyžiarené vlnové pole sa dobre zhoduje s pozorovaným pri skutočnom šírení trhliny na zlomovej ploche. Takto v kinematickom modelovaní možno pomocou fitovania pozorovaných a syntetických seizmogramov zisťovať priebeh šírenia trhliny.

Dynamické modelovanie seizmického zdroja vyžaduje oveľa komplexnejší prístup. Kým v kinematickom modelovaní sme šírenie trhliny predpísali, v dynamickom modelovaní o tom, či sa trhlina rozšíri, rozhodujú napätia v prostredí, sklz na zlome sa riadi zákonom trenia. Tento prístup je teda fyzikálnejší a umožňuje vyhnúť sa rozporom, ktoré pri kinematickom modelovaní vznikajú.

V FD modelovaní simulovanie dynamiky seizmického zdroja je problém, ktorý sa práve rieši. Kinematické modelovanie je už dobre zvládnuté a implementácia efektívneho bodového dislokačného zdroja nepredstavuje žiadny problém. Preto aj pri našom testovaní používame práve takýto

druh budenia vlnového poľa.

V pohybovej rovnici (2.2) objemová sila f_i je pri našom modelovaní všade nulová (bez prítomnosti tiažového poľa), silový člen však môže byť výhodne použitý pri excitácii vlnového poľa. Efektívny bodový zdroj je charakterizovaný tenzorom momentov síl. Totožné vlnové pole, aké sa vyžiarí v dôsledku diskontinuity v posunutí, generuje systém dvojitého dvojíc síl s veľkosťami momentov rovnými zložkám tenzora momentov. Táto ekvivalencia sa využíva pri modelovaní aj v metóde konečných diferencií.



Obr. 8 Bodový zdroj na striedavo usporiadanej sieti

V metóde konečných diferencií sa teda v bodoch v okolí centra zdroja predpíše časový priebeh zložiek objemových síl a takto získame kinematický bodový zdroj. V konvenčnej sieti je implementácia priamočiara. Pre striedavo usporiadajú siet' je situácia o niečo komplikovanejšia, je nutné nájsť body v okolí, kde je možné predpísať potrebné zložky objemových síl. Podrobnejšie sú vzťahy pre simulovanie zdroja uvedené napr. v Moczo (1998). Na Obr. 8 sú vyznačené pozície a smery objemových síl (zobrazená je len jedna osmina symetrickej situácie) v striedavo usporiadanej sieti, ktorých momenty vytvárajú bodový zdroj. Centrum je v pozícii normálových zložiek tenzoru napätia T^{kk} .

3.8 Simulácia neodrážajúcich hraníc

Lokálna štruktúra je časť prostredia v okolí prijímača, ktorá má dominantný vplyv na seizmický pohyb v tomto mieste. Pokiaľ vieme, že na relatívne presné určenie seizmického pohybu nemá heterogenita vzdialenejšieho okolia podstatný vplyv, môžeme ho aproximovať homogénnym priestorom (polpriestorom), ktorým sa vlnové pole neobmedzene šíri. V metóde konečných diferencií výpočtová oblasť musí byť nutne konečná, nemôžeme počítať pohyb v priestorovo neohraničených oblastiach. Preto mriežka pokrýva objem lokálnej štruktúry a jej blízkeho okolia, na jej okrajoch sa nachádzajú tzv. neodrážajúce hranice, ktoré zabezpečujú, že vlnenie prichádzajúce z vnútra výpočtovej oblasti nimi prechádza ako keby sa ďalej šírilo do neobmedzeného priestoru. Pretože reálne

v danej pozícii nedochádza k žiadnej zmene v prostredí, na hranici modelu by nemalo dochádzať k žiadnemu odrazu. Umelé odrazy do vnútra objemu vznikajúce na hraniciach sa snažíme čo najviac eliminovať, pretože tieto vytvárajú falošné zložky v riešení a nie je ich možné odseparovať. Existujú viaceré prístupy, ako neodrážajúcu hranicu vytvoriť. Pri použití nárazy absorbujúcej zóny (shock absorber zone), umelej útlmovej oblasti (artificial damping zone) a dokonale prispôbených vrstiev (PML – perfectly matched layer) k modelu pridáme na okrajoch oblasti hrúbky niekoľko mriežkových krokov, ktoré absorbujú energiu prechádzajúcu okrajom. Alternatívne je možné bez rozšírenia modelu na okrajoch predpísať približne absorbujúce okrajové podmienky založené na aplikácii jednosmernej vlnovej rovnice (Clayton a Enquist 1977), prípadne minimalizovať koeficient odrazu na hranici, ako je to urobené napr. v práci Reynolds (1987).

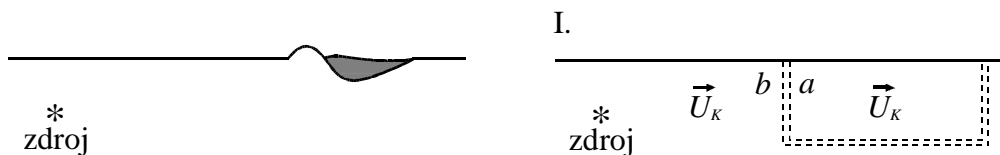
Pre nás je dôležité, že numerické výpočty pri použití rôznych neodrážajúcich hraníc ukazujú, že neexistuje univerzálna metóda, ktorá by pri ľubovoľnej konfigurácii modelu bola dostatočne presná a stabilná (Moczo, 1998). Pri každej simulácii je teda potrebné mať na pamäti, že hranice modelu generujú umelé odrazené vlnové pole, ktoré riešenie znehodnocuje. Seizmogram na určitom mieste v sieti nie je ovplyvnený umelými odrazmi dovedy, kým sa najkratšou dráhou k nemu zo zdroja nedostane od hranice odrazená energia. Tieto efekty teda je možné časovo ohraničiť, väčšinou ak sa im chceme úplne vyhnúť (pri presných testoch), je vhodné, aby model bol dostatočne veľký. Vo väčšine prípadov neodrážajúce hranice fungujú dobre, problémy môžu nastať napríklad ak nehomogenita prechádza až ku hranici. Pretože neexistuje presné kritérium, rozhodnúť o vhodnosti možno definitívne až po vykonaní numerických testov.

3.9 Dekompozícia vlnového poľa

Pri simuláciách lokálnych efektov je výhodné vplyvy na výsledné posunutie na danej lokalite rozdeliť do troch skupín :

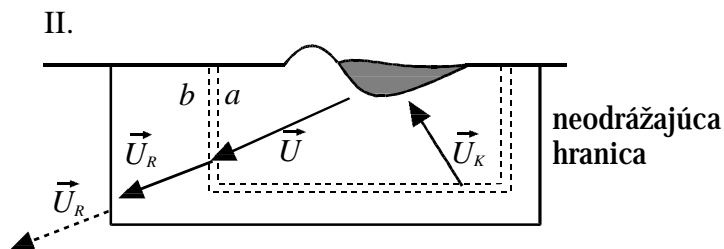
- podmienky v zdroji
- vplyv prostredia medzi zdrojom a lokálnou štruktúrou
- vplyv lokálnej štruktúry

Pokiaľ sa zdroj nachádza vo väčšej vzdialenosti od lokálnej štruktúry, slabá heterogenita prostredia medzi zdrojom a lokálnou štruktúrou nespôsobuje komplikované vlnové javy a je možné namiesto výpočtovo náročných metód použiť jednoduchšie prístupy. Nájdeme metódou diskretných vlnových čísel (alebo inou efektívnou metódou) riešenie \vec{U}_K pre model, kde lokálnu štruktúru nahradíme materiálom s rovnakými vlastnosťami, aké má okolité prostredie. Toto zaznamenáme na dvoch plochách a a b ohraničujúcich objem obsahujúci lokálnu štruktúru (Obr. 9). Tieto sú od seba vzdialené niekoľko priestorových krokov (podľa rádu metódy) použitých pri nasledujúcom FD riešení.



Obr. 9 model a prvá fáza výpočtu

V druhom kroku riešime metódou konečných diferencií úlohu s lokálnou štruktúrou v izolovanom objeme ohraničenom neodrážajúcimi hranicami, zdrojom vlnenia sú plochy a a b (Obr. 10).



Obr. 10 princíp dekompozície vlnového poľa

Toto je princíp tzv. excitačného boxu. Vlnové pole \vec{U}_K vstupuje do objemu a s lokálnou štruktúrou prostredníctvom budenia na a a b , rozptyľuje sa a plochou b opúšťa objem a len jeho zložka \vec{U}_R , ktorá sa šíri k neodrážajúcim hraniciam, a tieto pre dopadajúce vlnové pole vytvárajú podmienky veľmi blízke šíreniu do neobmedzeného homogénneho priestoru za neodrážajúcimi hranicami.

Takýmto spôsobom je možné simulovať efektívne aj lokálne efekty v dôsledku zdroja, ktorý je relatívne dosť vzdialený. Predstavuje alternatívny spôsob excitácie vlnového poľa. Podobne, ako je to aj v prípade bodového zdroja, je dôležité, aby sme konečno-diferenčnou schémou dostatočne presne a efektívne riešili adekvátny objem v okolí prijímača.

4 Simulovanie vnútorných rozhraní

Teraz sa budeme zaoberať prístupmi, ktorými je možné modelovať vnútorné rozhrania. Voľný povrch je špeciálnym rozhraním a nemožno ho zaradiť medzi vnútorné rozhrania. Heterogénny prístup na simulovanie vnútorných rozhraní je však možné použiť v limite aj pre voľný povrch. Potenciálne je možné, že bude úspešná aj modifikácia homogénneho prístupu pre voľný povrch, preto tu v krátkosti uvádzame ich základné princípy.

Nech v priestore, v ktorom chceme metódou konečných diferencií počítať seizmický pohyb, sú hodnoty materiálových parametrov popísané ako po častiach spojité funkcie. Budeme uvažovať dokonale elastické izotropné prostredie (materiálové parametre sú λ , μ , ρ). Predpokladajme zatiaľ, že sa vo vnútri objemu modelu nenachádza vákuum (vylučujeme prítomnosť voľného povrchu). Pre pohyb v oblastiach so spojitou zmenou materiálových parametrov platí pohybová rovnica. Na hraniciach týchto oblastí musíme zaručiť, aby výpočtová schéma spĺňala okrajové podmienky, inak by sme modelovali fyzikálne odlišný problém. V princípe existujú dva prístupy, ako to dosiahnuť :

- homogénny prístup – splnenie okrajových podmienok dosiahneme modifikovaním schémy pri rozhraniach, materiálové parametre majú lokálne hodnoty,
- heterogénny prístup – okrajové podmienky sa snažíme splniť špeciálnou voľbou hodnôt materiálových parametrov, schéma zostáva formálne nemenná.

Pre jednodlavinovú explicitnú schému je to možné formálne zapísať oba prístupy nasledovne :

Homogénny prístup :

$$D_r^{n+1} = \sum_{k=1}^m \gamma_{r,k} (c_{r+r_k}) D_{r+r_k}^n \quad (4.1)$$

pričom r_k (relatívne súradnice vzhľadom na konkrétny bod) a m závisia od polohy r , D je vo všeobecnosti vektorová veličina, ktorej zložkami sú rýchlosti a napätia, $\gamma_{r,k}$ je matica koeficientov. Typickým príkladom premenlivých m a r_k môže byť zmena tvaru poľa a počtu bodov, z ktorého aproximáciu v novom čase počítame, pri rozhraniach a voľnom povrchu.

Heterogénny prístup :

$$D_r^{n+1} = \sum_{k=1}^m \gamma_k (\bar{c}_{r+r_k}) D_{r+r_k}^n \quad (4.2)$$

Tvar poľa ani funkcie γ_k sa nemenia, \bar{c}_{r+r_k} sú modifikované tzv. efektívne materiálové parametre, len oni zabezpečujú priestorovú zmenu koeficientov schémy. Tento prístup sa niekedy označuje ako metódy priemerovania.

4.1 Homogénny prístup

Pokiaľ použijeme tzv. **homogénny** prístup :

- vnútri oblastí zo spojitou zmenou materiálových parametrov používame schému, ktorá vznikne aproximovaním pohybovej rovnice (a Hookovho zákona),
- na rozhraniach a v ich malom okolí používame FD schému modifikovanú z ohľadom na splnenie okrajových podmienok a zachovanie rádu aproximácie.

Diskrétné hodnoty materiálových parametrov, ktoré v schéme využívame a sú lokalizované v mriežkových bodoch, sú priamo hodnoty funkcií v bode s priestorovými súradnicami uzla mriežky (pokiaľ neleží priamo na rozhraní). Pri rozhraniach je teda schéma pre vnútorné body modifikovaná, aby boli splnené okrajové podmienky a mení sa s pozíciou v sieti. Toto znamená, že pre každú geometriu rozhraní v modeli je potrebné zostaviť špecifickú, pre každý problém osobitú FD schému a pri výpočte podľa toho, o ktorý bod sa jedná, aplikovať rôzne FD vzťahy.

Základná myšlienka metódy modifikovať schému používanú pre vnútorné body pochádza pravdepodobne od autorov Tikhonov a Samarskii (1962). Homogénny prístup ako jedni z prvých v seizmológii používali Alterman a Karal (1968), ktorí ho aplikovali pre relatívne jednoduché geometrie rozhraní. Pretože určiť FD aproximácie pre okrajové podmienky nie je triviálny problém, po objavení sa ťažkosť sa viacero autorov venovalo hlavne vývoju heterogénneho prístupu. V poslednom období sa však objavili nové práce rozvíjajúce prístup nazývaný **vnorené rozhrania**. Pretože táto metóda by potenciálne mohla byť s modifikovaná a použitá pre modelovanie voľného povrchu, venujeme sa jej podrobnejšie.

4.1.1 Metóda vnorených rozhraní

Metódu vnorených hraníc (immersed boundary method – IBM) vyvinul Peskin (1977, 1981) na riešenie nestlačiteľných Navier-Stokesových tokov s komplikovanými pohyblivými rozhraniami, pričom sa uvažuje singulárny zdrojový člen reprezentovaný pomocou priestorových delta funkcií. Metóda je prvého rádu presnosti, neskôr Beyer a LeVeque (1992) ukázali, že istou voľbou diskrétnych aproximácií delta funkcií je možné dosiahnuť 2. rád presnosti. LeVeque a Li (1994) odvodili prístup, ktorý pre Poissonov problém s nespojitými koeficientmi alebo singulárnymi zdrojovými členmi dáva druhý rád presnosti.

Pod metódou vnorených rozhraní (immersed interfaces method IIM) rozumieme metódu príbuznú s metódou vnorených hraníc pre rovnice s nespojitými koeficientmi. Na rozdiel od pôvodnej metódy, ktorá využíva priestorové delta funkcie sa na rozhraniach sformulujú skokové podmienky, ktoré sa využijú na odvodenie modifikovanej schémy.

Princíp metódy je vhodné ilustrovať na jednorozmernej advekcii popísanej rovnicou

$$U_t + c(x)U_x = 0, \quad (4.3)$$

kde

$$c(x) = \begin{cases} c^- & x < \alpha \\ c^+ & x > \alpha \end{cases} \quad (4.4)$$

Riešime ju na intervale $(0, \infty)$, počiatočná podmienka je napr. $U(x, 0) = 0$, okrajovú podmienku zvolíme ľubovoľnú spojitú funkciu $U(0, t) = A(t)$.

Pre metódu vnorených rozhraní je dôležité určiť tzv. skokové podmienky (jump conditions) pre riešenie U . Vychádzajú z okrajových podmienok a majú rôzny tvar podľa typu fyzikálnej úlohy. Pretože koeficient v rovnici je nespojitý, potenciálne aj riešenie môže byť na rozhraní nespojité, alebo môže mať nespojité priestorové derivácie. Zvoľme skokovú podmienku :

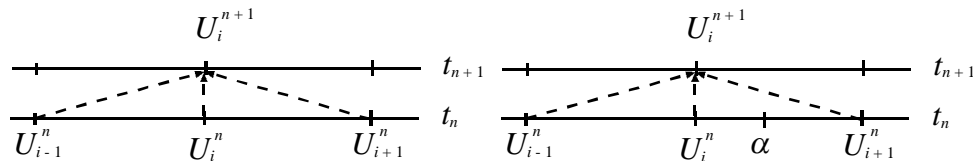
$$[U] = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} U(x, t) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} U(x, t) = 0 \quad \text{pre } \forall t, \quad (4.5)$$

pretože podmienka spojitosti v bode α bude splnená pri problémoch elasticity. V tomto jednoduchom prípade poznáme aj všeobecné analytické riešenie :

$$U(x, t) = \begin{cases} A(t - \xi(x)) & x \leq \xi^{-1}(t) \\ 0 & x \geq \xi^{-1}(t) \end{cases} \quad \text{kde} \quad \xi(x) = \int_0^x \frac{dx}{c(x)}.$$

Na ňom si ľahko overíme niektoré vlastnosti, ktoré sa využívajú pri zostavovaní schémy. Postup odvedenia je z Zhang a LeVeque (1996). Nevýhodou je, že odvedenie je pre konvenčné siete a používa sa Lax-Wendroffova (LW) schéma druhého rádu presnosti, preto nie je priamo aplikovateľné pre striedavo usporiadané siete.

Uvažujme jednorozmernú mriežku s krokom h a časový krok k . Aproximáciu v novom čase získame z 3 hodnôt v predchádzajúcom čase :



Obr. 11 situácia bez rozhrania a s rozhraním

Ak sa medzi bodmi $i-1$ a $i+1$ nenachádza rozhranie (Obr. 11 vľavo), používa sa schéma :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{kc_i}{2h} (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{kc_i}{h} \right)^2 (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n)$$

Táto štandardná LW schéma však stráca presnosť, ak je diskontinuita v bode α , kde $x_{i-1} < \alpha < x_{i+1}$. Preto v tomto prípade je nutné odvodiť inú schému.

Riešenie rovnice (4.3) je spojité v čase a takisto aj jeho časové derivácie (toto neplatí pre priestorové derivácie), $[U_t] = 0$, preto zo (4.3) vyplýva $[cU_x] = 0$, teda derivácia U_x má v bode $x = \alpha$ skok, aby vykompenzovala skok v c (možno overiť pre analytické riešenie).

Ak zderivujeme (4.3) podľa času, potom :

$$U_{tt} = -cU_{xt} = -c(U_t)_x = c(cU_x)_x = cc'U_x + c^2U_{xx}$$

$$[cc'U] = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} c(x)c'(x)U(x,t) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} c(x)c'(x)U(x,t) = 0 - 0 = 0 \quad \text{pre } \forall t$$

pretože $c'(x) = 0$ pre $x \neq \alpha$. Ďalej $[U_{tt}] = 0$, preto dostávame $[c^2U_{xx}] = 0$ (opäť platí aj pre analytické riešenie). Získali sme teda potrebné (ako neskôr uvidíme) tri podmienky :

$$[U] = 0, \quad [cU_x] = 0, \quad [c^2U_{xx}] = 0 \quad (4.6)$$

teda

$$U^+ = U^-, \quad c^+U_x^+ = c^-U_x^-, \quad (c^+)^2U_{xx}^+ = (c^-)^2U_{xx}^-$$

kde U^+ a U^- sú limitné hodnoty pre $x \rightarrow \alpha^+$ a $x \rightarrow \alpha^-$.

Navrhujeme teda všeobecnú trojbodovú schému :

$$U_I^{n+1} = U_I^n + \frac{k}{h}(\gamma_{I,1}U_{I-1}^n + \gamma_{I,2}U_I^n + \gamma_{I,3}U_{I+1}^n)$$

$$U_{I+1}^{n+1} = U_{I+1}^n + \frac{k}{h}(\gamma_{I+1,2}U_{I+2}^n + \gamma_{I+1,1}U_{I+1}^n + \gamma_{I+1,3}U_I^n) \quad (4.7)$$

Teraz budeme hľadať koeficienty γ tak, aby bol zachovaný rád aproximácie. Je potrebné skúmať lokálnu zaokrúhľovaciu chybu (local truncation error) schémy v bode x_I a x_{I+1} .

$$L(x_I, t_n) = \frac{1}{h}(\gamma_{I,1}U(x_{I-1}, t_n) + \gamma_{I,2}U(x_I, t_n) + \gamma_{I,3}U(x_{I+1}, t_n))$$

$$+ cU_x(x_I, t_n) - \frac{kc^2}{2}U_{xx}(x_I, t_n) + O(k^2)$$

Ďalej rozvineme členy okolo bodu $x = \alpha$:

$$L(x_I, t_n) = \frac{1}{h}\gamma_{I,1}(U^- + (x_{I-1} - \alpha)U_x^- + (x_{I-1} - \alpha)^2U_{xx}^-)$$

$$+ \frac{1}{h}\gamma_{I,2}(U^- + (x_I - \alpha)U_x^- + (x_I - \alpha)^2U_{xx}^-)$$

$$+ \frac{1}{h}\gamma_{I,3}(U^+ + (x_{I+1} - \alpha)U_x^- + (x_{I+1} - \alpha)^2U_{xx}^+)$$

$$+ c(U_x^- + (x_I - \alpha)U_{xx}^-) - \frac{kc^2}{2}U_{xx}^- + O(k^2) + O(8h^3)$$

Autori neuvádzajú priestorový chybový člen. Najväčšia vzdialenosť, cez ktorú rozvoje robíme je $2h$, preto sme uviedli chybový člen $O(8h^3)$. Bez zdôvodnenia sú vynechané členy s vyššími deriváciami U^- , aby bol zachovaný rád aproximácie je zrejme taktiež nutné predpokladať $U_{xxx}^- = U_{xxxx}^- = 0$.

Teraz využijeme skokové podmienky (4.6) pričom nahradíme všetky limity sprava pomocou hodnôt limit zľava. Potom na dosiahnutie požadovaného rádu aproximácie je potrebné, aby koeficienty pri U^-, U_x^-, U_{xx}^- boli rovné 0. Dostávame takto systém rovníc pre koeficienty γ :

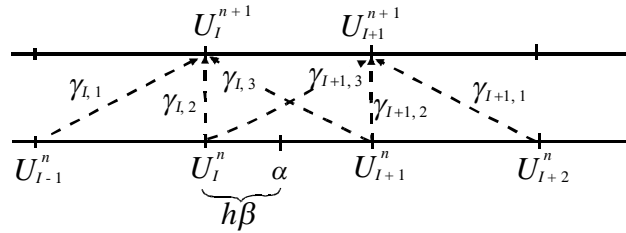
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1-\beta & -\beta & (1-\beta)r \\ (1+\beta)^2 & \beta^2 & (1-\beta)^2 r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{I,1} \\ \gamma_{I,2} \\ \gamma_{I,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c^- \\ c^-(2\beta+v) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

kde $\beta = (\alpha - x_i)/h$, $r = c^-/c^+$ a $v = c^-k/h$. Tieto bezrozmerné parametre charakterizujú relatívnu polohu rozhrania v mriežke (β), kontrast na rozhraní (r) a v je stabilitný parameter schémy.

Pre bod $I + 1$ môžeme zostaviť systém analogický s (4.8)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2-\beta & 1-\beta & -\beta r^{-1} \\ (2-\beta)^2 & (1-\beta)^2 & \beta^2 r^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{I+1,1} \\ \gamma_{I+1,2} \\ \gamma_{I+1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c^+ \\ c^+(2(1-\beta)+v) \end{pmatrix}$$

kde teraz $v = c^+k/h$. Nájst' riešenie je jednoduché a autori ho neuvádzajú a nevyšetrujú ani jeho vlastnosti, ktoré by potenciálne mohli byť využité napr. pri odvodzovaní heterogénnych schém.



Obr. 12 význam koeficientov γ

V článku Zhang a Symes (1998) autori prezentujú metódu pre 2D rovnice elasticity, ktorá je 4. rádu presnosti v priestore a 2. alebo 4. rádu v čase. Riešený systém má tvar :

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\rho} (\sigma_{11,x} + \sigma_{12,y}) \\ v_t &= \frac{1}{\rho} (\sigma_{12,x} + \sigma_{22,y}) \\ \sigma_{11,t} &= (\lambda + 2\mu) u_x + \lambda v_y \\ \sigma_{12,t} &= \mu (u_y + v_x) \\ \sigma_{22,t} &= \lambda u_x + (\lambda + 2\mu) v_y \end{aligned} \quad (4.9)$$

s diskontinuitnými koeficientmi

$$(\rho, \lambda, \mu) = \begin{cases} (\rho^-, \lambda^-, \mu^-) & \vec{r} \in \Omega_1 \\ (\rho^+, \lambda^+, \mu^+) & \vec{r} \in \Omega_2 \end{cases}$$

kde rozhranie je definované krivkou c , oddeľujúcou oblasti Ω_1 a Ω_2 . V metóde vnorených rozhraní sa štandardne zavádza maticový formalizmus, ktorý umožňuje jednotne zapísať rozličné jednorozmerné aj viacrozmerné úlohy. Systém (4.9) možno prepísať do tvaru :

$$U_t + AU_x + BU_y = 0, \quad (4.10)$$

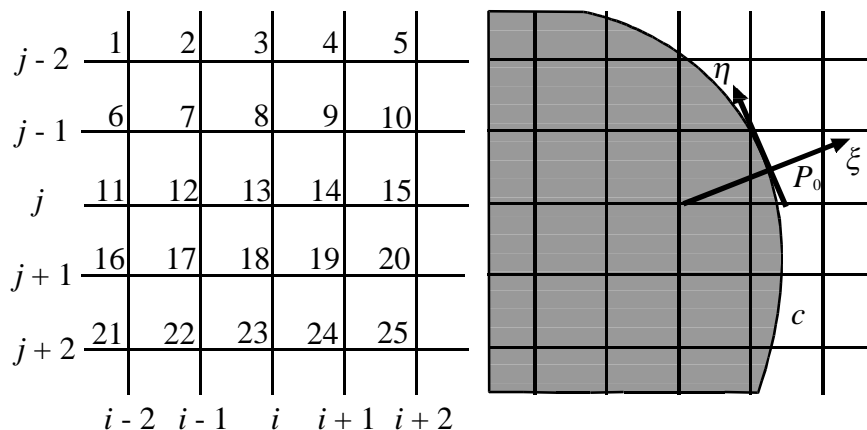
kde

$$U = (u, v, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$$

a A a B sú matice rozmeru 5×5 :

$$A = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Uvažujme konvenčnú sieť, preto pre vnútorné body možno opäť použiť napr. Lax-Wendroffovu schému alebo inú štandardnú metódu. Na dosiahnutie 4. rádu je potrebné uvažovať 25 bodov v okolí bodu výpočtu aproximácie (Obr. 13). Pokiaľ všetky body neležia na rovnakej strane rozhrania, je potrebné odvodiť novú schému – použijeme lokálny systém súradníc na rozhraní. Podobným spôsobom, ako v jednorozmernom prípade je možné odvodiť 6×5 rovnocenných skokových podmienok na rozhraní, z ktorých je potrebné vybrať 25 – jedna z rovníc sa nevyužije, podľa výberu dostávame mierne odlišné metódy. Vo vzťahu pre lokálnu zaokrúhľovaciu chybu opäť urobíme Taylorove rozvoje okolo vybraného bodu na rozhraní a nahradíme derivácie U^+ deriváciami U^- pomocou skokových podmienok. Podmienka zachovania rádu aproximácie vyžaduje, aby koeficienty pri deriváciách U^- boli nulové, takto dostávame 25 rovníc pre neznáme koeficienty zvolenej všeobecnej schémy.

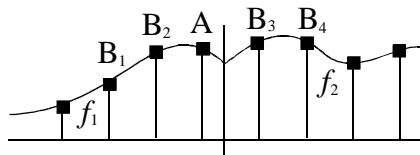


Obr. 13 umiestnenie bodov, z ktorých počítame aproximáciu derivácie

Tieto rovnice je potrebné riešiť len raz na začiatku výpočtu a v pamäti uchovať výsledok. Oblasť modifikovanej schémy je podstatne menšia ako oblasť vnútorných bodov. Preto metóda vnorených rozhraní znamená relatívne malé dodatočné výpočtové nároky a je efektívna. Numerické testy ukazujú, že metóda dáva v kombinácii so štandardnými prístupmi na riešenie PDR vo vnútri spojitéch oblastí výsledky zvoleného rádu presnosti.

4.2 Heterogénny prístup

Hodnoty dynamických premenných v tomto prípade počítame pomocou schémy, ktorá má rovnaký tvar v každom bode mriežky. Koefficienty schémy sú rovnakými funkciami materiálových parametrov, ktoré sú vypočítané z určitej oblasti v okolí bodu ich polohy v sieti.



Obr. 14 pozícia rozhrania voči diskretným aproximáciám

Ak počítame aproximáciu derivácie spojitej funkcie vo vnútornom bode – s bodmi, z ktorých sa počíta aproximácia na tej istej strane rozhrania, dostaneme výsledok so zvolenou presnosťou. Pokiaľ však časť bodov leží na opačnej strane ako ostatné (Obr. 14), hodnoty premennej v bodoch A, B₁, B₂ sa vzťahujú na funkciu f_1 , kým hodnoty v bodoch B₃, B₄ na f_2 . V homogénnom prístupe sa pomocou skokových podmienok a Taylorových rozvojev okolo bodu rozhrania zohľadní súvislosť hodnôt na oboch stranách rozhrania. V heterogénnom prístupe sa snažíme odvodiť hodnoty efektívnych materiálových parametrov tak, aby sme v bode A dostali hodnotu derivácie s čo najlepšou presnosťou, týmto v schéme zohľadníme okrajové podmienky na rozhraní.

