

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie



Model plášťového vzostupného prúdu ne-newtonovskej kvapaliny

Diplomová práca

FYZIKA 1160800

Diplomant: Zuzana Konôpková

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Peter Guba, PhD.

Bratislava 2006

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Mgr. Petrovi Gubovi, PhD. za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce. Zároveň by som sa chcela poďakovať Mgr. Petrovi Pažákovi za rady a návrhy pri korekcii finálnej verzie diplomovej práce.

Abstrakt

Ako jedna z foriem plášťovej konvekcie sa vyvinula koncepcia plášťových vzostupných prúdov (mantle plumes), ktorých prejavom na zemskom povrchu je izolovaná vulkanická činnosť, nevzťahujúca sa na oblasti rozhraní tektonických platní. Vzostupné prúdy vznikajú vďaka nestabilitám v teplotných hraničných vrstvách akou je napríklad D” vrstva hneď nad rozhraním jadro-plášť. Modelovanie plášťových prúdov sa začalo až v 90-tych rokoch, prvé modely boli veľmi jednoduché, v ktorých plášť bol opísaný newtonovskou kvapalinou. V newtonovskej kvapaline je vzťah medzi napätím a rýchlosťou deformácie lineárny. V predkladanej práci sme analyzovali plášťový vzostupný prúd s použitím ne-newtonovskej kvapaliny, ktorá lepšie aproximuje reálny zemský plášť. Vzťah medzi rýchlosťou deformácie a napätím v ne-newtonovskej reológii je nelineárny, efektívna viskozita je funkciou napätia, teploty, tlaku a ďalších materiálových parametrov. Základné radiace rovnice sú odvodené v cylindrických súradniciach pre ososymetrický tok. Analýza sebe-podobných riešení zahŕňa hranično-vrstvovú aproximáciu a určenie dôležitých bezrozmerných parametrov. Systém nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc sme riešili metódou konečných diferencií. Prechod od newtonovského prípadu ($n = 1$) k ne-newtonovskému ($n = 3$) bol prevedený pomocou numerickej kontinuácie v priestore parametrov n a τ . Zo získaných bezrozmerných riešení sme vyjadrili priebehy fyzikálnych veličín systému (teplota, vertikálna a horizontálna rýchlosť, strižné napätie a efektívna viskozita). Získané výsledky boli porovnávané pre rôzne ne-newtonovské aj newtonovské materiály.

Obsah

1	Úvod	5
2	Plášťové vzostupné prúdy	7
2.1	Horúce škrvny	7
2.2	Ostrovná reťaz Hawaiian-Emperor	8
2.3	Yellowstone	9
2.4	Seizmicita a tektonika horúcich škvŕn	9
2.5	Stavba vzostupných prúdov	11
2.6	Modely plášťových vzostupných prúdov	12
2.7	Fázové premeny a vzostupné prúdy	16
3	Model vzostupného prúdu newtonovskej kvapaliny	19
3.1	Geofyzikálna motivácia	19
3.2	Viskozita plášte	20
3.3	Riadiace rovnice	21
3.3.1	Rovnica spojitosti	21
3.3.2	Navier–Stokesova rovnica	22
3.3.3	Rovnica vedenia tepla	23
3.4	Model vzostupného prúdu newtonovskej kvapaliny generovaný bodovým zdrojom tepla	24
3.5	Prúdová funkcia. Podobnostná transformácia	26
3.6	Zákon zachovania tepelnej energie	28
3.7	Zákon zachovania hybnosti	29
3.8	Grashoffovo číslo	30
3.9	Analytické riešenie pre $Pr=2$	31
4	