Heterogénny prístup sa stal populárnejším ako homogénny od začiatku 70. rokov. Spôsobili to hlavne ťažkosti aplikovať homogénny prístup na nepravidelné a zakrivené rozhrania. Viacerí autori konštruovali schémy, v ktorých materiálové parametre boli vypočítané viac-menej intuitívne (Kelly et al., 1976, Graves, 1996 a iní). Schönberg a Muir (1989) publikovali postup, ktorým je možné vypočítať materiálové parametre prostredia ekvivalentného v dlhovlnnej limite so súborom plan-paralelných vrstiev. Muir et al. (1992) zostavili heterogénnu schému na konvenčnej sieti, kde efektívne materiálové parametre sú počítané na základe aplikácie tohoto prístupu (kapitola 4.4.2). Dôležitá je práca Zahradník a Priolo (1995), ktorí z pohybovej rovnice na základe úvah o materiálovej diskontinuite odvodili výraz, ktorého dominantná časť je ekvivalentná spojitosti napätí. Moczo et al. (2002) odvodili heterogénnu formuláciu pohybovej rovnice a na základe nej potom našli aj heterogénnu konečno-diferenčnú schému.

Podrobnejšie sa budeme venovať dvom prístupom : priemerovaniu navrhnutému autormi Schönberg a Muir a aritmetickému a harmonickému priemerovaniu navrhnutému v práci Moczo et al. (2002).

4.2.1 Heterogénna formulácia pohybovej rovnice

Nájsť heterogénnu formuláciu pohybovej rovnice v podstate znamená odvodiť rovnicu platnú v blízkosti rozhrania, ktorá má rovnaký tvar ako pohybová rovnica pre hladko heterogénne prostredie. Z takto zapísaného problému potom možno odvodiť heterogénnu konečno-diferenčnú schému.

V článku Moczo et al. (2002) sa najskôr uvažuje 1D model kontaktu dvoch prostredí s rôznymi materiálovými parametrami. Pre dve do série zapojené pružinky platí :

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau \quad e = e_1 + e_2,$$

kde τ sú napätia a e deformácie.

System chceme nahraďiť dvoma rovnakými pružinkami, ktoré budú zdeformované každá rovnako $e = 2\bar{e}$, preto dostávame :

$$2\bar{e} = e_1 + e_2 = \frac{\tau}{c_1} + \frac{\tau}{c_2} \quad \text{teda} \quad \bar{e} = \frac{\tau}{\bar{c}} \quad \text{kde} \quad \bar{c} = 2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)^{-1}.$$

Túto úvahu je možné ľahko rozšíriť aj pre viacero elastických prvkov zapojených do série.

Pre sily a hmotnosti dostávame podobným postupom :

$$\bar{f} = \bar{\rho}\ddot{d} \quad \text{kde} \quad \bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \quad \text{a} \quad \bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2).$$

Uvažujme teraz o funkciách priestorovej súradnice :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= c_1(x)g_1(x) \\ \varphi_2(x) &= c_2(x)g_2(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \bar{c}(0)\bar{g}(0) \\ \varphi_1(0) &= \varphi_2(0) \end{aligned} \tag{4.12}$$

kde $\bar{c}(x) = 2\left(\frac{1}{c_1(x)} + \frac{1}{c_2(x)}\right)^{-1}$
a $\bar{g}(x) = \frac{1}{2}(g_1(x) + g_2(x))$

Pre špeciálny tvar funkcií c :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{r_1(x)}g_1(x) \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{r_2(x)}g_1(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \frac{1}{\bar{r}(x)}\bar{g}(0) \\ \varphi_1(0) &= \varphi_2(0) \end{aligned} \tag{4.13}$$

kde $\bar{r}(x) = \frac{1}{2}(r_1(x) + r_2(x))$

Nech teda v bode $x = 0$ je lokalizovaný kontakt prostredia charakterizovaného parametrami a funkciami s indexom 1 a indexom 2. Je potrebné si uvedomiť, že aj keď posunutia d a napätia τ sú cez diskontinuitu v materiálových parametroch spojité, toto neplatí pre ich priestorové derivácie.

Zapíšeme jednorozmerné pohybové rovnice pre tieto dve prostredia :

$$\begin{aligned} \ddot{d}_1 &= \frac{1}{\rho_1}(\tau_{1,x} + f_1) & \tau_1 &= c_1 d_{1,x} \\ \ddot{d}_2 &= \frac{1}{\rho_2}(\tau_{2,x} + f_2) & \tau_2 &= c_2 d_{2,x} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Podmienky na rozhraní sú $d_1(0) = d_2(0)$, $\tau_1(0) = \tau_2(0)$. Pretože sú posunutia v každom čase spojité, spojité v čase budú aj rýchlosti a zrýchlenia, preto $\dot{d}_1(0) = \dot{d}_2(0)$.

Na základe (4.12) a (4.13) potom možno písať :

$$\begin{aligned}\ddot{d}(0) &= \frac{1}{\bar{\rho}(0)} \left[\overline{\tau}_{,x}(0) + \bar{f}(0) \right] \\ \tau(0) &= \bar{c}(0) \overline{d}_{,x}(0)\end{aligned}\tag{4.15}$$

kde pruh znamená aritmetický priemer hodnoty veličiny na jednej a druhej strane rozhrania, pre modul pružnosti je to harmonický priemer. Dostali sme pohybovú rovnicu a Hookov zákon aplikované na rozhranie, v rovnakom tvare, ako platia pre hladko heterogénne prostredie. Takýto tvar nazývame heterogénnou formuláciou pohybovej rovnice.

Pretože sa materiálová diskontinuita nachádza v blízkosti bodu aproximácie, v takomto bode písať je možné približne písať :

$$\begin{aligned}\ddot{d} &\doteq \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\tau_{,x} + f \right] \\ \tau &\doteq \bar{c} d_{,x}\end{aligned}$$

Okrem prípadu kedy je materiálová diskontinuita priamo v bode aproximácie sú tieto rovnice dobrým priblížením (4.15) – toto možno ukázať integrovaním pohybovej rovnice cez jednu FD bunku a použitím vety o strednej hodnote. V bodoch vzdialených od rozhrania v hladko heterogénnom prostredí sú materiálové parametre pomaly sa meniacimi funkciami priestorových súradníc, aplikovaním aritmetických a harmonických priemerov dostávame hodnoty blízke lokálnym. Preto je možné materiálové parametre v celom modeli počítať pomocou a aritmetických a harmonických priemerov, bez ohľadu na pozíciu heterogenít a rozhraní.

Prostredie so spojitými sa meniacimi parametrami si môžeme predstaviť ako systém veľkého množstva do série zapojených pružiniek, pričom priemerné hodnoty parametrov sú počítané cez všetky pružinky. Autori dostávajú použitím integrovania pohybovej rovnice v okolí diskontinuity a vety o strednej hodnote integrálneho počtu vyjadrenie materiálových parametrov :

$$\rho_I^A = \frac{1}{h} \int_{x_I-h/2}^{x_I+h/2} \rho(x) dx \quad c_{I+1/2}^H = \left(\frac{1}{h} \int_{x_I}^{x_I+h} \frac{dx}{c(x)} \right)^{-1}.$$

Pokiaľ integrály numericky vyčíslujeme štandardným spôsobom, vzťahy prejdú na aritmetické a harmonické priemery diskretných hodnôt čo dostaneme aj uvažovaním o pružinkách.

Uvedený postup je použiteľný pre konvenčné siete ale efektívny hlavne pre striedavo usporiadané siete. Nás bude zaujímať priestorová zmena materiálových parametrov v oblasti veľkosti jednej bunky ako to naznačujú aj hranice v integrálnom vyjadrení c^H a ρ^A . Pre striedavo usporiadané siete stred oblasti priemerovania je v mieste, kde je lokalizovaná diskretná aproximácia parametra.

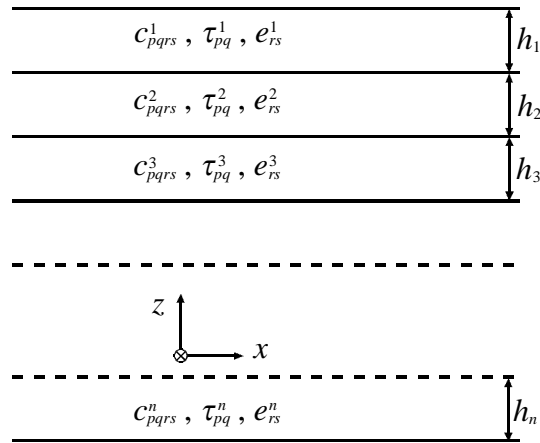
Zovšeobecnenie na trojrozmerný prípad nie je triviálne. Na podobných úvahách je založené aj odvodenie v ďalšej kapitole, ktoré bude neskôr využité pri heterogénnom prístupe pre voľný povrch.

4.2.2 Ekvivalent jemne zvrstveného anizotropného prostredia

Tento postup publikovali Schönberg a Muir (1989). Už Backus (1962) ukázal, že systém tenkých izotropných vrstiev má v dlhovlnnej limite rovnaké vlastnosti ako homogénne transverzálne izotropné prostredie, a že jeho parametre možno nájsť použitím vhodných prístupov hľadania priemerného prostredia. Každá z vrstiev má hrúbku oveľa menšiu, ako je vlnová dĺžka vln, ktoré prostredím prechádzajú. Pri aplikácii tejto teórie na jednu FD bunku je hrúbka zvrstvenia, ktorým ju aproximujeme teda malá v porovnaní s minimálnou vlnovou dĺžkou.

Budeme sa zaoberať systémom vrstiev, ktorý je na Obr. 15. Pre zjednodušenie je možné uvažovať relatívne hrúbky, teda $\sum h_i = 1$. Normála na rozhrania je $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Kontakty vrstiev sú spojené, preto nie je možný ich vzájomný pohyb, teda posunutia a napätia na nich sú spojité. Tak, ako to urobil Backus, vzhľadom na malú hrúbku každej z vrstiev, vektor napätia pôsobiaci na roviny s normálou v smere osi z možno považovať v rámci jednej vrstvy a vzhľadom na spojitosť aj v rámci súvrstvia za konštantný (analógia so systémom pružiniek) :

$$T_i = \tau_{ij} n_j = \tau_{ij} \delta_{jz} = \tau_{iz}$$



Obr. 15

Systém anizotropných vrstiev

Ďalej budeme uvažovať maticu elastických koeficientov, napätí a deformácií jednej konkrétnej vrstvy a horný index i nebudeme uvádzať.

V dodatku 2 je ukázané, že ak sú posunutia spojité, spojité sú aj ich priestorové derivácie v smeroch x a y . Preto zložky tenzora deformácie e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} , ktoré sú ich kombináciou budeme tak isto považovať za konštantné v každej vrstve a teda aj celom súvrství.

Vo Voigtovej reprezentácii chceme teraz preusporiadať komponenty šesťzložkového vektora napätí a deformácie tak, aby sa pri sebe nachádzali spojité a nespojité časti, pretože je to vhodné kvôli jednoduchosti zápisu ďalších úprav. Transformáciu možno vykonať násobením ortogonálnou maticou Z :

$$\vec{\tau}' = Z\vec{\tau} \quad \vec{e}' = Z\vec{e}$$

kde

$$\begin{aligned} \vec{e} &= (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}) & \vec{\tau} &= (\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}) \\ \vec{e}' &= (e_{33}, e_{13}, e_{23}, e_{11}, e_{22}, e_{12}) & \vec{\tau}' &= (\tau_{33}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}) \end{aligned}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a platí $Z^{-1} = Z^T$.

Pred transformáciou platí Hookov zákon v tvare $\vec{\tau} = c\vec{e}$ (2.4), kde c je matica elastických koeficientov. Potrebujeme odvodiť tvar matice c' v transformovanom zákone :

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= c\vec{e} \\ Z^T \vec{\tau}' &= cZ^T \vec{e}' \Rightarrow \vec{\tau}' = ZcZ^T \vec{e}' \quad \text{a} \quad c' = ZcZ^T \end{aligned}$$

Ďalej bloky matice c' budeme označovať kvôli krátkosti zápisu bez čiarky. Teraz už môžeme prísť k odseparovaniu spojitaj a nespojitaj časti vektorov – maticu c' aj vektory rozdelíme na bloky :

$$\begin{pmatrix} \tau_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{33} & c_{35} & c_{36} & c_{13} & c_{23} & c_{34} \\ c_{35} & c_{55} & c_{56} & c_{15} & c_{25} & c_{45} \\ c_{36} & c_{56} & c_{66} & c_{16} & c_{26} & c_{46} \\ c_{13} & c_{15} & c_{16} & c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{23} & c_{25} & c_{26} & c_{12} & c_{22} & c_{24} \\ c_{34} & c_{45} & c_{46} & c_{14} & c_{24} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{zz} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \\ e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau_s \\ \tau_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{sn} & c_{ss} \\ c_{nn} & c_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ e_s \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

pričom c' je tiež symetrická, teda $c_{nm} = c_{ss}^T$. Index s sa viaže na spojitú a n na nespojitú časť.

Rovnicu (4.16) možno rozpísať

$$\begin{aligned} \tau_s &= c_{sn} e_n + c_{ss} e_s \quad \Rightarrow \quad e_n = c_{sn}^{-1} \tau_s - c_{sn}^{-1} c_{ss} e_s \\ \tau_n &= c_{ss}^T e_n + c_{ns} e_s \end{aligned} \quad (4.17)$$

potom

$$\begin{aligned} \tau_n &= c_{ss}^T (c_{sn}^{-1} \tau_s - c_{sn}^{-1} c_{ss} e_s) + c_{ns} e_s = c_{ss}^T c_{sn}^{-1} \tau_s + (c_{ns} - c_{ss}^T c_{sn}^{-1} c_{ss}) e_s \\ \tau_n &= (c_{sn}^{-1} c_{ss})^T \tau_s + (c_{ns} - c_{ss}^T c_{sn}^{-1} c_{ss}) e_s \end{aligned}$$

pretože $c_{ss}^T c_{sn}^{-1} = ((c_{sn}^{-1})^T c_{ss})^T = (c_{sn}^{-1} c_{ss})^T$.

Tieto úpravy sme vykonali tak, aby sme vyjadrili τ_n a e_n pomocou spojitých τ_s a e_s . Nespojité veličiny je vhodné reprezentovať ich aritmetickým priemerom vo všetkých vrstvách :

$$\langle e_n \rangle = \langle c_{sn}^{-1} \rangle \tau_s - \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle e_s \quad (4.18)$$

$$\langle \tau_n \rangle = \langle (c_{sn}^{-1} c_{ss})^T \rangle \tau_s + \langle c_{ns} - c_{ss}^T c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle e_s \quad (4.19)$$

pričom $\langle A \rangle = \sum h_i A_i$, je to matica vážených aritmetických priemerov prvkov matíc pre jednotlivé

vrstvy. Upravme teraz získané výrazy na tvar pôvodných rovníc (4.17).

$$\tau_s = \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle e_n \rangle + \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle e_s$$

a dosadíme do (4.19) :

$$\begin{aligned} \langle \tau_n \rangle &= \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle^T \left(\langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle e_n \rangle + \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle e_s \right) + \langle c_{ns} - c_{ss}^T c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle e_s \\ \langle \tau_n \rangle &= \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle^T \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle e_n \rangle + \left(\langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle + \langle c_{ns} - c_{ss}^T c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle \right) e_s \end{aligned}$$

Porovnaním s pôvodnými vzťahmi dostávame vzťahy pre priemerné hodnoty matic, ktoré charakterizujú systém ako celok :

$$\begin{aligned} \langle c_{sn} \rangle &= \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \\ \langle c_{ss} \rangle &= \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle \\ \langle c_{ns} \rangle &= \langle c_{ss}^T c_{sn}^{-1} \rangle \langle c_{sn}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle + \langle c_{ns} - c_{ss}^T c_{sn}^{-1} c_{ss} \rangle \end{aligned}$$

Výsledkom sú teda bloky matice $\langle c' \rangle$, $\langle c \rangle$ dostaneme transformáciou $\langle c \rangle = Z^T \langle c' \rangle Z$.

My pri hľadaní efektívnych materiálových parametrov budeme takýmto spôsobom určovať priemerné prostredie v určitej oblasti centrovanej v pozícii, kde je diskretná aproximácia parametra lokalizovaná. Daný priestor rozdelíme na tenké homogénne izotropné vrstvy. Preto teraz uvedieme tvar matice elastických koeficientov ekvivalentnej systému izotropných vrstiev. Každá z vrstiev je charakterizovaná parametrami λ_i, μ_i kde i je index vrstvy. Potom

$$c^{i'} = \begin{pmatrix} \lambda_i + 2\mu_i & 0 & 0 & \lambda_i & \lambda_i & 0 \\ 0 & 2\mu_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_i & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i & 0 & 0 & \lambda_i + 2\mu_i & \lambda_i & 0 \\ \lambda_i & 0 & 0 & \lambda_i & \lambda_i + 2\mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_i \end{pmatrix}$$

teda

$$c_{sn}^i = \begin{pmatrix} \lambda_i + 2\mu_i & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_i \end{pmatrix} \quad c_{ss}^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_{ns}^i = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu_i & \lambda_i & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i + 2\mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_i \end{pmatrix}.$$

Operácie s maticami, ako je to popísané v predchádzajúcom odvodení, je možné vykonať symbolicky v programe *Mathematica*. Takto dostávame priemernú maticu c :

$$c = \begin{pmatrix} \left\langle \lambda + 2\mu \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle & \left\langle \lambda \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle & \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} & 0 & 0 & 0 \\ \left\langle \lambda \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle & \left\langle \lambda + 2\mu \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle & \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} & \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} & \frac{1}{\left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left\langle \mu \right\rangle \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

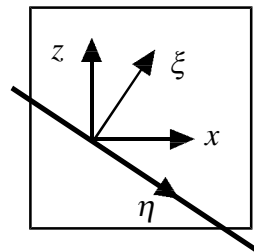
Tento postup možno analogicky vykonať aj pre vrstvy s normálou v smere osi x alebo y a výsledné matice majú podobný tvar.

Matica c je maticou efektívnych hodnôt materiálových parametrov, efektívna hustota je počítaná ako aritmetický priemer v danom objeme. Teleso s takouto maticou elastických koeficientov je tzv. transversálne izotropné.

4.2.3 Aplikácia pre konvenčné siete

Muir et al. (1992) aplikoval postup z predchádzajúcej kapitoly aby našiel heterogénnu FD schému. Sčasti obmedzujúci je predpoklad, že obsah oblasti integrovania je nutné považovať za systém plan-paralelných vrstiev, preto nie je možné uvažovať komplikované vzájomné polohy rozhraní. Pokiaľ sa však jedná o rovinné rozhranie dvoch materiálov rovnobežné s niektorou so sieťových rovín, je možné priamo aplikovať uvedený postup. Zakrivené rozhranie je možné s dobrou presnosťou v rámci jednej bunky aproximovať rovinou vzhľadom na to, že sieťový krok je oveľa menší ako polomer zakrivenia rozhrania. Ak uvažujeme sklonené rozhranie priemerovanie sa aplikuje v rotovanej súradnej sústave a získanú priemernú maticu c je nutné pomocou rotácie pretransformovať do pôvodnej súradnej sústavy (Obr. 16), maticu po rotácii označujeme c' . Kým matica c (4.20) má veľa nulových prvkov, zrotovaná priemerná matica c' môže mať všetky prvky nenulové. Takto získanú maticu používame v Hookovom zákone (2.4). V metóde konečných diferencií musíme preto aproximovať derivácie zložiek posunutí (rýchlostí) vo všetkých smeroch. Pri použití konvenčnej siete možno tento prístup priamo aplikovať.

Obr. 16 globálny a lokálny systém súradníc



4.2.4 Zjednodušenie pre striedavo usporiadané siete

Efektívnosť, ktorú nám striedavo usporiadané siete ponúkajú sa teda neprenáša do problémov s rozlične orientovanými rozhraniami. Pri modelovaní sa vždy usilujeme o nájdenie optimálnej rovnováhy medzi presnosťou a nenáročnosťou daného prístupu. V tomto prípade zavedieme aproximáciu, pokiaľ nepresnosť v prístupe nebude závažná, efektívnosť metódy sa zvýši.

Za určitých podmienok, ako sa ukazuje na základe numerických simulácií, je možné urobiť zjednodušenie a striedavo usporiadané siete používať pre vnútorné rozhrania. Tento prístup je popísaný v článku Moczo et al. (2002). Zovšeobecnenie prístupu z kapitoly 4.2.1 na trojrozmerný prípad vyžaduje prijať ešte dodatočné predpoklady. Hookov zákon sa rozpíše cez elastické koeficienty μ a κ ($\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ je objemový modul pružnosti). V ňom predpokladáme spojitosť :

- 1) stopy tenzora napätí
- 2) deviačnej časti normálových zložiek tenzora napätí
- 3) strižných zložiek tenzora napätí

Tieto podmienky sú približne splnené ak priestorové zmeny funkcií sú dostatočne malé. Ako sa ukazuje na základe simulácií v reálnych prípadoch sme oprávnení toto zjednodušenie použiť. Uvedené predpoklady umožňujú kontakt dvoch materiálov reprezentovať prostredím, ktoré je izotropné – má dva nezávislé elastické koeficienty charakterizujúce jeho správanie pri deformovaní. Osobitným uvažovaním o izotropnej a deviačnej časti tenzora napätí možno ukázať, že priemerné hodnoty μ a κ je vhodné vypočítať ako harmonické priemery v danej oblasti :

$$\kappa^H = \iiint_V \frac{1}{\kappa} dV \quad \mu^H = \iiint_V \frac{1}{\mu} dV$$

kde objem integrovania V je kocka s hranou h s centrom v mieste, kde je aproximovaný materiálový parameter v sieti lokalizovaný.

FD schéma má teda rovnaký tvar, ako pre homogénne alebo hladko heterogénne prostredie, namiesto lokálnych hodnôt materiálových parametrov v nej vystupujú efektívne hodnoty. Autori zdôrazňujú, že pre voľný povrch, na ktorom dochádza k diskontinuite v posunutí, toto priblíženie nie je možné použiť a odporúčajú metódu AFDA (5.1.2) na simulovanie rovinného voľného povrchu.

5 Simulovanie voľného povrchu

Je veľmi dôležitou súčasťou realistického modelovania lokálnych efektov. Podľa kapitoly 2.4 je voľný povrch reálne pohyblivou voľnou hranicou. V seizmológii vzhľadom na značné rozdiely v hustote a hodnotách elastických parametrov prítomnosť atmosféry zanedbávame, teda okrajová podmienka znamená nulovosť napätí na hranici. Navyše v teórii malých deformácií je možné posunutia voľnej hranice zanedbať a okrajovú podmienku predpisovať v mieste, kde sa hranica nachádzala v počiatočnom čase (hranica prestáva byť pohyblivou).

Podobne, ako je to aj pri modelovaní vnútorných rozhraní, možno prístupy rozdeliť na homogénne a heterogénne. Vzhľadom na to, že voľný povrch je najostrejšie rozhranie, ktorým sa pri modelovaní zaoberáme, je kombinácia metódy presne simulujúcej voľný povrch a FDM veľmi vhodná, budeme sa teda zberať aj hybridnými prístupmi. V nasledujúcich kapitolách je prehľad metód používaných na simulovanie voľného povrchu predovšetkým v seizmologických úlohách.

5.1 Rovinný voľný povrch

Pokiaľ je voľný povrch rovinný, môžeme súradný systém zvoliť tak, aby to bola rovina $z = 0$. Normála je konštantná, z Cauchyho vzťahu pre napätia dostaneme podmienku :

$$T_i = \tau_{ij} \delta_{-j} = \tau_{iz}$$

teda

$$\tau_{xz}(0) = \tau_{yz}(0) = \tau_{zz}(0) = 0. \quad (5.1)$$

Aj keď tento prípad je značne zjednodušeným modelom reálneho voľného povrchu, jeho presné modelovanie nie je v metóde konečných diferencií triviálnou úlohou. Pokiaľ voľný povrch ohraňuje hladko heterogénne prostredie, je možné efektívne využiť homogénny prístup. Náročnejšiu úlohu predstavuje model, kde rozhrania vystupujú až k voľnému povrchu.

Pokiaľ sa zaujímate len o dvojrozmerné modelovanie vo formulácii v posunutíach pre SH prípad je rovinný voľný povrch možné simulovať pomocou tzv. vákuového formalizmu : hustotu aj elastické koeficienty položíme rovné nule, pričom v celej výpočtovej oblasti možno použiť jedinú schému – jedná sa teda o heterogénnu formuláciu (Boore, 1972). Formulácia v posunutíach je však nepresná pre vysoké pomery α/β , ktoré sú časté práve v oblastiach, kde chceme pohyb modelovať. Taktiež sa ukazuje, že vákuový formalizmus vo formulácii v posunutíach je menej presný ako iné metódy používané pri trojrozmernom modelovaní seizmického pohybu. Je oveľa prirodzenejšie pracovať s formuláciou DS alebo VS, pretože v nich explicitne vystupujú napätia. Týmto sa budeme zaoberať ďalej.

Levander (1988) navrhol použitie virtuálnych hodnôt zložiek tenzora napätí nad voľným povrchom. Tieto sú určené antisymetricky vzhľadom na zložky hneď pod voľným povrchom. Svoj prístup, ktorý je v literatúre označovaný ako zrkadlenie napätí (stress imaging) aplikoval pri 2D modelovaní so schémou 4. rádu. Aby bolo možné jednoducho predpísať okrajovú podmienku

nulových napätí na voľnom povrchu je prirodzené umiestniť niektorú z FD aproximácií zložiek tenzora napätí priamo na voľný povrch, takto možno rozlíšiť dve polohy v striedavo usporiadanej sieti : tzv. H (na povrchu sú horizontálne zložky posunutí) a W (vertikálna zložka) formuláciu. Z Levanderovej práce nie je zrejmé, ktoré zložky tenzora napätí sa nachádzajú na voľnom povrchu ani ako určovať zložky rýchlostí nad voľným povrchom.

Rodrigues (1993) použil zrkadlenie napätí vo svojej schéme 8. rádu. Na voľnom povrchu boli lokalizované normálové zložky tenzora napätí. Zistil, že je nutné voliť priestorový krok minimálne $\lambda_{\min} / 15 - \lambda_{\min} / 10$, aby potlačil značnú numerickú disperziu. Kombinácia zrkadlenia napätí a vertikálne zjemnenej siete mu umožnila úlohu riešiť optimálne.

Metódu zrkadlenia napätí použil v kombinácii s 3D schémou 4. rádu v napätiach a rýchlostiach Graves (1996), ktorý súčasne detailne vysvetlil, ako pracovať so zložkami tenzora napätí. Tento prístup sa ukázal byť presnejší ako vákuový formalizmus.

Strižné zložky tenzora napätí umiestnené na voľnom povrchu používali Ohminato a Chouet (1997). Graves na základe numerických testov zistil, že formulácia s normálovými zložkami na voľnom povrchu je presnejšia. Gottschämer a Olsen (2001) porovnávaním výsledkov s metódou diskretných vlnových čísel ukázali prípady, kedy je jedna formulácia lepšia ako druhá a naopak, odporúčajú však používať formuláciu so strižnými zložkami na voľnom povrchu a priemerné hodnoty horizontálnych zložiek rýchlostí cez voľný povrch ako hodnotu priamo na voľnom povrchu.

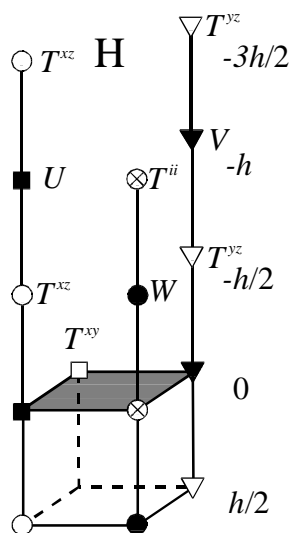
Kristek et al. (2002) vo svojom článku navrhujú nové metódy, ktorými je možné rovinný voľný povrch simulovať veľmi presne. Metódu, ktorú nazývajú upravené FD aproximácie (adjusted FD approximations – AFDA) porovnávajú s metódou diskretných vlnových čísel, zrkadlenia napätí a jej modifikáciu s vertikálne zjemnenou sieťou pri voľnom povrchu. Túto metódu je možné kombinovať s heterogénnym prístupom čo umožňuje modelovať pohyb aj v modeloch s rozhraniami vystupujúcimi k voľnému povrchu.

Pri použití striedavo usporiadaných sietí môže byť potenciálne výhodné použitie operátorov vyššieho rádu, toto umožňuje voliť väčší priestorový a časový krok. Je však nutné odvodiť špeciálne FD aproximácie pri voľnom povrchu, inak sa v jeho blízkosti znižuje rád presnosti.

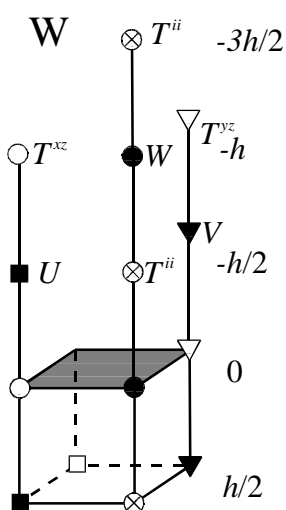
V súčasnosti sú pri modelovaní v heterogénnych prostrediach s rovinným voľným povrchom najviac používané metóda zrkadlenia napätí a metódy AFDA, ktoré popíšeme podrobnejšie.

5.1.1 Metóda zrkadlenia napätí

Tento prístup bol navrhnutý Levanderom (1988) a neskôr viac krát použitý a vylepšený viacerými autormi. V článku Kristek et al. (2002) sú popísané a testované obidve formulácie tejto metódy H aj W. Ako už bolo spomenuté v historickom prehľade v metóde zrkadlenia napätí sa nad voľným povrchom definujú virtuálne hodnoty zložiek tenzora napätí antisymetricky. Z antisymetrie potom vyplýva nulovosť napätí na voľnom povrchu. Hodnoty posunutí nad a na voľnom povrchu sa dopočítavajú na základe využitia zrkadlených hodnôt napätí a FD rozvojev známych podmienok (Obr. 17). Následne je možné použiť rovnakú schému ako pre vnútorné body aj priamo pre voľný povrch a tesne pod ním, kde by sa inak aproximácie do 4. rádu nemohli počítať štandardne. V tejto kapitole mimoriadne u , v , w označujú posunutia a U , V , W sú ich diskkrétne aproximácie.



- $U(0), V(0)$ získame z aproximácie pohybovej rovnice do 4. rádu
- $W(-h/2)$ počítame z aproximácie podmienky $\tau_{zz}(0) = 0$ do 2. rádu v Hookovom zákone pre τ_{zz}
- $U(-h)$ získame z aproximácie 2. rádu podmienky antisymetrie $\tau_{xz}(-h/2) = -\tau_{xz}(h/2)$ a Hookovho zákona
- $V(-h)$ získame z aproximácie 2. rádu podmienky antisymetrie $\tau_{zy}(-h/2) = -\tau_{zy}(h/2)$ a Hookovho zákona
- aproximácie napätí T^{xz}, T^{yz}, T^{zz} nad voľným povrchom sú doplnené antisymetricky
 $T^{zz}(0) = 0, T^{xx}(0), T^{yy}(0)$ je možné vyjadriť z Hookovho zákona kde derivácia w, z je vyjadrená pomocou derivácií u, x a v, y z Hookovho zákona využitím $\tau_{zz}(0) = 0$



- $W(0)$ získame z aproximácie poh. rovnice 4. rádu
- $U(-h/2)$ počítame z aproximácie podmienky $\tau_{xz}(0) = 0$ do 2. rádu v Hookovom zákone pre τ_{xz}
- $V(-h/2)$ počítame z aproximácie podmienky $\tau_{yz}(0) = 0$ do 2. rádu v Hookovom zákone pre τ_{yz}
- $W(-h)$ získame z aproximácie 2. rádu podmienky antisymetrie $\tau_{zz}(-h/2) = -\tau_{zz}(h/2)$ a Hookovho zákona
- aproximácie napätí T^{xz}, T^{yz}, T^{zz} nad voľným povrchom sú doplnené antisymetricky
 $T^{yz}(0) = 0, T^{yz}(0) = 0$

Obr. 17 Metóda zrkadlenia napätí a jej princíp

Na účely testovania prístupov bol zvolený jednoduchý model homogénneho polpriestoru. Je to výhodné z dvoch hľadísk :

- nevznikajú komplikované vlnové procesy a teda je možné dobre odlíšiť numerické chyby, za priaznivých okolností odhadnúť ich príčiny,
- pre jednoduché modely máme možnosť využiť na porovnanie veľmi presné metódy – analytické, semianalytické alebo numerické.

V modeli, ktorí autori zvolili (parametre sú popísané v kapitole 7.2.2) sa v smere x šíria Rayleighove vlny a v smere diagonály SH vlny. Metóda zrkadlenia napätí je porovnávaná s metódou diskretných vlnových čísel. Pokiaľ $\lambda_{\min} = 6 h$ autori konštatujú :

- pre účely modelovania seizmického pohybu je miera zhody postačujúca pre H aj W formuláciu pokiaľ sa zaujímate o P a SH vlny,
- kým v H formulácii Rayleighove vlny prichádzajú skôr, ako by sa reálne mali objaviť, v W formulácii sa oneskorujú,
- v W formulácii sa modelované Rayleighove vlny lepšie zhodujú v amplitúdach s presným riešením

- nepozoruje sa žiadna výrazná anizotropia v mriežke : rýchlosti šírenia v smere sieťových rovín aj v smere diagonály sú blízke,
- ak uvažujeme väčšie hodnoty Poissonovho pomeru, numerické riešenie sa zhoduje o niečo lepšie.

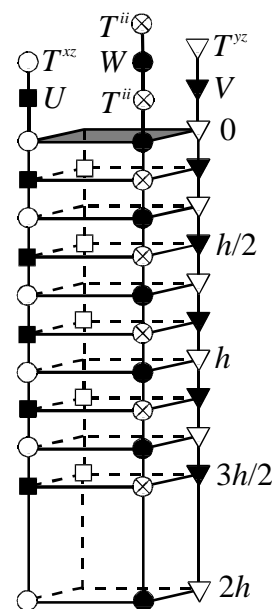
Pre jemnejšie vzorkovanie $\lambda_{\min} = 10 h$:

- pri modelovaní Rayleighovych vln je miera zhody dostatočná,
- H formulácia sa zhoduje lepšie vo fázach, W v amplitúdach.

Tieto zistenia viedli k záveru, že pri použití tejto metódy na simulovanie voľného povrchu je potrebné voliť priestorový krok maximálne $h = \lambda_{\min}/10$. Pretože pre vnútorné oblasti modelu postačuje krok $h = \lambda_{\min}/6$, tieto by boli prevzorkované. Preto je vhodné hľadať iné prístupy.

Vertikálne zjemnená sieť

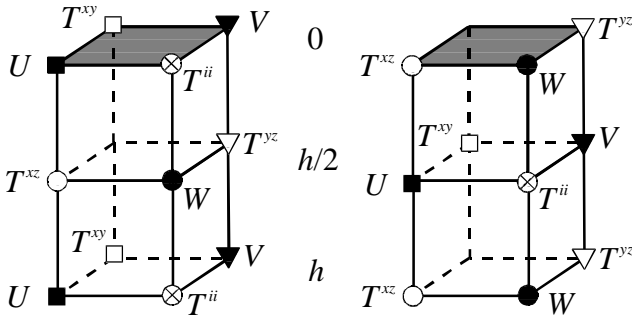
V prípade rovinného voľného povrchu možno bez straty efektívnosti využiť nerovnomernú sieť zjemnenú len vo vertikálnom smere (kapitola 3.5). Pokiaľ by voľný povrch bol nerovinný, bolo by sieť potrebné zjemňovať aj v horizontálnych smeroch a znova by sme určitú oblasť vzorkovali neefektívne. Keďže pre metódu zrkadlenia napätí je potrebná jemnejšia sieť, autori navrhujú skombinovať W formuláciu práve s vertikálne zjemnenou sieťou (metódu nazývajú skrátene W-VRG – vertically refined grid,). Do hĺbky $3h/2$ Zjemnené sú bunky siete, každá je vo vertikálnom smere rozdelená na 3 časti. V celej sieti je aproximácie horizontálnych derivácií možné počítať štandardne. Pre vnútro zjemnenej siete používame vertikálne aproximácie s krokom $h/3$. V okolí spodnej hranice zjemnenej siete (pre body $7h/6$ a $8h/6$) sa používajú upravené FD aproximácie cez vzdialenosť h aj $h/3$. Siezmogramy získané použitím tejto metódy potvrdzujú postačujúcu presnosť pri použití priestorového kroku $h = \lambda_{\min} / 6$.



Obr. 18 Vertikálne zjemnená sieť

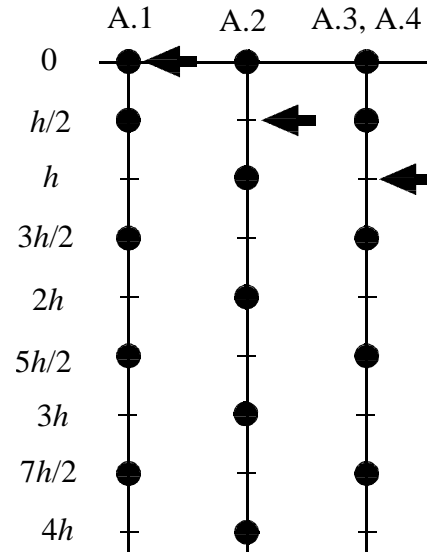
5.1.2 Metóda AFDA

Tento spôsob simulovania rovinného voľného povrchu na striedavo usporiadaných sieťach 4. rádu presnosti prvý krát uviedli Kristek et al. (2002). Metóda AFDA (adjusted finite difference approximations) nepoužíva žiadne virtuálne hodnoty napätí ani posunutí nad voľným povrchom, FD operátory sú pri voľnom povrchu modifikované (len pri výpočte derivácií v smere z) tak, aby aproximácie derivácií boli vždy počítané z dostatočného množstva vnútorných bodov a bola zaručená presnosť do 4. rádu. Tak isto ako pri zrkadlení napätí je vhodné umiestniť priamo na voľný povrch diskkrétne aproximácie zložiek tenzora napätí a predpísať im priamo nulové hodnoty podľa (5.1), existuje H a W formulácia (H-AFDA a W-AFDA).



Obr. 19 Sieť pre metódu H-AFDA a W-AFDA

Obr. 20 Body používané pri výpočte derivácií



Pozmenené asymetrické vzorce pre výpočet derivácií sa počítajú pomocou hodnôt funkcií v miestach označených na obrázku Obr. 20 krúžkami, šípka označuje pozíciu, kde sa derivácia počíta. Vzťahy sú uvedené v dodatku 3.

Aplikáciu formulácií sumarizujú tabuľky :

H-AFDA

- $T^{zz}(0) = 0$
- $T^{xx}(0)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{xx} , derivácia $w_{,z}$ je vyjadrená pomocou derivácií $u_{,x}$ a $v_{,y}$ použitím $\tau_{zz}(0) = 0$
- $T^{yy}(0)$ – podobne ako $T^{xx}(0)$
- $T^{xz}(h/2)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{xz} , $u_{,z}$ aproximujeme podľa (A.2)
- $T^{yz}(h/2)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{yz} , $v_{,z}$ aproximujeme podľa (A.2)
- $T^{xx}(h)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{xx} , $w_{,z}$ aproximujeme podľa (A.3), kde $w_{,z}(0)$ je vyjadrené pomocou $u_{,x}$ a $v_{,y}$ použitím $\tau_{zz}(0) = 0$
- $T^{yy}(h)$ – počítame analogicky ako $T^{xx}(h)$
- $T^{zz}(h)$ – počítame analogicky ako $T^{xx}(h)$
- $U(0)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre u , $\tau_{xz,z}$ aproximujeme podľa (A.1) s použitím $\tau_{xz}(0) = 0$
- $V(0)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre v , $\tau_{yz,z}$ aproximujeme podľa (A.1) s použitím $\tau_{yz}(0) = 0$
- $W(h/2)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre w , $\tau_{zz,z}$ aproximujeme podľa (A.2)
- $U(h)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre u , $\tau_{xz,z}$ aproximujeme podľa (A.4) s použitím $\tau_{xz}(0) = 0$
- $V(h)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre v , $\tau_{yz,z}$ aproximujeme podľa (A.4) s použitím $\tau_{yz}(0) = 0$

W-AFDA

- $T^{xz}(0) = 0$
 $T^{yz}(0) = 0$
 $T^{xx}(h/2)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{xx} , $w_{,z}$ aproximujeme podľa (A.2)
 $T^{yy}(h/2)$ – podobne ako $T^{xx}(h/2)$
 $T^{zz}(h/2)$ – podobne ako $T^{xx}(h/2)$
 $T^{xz}(h)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{xz} , $u_{,z}$ aproximujeme podľa (A.3) kde $u_{,z}(0)$ je nahradené $w_{,x}$ použitím $\tau_{xz}(0) = 0$
 $T^{yz}(h)$ – z aproximácie Hookovho zákona pre τ_{yz} , $v_{,z}$ aproximujeme podľa (A.3), kde $v_{,z}(0)$ je nahradené $w_{,y}$ použitím $\tau_{yz}(0) = 0$
 $W(0)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre w , $\tau_{zz,z}$ aproximujeme podľa (A.1) s použitím $\tau_{zz}(0) = 0$
 $U(h/2)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre u , $\tau_{xz,z}$ aproximujeme podľa (A.2)
 $V(h/2)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre v , $\tau_{yz,z}$ aproximujeme podľa (A.2)
 $W(h)$ – z aproximácie pohybovej rovnice pre w , $\tau_{zz,z}$ aproximujeme podľa (A.4) s použitím $\tau_{zz}(0) = 0$

Metóda AFDA na aproximovanie vertikálnych derivácií nepoužíva fiktívne hodnoty, dedefinované na základe fyzikálnej úvahy, ale hodnoty známe z vnútra mriežky. Rád aproximácie je možné takto presne určiť a teda zachovať rovnakú presnosť, ako vo vnútri siete. Preto sú výsledky lepšie ako je to pri zrkadlení napätí a už pri 6 priestorových krokoch na minimálnu vlnovú dĺžku je presnosť modelovania Rayleighových vln postačujúca.

V článku Kristek et al. (2002) sa autori ďalej zaoberajú kvantitatívnym vyhodnocovaním presnosti metód. Definujú mieru rozdielu medzi referenčným a porovnávaným riešením – rozdiel v obálke a fáze. Vyhodnotenie týchto rozdielov potvrdzuje vizuálne (v grafoch) pozorované numerické javy. Z výsledkov vyplýva, že riešenie získané použitím metódy H-AFDA sa s presným riešením lepšie zhoduje vo fázach, kým W-AFDA dáva nepatrne lepšie hodnoty amplitúd. Takto môžeme vybrať metódu, ktorá je pre nás výhodnejšia (ak sa napríklad zaujímame predovšetkým o amplitúdy a nie časy príchodov alebo naopak). V závere autori konštatujú, že metóda AFDA ako najefektívnejšia z testovaných a dostatočne presná je vhodná na modelovanie lokálnych efektov v sedimentárnych štruktúrach. Pretože pre ohodnotenie seizmického ohrozenia sú dôležitejšie hodnoty amplitúd, autori odporúčajú formuláciu W-AFDA.

Metódy boli testované na najjednoduchšom možnom modeli – homogénnom polpriestore. Bez nutnosti ich modifikácie sú však spomínané metódy priamočiaro aplikovateľné aj pre hladko heterogénne prostredie v blízkosti voľného povrchu. V článku Moczo et al. (2004) autori testujú simulovanie rovinného voľného povrchu metódou AFDA keď vnútorné rozhranie vystupuje k voľnému povrchu. Výpočtová schéma je rovnaká, ako v prípade homogénneho polpriestoru. Materiálové parametre vo vnútornej oblasti mriežky počítame podľa vzťahov pre aritmetické a harmonické priemerovanie (kapitola 4.2.4). Pri voľnom povrchu oblasti integrácie parametrov ρ_w , μ_{xz} a μ_{yz} zasahujú do priestoru nad voľným povrchom. Úprava spočíva v modifikácii integračnej oblasti na polovicu. Okrem zmeny schémy pri voľnom povrchu sa mení aj spôsob výpočtu efektívnych

materiálových parametrov. Tento prístup je teda kombináciou medzi heterogénnym a homogénnym prístupom.

Autori testovali 4 základné polohy diskontinuity vzhľadom na mriežku aby overili, že v ľubovoľnej z nich metóda dáva výsledky dostatočnej presnosti. Rovnaký model bol počítaný aj metódou konečných prvkov, ktorá bola zvolená ako referenčná metóda, pretože v nej nie je implementovanie okrajových podmienok problematické, je však oveľa náročnejšia na pamäť a výpočtový čas. V závere autori na základe porovnaní syntetických seizmogramov vypočítaných metódou AFDA a metódou FE konštatujú, že metóda W-AFDA je schopná veľmi presne simulovať voľný povrch aj v prípade, že materiálová diskontinuita prechádza až ku voľnému povrchu a súčasne správne modeluje seizmický pohyb pokiaľ rozhrania sú v ľubovoľnej polohe vzhľadom na FD mriežku.

5.2 Nerovinný voľný povrch

Pri modelovaní lokálnych efektov sa zahrnutie topografie voľného povrchu môže ukázať rovnako dôležitým ako uvažovanie reálnej geometrie rozhrania medzi sedimentmi a podloží. Takisto ako zakrivené rozhrania môžu spôsobovať silnú fokusáciu energie vln do vnútra sedimentárneho bazénu, podobné efekty spôsobuje aj zakrivenie a hroty topografie voľného povrchu. Pretože sa zaoberáme predovšetkým metódou konečných diferencií, v predchádzajúcej kapitole sme uviedli metódy na simulovanie rovinného voľného povrchu v tejto metóde, efekty spojené s topografiou pri simulovaní týmto spôsobom nedostávame. Preto je žiadúce vyvíjať metódu, ktorá by topografické efekty bola schopná simulovať. Dobrý prehľad o FD a hybridnom modelovaní topografie voľného povrchu je v článku Moczo et al. (1997). Tu uvedieme stručnú rekapituláciu.

Moczo a Zahradník (1996) vyvinuli hybridnú DWN-FD metódu (discrete wave number – diskretných vlnových čísel), pre dvojrozmerné modelovanie lokalizovaných príporchových štruktúr v podloží, ktorého parametre môžu závisieť od jednej súradnice, vlnové pole bolo excitované bodovým zdrojom s ľubovoľným zdrojovým mechanizmom. Na základe tejto práce je možné efektívne modelovať lokálne efekty v prípade, že zdroj je relatívne vzdialený, voľný povrch musí byť aproximovaný rovinou.

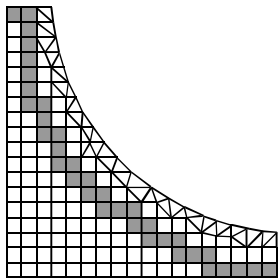
V dvojrozmernom SH FD modelovaní je možné relatívne jednoducho a dosť presne simulovať schodovité rozhranie vo formulácii v posunutiach. Jedná sa o vákuový formalizmus navrhnutý v článku Boore (1972). Pri P-SV (P a S vlny polarizované vo vertikálnej rovine) modelovaní takáto aplikácia nedáva uspokojivé výsledky. Jih et al. (1988) vyvinuli techniku, ktorou je možné simulovať polygonálny voľný povrch, pričom každý typ segmentu a kontaktu medzi nimi si vyžaduje špeciálny prístup, presnosť takejto aproximácie je v porovnaní so simulovaním rovinného voľného povrchu nižšia, prístup je tiež stabilný pre menší rozsah Poissonových pomerov.

Zaujímavý prístup, nazývaný zahrocovanie hustoty (density tapering) bol navrhnutý Johnom Vidalom a použitý v článku autorov Frankel a Leith (1992). Voľný povrch je olemovaný umelo vytvorenou vrstvou dostatočnej hrúbky, aby sa zabránilo nestabilitám. Okrajová podmienka na voľnom povrchu je aproximovaná znížením hustoty do nulovej hodnoty, pričom rýchlosti šírenia zostávajú konštantné. Ukazuje sa, že existujú prípady, kedy tento prístup nie je oprávnený. Schulz (1997) rozšíril aplikáciu tohoto prístupu aj na trojrozmerné modelovanie a je používaný v programe

E3D, ktorý má byť využitý na spresnenie interpretácií v štruktúrálnej seizmológii.

Pretože vo formulácii v napätiach a posunutíach vystupujú napätia priamo ako premenné, použitie tejto formulácie sa zdá byť prirodzenejšie ako formulácie len v posunutíach. Ohminato a Chouet (1997) navrhujú nový prístup na modelovanie trojrozmernej topografie. Napriek tomu, že prístup je jednoduchší, topografia je stále aproximovaná schodovito. Muir et al. (1992) ukázal, že takéto stupne spôsobujú umelú difrakciu, ktorá je na voľnom povrchu značná. Tieto efekty je možné potlačiť zjemnením siete, čím sa ale stráca efektívnosť.

Ako už bolo spomenuté, relatívne účinný spôsob spočíva vo vhodnej kombinácii metód. Hybridný DWN-FD-FE algoritmus v dvoch rozmeroch vo viskoelastickom prostredí prezentujú Moczo et al. (1997). Postup pri výpočte je rovnaký, ako sme to uviedli v kapitole 3.9 – v prvom kroku počítame metódou DWN model polpriestoru a zaznamenávame riešenie na líniách a a b (Obr. 9), v druhom kroku riešime vo vnútri objemu a šírenie vln metódou FD kombinovanou s FE a metódou FD zostatkové pole medzi b a neodrážajúcou hranicou (Obr. 10). V metóde FE nie je simulovanie okrajovej podmienky na voľnom povrchu problematické, preto sa používa priamo na voľnom povrchu a v jeho blízkosti. Jej použitie súčasne spôsobuje zvyšovanie výpočtových nárokov, preto sa snažíme čo najviac zredukovať priestor, kde bude požitá (Obr. 21).



Obr. 21 Sieť metód FE a FD

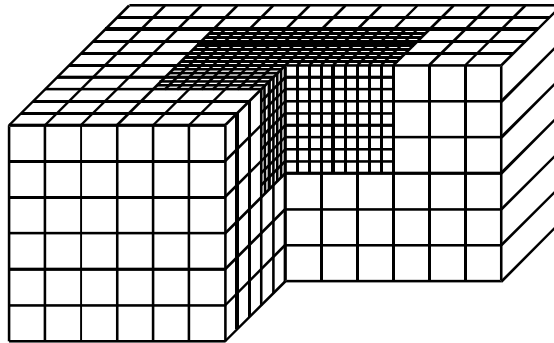
Dôležitá je prechodová oblasť (šedé štvorce) kde si metódy odovzdávajú hodnoty premenných. Sú vnútornými pre FD metódu a súčasne predstavujú Dirichletovu hranicu pre metódu FE.

Výpočty, ktoré boli vykonané ukázali, že daný algoritmus je dostatočne presný a je vhodný na modelovanie lokálnych efektov s uvažovaním reálnej topografie. Autori predpokladajú, že rovnaký algoritmus nebude problematické použiť v trojrozmernom modelovaní seizmického pohybu vo viskoelastických topografických a sedimentárnych štruktúrach. V troch rozmeroch je problematickejšie generovať sieť pre metódu konečných elementov tak, aby systém rovníc, ktorý je potrebné riešiť bol čo najjednoduchší a výpočet vhodne zoptimalizovaný.

5.2.1 Schéma LVTS

Prístup, ktorý kombinuje použitie trojrozmerných diskontinuitných sietí (Obr. 22) a lokálne premenného časového kroku (local variable time step – LVTS) publikovali Kang a Baag (2004). Autori konštatujú, že vo všeobecnosti pre siete s premenlivým priestorovým krokom je použitie diskontinuitných sietí výhodnejšie práve vďaka tomu, že pri použití nerovnomerných sietí nie je možné zabrániť prevzorkovaniu určitých regiónov. Nutnosť splniť podmienku stability spôsobuje, že ak zmenšíme priestorový, je nutné zmenšiť aj časový krok. Keďže potrebujeme zmenšiť priestorový

krok len v určitých priestorovo lokalizovaných oblastiach, môžeme zmenený časový krok aplikovať tak isto len tu. Schéma LVTS v kombinácii s diskontinuítnou sieťou naďalej musí používať interpoláciu na styku jemnejšej a redšej siete. Efektívnosť by sa zvýšila, keby jemná sieť tesnejšie sledovala voľný povrch. Zrejme je však potrebné aby prechod medzi zjemnenou a redšou sieťou bol v oblasti, kde interpolácia nespôsobí značné chyby, teda mimo sedimentárnej štruktúry. V takomto prípade je potom výhodnejšie využiť inú metódu ako FDM vo vonkajšej oblasti a interpolácii sa vyhnúť. Potenciálne by mohlo byť výhodné kombinovať túto metódu s heterogénnou formuláciou alebo zrkadlením napätí a takto zvýšiť ich efektívnosť.



Obr. 22 Diskontinuítna sieť

5.2.2 Zrkadlenie napätí v kombinácii s PML

Imhof (2002) aplikuje metódu zrkadlenia napätí (Levander 1988, Robertson 1996) na podzemné jaskyne a topografiu voľného povrchu. Rozhranie je modelované schodovito. Ako už bolo spomenuté, jednoduchá aplikácia tohoto prístupu spôsobuje umelú difrakciu. Na jej potlačenie autor použil teóriu neodrážajúcich hraníc. Pretože iné testované absorbujúce okrajové podmienky neboli účinné, alebo boli nestabilné, autor používa metódu PML (perfectly matched layer, Brenger 1994), ktorou je možné účinne simulovať neodrážajúce hranice. Počítané premenné sú rýchlosti a zložky tenzora napätí. Každá zložka sa v metóde PML rozdelí na tri časti, na každú z ktorých sa potom aplikujú len derivácie v jednom vybranom smere.

$$u_i = u_i^{sx} + u_i^{sy} + u_i^{sz}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{sx} + \tau_{ij}^{sy} + \tau_{ij}^{sz}$$

Aplikácia je podobná ako pri simulovaní neodrážajúcich hraníc, kedy PML vrstva je až za hranicou modelu a zabezpečuje, aby sa naspäť do výpočtovej oblasti z nej energia nedostávala.

Práca je rozšírením Levanderovho prístupu v dvoch rozmeroch do 3D. Používa VS schému na striedavo usporiadaných sieťach. Sledujúc prácu Robertsona, rozhranie prechádza presne pozíciami normálových a strižných napätí, týmto je umožnené priamo použiť zrkadlenie. Voľný povrch na vonkajších hranách sleduje pozície normálových zložiek napätí. Na vnútorných hranách prechádza cez pozíciu rýchlosti do pozície strižného napätia a naspäť do pozície rýchlosti, odkiaľ môže pokračovať ľubovoľným smerom. Pokiaľ v danom bode z okrajovej podmienky vyplýva nulovosť

niektorej zložky tenzora napätí, tejto je priradená nulová hodnota a nad voľný povrch sú jej hodnoty doplnené s opačným znamienkom, aké majú hodnoty v symetricky - cez voľný povrch alebo cez daný bod - združených pozíciách. Robertson precízne odlišoval každý typ rohu. V 2D máme 8 prípadov, v 3D je ich 256, preto Imhofov algoritmus skúma každý bod mriežky a rozhoduje či je nutné zrkadliť alebo vynulovať hodnoty. Hodnoty rýchlostí nie je potrebné zrkadliť, nad voľným povrchom sa vynuluje ich hodnota, o výpočte rozhoduje nenulovosť hustoty. Pri vlastnom výpočte v každom časovom kroku sa počíta podľa FD schémy, ktorá vznikne diskretizáciou systému (pohybová rovnica aj Hookov zákon sú rozštiepené na tri časti a sú stratové) :

$$\begin{aligned} \rho(a_k \partial_t + \Omega_k) u_i^{sk} &= \tau_{ik,k} \\ (a_k \partial_t + \Omega_k) \tau_{ij}^{sk} &= \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,k} \delta_{jk} + u_{j,k} \delta_{ik}) \quad k = x, y, z \end{aligned}$$

kde neplatí sumačná konvencia vzhľadom na k .

Najskôr sa roztriedia vrcholy podľa typu. Ďalej sa vykoná prípadné zrkadlenie napätí v smere x , počíta sa u_i^{sx} , potom v smere y a počíta sa u_i^{sy} , nakoniec v smere z a vypočítame u_i^{sz} . Rýchlosti sa nulujú v blízkosti voľného povrchu. Vypočítajú sa napätia a skorigujú na nežiadúce efekty. Cyklus sa potom opakuje (vrcholy sa triedia len jediný krát).

Autor uvádza aj numerický príklad, ale neporovnáva výsledky so žiadnou referenčnou metódou ani ich inak neoveruje, preto nie je možné urobiť závery o presnosti metódy.

5.2.3 Transformované mriežky

Pomocou metódy AFDA je možné presne a efektívne simulovať rovinný voľný povrch. Pre zakrivený voľný povrch nie je jednoduché odvodiť podobné presné vzťahy, ktoré by zachovávali rád aproximácie. Namiesto toho môžeme našu ortogonálnu mriežku pretransformovať tak, že jej horný okraj sa stotožní s voľným povrchom zakriveného rozhrania. Prví túto metódu použili Tessmer et al. (1992). Kým Tessmer a Kosloff (1994) pracovali s rýchlosťami a napätiami intuitívne, Hestholm a Ruud (1994) odvádzajú exaktné rovnice, ktoré musia napätia a rýchlosti na voľnom povrchu splňať.

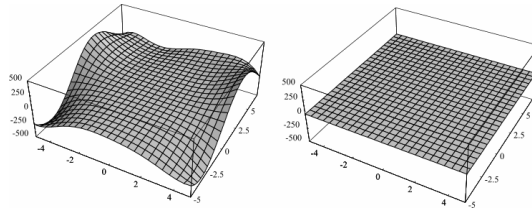
Hestholm (1999) sa zaoberá viskoelastickým modelovaním s reálnou topografiou voľného povrchu a používa striedavo usporiadanú sieť so schému v napätiach a rýchlostiach. Najskôr sa definuje transformácia z pravouhlej mriežky (ξ, κ, η) na transformovanú (x, y, z) – Obr. 23 – pomocou zobrazenia :

$$\begin{aligned} x(\xi, \kappa, \eta) &= \xi \\ y(\xi, \kappa, \eta) &= \kappa \\ z(\xi, \kappa, \eta) &= \frac{\eta}{\eta_{\max}} z_0(\xi, \kappa) \end{aligned}$$

Normála na zakrivené rozhranie je potom

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial z_0(\xi, \kappa)}{\partial \xi}, -\frac{\partial z_0(\xi, \kappa)}{\partial \kappa}, 1 \right)$$

Ak podmienku na voľnom povrchu $\tau_{ij}n_j = 0$ zderivujeme podľa času, a dosadíme za zložky tenzora napätí vyjadrenie z Hookovho zákona (pre voľný povrch sa uvažuje limita dokonale pružného prostredia), dostávame systém 3 rovníc pre rýchlosti na voľnom povrchu. Podmienky sú vyjadrené v premenných ξ , κ , η , v nich rovnice autori potom diskretizujú, pričom používajú presnosť do 2. rádu v priestore. V blízkosti voľného povrchu sa so vzdáľovaním od neho rád aproximácie postupne zvyšuje o dva až po 8, tento sa používa vo vnútri siete. Autori zdôrazňujú, že zvyšovanie rádu operátorov pri voľnom povrchu má vplyv na presnosť modelovania objemových vln ale nezmenšuje numerickú disperziu povrchových Rayleighových vln.



Obr. 23

Tento prístup na rozdiel od zrkadlenia napätí neumožňuje modelovať dutiny. Pri príliš strmej topografii dochádza k značnému deformovaniu mriežky. Keďže presnosť aproximácií je odvádzaná pre pravouhlú mriežku bolo by potrebné ukázať, ako sa rád pri transformovaní mení. Autori predpokladajú ale nedokazujú, že sú oprávnení takýmto spôsobom postupovať. Presnosť je zachovaná len pre relatívne malé deformácie a pre ostré hrany a rýchle zmeny topografie môže byť značne porušená. Napriek tomu tento prístup je jedným z dobrých kandidátov na riešenie dost' širokej triedy úloh s topografiou voľného povrchu.

5.2.4 Sumarizácia súčasného stavu

Z rozborov doteraz publikovaných prístupov je zrejmé, že problematika modelovania voľného povrchu v seizmológii je dost' intenzívne študovaná a dôležitá. Ponúknutý prehľad určite nezahŕňa všetky dostupné poznatky z tejto oblasti, veríme však, že sme ponúkli dostatočne široký a podrobný prehľad.

Aby sme mohli ozrejmiť a vysvetliť náš postup pri riešení problému, pokúsime sa zosumarizovať z nášho pohľadu najdôležitejšie vlastnosti, ktoré sa podarilo o jednotlivých metódach doteraz zistiť a na základe toho sformulovať cieľ práce.

Rovinný voľný povrch :

- používame homogénny prístup (zmena schémy pri voľnom povrchu) kombinovaný s heterogénnym (AFDA, zrkadlenie napätí),
- najpresnejšie výsledky dostávame ak odvodíme schému s ohľadom na zachovanie rádu aproximácie (AFDA).

Nerovinný voľný povrch :

- hybridná metóda DWN-FD-FE je najpresnejším prístupom, aby ho bolo možné aplikovať je potrebné použiť dobrý generátor siete pre FE výpočet,
- môžeme použiť transformovanie mriežky, príliš strmá topografia je však problematická – nezachováva sa rád aproximácie,
- zrkadlenie napätí vykazuje menšiu presnosť, difrakcie na schodovitej topografii
- na zefektívnenie modelovania by sme mohli použiť schému LVTS.

Doteraz nebola testovaná aplikácia heterogénneho prístupu na voľný povrch. Je zrejmé, že na rozhraniach heterogénna schéma nezachováva rád aproximácie, nie je však vôbec zrejmé, akú presnosť je možné týmto prístupom dosiahnuť. Očakávame, že sa nám nepodarí dosiahnuť takú dobrú zhodu s presným riešením, ako pri niektorej z vyššie spomínaných metód, ale budeme sa snažiť čo najlepšie priblížiť presnému riešeniu.

6 *Ciel' diplomovej práce*

V práci by sme chceli splniť tieto ciele :

- Odvodiť efektívne materiálové parametre pre heterogénny prístup modelovania voľného povrchu tak, aby bolo možné použiť striedavo usporiadané siete, teda za predpokladu použitia ortorombickej anizotropie.
- Naprogramovať program, ktorý vypočíta efektívne materiálové parametre v konečno-diferenčnej sieti pre ortorombickú anizotropiu.
- Otestovať a porovnať presnosť simulovania voľného povrchu za predpokladu použitia efektívnych materiálových parametrov reprezentujúcich ortorombicky anizotropné teleso. Testy by mali zahŕňať rovinný voľný povrch rovnobežný aj rôznobežný so sieťovými rovinami.
- Na základe výsledkov numerických simulácií navrhnúť pre heterogénnu konečno-diferenčnú schému spôsob parametrizácie prostredia v blízkosti voľného povrchu.

7 Heterogénny prístup pre voľný povrch

Schönberg a Muir (kapitola 4.2.2) ukázali, že na korektné reprezentovanie rozhraní s ľubovoľnou polohou voči mriežke je potrebné aj pre kontakt izotropných telies uvažovať anizotropiu. Pre vnútorné rozhrania je možné používať zjednodušenie a tým sa anizotropii vyhnúť (kapitola 4.2.4). Tým je umožnené použiť striedavo usporiadané siete (vysvetlenie je v kapitole 3.4). Pre voľný povrch takýto prístup nedáva akceptovateľné výsledky. Ak uvažujeme zložitejšiu ako ortorombickú anizotropiu, nemôžeme derivácie na striedavo usporiadanej sieti aproximovať štandardne. Problém je možné riešiť nájdením špeciálnych aproximácií pre potrebné derivácie. Takto sa zväčší priestor, z ktorého hodnoty majú vplyv na deriváciu, a preto je väčší priestor ovplyvnený nepresnosťou, ktorú heterogénny prístup v sebe zahŕňa. Hodnoty riešenia, ktoré nám pri aproximácii derivácií na striedavo usporiadaných sieťach chýbajú možno získať interpoláciou. Potom je však derivácia určená z menšieho počtu nezávislých údajov a rád aproximácie sa zníži.

Postup, ktorý sme zvolili my je založený na redukcii anizotropie na ortorombickú, ktorú už striedavo usporiadané siete dovoľujú modelovať. Používame pri tom postup z kapitoly 4.2.2 takým spôsobom, aby priemerné prostredie malo maximálne ortorombickú anizotropiu.

7.1 Efektívne materiálové parametre

Postup odvodený Schönbergom a Murom (1989) možno aplikovať pre systém rovnobežných vrstiev. Heterogénne prostredie s rozhraniami takúto štruktúru mať nemusí. Ukazuje sa, že matice elastických koeficientov s určitou symetriou (matice kryštalických sústav napr. monoklinická, ortorombická, transversálne izotropná) tvoria s operáciou určovania ekvivalentného prostredia grupu, teda priemerné prostredie pre systém vrstiev s rovnakou anizotropiou si ju zachováva. Ľahko je možné sa presvedčiť, že pre formálne priemerovanie ortorombických prostredí následne v smeroch rôznych súradných osí má túto vlastnosť taktiež.

Preto navrhujeme nasledujúci postup. Výpočtovú oblasť daného parametra rozdelíme na malé bunky s hranou h/n . Každú budeme považovať za malý homogénny objem (s hodnotou parametra, aká je v jeho centre). Zaoberajme sa systémom planparalelných ortorombických vrstiev. Matice elastických koeficientov c^i vo Voigtovej reprezentácii v každej vrstve sú

$$c^i = \begin{pmatrix} q_x^i & l_{xy}^i & l_{xz}^i & 0 & 0 & 0 \\ l_{xy}^i & q_y^i & l_{yz}^i & 0 & 0 & 0 \\ l_{xz}^i & l_{yz}^i & q_z^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{yz}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{xz}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{xy}^i \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Aplikovaním postupu z kapitoly 4.2.2 môžeme nájsť ekvivalentné prostredie, pokiaľ planparalelné vrstvy majú vektory normály orientované v smere osí z :

$$\left(\begin{array}{cccccc}
\langle q_x \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_z} \rangle^2}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} - \langle \frac{l_{xz}^2}{q_z} \rangle & \langle l_{xy} \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_z} \rangle \langle \frac{l_{yz}}{q_z} \rangle}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} - \langle \frac{l_{xz} l_{yz}}{q_z} \rangle & \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_z} \rangle}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} & 0 & 0 & 0 \\
\langle l_{xy} \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_z} \rangle \langle \frac{l_{yz}}{q_z} \rangle}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} - \langle \frac{l_{xz} l_{yz}}{q_z} \rangle & \langle q_y \rangle + \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_z} \rangle^2}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} - \langle \frac{l_{yz}^2}{q_z} \rangle & \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_z} \rangle}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_z} \rangle}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} & \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_z} \rangle}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} & \frac{1}{\langle \frac{1}{q_z} \rangle} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \langle m_{xy} \rangle & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\langle \frac{1}{m_{xz}} \rangle} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\langle \frac{1}{m_{yz}} \rangle}
\end{array} \right) \quad (7.2)$$

kde $\langle A \rangle$ je aritmetický priemer hodnoty výrazu A cez všetky vrstvy.

Možno sa jednoducho presvedčiť, že pre izotropné homogénne prostredie (ktoré možno chápať ako špeciálny prípad ortorombickej anizotropie) dostávame správny výsledok. Pokiaľ normála má smer inej osi možno odvodením alebo použitím analógie odvodiť maticu aj pre smer y a x :

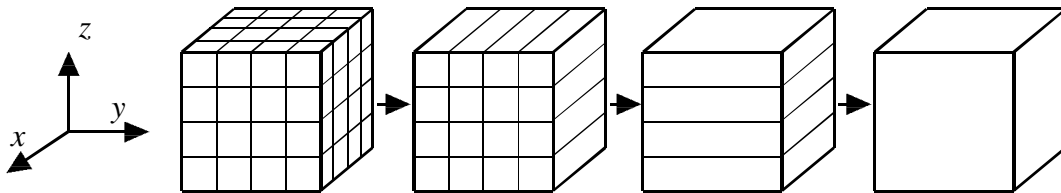
$$\left(\begin{array}{cccccc}
\langle q_x \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xy}}{q_y} \rangle^2}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} - \langle \frac{l_{xy}^2}{q_y} \rangle & \frac{\langle \frac{l_{xy}}{q_y} \rangle}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} & \langle l_{xz} \rangle + \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_y} \rangle \langle \frac{l_{xy}}{q_y} \rangle}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} - \langle \frac{l_{yz} l_{xy}}{q_y} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\langle \frac{l_{xy}}{q_y} \rangle}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} & \frac{1}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} & \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_y} \rangle}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} & 0 & 0 & 0 \\
\langle l_{xz} \rangle + \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_y} \rangle \langle \frac{l_{xy}}{q_y} \rangle}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} - \langle \frac{l_{yz} l_{xy}}{q_y} \rangle & \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_y} \rangle}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} & \langle q_z \rangle + \frac{\langle \frac{l_{yz}}{q_y} \rangle^2}{\langle \frac{1}{q_y} \rangle} - \langle \frac{l_{yz}^2}{q_y} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\langle \frac{1}{m_{xy}} \rangle} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \langle m_{xz} \rangle & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\langle \frac{1}{m_{yz}} \rangle}
\end{array} \right) \quad (7.3)$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{\langle \frac{1}{q_x} \rangle} & \langle \frac{l_{xy}}{q_x} \rangle & \langle \frac{l_{xz}}{q_x} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
\langle \frac{l_{xy}}{q_x} \rangle & \langle q_y \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_x} \rangle^2}{\langle \frac{1}{q_x} \rangle} - \langle \frac{l_{xy}^2}{q_x} \rangle & \langle l_{yz} \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xy}}{q_x} \rangle \langle \frac{l_{xz}}{q_x} \rangle}{\langle \frac{1}{q_x} \rangle} - \langle \frac{l_{xy} l_{xz}}{q_x} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
\langle \frac{l_{xz}}{q_x} \rangle & \langle l_{yz} \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xy}}{q_x} \rangle \langle \frac{l_{xz}}{q_x} \rangle}{\langle \frac{1}{q_x} \rangle} - \langle \frac{l_{xy} l_{xz}}{q_x} \rangle & \langle q_z \rangle + \frac{\langle \frac{l_{xz}}{q_x} \rangle^2}{\langle \frac{1}{q_x} \rangle} - \langle \frac{l_{xz}^2}{q_x} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\langle \frac{1}{m_{xy}} \rangle} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\langle \frac{1}{m_{xz}} \rangle} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle m_{yz} \rangle
\end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Jednotlivé prvky matíc (7.2) – (7.4) určujú akým spôsobom a z ktorých parametrov jednotlivých vrstiev sa daný efektívny parameter počíta.

Pokiaľ pôvodné vrstvy boli izotropné, ekvivalentné prostredie má už ortorombickú anizotropiu, táto sa však pri ďalšom priemerovaní zachová (t. j. nedostaneme komplikovanejšiu anizotropiu).

Naša oblasť je zložená z n^3 menších kociek (Obr. 24). Každý stĺpec malých kociek budeme považovať za systém vrstiev a nahradíme ho homogénnym ekvivalentným prostredím. Takto vzniknuté kvádre je ďalej možné nahradiť ekvivalentným prostredím považovaním stĺpca kvádrov za systém vrstiev. Nakoniec pre vytvorený systém vrstiev nájdeme parametre ekvivalentného prostredia a tieto stotožníme z hodnotami efektívnych materiálových parametrov danej oblasti.



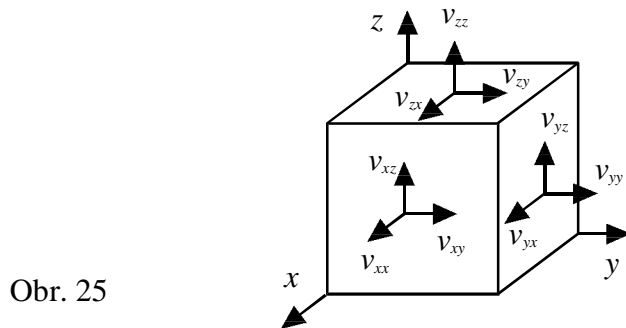
Obr. 24

Pre postupnosť smerov priemerovania neexistuje žiadna podmienka. Zvoľme teda napríklad postup na (Obr. 24), kedy začneme v smere x , výsledok spriemerníme v smere y a na záver ekvivalentné prostredie hľadáme v smere z .

Vzťah pre niektorý z efektívnych materiálových parametrov v tomto prípade odvodíme nasledovne. Postupujeme opačným smerom, ako je to na obrázku, teda zyx . Na rovnakej pozícii, ktorú má parameter v matici elastických koeficientov, zistíme v (7.2) akým spôsobom a z ktorých parametrov ho získame. V (7.3) zistíme podobne, ako získať parametre na tejto úrovni, na koniec v (7.4) nájdeme potrebné operácie a hodnoty. Pritom v poslednom kroku parametre majú parametre lokálne hodnoty izotropných kociek : $q = \lambda + 2\mu$, $l = \lambda$ a $m = 2\mu$. Postupným uplatnením naznačených

operácií a teda zložením vzťahov v postupnosti dostaneme výsledné vzťahy. Ako možno overiť na základe tvaru prímerov v maticiach, ak zvolíme nejakú permutáciu postupu uvedeného postupu hľadania ekvivalentného prostredia, okrem špeciálnych prípadov dostávame rozdielne výsledky (operácie nie sú komutatívne). Preto tento postup nie je jednoznačný a je otázne, či bude viesť k použiteľným výsledkom pokiaľ by sme volili niektorú z postupností. Aby však bolo možné napriek tomu ho otestovať, je potrebné rozhodnúť, akým spôsobom postupovať.

Pomôcť nám môže súvislosť rýchlostí šírenia vln v smeroch hlavných osí (Obr. 25).



Obr. 25

Ak má teleso ortorombickú anizotropiu, koeficienty súvisia s rýchlosťami takto :

$$q_i = \rho v_{ii}^2 \quad m_{ij} = \rho v_{ij}^2 = \rho v_{ji}^2 \quad l_{ij} = \rho v_{ij}^2 + \dots = \rho v_{ji}^2 + \dots$$

kde v_{ij} je rýchlosť šírenia vlnenia v smere osi i polarizovaného v smere j . Keď sa vlna šíri v smere osi i , jej vlnoplocha je kolmá na tento smer, pri určovaní parametrov q sú ostatné dva smery v tomto zmysle rovnocenné. Pre parametre m má hodnota byť rovnaká pre šírenie v dvoch smeroch, tieto budeme pokladať za rovnocenné, najskôr však priemernú hodnotu nájdeme v komplementárnom smere k týmto dvom. Rovnako budeme postupovať aj pri parametroch l , pre ktoré ale súvislosť so šírením vln je menej názorná. Postupnosť určovania parametrov môžeme schematicky zapísať :

$$q_i : j + k, i \quad m_{ij} : k, i + j \quad l_{ij} : k, i + j$$

Pre názornosť uvidíme odvodenie parametra m_{yz} , pre ktorý postupujeme v smeroch x a $y + z$:

- matica elastických koeficientov c každej malej kocky je na začiatku izotropná ako v (2.5)
- parameter sa m_{yz} sa v matici (7.1) nachádza na mieste s indexmi (6,6)
- na mieste (6,6) je v (7.4) aritmetický priemer pôvodného parametra m_{yz} , preto vypočítame aritmetický priemer hodnôt 2μ každej kocky v kvádroch pretiahnutých v smere x
- v maticiach (7.3) a (7.2) sa na mieste (6,6) nachádza výraz $\langle m_{yz}^{-1} \rangle$, preto vykonáme harmonický priemer hodnôt parametra m_{yz} v kvádroch, uvažovaných v prvom kroku
- dostávame :

$$m_{yz} = H_{yz}(A_x(\mu))$$

kde H označuje harmonický a A aritmetický priemer, indexy označujú v smer alebo smery priemerovania. Podobne možno odvodiť aj vzťahy pre ostatné parametre, uvidíme len výsledok :

$$\begin{aligned}
m_{ij} &= H_{ij}(A_k(\mu)) \\
q_i &= H_i \left(A_{jk}(\lambda + 2\mu) - A_{jk} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) + A_{jk} \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right)^2 H_{jk}(\lambda + 2\mu) \right) \\
l_{ij} &= H_{ij} \left(A_k(\lambda + 2\mu) - A_k \left(\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) + A_k \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right)^2 H_k(\lambda + 2\mu) \right). \\
A_{ij} &= \left(\frac{A_k(\lambda) - A_k \left(\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) + A_k \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right)^2 H_k(\lambda + 2\mu)}{A_k(\lambda + 2\mu) - A_k \left(\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) + A_k \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right)^2 H_k(\lambda + 2\mu)} \right)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Schönberg a Muir (1989) aj Moczo et al. (2002) ukazujú, že efektívna hustota je aritmetickým priemerom hodnôt vo všetkých kockách.

V našom postupe použijeme vákuový formalizmus : kockám, ktorých stred leží za voľným povrchom predpisujeme nulové hodnoty elastických parametrov aj hustoty. Ak sa vo výraze pre harmonický priemer vyskytne nulová hodnota, výsledkom je nulová hodnota priemeru (podrobnejšie sa týmto limitným prípadom zaoberáme v kapitole 7.2). Na základe tohoto prístupu sme zostavili program, ktorý efektívne materiálové parametre počíta.

7.1.1 Program na výpočet efektívnych materiálových parametrov

Predchádzajúce odvodenia je relatívne jednoducho možné zalgoritmizovať a použiť pri výpočte šírenia seizmických vln pomocou FDM. Program *dvs* verzia 8.0 (Moczo, Kristek 2003), ktorý simuluje šírenie vln v heterogénnom prostredí s útlmom v modeli s rovinným voľným povrchom použitím DVS schémy modeluje vnútorné rozhrania na základe aritmetického a harmonického priemerovania (kapitola 4.2.4). Rovinný voľný povrch je počítaný metódou AFDA (kapitola 5.1.2). Na parametrizáciu modelu (vlastný výpočet efektívnych materiálových parametrov) je používaný program *model2s*. Obidva programy pracujú s dvoma nezávislými elastickými konštantami μ a κ , pričom v jednej FD bunke uchováваме 5 elastických parametrov (μ_{xy} , μ_{xz} , μ_{yz} , μ , κ). V našom prístupe bunku charakterizuje 9 parametrov. Štruktúra vstupných údajov programu *dvs* zostala zachovaná, doplnili sme nové premenné, ktoré vystupujú v modifikovaných vzťahoch pre výpočet napätí. Program *dvs* bolo potrebné zmeniť len minimálne, zásadné zmeny vyžadoval program *model2s*. V našom prístupe počíta hodnoty efektívnych materiálových parametrov podľa vzťahov (7.5), výstup obsahuje hodnoty 9 elastických parametrov pre každú bunku.

Pri výpočtoch s použitím heterogénnej formulácie je postup nasledovný :

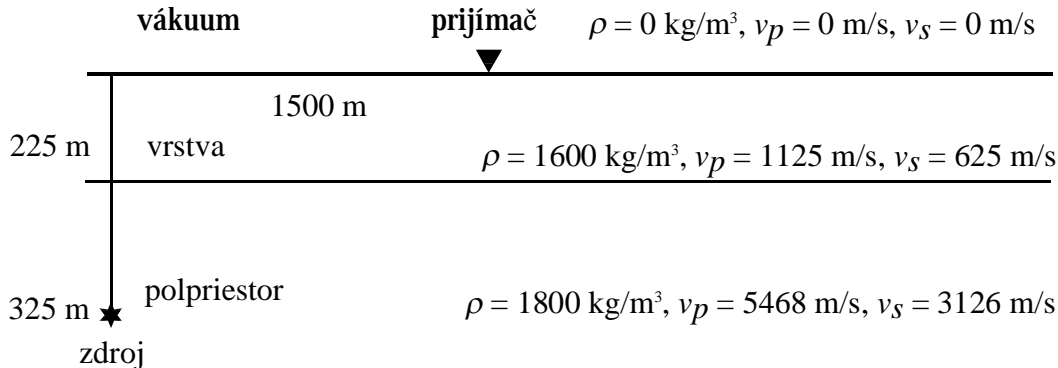
- určenie efektívnych materiálových parametrov program *model2s*
- samotný výpočet seizmického pohybu programom *dvs*

Vstupom v prvom kroku je definícia modelu (rozmery, vzorkovanie, parametre prostredia a ich priestorové rozloženie) a výstupom parametrizovaný model (typy materiálových buniek v modeli a hodnoty ich parametrov). Vygenerované dátové súbory a definícia zdroja vlnenia a polohy prijímačov sú vstupnými údajmi pre program *dvs*.

7.1.2 Výsledky

Pri modelovaní v tejto časti používame aproximácie derivácií do 2. rádu. Je to preto, že úvahy o výpočte derivácií nás viedli k myšlienke uvažovať oblasti väčšie ako je kocka s hranou h (kapitola 7.2.1). Pokiaľ však používame 2. rád presnosti, je prirodzené nemeniť tvar ani rozmery oblastí, postup je preto jednoduchší.

Na testovanie simulovania voľného povrchu bol zvolený model na Obr. 26.



Obr. 26

Tento príklad bol použitý aj v práci Moczo et al. (2002), preto máme možnosť výsledky porovnať. Model tvorí homogénna izotropná vrstva hrúbky 225m na homogénnom izotropnom polpriestore (parametre sú na Obr. 26), druhý polpriestor tvorí vákuum. V hĺbke 550 m sa nachádza dislokačný bodový zdroj, ktorého parametre sú $\phi_s = 90^\circ$, $\delta = 45^\circ$, $\lambda = 90^\circ$ (kapitola 3.7). Zdrojová časová funkcia je Gaborov signál :

$$s(t) = \exp[-\{\omega(t - t_s)/\gamma\}^2] \cos(\omega(t - t_s) + \theta)$$

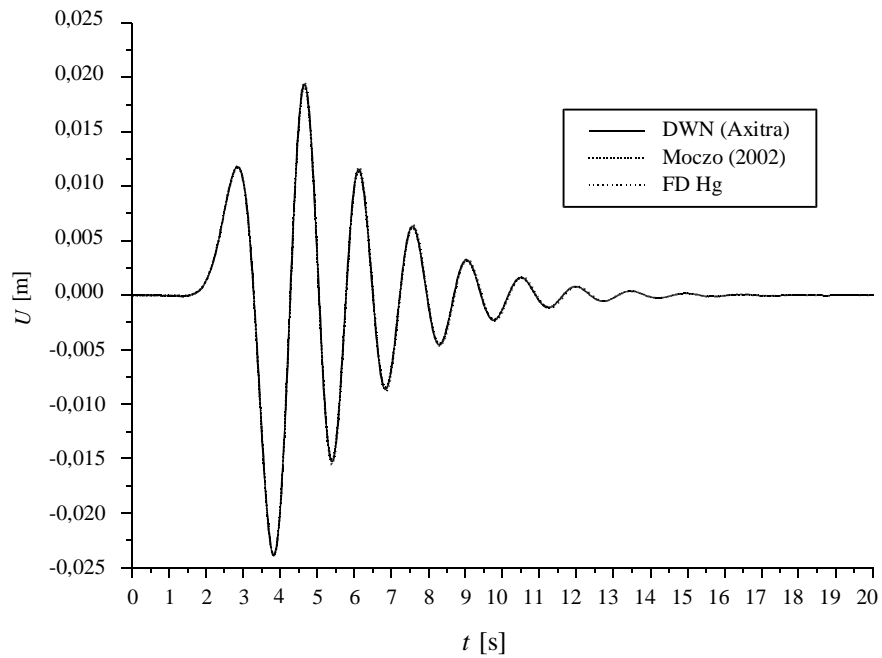
s parametrami $\gamma = 1,5$, $f_p = 0,225 \text{ Hz}$, $\theta = \pi/2$, $t_s = 3,0 \text{ s}$. Použili sme rovnaký priestorový krok ako bol použitý v práci ($h = 50 \text{ m}$), v spodnej homogénnej časti modelu je použitý diskontinuitný prechod k mriežke s krokom $3h$ (kapitola 3.5), ten v článku použitý nebol (výsledky neovplyvňuje).

Ako autori zdôrazňujú, zvolili polovičný priestorový krok, aký postačuje na modelovanie vnútorných rozhraní (pre 4. rád je to $h = \lambda_{\min}/6$, čiže v našom prípade $h = \lambda_{\min}/12$, kapitola 3.6) aby spresnili modelovanie voľného povrchu (metóda zrkadlenia napätí – kapitola 5.1.1). My používame presnosť do 2. rádu. Kvôli disperzii je v 2. ráde odporúčané pri modelovaní vnútorných rozhraní použiť maximálne $h = \lambda_{\min}/10$ (Moczo, 1998). V našom prípade je táto podmienka teda splnená.

V programe *dvs* sa za rovinný voľný povrch automaticky považuje rovina $z = 0$ a voľný povrch je počítaný metódou AFDA (štandardne W-AFDA), preto bolo potrebné model posunúť v sieti (minimálne o 6 sieťových krokov) nižšie, aby sme voľný povrch simulovali výlučne našim prístupom.

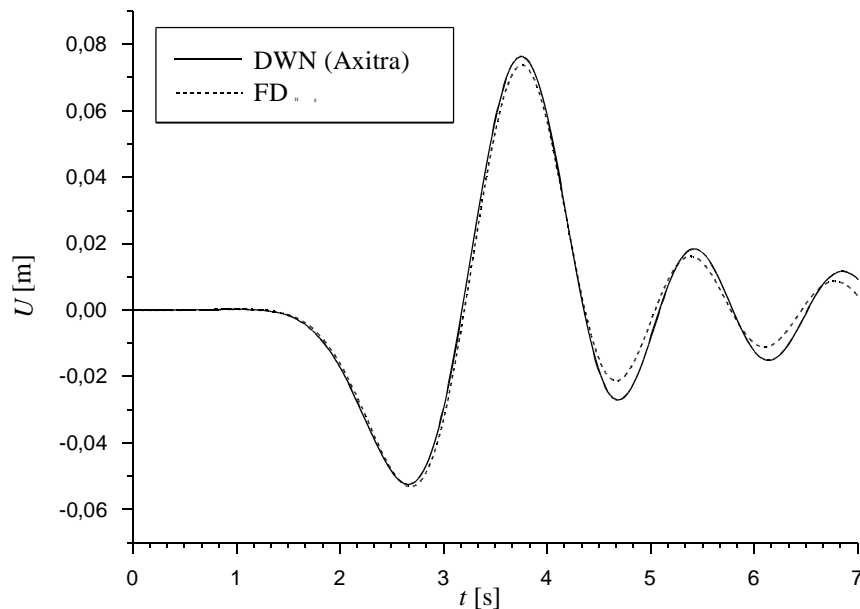
Autori článku porovnávajú iba zložku U na voľnom povrchu pre dve hrúbky povrchovej vrstvy – 200 m a 225 m a používa sa H formulácia zrkadlenia napätí. V našom prípade voľný povrch je totožný so 7. sieťovou rovinou a prechádza sieťou v pozíciách vertikálnej zložky posunutia, preto tento prístup označujeme ako W-formulácia. Výpočet sme urobili len pre jednu hrúbku vrstvy na

polpriestore, pretože nás zaujíma hlavne modelovanie voľného povrchu (dvojica modelov bola skúmaná kvôli overeniu simulovania vnútorných rozhraní).



Obr. 27

Na Obr. 27 je porovnanie syntetických seizmogramov, vypočítaných tromi metódami : DWN (program Axitra, Coutant, 1989), metóda konečných diferencií s použitím zrkadlenia napätí (Moczo et al., 2002) a náš prístup (FD Hg). Môžeme konštatovať, že zhoda je veľmi dobrá. Ako sa ukázalo pri ďalších testoch, pri simulovaní rovinného voľného povrchu dostávame v rôznych smeroch a zložkách rôzne presné výsledky. Detailnejšie bude rovinný voľný povrch testovaný v kapitole 7.2.



Obr. 28

Navrhnutý postup bol odvodený pre všeobecnú polohu voľného povrchu, preto sme ďalej testovali model s nakloneným rovinným voľným povrchom. Preň môžeme metódou DWN naďalej počítať presné riešenie a súčasne testujeme schopnosti našej metódy počítať s rozhraním s ľubovoľnou polohou voči sieťovým rovinám. Materiálové parametre modelu sme ponechali nezmenené, celý model bol zrotovaný okolo osi y o $4,77^\circ$ (takýto uhol bol zvolený aby bolo možné umiestniť prijímače v rovnakých vzdialenostiach ako v predchádzajúcom modeli).

Na Obr. 28 je U zložka vypočítaná metódou DWN a heterogénnym prístupom. Seizmogram je ukončený pri $t = 7s$, pretože zrotovaný model bol model menší a v ďalších časoch sa už prejavujú umelé odrazy od okrajov modelu. Zhoda FD a DWN riešenia je horšia, ako je to pre rovinný voľný povrch.

7.1.3 Zhodnotenie výsledkov

Riešenie získané pre naklonený voľný povrch nie je uspokojivé. Pri výpočte efektívnych materiálových parametrov boli bunky s hranou h rozdelené na $PTS = 4$ časti, čo vzhľadom na malý uhol sklonu rozhrania nie je adekvátna hodnota. Pri zmene hodnoty PTS na 8 však dostávame horší výsledok, ako v prvom prípade, ktorý je na obrázku. Na základe toho uzatvárame :

- spôsob výpočtu materiálových parametrov je potenciálne vhodný pre rovinný voľný povrch, ktorý ortorombická anizotropia popisuje dostatočne presne
- model s nakloneným voľným povrchom ukazuje, že pre pozíciu voľného povrchu rôznobežného so sieťovými rovinami navrhnutý postup nie je adekvátny

Príčinou neúspechu môže byť

- prílišné zjednodušenie : ortorombická anizotropia neaproximuje dostatočne anizotropiu, ktorú je potrebné uvažovať na korektnú reprezentáciu rozhrania
- nepodarilo sa nám nájsť vhodný spôsob redukovania anizotropie

V prípade rovinného voľného povrchu a homogénneho (prípadne rovnobežne s voľným povrchom zvrstveného prostredia) nie je potrebné uvažovať priemery v rôznych smeroch, stačí využiť pôvodný postup. Toto umožňuje overiť, či je možné použiť prístup Schönberga a Muira v limite vákua. Sériu testov modelovania rovinného voľného povrchu je preto obsahom ďalšej kapitoly.

7.2 Rovinný voľný povrch

V kapitole 4.2.2 sme ukázali ako možno odvodiť parametre konečno diferencnej bunky, ktorej okolie možno aproximovať planparalelným súvrstvím s normálou v smere niektorej zo súradných osí. Zaoberajme sa teraz modelom homogénneho polpriestoru nad ktorým je atmosféra. V našom priblížení je to prostredie s hodnotami hustoty a elastických parametrov blízkyh nule. Parametre polpriestoru označíme λ a μ , parametre vakuá sú $\lambda_v, \mu_v \rightarrow 0$. Nech oblasť určovania parametra ekvivalentného prostredia je voľným povrchom rozpolená. V odvodenej matici elastických koeficientov (4.20) sa vyskytujú výrazy, ktorých menovatele sa blížia nule, je teda potrebné odvodiť tieto limity :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \langle \lambda + 2\mu \rangle &= \frac{\lambda + 2\mu}{2} & \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \langle \lambda \rangle &= \frac{\lambda}{2} \\ \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rangle^2}{\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \rangle} &= \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right)^2}{2 \left(\frac{1}{\lambda_v + 2\mu_v} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right)} = \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_v + 2\mu_v}} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sqrt{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^2}{2 \left(1 + \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda + 2\mu} \right)} = 0 \\ \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \left(\frac{\lambda_v^2}{\lambda_v + 2\mu_v} + \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) = \frac{\lambda^2}{2(\lambda + 2\mu)} \\ \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rangle}{\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \rangle} &= \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{\frac{\lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}}{\frac{1}{\lambda_v + 2\mu_v} + \frac{1}{\lambda + 2\mu}} = \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{\lambda_v + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\lambda_v + 2\mu_v)}{1 + \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda + 2\mu}} = 0 \\ \lim_{\substack{\mu_v \rightarrow 0 \\ \lambda_v \rightarrow 0}} \frac{1}{\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \rangle} &= 0 & \lim_{\mu_v \rightarrow 0} \frac{2}{\langle \frac{1}{\mu} \rangle} &= 0 & \lim_{\mu_v \rightarrow 0} 2 \langle \mu \rangle &= \mu \end{aligned}$$

Ak je teleso rozdelené horizontálnym voľným povrchom na polovicu, pre jeho maticu elastických koeficientov dostávame :

$$c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) & \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) & \frac{1}{2} \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Zovšeobecnenie pre iný pomer objemu prostredia a vakuá $0 \leq r < 1$ je jednoduché :

$$c = \begin{pmatrix} r\left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right) & r\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right) & r\left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r2\mu \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Odvozené matice teda už reprezentujú horizontálny kontakt prostredia a vákua. Ekvivalentné prostredie je anizotropné, preto zjednodušený prístup s aritmetickým a harmonickým priemerovaním tento výsledok nemôže dávať (tam predpokladáme, že ekvivalentné prostredie je izotropné).

V tomto prípade si môžeme overiť tvrdenie úvodu kapitoly 7.1. Anizotropia spôsobuje, že pri rotácii súradného systému sa jeho tenzor elastických koeficientov c_{ijkl} (vo Voigtovej reprezentácii matica – kapitola 2.2) mení. Pre tenzor rangu 4 máme transformačné pravidlo :

$$c'_{\alpha\beta\gamma\delta} = r_{\alpha i} r_{\beta j} r_{\gamma k} r_{\delta l} c_{ijkl}$$

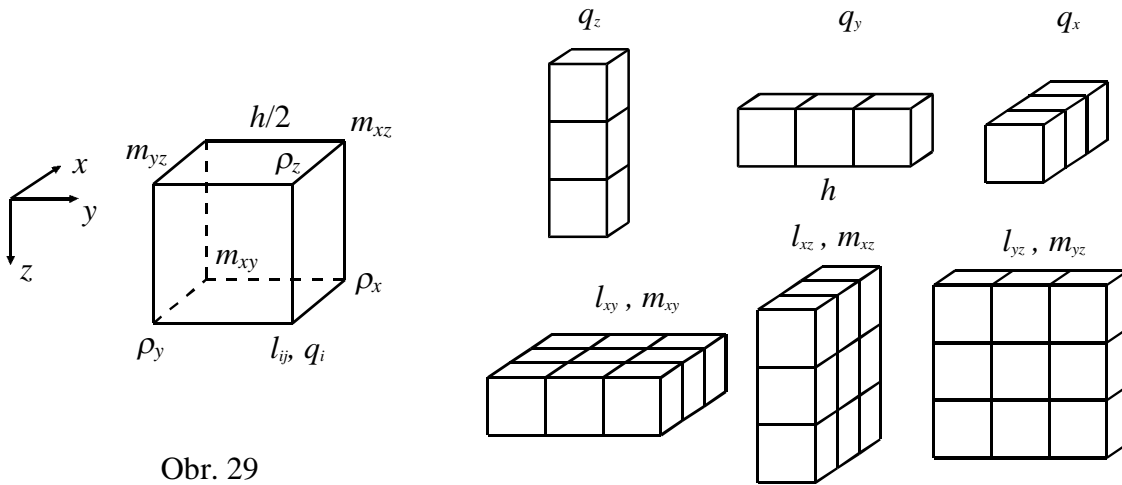
kde r_{ij} sú zložky matice rotácie :

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta & \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\vartheta \\ -\sin\varphi \cos\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

pričom φ , ϑ sú sférické uhly. Pokiaľ meníme len uhol ϑ , mení sa sklon rozhrania k vertikále, uhol φ reprezentuje rotáciu okolo vertikály. Lahko sa môžeme presvedčiť, že zmeny jedného alebo oboch uhlov spôsobujú, že tenzor v zrotovanej súradnej sústave (c') má zložitejšiu anizotropiu, ako ortorombickú v (3.8). Pre striedavo usporiadané siete je teda potrebná pre naklonený voľný povrch redukcia aj v prípade homogénneho prostredia pod ním.

7.2.1 Oblasti výpočtu efektívnych materiálových parametrov

Podobne ako je to v článku Moczo et al. (2002), keďže efektívny materiálový parameter má reprezentovať vlastnosti prostredia v okolí jeho pozície v sieti, je prirodzené určovať ho z oblasti centrovanej v tomto bode. V článku je oblasť volená ako kocka s hranou h . Pri výpočtoch s aproximáciami derivácií 2. rádu presnosti v priestore sme použili aj my takúto oblasť. Aproximácia derivácie s presnosťou do 4. rádu sa určuje z bodov, ktoré sú od miesta aproximácie vzdialené nielen $h/2$ ale aj $3h/2$ a zdá sa rozumné, aby aj zmena prostredia v tejto vzdialenosti sa v hodnotách parametrov prejavila. Navrhnuté tvary oblastí pre jednotlivé parametre sú na Obr. 29. Skladajú sa z kociek s hranou h . Oblasti sú pretiahnuté v smeroch súvisiacich derivácií tak, aby zohľadňovali maximálnu vzdialenosť, z ktorej sa hodnoty na aproximáciu derivácie používajú.



Obr. 29

Takýto tvar oblastí výpočtu parametrov dostal označenie 4 (oblasti pre 4. rád). Ako sa ukázalo, výpočty pre voľný povrch s parametrami počítanými z takýchto oblastí boli nestabilné. Tým že sa oblasti zväčšili, hodnoty parametrov q_z , l_{xz} , l_{yz} , m_{xz} , m_{yz} sú nulové aj pre bunku jeden priestorový krok pod voľným povrchom. Toto je nefyzikálne a je to pravdepodobne aj príčinou nestability.

Aby k tomu nedošlo, skombinujeme výpočet cez štandardnú bunku s hranou h (označovaný ako 2) a výpočet 4. Akým pomerom má spôsob 2 a 4 do výslednej hodnoty prispievať rozhodneme uvažovaním o aproximácii derivácie s presnosťou do 4. rádu. Používame vzťah (3.6) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9}{8h} \left(f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right) \right) - \frac{1}{8.3h} \left(f\left(x + \frac{3}{2}h\right) - f\left(x - \frac{3}{2}h\right) \right) + O(h^4)$$

Formálne sme členy rozdelili na tie, kde vystupujú funkčné hodnoty zo vzdialenosti $h/2$ a $3h/2$. Možno ich chápať ako dve nezávislé aproximácie. Prvý rozdiel funkčných hodnôt je delený vzdialenosťou h , druhý vzdialenosťou $3h$. Koefficienty, ktoré tieto rozdiely násobia ($9/8$ a $-1/8$) použijeme pri kombinovaní spôsobu 2 a 4 (spôsob výpočtu je označovaný 24). Priemernú hodnotu z oblasti tvaru kocky s hranou h násobíme koeficientom $9/8$ a z oblastí na Obr. 29 koeficientom $-1/8$. Taktiež bol testovaný prístup 24a, kde volíme koeficienty $9/10$ a $1/10$, ktorých hodnoty sú volené v pomere absolútnych hodnôt koeficientov $9/8$ a $-1/8$.

Jednotne možno výpočet parametrov zapísať ako kombináciu parametrov určených z oblasti tvaru 2 (kocka s hranou h), a oblastí 4 (Obr. 29). Výslednú hodnotu parametra dostaneme lineárnou kombináciou týchto hodnôt s koeficientmi p a q . Označenia spôsobu výpočtu parametrov sú zosumarizované v tabuľke :

označenie spôsobu výpočtu efektívneho materiálového parametra	koeficient p	koeficient q
2	1	0
4	0	1
24	9/8	-1/8
24a	9/10	1/10

Umiestnenie parametrov (a teda aj stredy oblasti určovania hodnoty jednotlivých parametrov) v sieti je na Obr. 29 vľavo.

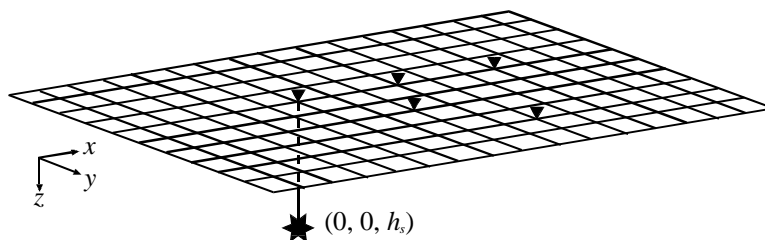
7.2.2 Testy simulácie horizontálneho voľného povrchu

Základný model, ktorý bol použitý pri našich testoch, bol zvolený podľa článku Kristek et al. (2002). Je ešte jednoduchší ako model použitý v kapitole 7.1.2. Tvorí ho dokonale elastický izotropný homogénny polpriestor s hustotou $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$, rýchlosťou šírenia S vln $v_s = 300 \text{ m/s}$ a rýchlosťou šírenia P vln $v_p = 520$ (Poissonov pomer $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = 0,25$). Autori skúmajú aj model s hodnotou $\nu = 0,45$, pre ktorý sa dosahuje lepšia zhoda, preto tu vyšetríme len prvý model.

Vo výpočtoch bol použitý bodový dislokačný zdroj, ktorého zdrojová časová funkcia je Gabo-rov signál s parametrami $\gamma = 11$, $f_p = 0,5 \text{ Hz}$, $\theta = \pi/2$ (dominantná vlnová dĺžka $\lambda_{dom}^S = 600 \text{ m}$, minimálna vlnová dĺžka $\lambda_{min}^S = 400 \text{ m}$). Jeho orientácia je $\phi_s = 45^\circ$ alebo 0° , $\delta = 90^\circ$, $\lambda = 0^\circ$. Zdroj je v článku umiestnený v hĺbke $h_s = 366,6 \text{ m}$ (pre W formuláciu, pre H je to $333,3 \text{ m}$), v našich modeloch sa reálna hĺbka zdroja pri posúvaní voľného povrchu mení (maximálne o jeden sieťový krok). Nachádza sa teda relatívne plytko ($h_s/\lambda_{min}^S \approx 0,9$), aby sa efektívne generovali Rayleighove povrchové vlny.

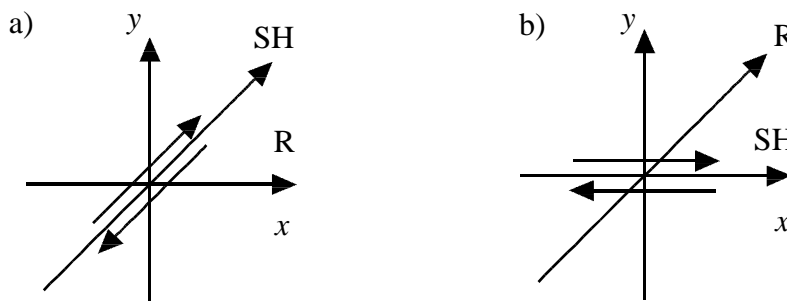
Poloha zdroja a prijímačov je na Obr. 30. Sú umiestnené v smere sieťových rovín a v smere diagonály. Epicentrálna vzdialenosť najodľahlejšieho prijímača je $15 \lambda_{dom}^S$.

Obr. 30 zdroj a prijímače

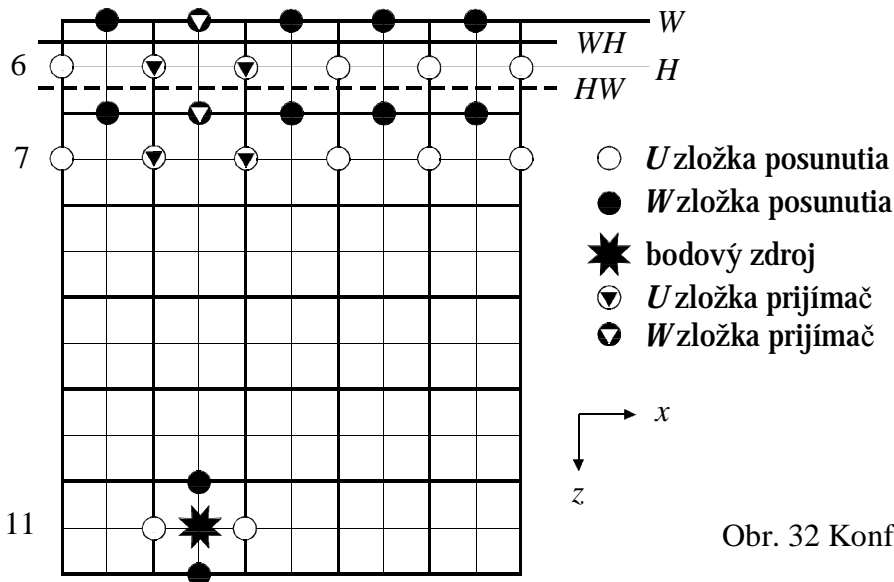


Tento model umožňuje skúmať modelovanie šírenia povrchových vln. Pri $\phi_s = 45^\circ$ (Obr. 31a) sa v smere osi x šíria Rayleighove vlny a v smere uhlopriečky S vlny, ak $\phi_s = 0^\circ$ situácia sa vymení (Obr. 31b). Modelmi a) a b) overíme, či šírenie v smere sieťovej roviny a diagonály je rovnako presné t.j. či je vo výpočtoch prítomná numerická anizotropia. Pre model b) bol urobený porovnávací výpočet, na základe porovnania je možné konštatovať, že numerická anizotropia je zanedbateľná, v ďalších výpočtoch sa teda počíta len s konfiguráciou zdroja a).

Obr. 31 Smery šírenia základných vln v modeli



Ako bolo spomenuté v kapitole 5.1.1 a 5.1.2 metódy AFDA a zrkadlenie napätí majú dve základné formulácie : W a H . Toto znamená že vzdialenosť zdroja od voľného povrchu je vždy celočíselný násobok $h/2$. Heterogénnym prístupom môžeme počítať pole posunutí pre ľubovoľnú vzdialenosť zdroja od voľného povrchu. Referenčnou metódou pre nás zostáva metóda DWN, ktorou je možné urobiť rovnaké výpočty.



Obr. 32 Konfigurácia modelov

V našom prístupe sme však obmedzení FD sieťou, prijímače môžeme mať umiestnené len v tých pozíciách, kde sa v sieti nachádzajú diskrétny aproximácie zložiek posunutí (v iných polohách by bolo výsledky nutné interpolovať). Roviny medzi voľným povrchom a zdrojom (6 - 11) sú na Obr. 32, takisto sú tu vyznačené polohy voľného povrchu vzhľadom na sieťové roviny. Ak voľný povrch prechádza pozíciami vertikálnych zložiek posunutí, polohu označujeme ako W . Polohu, v ktorej voľný povrch prechádza pozíciami horizontálnych zložiek posunutí je označená H . Polohu v strede medzi polohami W a H označujeme WH , polohu medzi H a W označujeme HW .

Na základe odvodenej matice (4.20) a (7.6) sme naprogramovali zjednodušený výpočtový program (nazvaný *priem*), ktorý určuje efektívne materiálové parametre pre tento prípad. Zjednodušenie spočíva v predpoklade homogénneho prostredia a horizontálneho voľného povrchu. Na rozdiel od programu *model2s* však program *priem* počíta parametre z modifikovaných oblastí 2, 4 a 24 (prípadne 24a). Jeho výstupy sú opäť použité ako vstupy pre program *dvs80*.

Výstupom programu *dvs* sú seizmogramy v zvolených pozíciách prijímačov. Rovnaké parametre modelu, zdroja a pozície prijímačov sme použili v programe *AXITRA* (Coutant, 1989), ktorý riešenie počíta metódou DWN (Bouchon, 1981). DWN metóda je pre nás referenčnou, pretože pre zvrstvené modely pomocou nej získame veľmi presné riešenie.

V nasledujúcej tabuľke je prehľad modelov, ktoré boli počítané spolu s ich označením :

Označenie	Priestorové vzorkovanie (λ_{\min}/h)	Spôsob výpočtu materiálových parametrov	Poloha voľného povrchu	komentár
H Hg 2 (6)	6	2	H	
W Hg 2 (6)	6	2	W	
HW Hg 2 (6)	6	2	HW	veľmi nepresný
H Hg 4 (6)	6	4	H	nestabilný
H Hg (6)	6	24	H	
W Hg (6)	6	24	W	
H Hg a (6)	6	24a	H	
W Hg a (6)	6	24a	W	
HW Hg (6)	6	24	HW	veľmi nepresný
WH Hg (6)	6	24	WH	veľmi nepresný
H Hg (10)	10	24	H	
W Hg (10)	10	24	W	
HW Hg (10)	10	24	HW	nepresný
WH Hg (10)	10	24	WH	nepresný

Na Obr. 33 sú seizmogramy pre model W Hg (6), grafy pre ostatné modely sú v dodatku 4.

Okrem vizuálneho porovnania seizmogramov je vhodné mieru zhody ohodnotiť aj kvantitatívne. V článku Kristek et al. (2002) je definovaný fázový a amplitúdový rozdiel riešení. Autori použili analytické signály \hat{S}_{REF} a \hat{S} zodpovedajúce pôvodným signálom S_{REF} a S . Z \hat{S}_{REF} a \hat{S} je možné určiť okamžitú fázu a amplitúdu a porovnať ich. Definujú sa dve miery zhody :

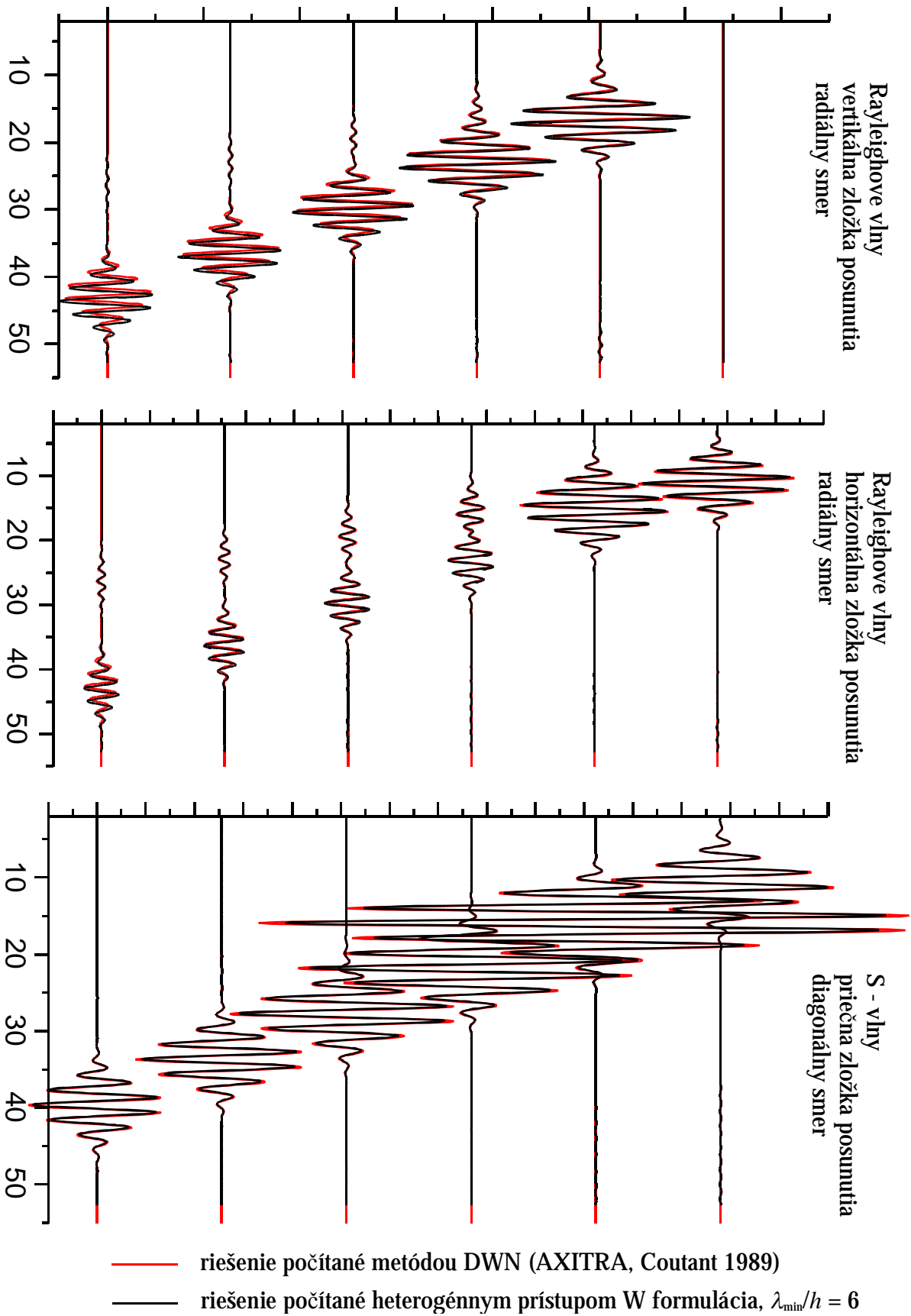
- miera zhody riešení v amplitúde (*EM* - envelope misfit) :

$$EM = \frac{\sqrt{\sum_m (|\hat{S}_{REF}(t_m)| - |\hat{S}(t_m)|)^2}}{\sqrt{\sum_m |\hat{S}_{REF}(t_m)|^2}}$$

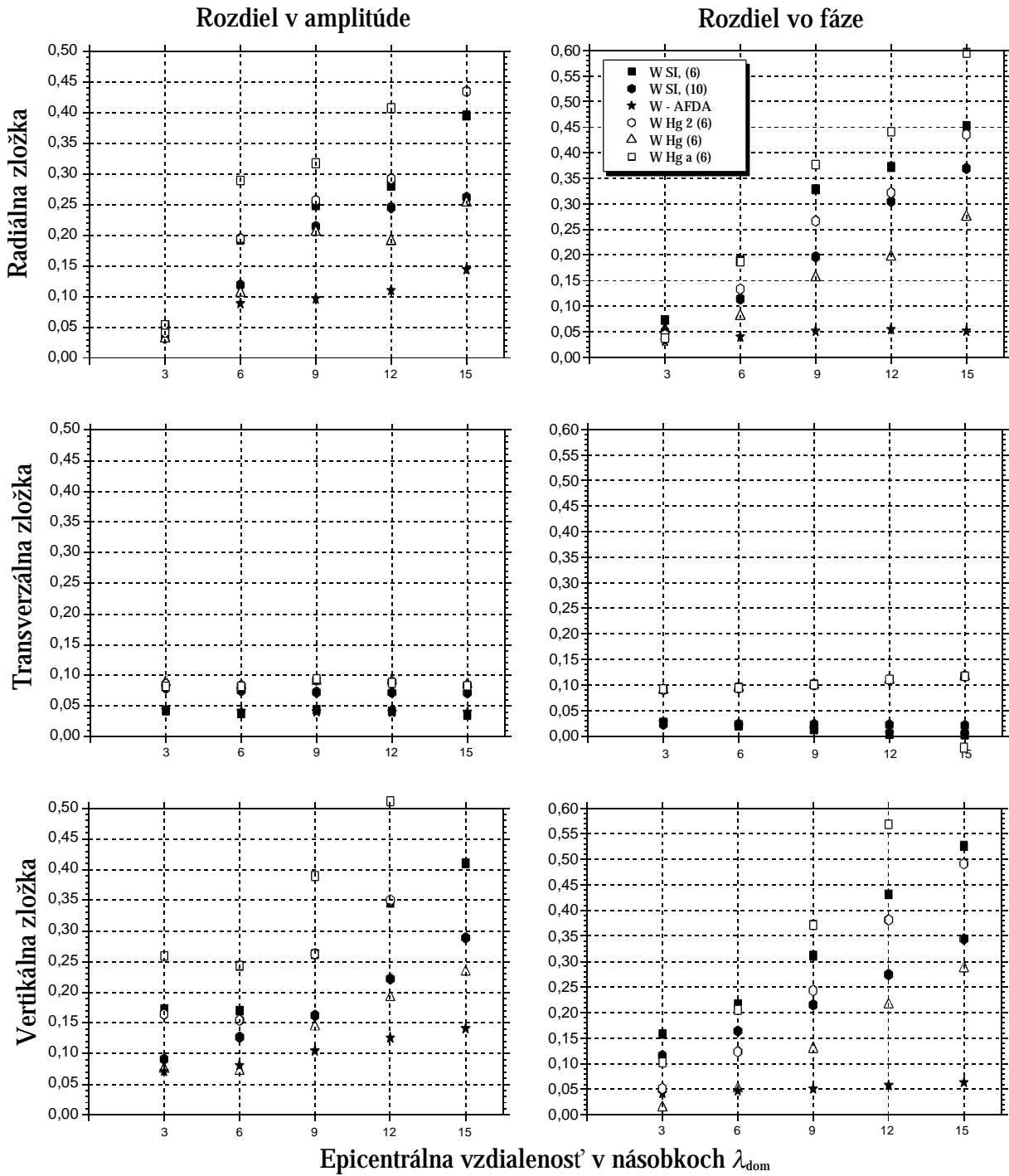
- miera zhody riešení vo fáze (*PM* - phase misfit) :

$$PM = \frac{\sqrt{\sum_m (|\hat{S}_{REF}(t_m)| \text{Arg}\{\hat{S}_{REF}(t_m)/\hat{S}(t_m)\})^2}}{\pi \sqrt{\sum_m |\hat{S}_{REF}(t_m)|^2}}$$

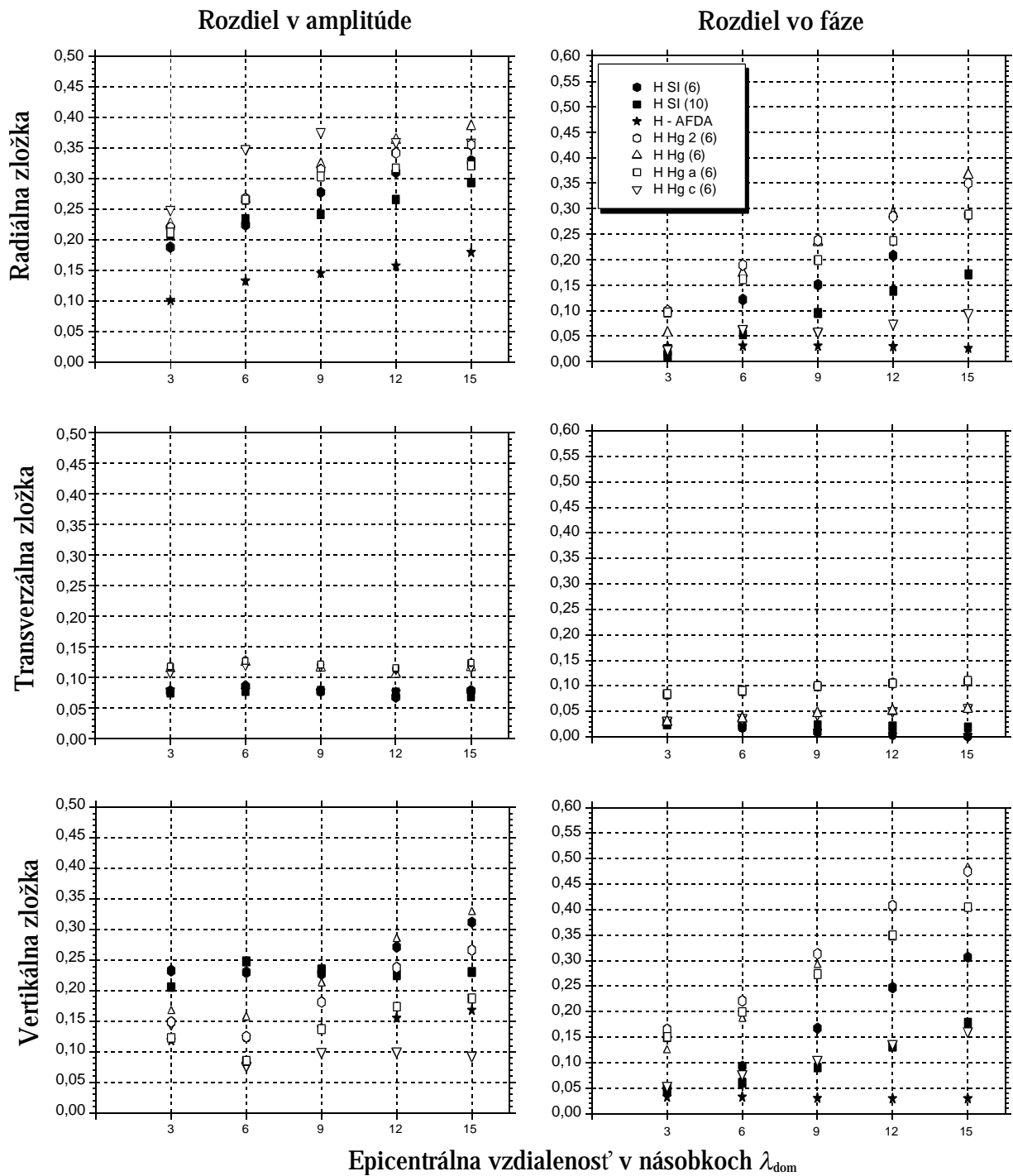
Na základe týchto vzťahov boli vyhodnotené rozdiely a zostrojené grafy, v ktorých je zobrazená závislosť *PM* a *EM* od epicentrálnej vzdialenosti pre jednotlivé zložky seizmogramu.



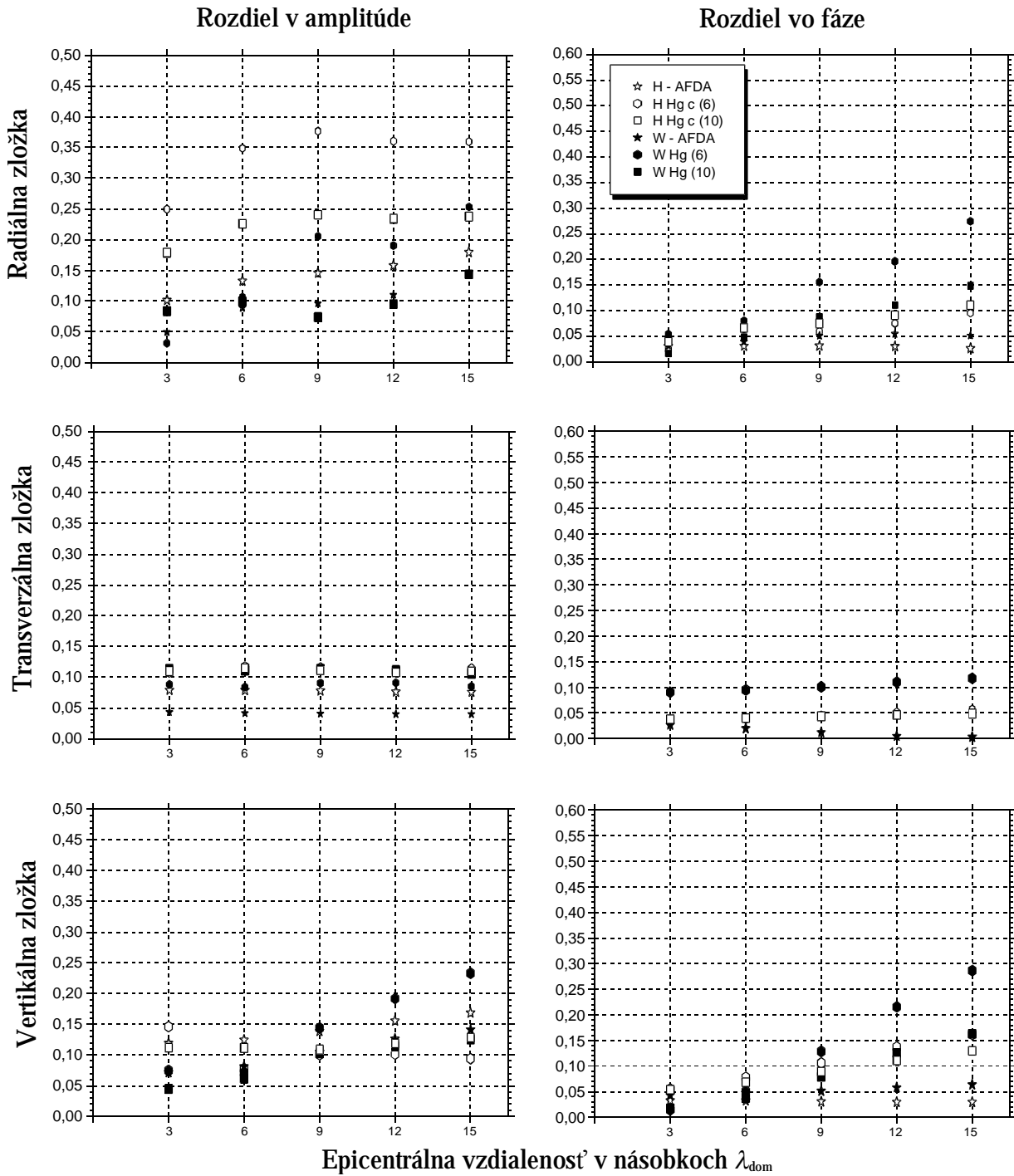
Obr. 33 Porovnanie metódy DWN a W Hg (6)



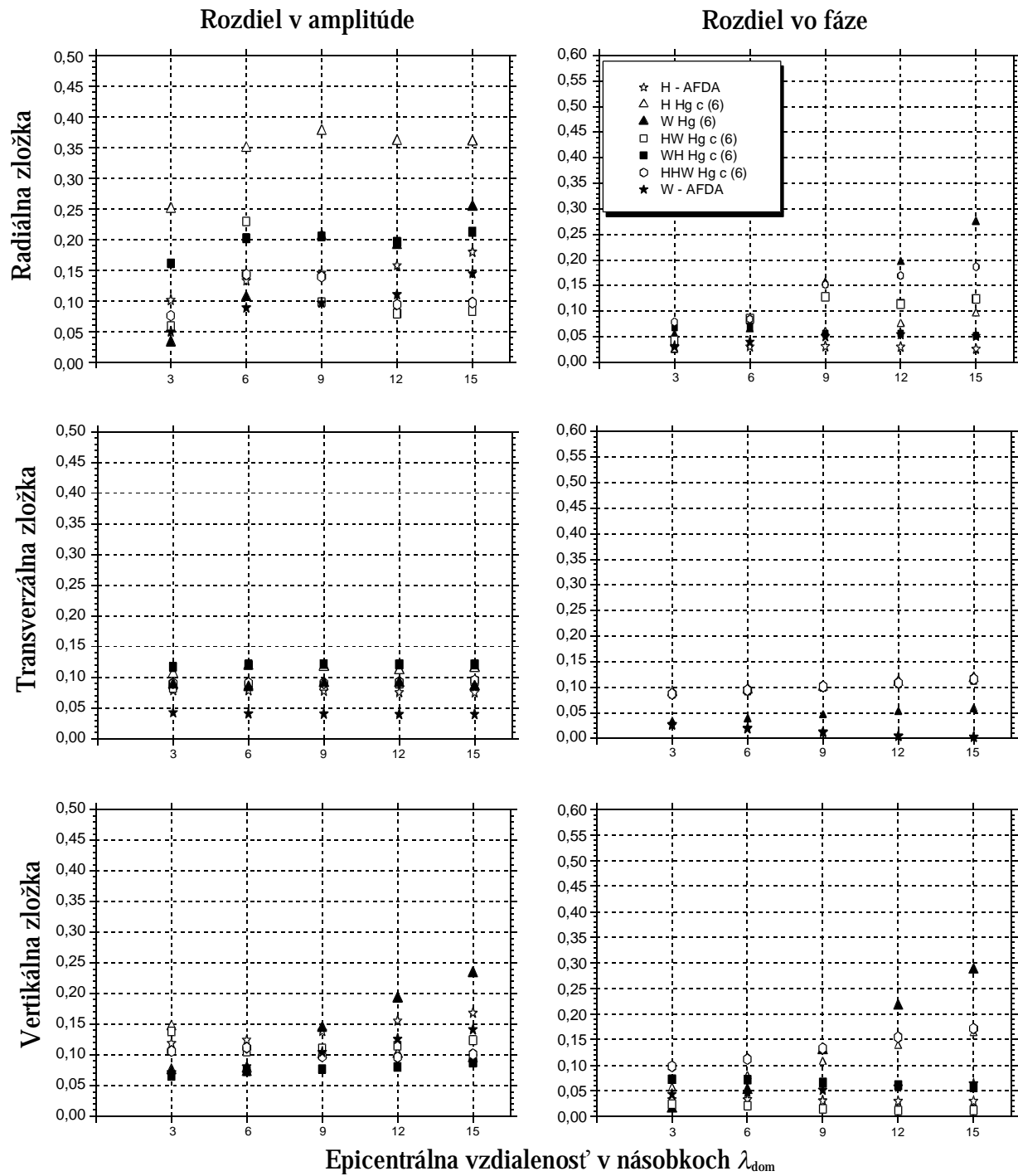
Obr. 34 Fázový a amplitúdový rozdiel, W formulácia



Obr. 35 Fázový a amplitúdový rozdiel, H formulácia



Obr. 36 Amplitúdový a fázový rozdiel, zmenšený priestorový a časový krok



Obr. 37 Amplitúdový a fázový rozdiel, rôzne polohy voči sieťovým rovinám

Prvé modely boli počítané s materiálovými parametrami určenými spôsobom 2 (v kockách s hranou h). Tieto oblasti sú totožné s oblasťami používanými pri simulovaní vnútorných rozhraní. Pri všetkých modeloch je možné konštatovať veľmi dobrú zhodu v S vlnách, ktoré sa šíria v smere uhlopriečky. Pri porovnávaní sa preto zameriame hlavne na presnosť modelovania Rayleighových vln.

- **W Hg 2 (6)** – s presným riešením sa zhoduje porovnateľne ako metóda zrkadlenia napätí. Pre Rayleighove vlny je vhodné použiť jemnejšie vzorkovanie, pretože zhodu už nepovažujeme za dostatočnú pre modelovanie lokálnych efektov.
- **H Hg 2 (6)** – zhoda v amplitúde aj vo fáze je o niečo horšia ako pre H formuláciu zrkadlenia napätí – H SI (6) – zo 6 priestorovými krokmi na minimálnu vlnovú dĺžku. Podobne ako pre W Hg 2 (6) zhoda nie je dostatočná pre modelovanie lokálnych efektov.
- **HW Hg 2 (6)** – tento model reprezentuje prvý test medzi polohy, ktorú metódou AFDA ani metódou zrkadlenia napätí štandardne počítať nie je možné. Voľný povrch prechádza polohou v strede medzi H a W polohou. Odchýlka od presného riešenia je však značná. V tejto polohe metóda DWN dáva falošný pohyb na Z zložke seizmogramu, na T zložke sú amplitúdy tak isto nadhodnotené. Táto chyba sa prejavuje len v prijímači priamo nad zdrojom.

Môžeme konštatovať, že tieto výsledky sú nepostačujúce a pokúsili sme sa nájsť ešte presnejší prístup.

V kapitole 7.2.1 sú navrhnuté tvary oblastí výpočtu efektívnych materiálových parametrov tak, aby sa v nich prejavila aj zmena prostredia vo vzdialenosti $3h/2$ od jeho pozície v sieti. Najprirodzenejšia voľba výpočtových oblastí 4 je nevhodná. Ukazuje to model **H Hg 4 (6)**, pri tejto parametrizácii je výpočet nestabilný a riešenie diverguje. Ďalšie testy tejto metódy sme kvôli tejto vlastnosti nevykonali.

Podrobnejším rozborom sme identifikovali ako najpravdepodobnejší problém nulové hodnoty efektívnych parametrov hlbšie pod voľným povrchom. Výpočty s parametrami vypočítanými spôsobom 2 boli stabilné, tu k nedochádza k výskytu nulových hodnôt vo väčšej hĺbke pod voľným povrchom. Preto sme vytvorili lineárnu kombináciu hodnoty parametra vypočítaného spôsobom 2 a spôsobom 4. Tým zaručíme súčasne naplnenie myšlienky zavedenia spôsobu výpočtu 4 a stabilitu výpočtu. V kapitole 7.2.1 je vysvetlené, prečo koeficienty lineárnej kombinácie majú hodnoty $9/8$ a $-1/8$ v prípade spôsobu 24 a $9/10$ a $1/10$ v prípade spôsobu 24a.

Na základe seizmogramov, fázového a amplitúdového rozdielu možno konštatovať :

- **W Hg (6)** – zhoda v radiálnej aj vertikálnej zložke je veľmi dobrá. Je lepšia ako pre metódu zrkadlenia napätí v modeli Hg SI (6) aj Hg SI (10). Miera zhody vo fáze aj amplitúde pre transverzálnu zložku je síce horšia ako pre Hg SI (6) a Hg SI (10), odchýlka má však malú hodnotu a preto je akceptovateľná.
- **H Hg (6)** – zhoda radiálnej a vertikálnej zložky je v amplitúde o niečo horšia ako pre H Hg SI (6), v tomto prípade nedochádza ku zlepšeniu v dôsledku zmeny výpočtu materiálových parametrov oproti modelu H Hg 2 (6).
- **W Hg a (6)** – zmena koeficientov spôsobuje zhoršenie zhody vo fáze aj amplitúde.

- **H Hg a (6)** – fázový rozdiel aj amplitúdový rozdiel pri tejto voľbe výpočtu efektívnych materiálových parametrov je o niečo menší ako pre model H Hg (6) a je porovnateľný s H Hg SI (6).
- **HW Hg (6), WH Hg (6)** – v tejto polohe voľného povrchu je fázový aj amplitúdový rozdiel riešení značný, aj keď sa pri zmene spôsobu výpočtu parametrov výsledok oproti modelu HW H 2 (6) zlepšil.

Pokiaľ je schéma konvergentná, musí pri znižovaní časového a priestorového kroku dávať lepšiu zhodu s presným riešením. Túto vlastnosť sme overovali na nasledujúcich modeloch, kde veľkosť priestorového kroku bola $h = \lambda_{\min}/10$.

- **W Hg (10)** – riešenie pre tento model sa presnosťou blíži metóde W AFDA. Zjemnenie kroku spôsobuje vylepšenie zhody prakticky vo všetkých zložkách.
- **H Hg (10)** – zhoda v amplitúde je porovnateľná ako pre H SI (10), teda zjemnenie spôsobí značné zlepšenie zhody hlavne pre Rayleighov vlny. Aj ostatné rozdiely dosahujú podobné hodnoty ako pre H SI (10), preto je ich už možné akceptovať.
- **HW Hg a (10), WH Hg a (10)** – vylepšenie zhody seizmogramov je značné, napriek tomu prechádza pohyb na niektorých prijímačoch s postupom času až do protifázy, aj v tomto prípade je zhoda nepostačujúca.

Na základe tohoto rozboru je možné uzatvoriť :

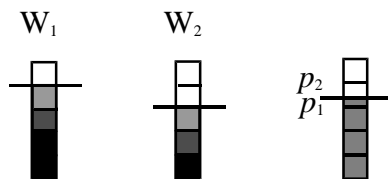
- pre W formuláciu stačí $\lambda_{\min}/h = 6$ na dostatočne presné modelovanie Rayleighových vln
- pre H formuláciu je nutné použiť $\lambda_{\min}/h = 10$
- v inej polohe prístup nedáva akceptovateľné výsledky

Získané výsledky sú veľmi dobré. Ukazujú, že pre voľný povrch je možné použiť heterogénny prístup pre polohy H a W. Nepostačujúce výsledky pre polohy horizontálneho voľného povrchu v polohách HW a WH viedli k ďalšiemu vývoju metódy.

7.2.3 Modifikovaný výpočet efektívnych materiálových parametrov

Pretože pre W formuláciu sa nám podarilo nájsť predchádzajúcim postupom vhodný spôsob výpočtu efektívnych materiálových parametrov, predpokladáme, že toto je možné aj pre iné polohy rozhrania. Preto sa teraz pokúsime modifikovať výpočet parametrov.

Bunku, ktorú voľný povrch delí v pomere $p_1 : p_2$ si môžeme predstaviť ako prechodný stav medzi dvoma W polohami. Predpokladáme, že parametre takejto bunky budú blízke hodnotám pre tieto dve polohy voľného povrchu. Preto sa zdá vhodné skombinovať hodnoty parametrov týchto buniek v pomere vzdialeností voľného povrchu v danej polohe od týchto polôh. Postup je ilustrovaný na Obr. 38.



Obr. 38 Kombinácia hodnôt parametrov

Najskôr určíme parametre buniek v modeli, kedy voľný povrch prechádza polohou W_1 a W_2 . Ako je to znázornené na obrázku, v modeli sú 4 typy buniek s rôznymi materiálovými parametrami (biela je bunka, v ktorej je vákuum, čierna bunka má parametre homogénneho polpriestoru). Nech teraz napríklad voľný povrch prechádza stredom bunky (poloha H). Pomer vzdialeností $p_1 : p_2$ je 1. Parametre buniek v modeli pre tento prípad teda určíme ako aritmetický priemer hodnôt zodpovedajúcich parametrov v zodpovedajúcich bunkách modelov pre W_1 a W_2 . Pre homogénne prostredie je postup zrejмый, pre nehomogénne prostredie vystupujúce priamo k voľnému povrchu by ho bolo potrebné modifikovať. Tento spôsob výpočtu parametrov budeme označovať 24c.

S takto určenými parametrami sme vypočítali nasledujúce modely :

Označenie	Priestorové vzorkovanie (λ_{\min}/h)	Spôsob výpočtu materiálových parametrov	Poloha voľného povrchu	komentár
H Hg c (6)	6	24c	H	
HW Hg c (6)	6	24c	HW	
WH Hg c (6)	6	24c	WH	
HHW Hg c (6)	6	24c	0,1785 h od H	
H Hg c (10)	10	24c	H	

Pre model HHW Hg c (6) sa voľný povrchu nachádza medzi polohou H a HW vo vzdialenosti 0,1785 h od polohy H.

Na základe vizuálneho porovnania seizmogramov v dodatku 4 a tiež podľa grafov fázového a amplitúdového rozdielu môžeme konštatovať :

- **H Hg c (6)** – spôsob výpočtu materiálových parametrov 24c zhoršuje zhodu v amplitúde na radiálnej zložke, táto je horšia ako pre H Hg SI (6) aj H Hg SI (10). Naopak na vertikálnej zložke dochádza k zlepšeniu a miera zhody je lepšia ako pre metódou H AFDA. Výrazne sa vylepšuje zhoda vo fáze na transvezálnej aj radiálnej zložke.
- **HW Hg c (6)** a **WH Hg c (6)**, **HHW Hg c (6)** – fázová aj amplitúdová zhoda vo všetkých troch prípadoch je vynikajúca, na niektorých zložkách lepšia ako pre metódy AFDA.
- **H Hg c (10)** – zjemnenie spôsobuje podstatné vylepšenie pre radiálnu zložku, miera zhody je už porovnateľná s prípadom H SI (10). Aj ostatné zložky sú v dobrej zhode s referenčným riešením, preto rozdiely považujeme za akceptovateľné.

Na základe týchto výsledkov uzatvárame :

- spôsob určovania parametrov 24c je dáva veľmi dobré výsledky pre $\lambda_{\min}/h = 6$ pre horizontálny voľný povrch v rôznej polohe voči umiestneniu diskretných aproximácií v sieti.
- poloha H je modelovaná najmenej presne, zhodu je možné vylepšiť zjemnením priestorového a časového kroku.

V modeli H Hg c (6) a H Hg c (10) sa diskretná aproximácia horizontálnych zložiek posunutia nachádza priamo na voľnom povrchu. Podobne ako pri simulovaní vnútorných rozhraní v tomto prípade môže heterogénny prístup dávať horšie výsledky. Súvisí to s tým, že nie je možné rozhodnúť, akú hodnotu majú materiálové parametre priamo v tomto bode, pretože tu dochádza ku skoku v ich hodnotách.

Pri simulácii voľného povrchu je nepresnosťou jeho modelovania najviac ovplyvnené riešenie v jeho tesnej blízkosti. Riešenie v bodoch nachádzajúcich sa hlbšie pod voľným povrchom je presnejšie. Ukazuje to zhoda riešenia pre model **H Hg c (6) 2** (Dodatok 4), kde riešenie je zaznamenané v prijímačoch vo vzdialenosti h pod voľným povrchom a dáva vynikajúcu zhodu. Pre striedavo usporiadané siete je vždy nutné niektoré zo zložiek extrapolovať, ak chceme získať ich hodnoty priamo na voľnom povrchu. Vzhľadom na to, že vo väčšej hĺbke je riešenie presné, riešenie priamo na voľnom povrchu v prípade H Hg c (6) je možné získať extrapoláciou potrebného rádu na voľný povrch.

7.2.4 Testy modelovania nakloneného voľného povrchu

Odvodené modifikované parametre počítané spôsobom 24c sme sa pokúsili zovšeobecniť aj pre prípad nakloneného voľného povrchu. Špeciálne pre uhol sklonu 45° predpokladáme, že je ho možné získať z hodnôt parametra počítaného spôsobom 24c pre vertikálny a horizontálny kontakt vákua s elastickým polpriestorom. Priama kombinácia ani modifikovanie parametrov porovnaním ich hodnôt však pri výpočtoch nedávali stabilné výsledky pre Rayleighove vlny. Prípadné použitie heterogénneho prístupu pre naklonený rovinný a nerovinný povrch nemôžeme vylúčiť, je však potrebné vykonať dôkladnejší teoretický rozbor a navrhnúť vhodnú parametrizáciu. Pokiaľ by prístup pre naklonený voľný povrch bol úspešný, predpokladáme, že ho bude možné zovšeobecniť a relatívne presne modelovať aj ľubovoľnú topografiu voľného povrchu.

Záver

Odvodili sme efektívne materiálové parametre pre heterogénny prístup modelovania voľného povrchu tak, aby anizotropia priemerného prostredia bola ortorombická a bolo možné použiť striedavo usporiadané siete. Výpočty boli urobené s aproximáciami derivácií do 2. rádu presnosti. Pre rovinný voľný povrch rovnobežný so sieťovými rovinami sú výsledky výborné. Testy pre model s nakloneným voľným povrchom ukazujú, že prístup dáva nehomogénne výsledky, ktorých presnosť sa mení od bodu k bodu. Zjemňovanie delenia oblasti určovania parametrov nevedie k zlepšeniu výsledkov. Preto neodporúčame používať odvodený spôsob výpočtu efektívnych materiálových parametrov na redukovanie anizotropie na ortorombickú pre modelovanie nerovinného voľného povrchu.

Pre rovinný voľný povrch rovnobežný so sieťovými rovinami sa nám podarilo nájsť heterogénnu konečno-diferenčnú schému. Navrhli sme spôsob výpočtu efektívnych materiálových parametrov, ktorý dáva dostatočne presné výsledky pre $h = \lambda_{\min}/6$ pre epicentrálne vzdialenosti do $15 \lambda_{dom}^S$. Schéma veľmi dobre modeluje voľný povrch rovnobežný so sieťovými rovinami v ľubovoľnej polohe. Najmenej presne je modelovaná poloha H, kedy voľný povrch prechádza priamo polohou aproximácií horizontálnych zložiek posunutí. Tento nedostatok je možné odstrániť použitím extrapolácie pomocou hodnôt pod voľným povrchom. Nájdenná schéma nevykazovala žiadne nestability.

Pre rovinný voľný povrch, ktorého normála nekoinciduje so žiadnym so smerov súradných osí sa nám nepodarilo nájsť takú parametrizáciu, ktorá by viedla k stabilným výsledkom.

Najperspektívnejšie pre efektívne a presné modelovanie voľného povrchu sa nám javí použitie rozpracovanej homogénej konečno-diferenčnej schémy pre nerovinný voľný povrch na základe metódy vnorených rozhraní, ktorej základy boli načrtnuté v kapitole 4.1.1.

Literatúra

- Aki, K. a P. G. Richards (1980). Quantitative seismology. Theory and methods, Vol II., W.H. Freeman & Co., San Francisco
- Alterman, Z. S., F. C. Karal (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bull. Seism. Soc. Am.* **58**, 367-398.
- Backus, G. E. (1962), Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering, *J. Geophys. Res.* **67**, 4427-4440.
- Bard, P. Y. a M. Bouchon (1980). The seismic response of sediment filled valleys. Part 1. The case of incident SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* **70**, 1263-1286.
- Bard, P. Y. a M. Bouchon (1985). The two-dimensional resonance of sediment-filled valleys, *Bull. Seism. Soc. Am.* **75**, 519-541.
- Beyer, R. P. a R. J. LeVeque (1992). Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method, *SIAM J. Num. Anal.* **29**, 332-364
- Boore, D. (1972). Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, in *Methods in computational physics*, B. A. Bolt (editor), Vol. 11, Academic Press, New York
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.* **71**, 959-971.
- Berenger, J. P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.* **114**, 185-200.
- Clayton, R. a B. Enquist (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bull. Seism. Soc. Am.* **67**, 1529-1540.
- Coutant, O. (1989). Program of numerical simulation AXITRA. *Res. Rep. LGIT*, Universite Joseph Fourier, Grenoble.
- Frankel, A. a W. Leith (1992). Evaluation of topographic effects on P and S-waves on explosions at the northern Novaya Zemlya test site using 3-D numerical simulations, *Geophys. Res. Lett.* **19**, 1877-1890.
- Gottschämer, E. a K. B. Olsen (2001). Accuracy of explicit planar free-surface boundary condition implemented in a fourth-order staggered-grid velocity-stress finite-difference scheme, *Bull. Seism. Soc. Am.* **91**, 617-623.
- Graves, R.W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, *Bull. Seism. Soc. Am.* **86**, 1091-1106.
- Hestholm, O. (1999). 3-D Finite difference viscoelastic wave modelling including surface topogra-

- phy, *Geophys. J. Int.* **139**, 852-878.
- Hestholm, O. a B. O. Ruud (1994). 2-D Finite difference elastic wave modeling including surface topography, *Geophys. Prosp.* **42**, 371-390.
- Igel, H., P. Mora a B. Riollot (1995). Anisotropic wave propagation through finite-difference grids, *Geophysics* **60**, 1203-1216.
- Imhof, M. G. (2002). Calculating the Seismic Effect of 3D Underground Structures and Topography with the Finite-Difference Method, *72nd Annual International Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, Salt Lake City, 2002.
- Jih, R.-S., K. L. McLaughlin a Z. A. Der (1998). Free-boundary conditions of arbitrary polygonal topography in a two-dimensional explicit elastic finite-difference scheme, *Geophysics* **53**, 1045-1055
- Kang, T.-S. a C.-E. Baag (2004). An Efficient Finite-Difference Method for Simulating 3D Seismic Response of Localized Basin Structures, *Bull. Seism. Soc. Am.* **94**, 1690-1705.
- Kelly, K. R., R.W. Ward, S. Treitel a R. M. Alford (1976). Synthetic seismograms: a finite-difference approach, *Geophysics* **41**, 2-27
- Kristek, J., P. Moczo a R. J. Archuleta (2002). Efficient methods to simulate a planar free surface in the 3D 4th-order finite-difference schemes, *Studia geophys. geod.* **46**, 355-381.
- Levander, A. (1998). Fourth order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics* **53**, 1425-1436.
- LeVeque, R. J. a Z. Li (1994). The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources, *SIAM J. Num. Anal.* **31**, 1019-1044.
- Mitchell, A. R. a D. F. Griffiths (1980). The finite-difference method in partial differential equations, *J. Wiley & Sons*, New York.
- Moczo, P. a P. Y. Bard (1993). Wave diffraction, amplification, and differential motion near strong lateral discontinuities, *Bull. Seism. Soc. Am.* **83**, 85-106.
- Moczo, P., E. Bystrický, J. Kristek, J. M. Carcione a M. Bouchon (1997). Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures, *Bull. Seism. Soc. Am.* **87**, 1305-1323.
- Moczo, P. (1998). Introduction to seismic wave propagation by the finite-difference method, Lecture notes, Kyoto university.
- Moczo, P., J. Kristek, L. Halada (2000). 3D Fourth-order Staggered-grid Finite-difference schemes : stability and grid dispersion, *Bull. Seism. Soc. Am.* **90**, 587-603.
- Moczo, P., J. Kristek, V. Vavryčuk, R.J. Archuleta a L. Halada (2002). 3D Heterogeneous Staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities, *Bull. Seism. Soc. Am.* **92**, 3042-3066.

- Moczo, P., J. Kristek a M. Gális (2004). Simulation of the planar free surface with near-surface lateral discontinuities in the finite-difference modeling of seismic motion, *Bull. Seism. Soc. Am.* **94**, 760-768.
- Morton, K.W. a D. F. Mayers (1994). Numerical solution of partial differential equations. Cambridge University Press.
- Muir, F., J. Dellinger a D. Nichols (1992). Modeling elastic fields across irregular boundaries, *Geophysics* **57**, 1189-1193.
- Ohminato, T. a B. A. Chouet (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.* **87**, 494-515.
- Peskin, C. S. (1977). Numerical analysis of blood flow in the heart, *J. Comput. Phys.* **25**, 220-252.
- Peskin, C. S. (1981). Lectures on mathematical aspects of physiology, *Lectures in Appl. Math.* **19**, 69-107.
- Reynolds, A. C. (1978). Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems, *Geophysics* **43**, 1099-1110.
- Rodrigues, D. (1993). Large scale modeling of seismic wave propagation, PhD. thesis, *Ecole centrale Paris*.
- Schönberg, M. a F. Muir (1989). A calculus for finely layered anisotropic media, *Geophysics*, **54**, 581-589.
- Schultz, C. A. (1997). A density-tapering approach for modeling the seismic response of free-surface topography, *Geophys. Res. Lett.* **24**, 2809-2812.
- Tessmer, E., D. Kosloff a A. Behle (1992). Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography, *Geophys. J. Int.* **108**, 621-632.
- Tessmer, E. and D. Kosloff (1994). 3-D elastic modeling with surface topography by a Chebychev spectral method, *Geophysics* **59**, 464-473.
- Tikhonov, A. N. a A. A. Samarskii (1962). Homogeneous difference schemes, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.* **1**, 5-67.
- Zahradník, J. a P. Moczo (1996). Hybrid seismic modeling based on discrete-wavenumber and finite-difference methods, *Pure Appl. Geophys.* **148**, 21-38.
- Zahradník, J. a E. Priolo (1995). Heterogeneous formulations of elastodynamic equations and finite-difference schemes, *Geophys. J. Int.* **120**, 663-676.
- Zhang, C. a R. J. LeVeque (1996). The immersed interface method for acoustic wave equations with discontinuous coefficients, *Wave Motion* **25**, 237-263.
- Zhang, C. a W. W. Symes (1998). Fourth order methods for acoustic waves with discontinuous material, Conference on Mathematical and Numerical aspects of Wave propagation.

Prílohy

Dodatok 1

Konečno diferenčná schéma 2. rádu presnosti v čase a 4. rádu presnosti v priestore vo formulácii DVS na striedavo usporiadanej sieti :

$$T_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xx,m} = \frac{1}{h} \left\{ q_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^x D_x U_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m + l_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xy} D_y V_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m + l_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xz} D_z W_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m \right\}$$

$$T_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{yy,m} = \frac{1}{h} \left\{ l_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xy} D_x U_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m + q_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^y D_y V_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m + l_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xz} D_z W_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m \right\}$$

$$T_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{zz,m} = \frac{1}{h} \left\{ l_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xz} D_x U_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m + l_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^{xy} D_y V_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m + q_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^z D_z W_{I+1/2,K+1/2,L+1/2}^m \right\}$$

$$T_{I,K,L+1/2}^{xy,m} = \frac{1}{h} m_{I,K,L+1/2}^{xy} \left\{ D_x V_{I,K,L+1/2}^m + D_y U_{I,K,L+1/2}^m \right\}$$

$$T_{I,K+1/2,L}^{xz,m} = \frac{1}{h} m_{I,K+1/2,L}^{xz} \left\{ D_x W_{I,K+1/2,L}^m + D_z U_{I,K+1/2,L}^m \right\}$$

$$T_{I+1/2,K,L}^{yz,m} = \frac{1}{h} m_{I+1/2,K,L}^{yz} \left\{ D_y W_{I+1/2,K,L}^m + D_z V_{I+1/2,K,L}^m \right\}$$

$$u_{I,K+1/2,L+1/2}^{m+1/2} = u_{I,K+1/2,L+1/2}^{m-1/2} + \frac{\Delta t}{h\rho_{I,K+1/2,L+1/2}} \left[hF_{I,K+1/2,L+1/2}^{x,m} + D_x T_{I,K+1/2,L+1/2}^{xx,m} + D_y T_{I,K+1/2,L+1/2}^{xy,m} + D_z T_{I,K+1/2,L+1/2}^{xz,m} \right]$$

$$v_{I+1/2,K,L+1/2}^{m+1/2} = v_{I+1/2,K,L+1/2}^{m-1/2} + \frac{\Delta t}{h\rho_{I+1/2,K,L+1/2}} \left[hF_{I+1/2,K,L+1/2}^{y,m} + D_x T_{I+1/2,K,L+1/2}^{yx,m} + D_y T_{I+1/2,K,L+1/2}^{yy,m} + D_z T_{I+1/2,K,L+1/2}^{yz,m} \right]$$

$$w_{I+1/2,K+1/2,L}^{m+1/2} = w_{I+1/2,K+1/2,L}^{m-1/2} + \frac{\Delta t}{h\rho_{I+1/2,K+1/2,L}} \left[hF_{I+1/2,K+1/2,L}^{z,m} + D_x T_{I+1/2,K+1/2,L}^{zx,m} + D_y T_{I+1/2,K+1/2,L}^{zy,m} + D_z T_{I+1/2,K+1/2,L}^{zz,m} \right]$$

$$U_{I,K+1/2,L+1/2}^{m+1} = U_{I,K+1/2,L+1/2}^m + \Delta t u_{I,K+1/2,L+1/2}^{m+1/2}$$

$$V_{I+1/2,K,L+1/2}^{m+1} = V_{I+1/2,K,L+1/2}^m + \Delta t v_{I+1/2,K,L+1/2}^{m+1/2}$$

$$W_{I+1/2,K+1/2,L}^{m+1} = W_{I+1/2,K+1/2,L}^m + \Delta t w_{I+1/2,K+1/2,L}^{m+1/2}$$

kde

$$D_x A_{r,s,t}^m = -\frac{1}{8} \left(A_{r+3/2,s,t}^m - A_{r-3/2,s,t}^m \right) + \frac{9}{8} \left(A_{r+1/2,s,t}^m - A_{r-1/2,s,t}^m \right)$$

$$D_y A_{r,s,t}^m = -\frac{1}{8} \left(A_{r,s+3/2,t}^m - A_{r,s-3/2,t}^m \right) + \frac{9}{8} \left(A_{r,s+1/2,t}^m - A_{r,s-1/2,t}^m \right)$$

$$D_z A_{r,s,t}^m = -\frac{1}{8} \left(A_{r,s,t+3/2}^m - A_{r,s,t-3/2}^m \right) + \frac{9}{8} \left(A_{r,s,t+1/2}^m - A_{r,s,t-1/2}^m \right)$$

Dodatok 2

Odvodíme spojitosť zložiek tenzora deformácie zo spojitosti posunutí na rozhraniach. Nech rozhranie je rovina $z = 0$. Uvažujme napríklad o $e_{11} = U_{,x}$. Samotné posunutie U na $z = 0$ je spojité, preto

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \rightarrow 0^+} [U(x + \eta, y, z + \xi) - U(x + \eta, y, z - \xi)] &= 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow 0^+} [U(x - \eta, y, z + \xi) - U(x - \eta, y, z - \xi)] &= 0\end{aligned}$$

potrebujeme dokázať, že $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} [e_{11}(x, y, z + \xi) - e_{11}(x, y, z - \xi)] = 0$. Podľa definície

$$e_{11}(x, y, z \pm \xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{U(x + \eta, y, z \pm \xi) - U(x - \eta, y, z \pm \xi)}{2\eta}$$

preto

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \rightarrow 0^+} [e_{11}(x, y, z + \xi) - e_{11}(x, y, z - \xi)] &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{U(x + \eta, y, z + \xi) - U(x - \eta, y, z + \xi) + U(x + \eta, y, z - \xi) - U(x - \eta, y, z - \xi)}{2\eta} &= \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{U(x + \eta, y, z + \xi) - U(x + \eta, y, z - \xi) + U(x - \eta, y, z + \xi) - U(x - \eta, y, z - \xi)}{2\eta} &= \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{0 + 0}{2\eta} &= 0\end{aligned}$$

čo znamená spojitosť e_{11} cez horizontálne rozhranie. Podobne možno ukázať aj spojitosť e_{22} a e_{12} .

Dodatok 3

Vzťahy na aproximovanie derivácií používané v metóde AFDA :

$$f'(z_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{352}{105} f(z_0) + \frac{35}{8} f(z_0 + \frac{h}{2}) - \frac{35}{24} f(z_0 + \frac{3}{2}h) + \frac{21}{40} f(z_0 + \frac{5}{2}h) - \frac{5}{56} f(z_0 + \frac{7}{2}h) \right] + O(h^4) \quad (\text{A.1})$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{11}{12} f(z_0 - \frac{h}{2}) + \frac{17}{24} f(z_0 + \frac{h}{2}) + \frac{3}{8} f(z_0 + \frac{3}{2}h) - \frac{5}{24} f(z_0 + \frac{5}{2}h) + \frac{1}{24} f(z_0 + \frac{7}{2}h) \right] + O(h^4) \quad (\text{A.2})$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{h}{22} f'(z_0 - h) - \frac{577}{528} f(z_0 - \frac{h}{2}) + \frac{201}{176} f(z_0 + \frac{h}{2}) - \frac{9}{176} f(z_0 + \frac{3}{2}h) + \frac{1}{528} f(z_0 + \frac{5}{2}h) \right] + O(h^4) \quad (\text{A.3})$$

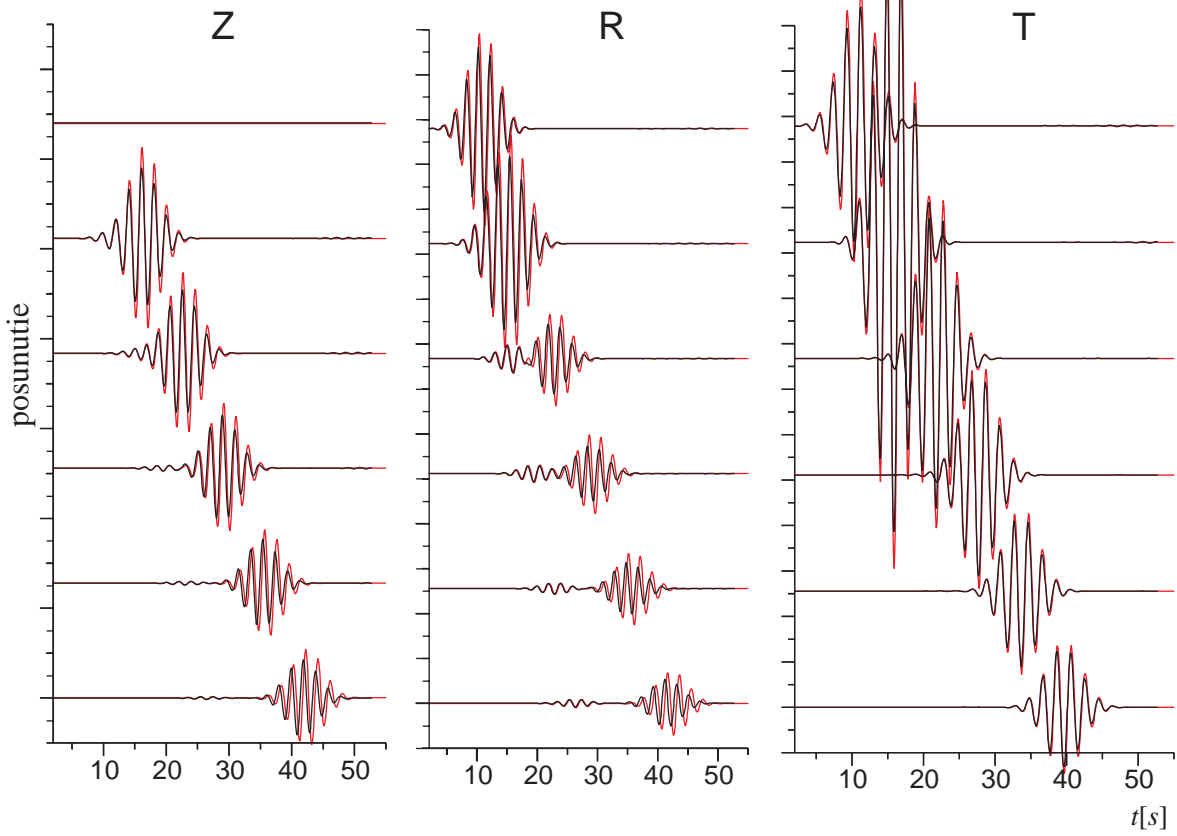
$$f'(z_0) = \frac{1}{h} \left[\frac{16}{105} f(z_0 - h) - \frac{31}{24} f(z_0 - \frac{h}{2}) + \frac{29}{24} f(z_0 + \frac{h}{2}) - \frac{3}{40} f(z_0 + \frac{3}{2}h) + \frac{1}{168} f(z_0 + \frac{5}{2}h) \right] + O(h^4) \quad (\text{A.4})$$

Dodatok 4

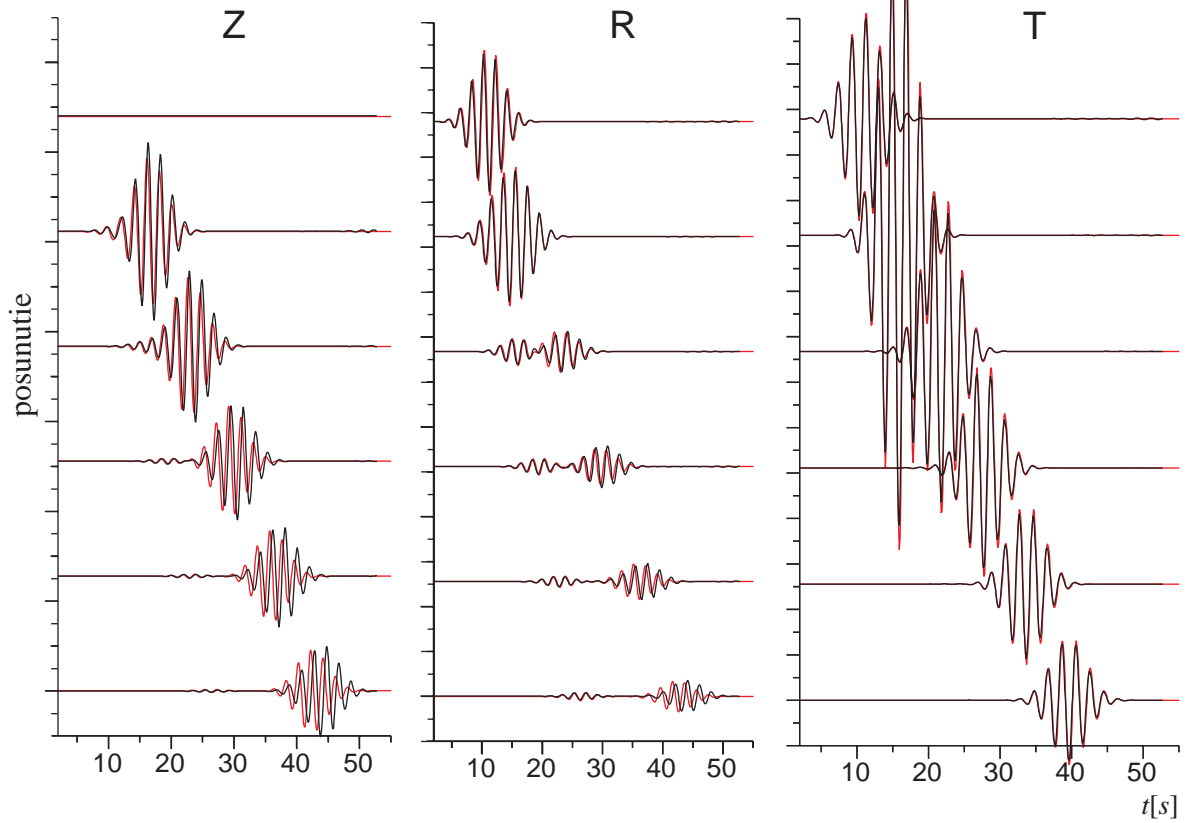
seizmogramy vypočítané pri sérii testov simulovania rovinného voľného povrchu

označenie modelu	strana
H Hg 2 (6)	87
W Hg 2 (6)	87
HW Hg 2 (6)	88
H Hg (6)	88
H Hg a (6)	89
W Hg a (6)	89
HW Hg (6)	90
WH Hg (6)	90
H Hg (10)	91
W Hg (10)	91
HW Hg (10)	92
WH Hg (10)	92
H Hg c (6)	93
HW Hg c (6)	93
WH Hg c (6)	94
HHW Hg c (6)	94
H Hg c (10)	95
H Hg c (6) 2	95

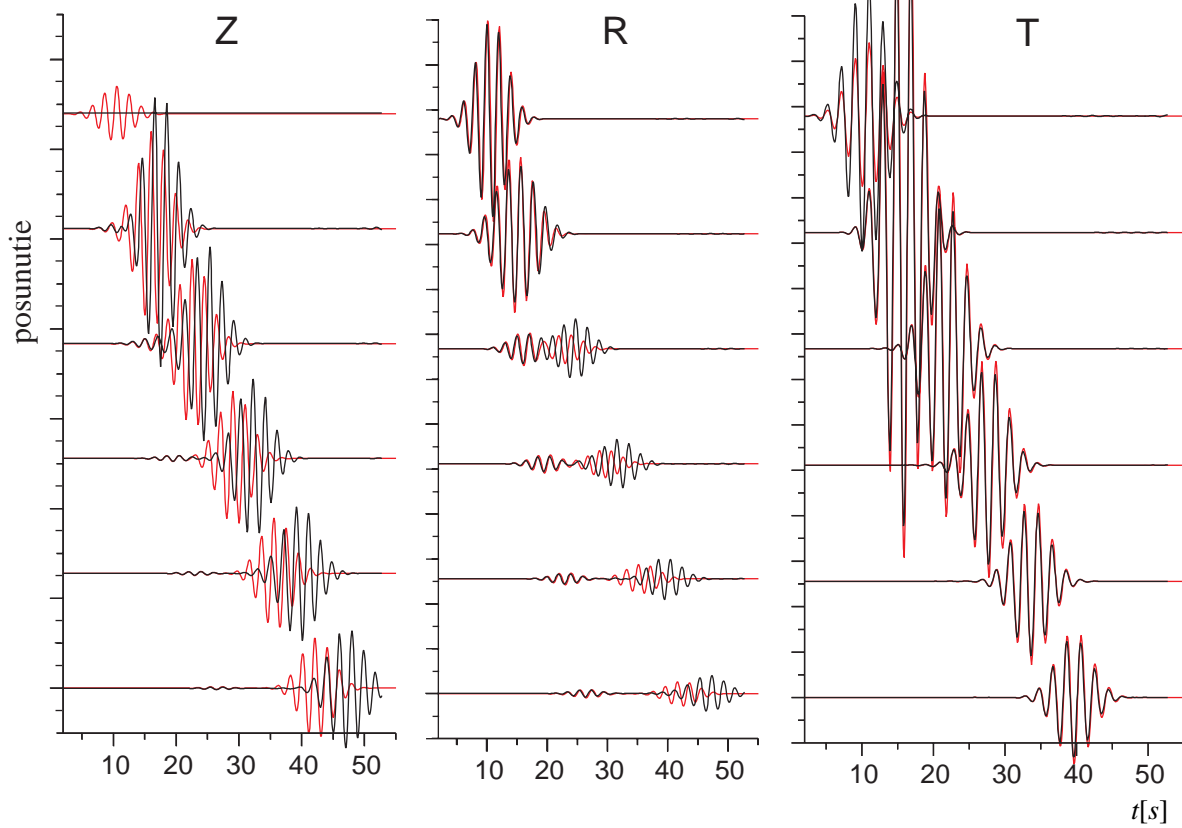
H Hg 2 (6)



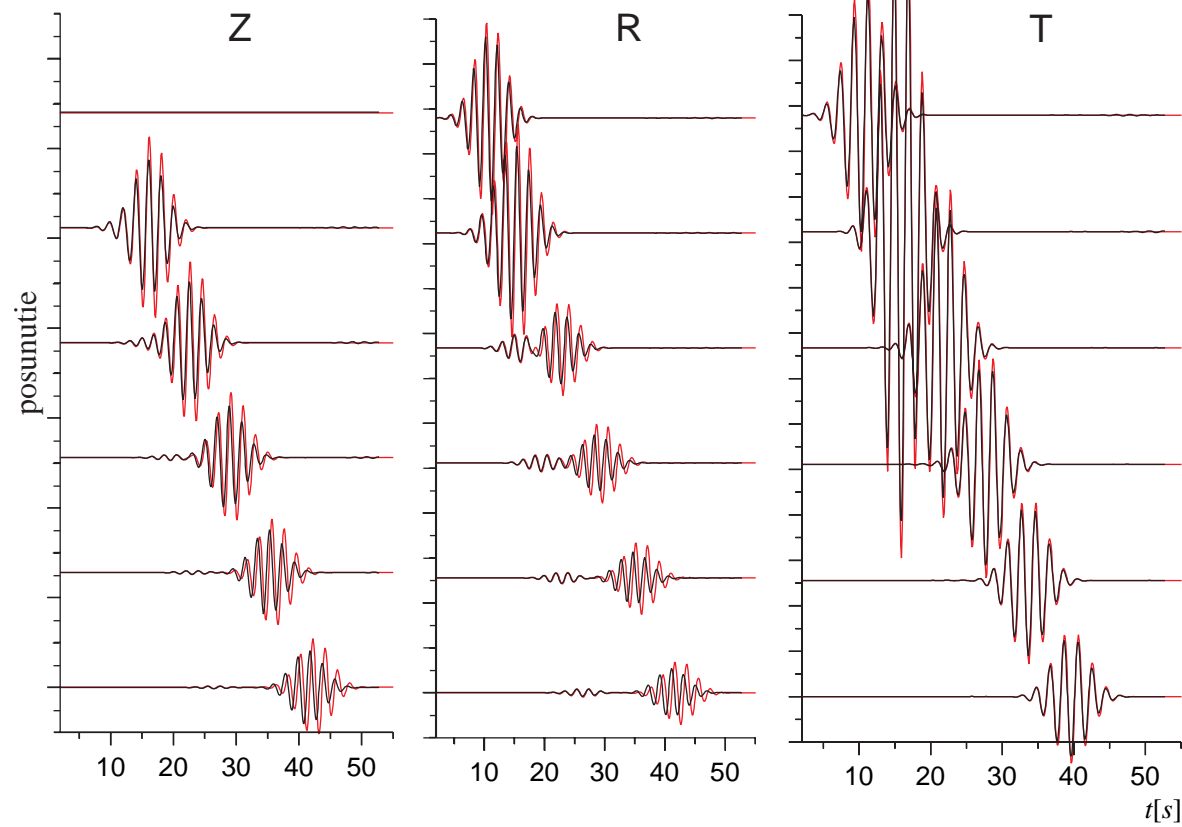
W Hg 2 (6)



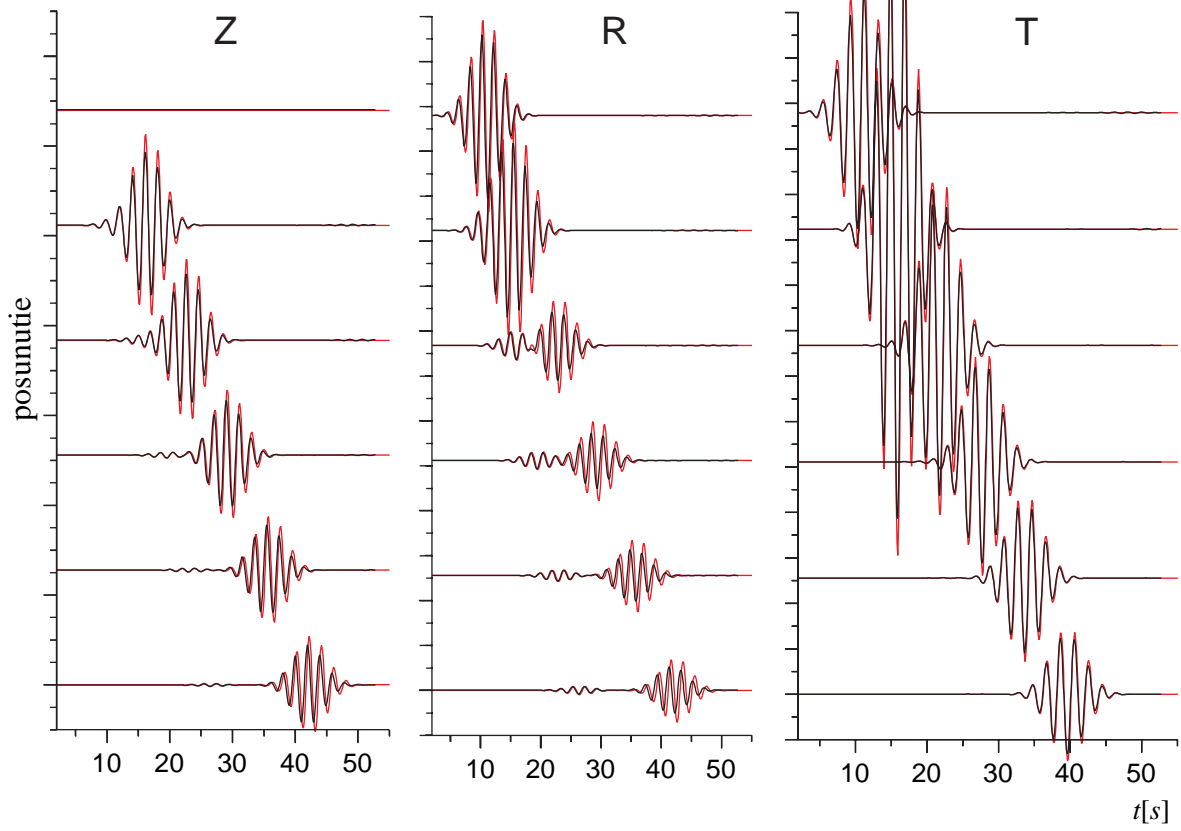
HW Hg 2 (6)



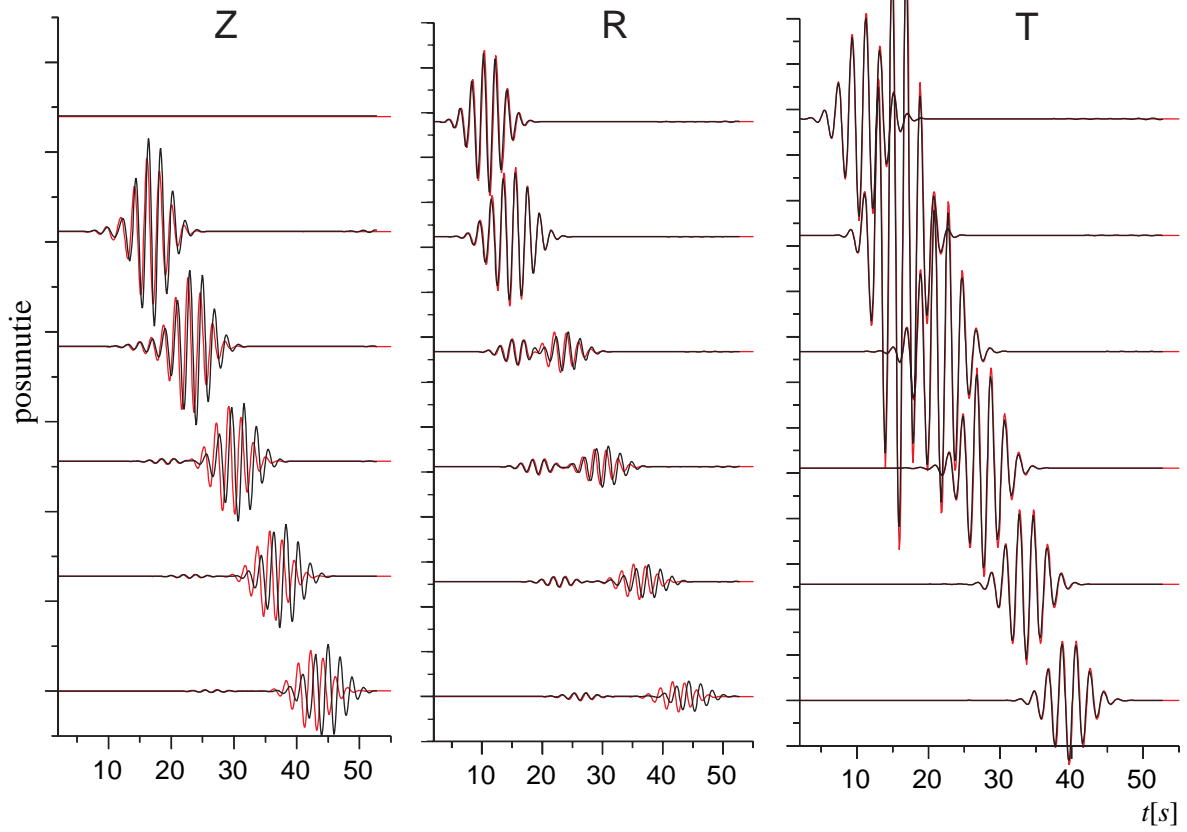
H Hg (6)



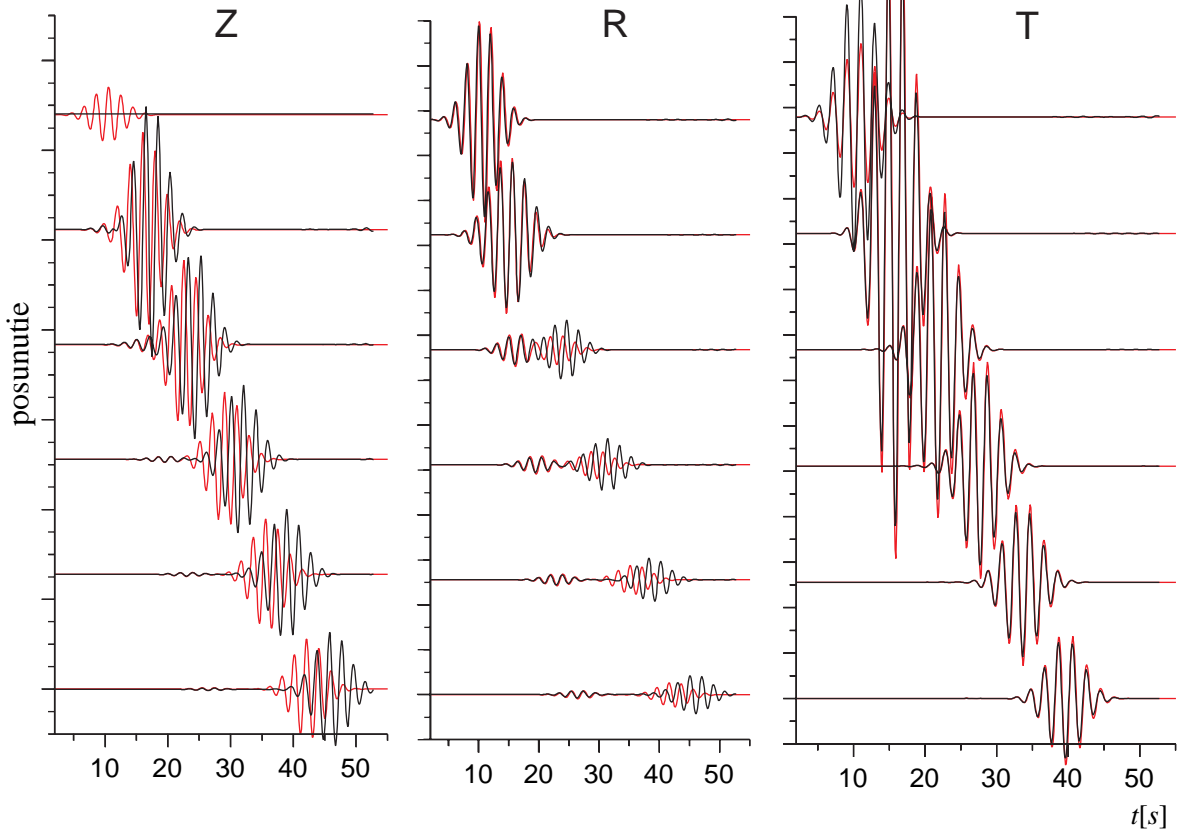
H Hg a (6)



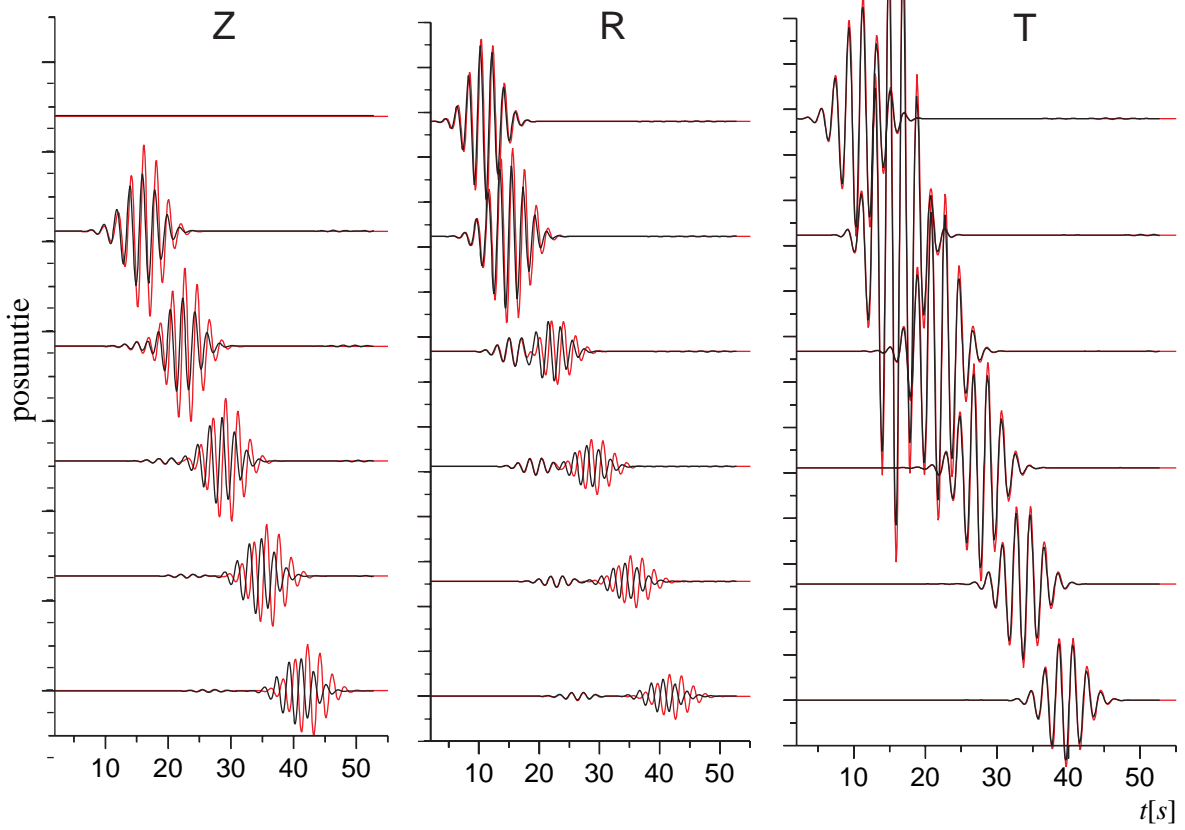
W Hg a (6)

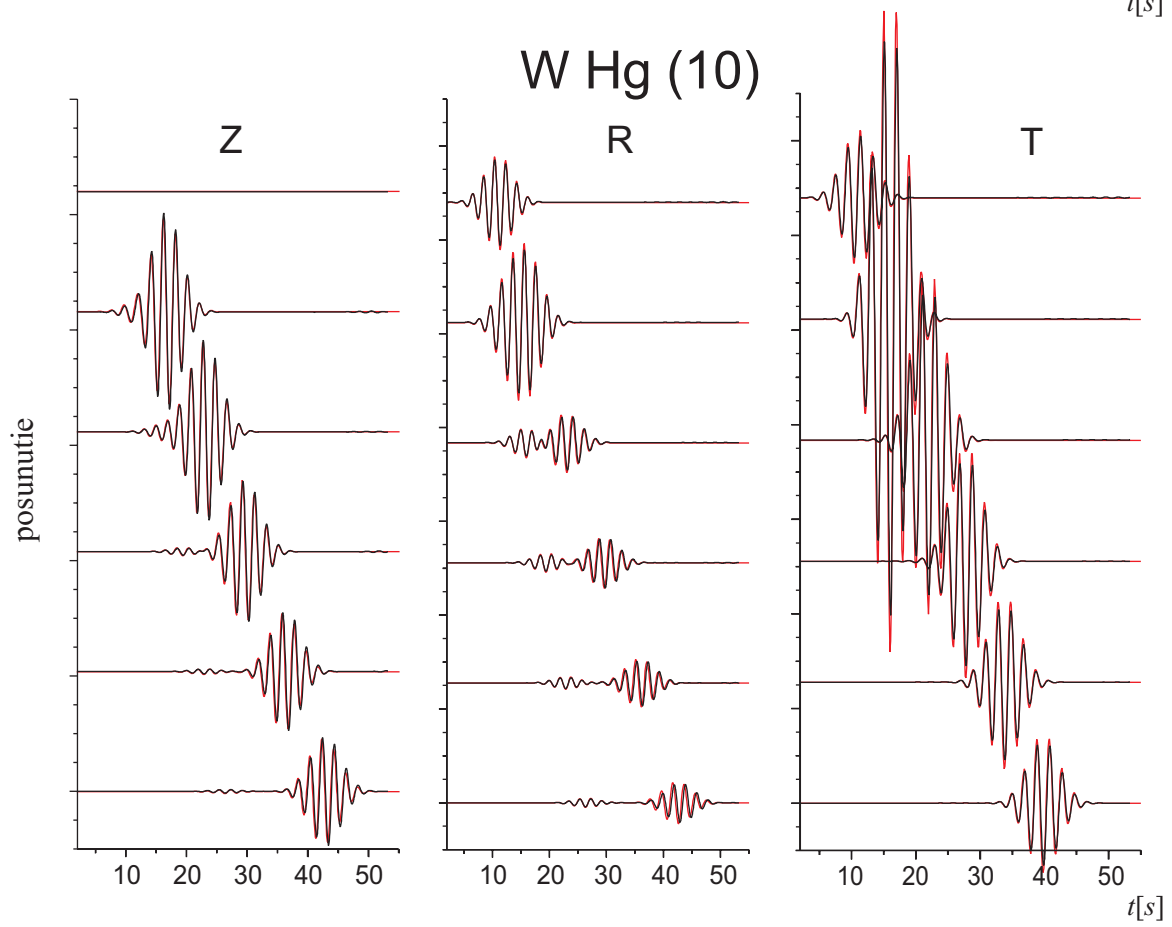
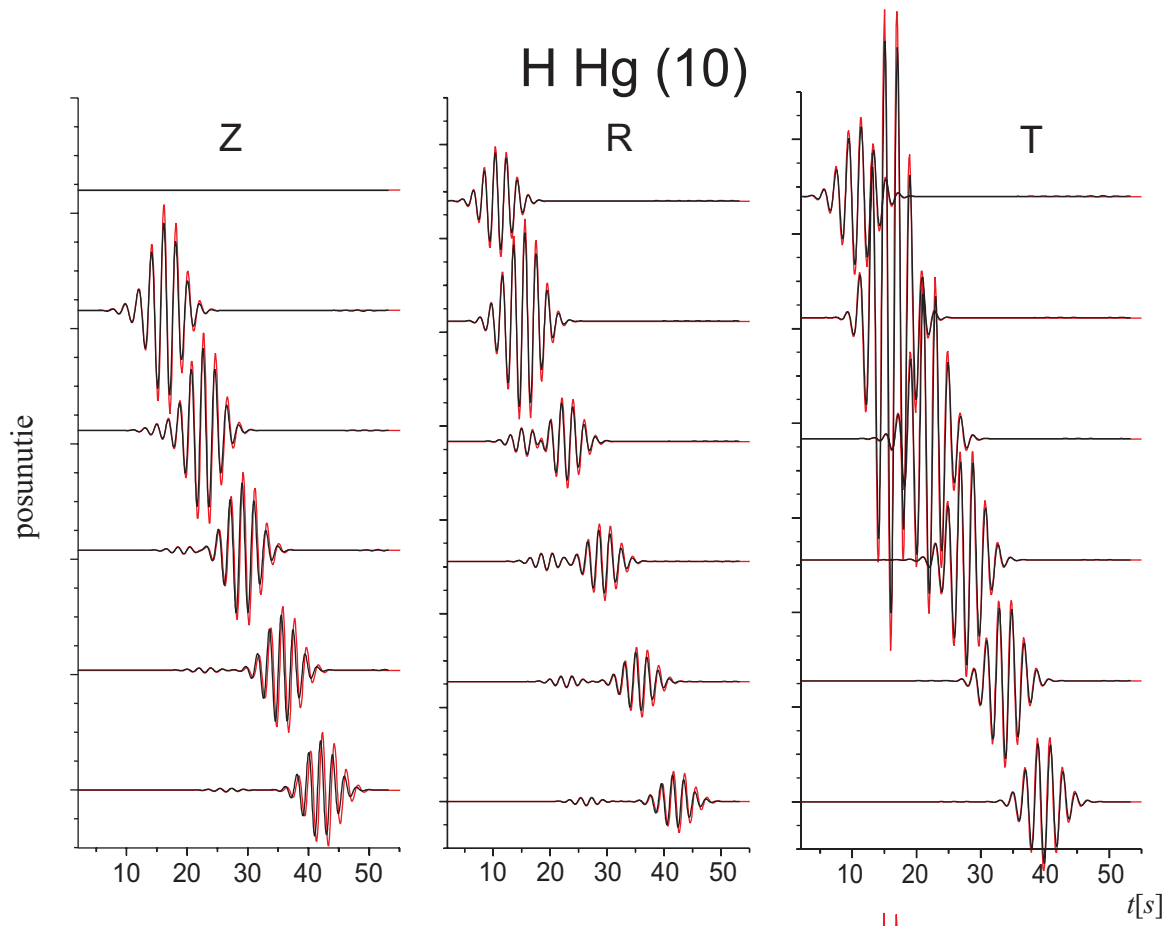


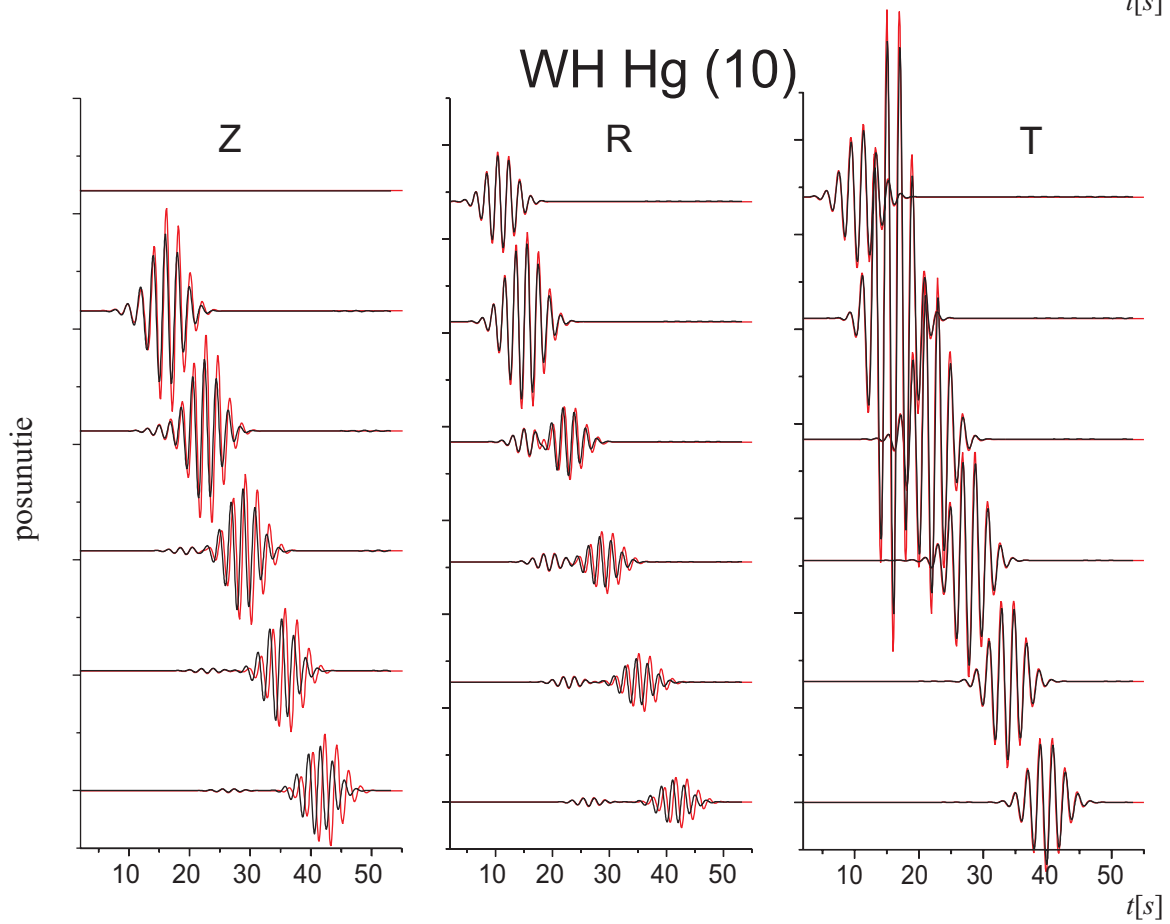
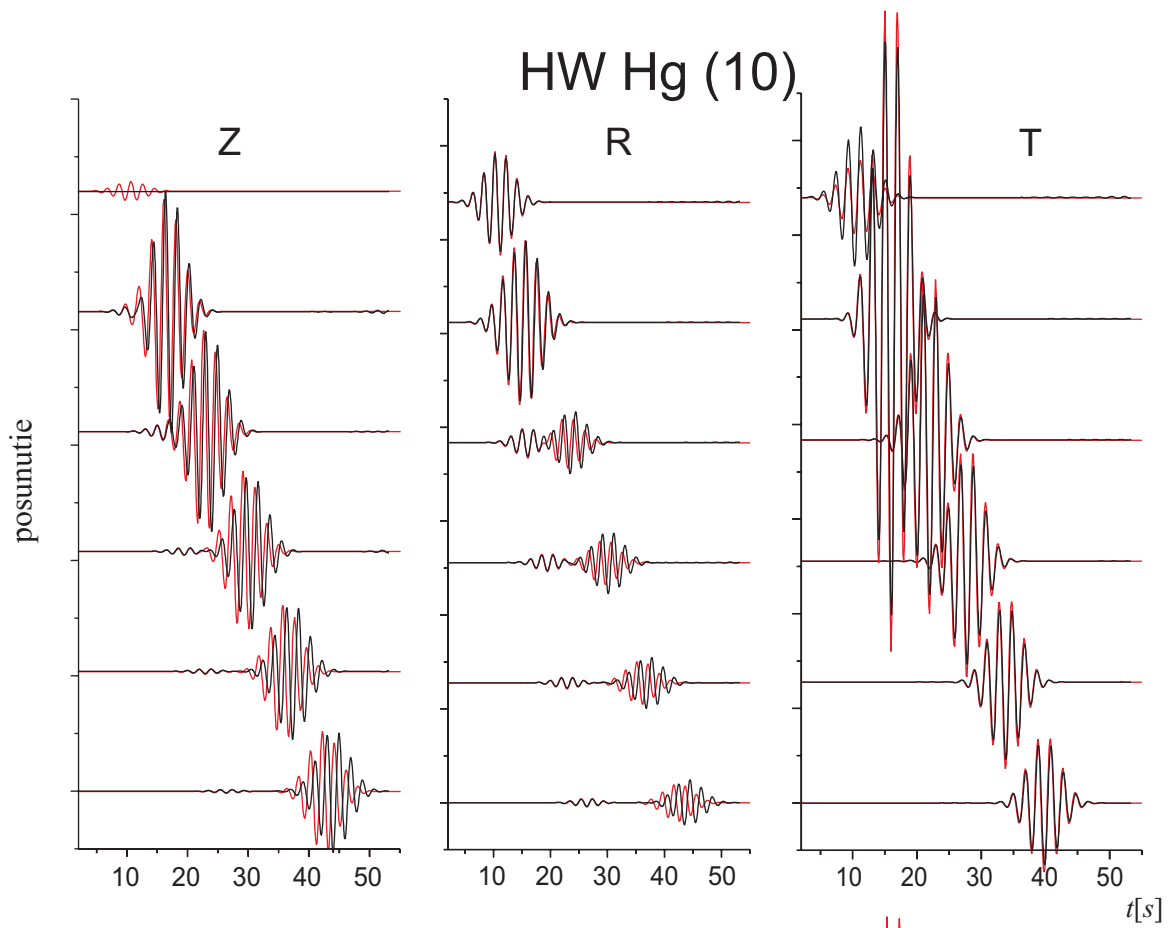
HW Hg (6)

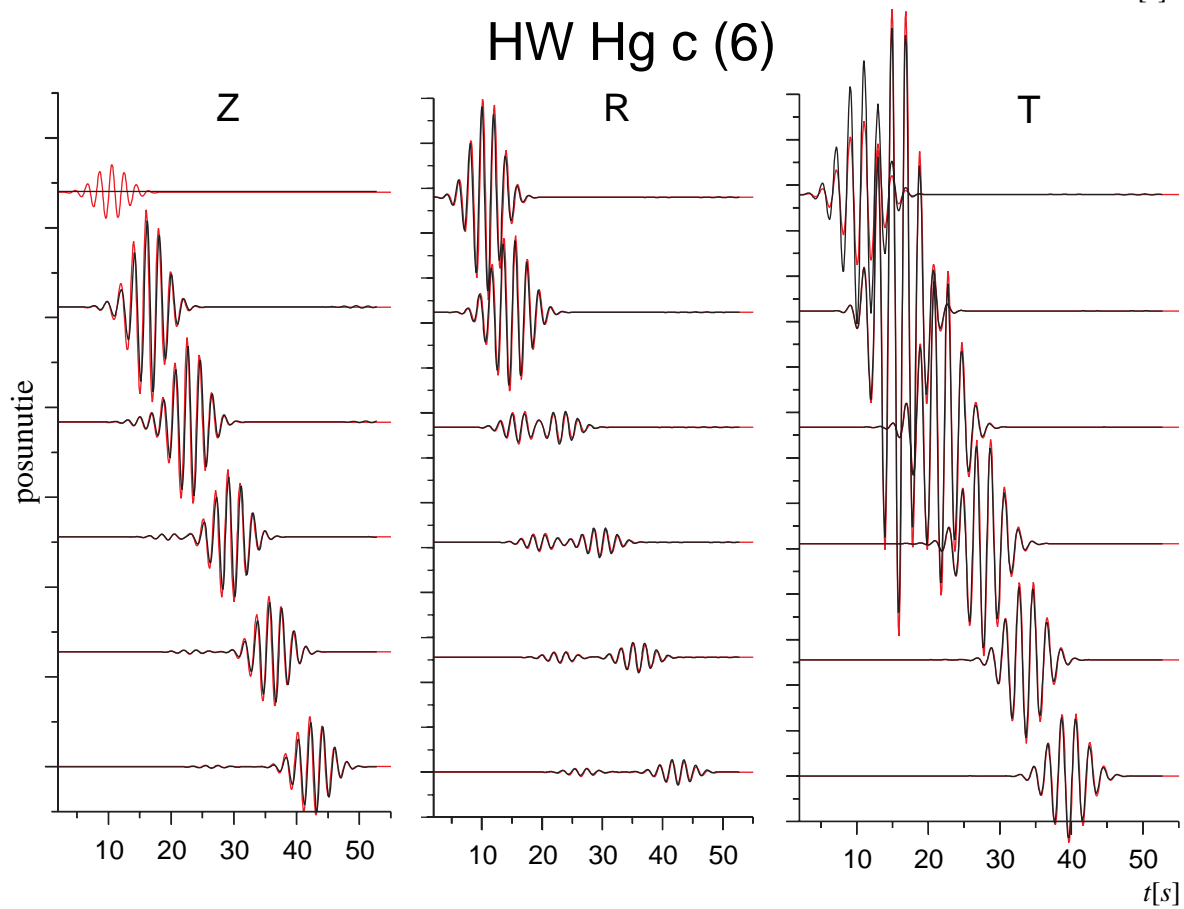
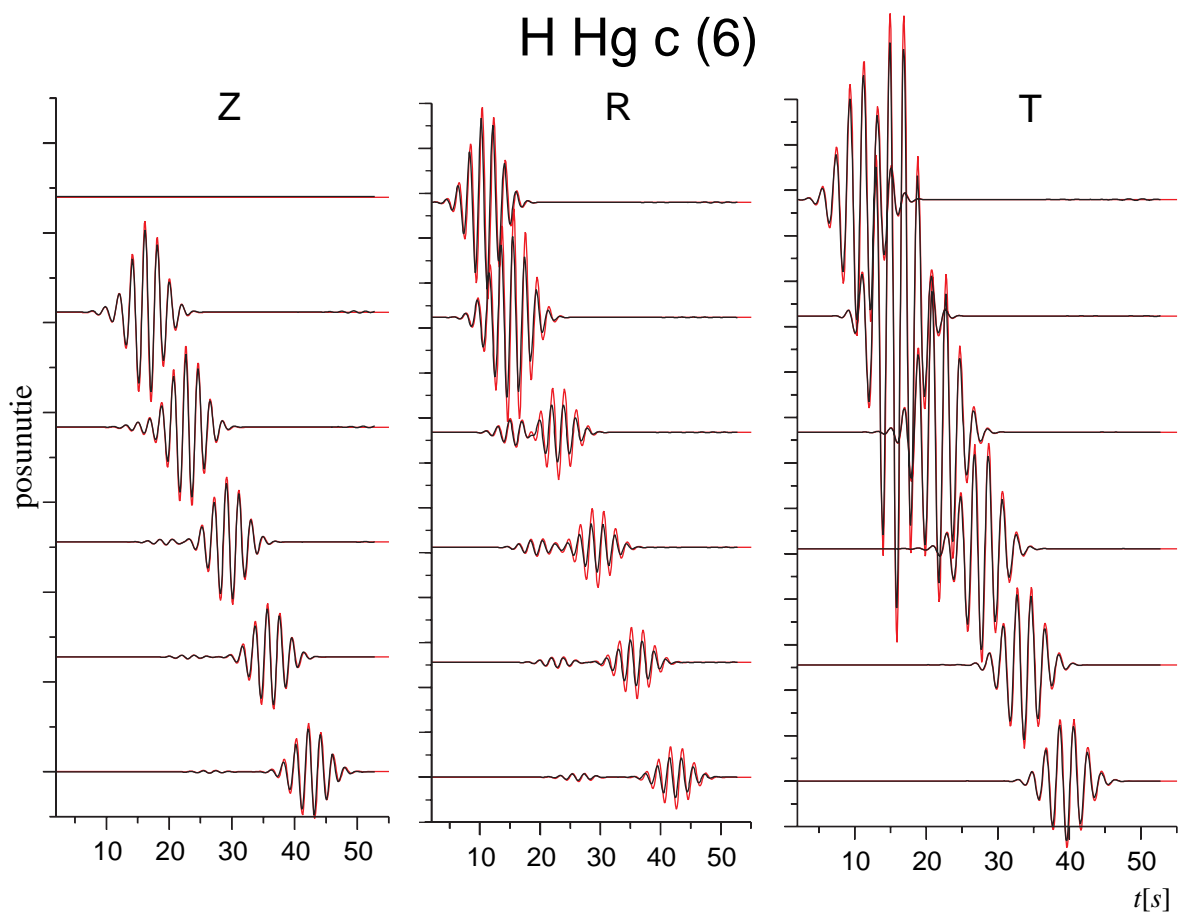


WH Hg (6)

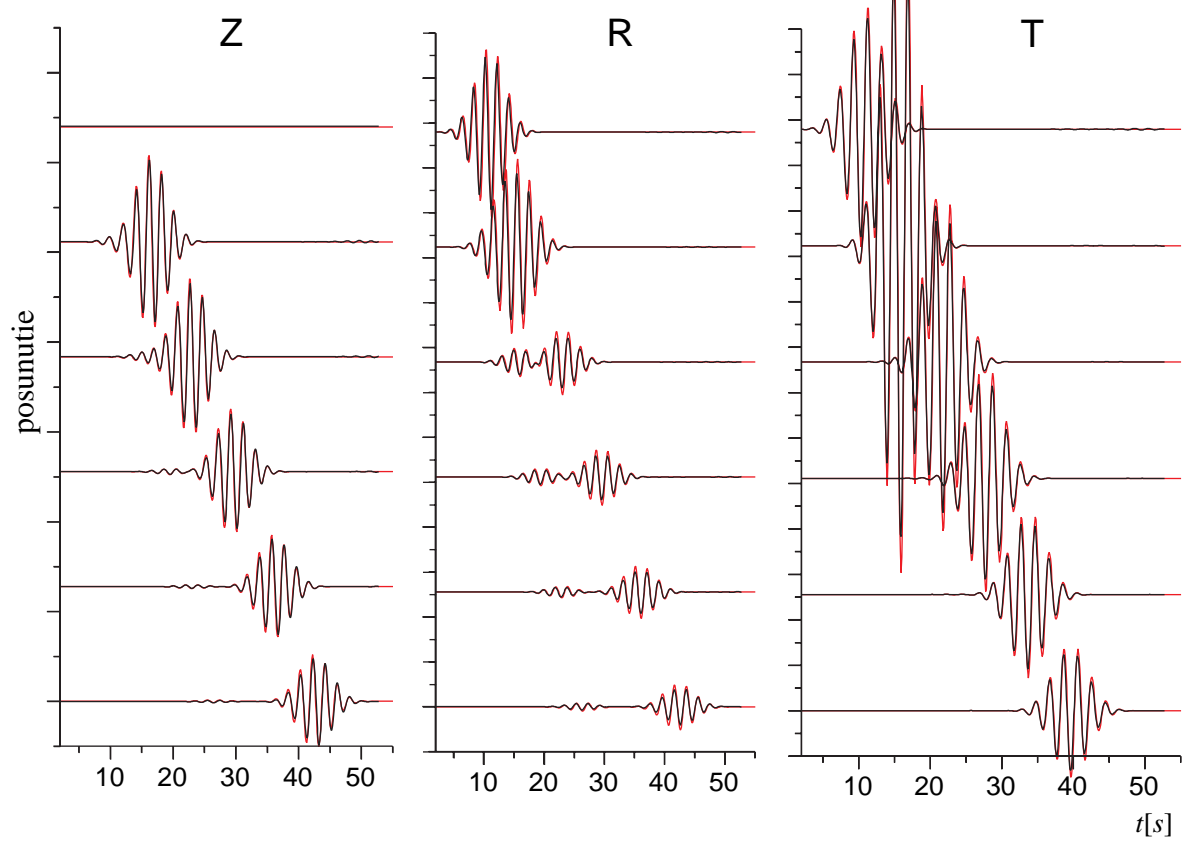








WH Hg c (6)



HHW Hg c (6)

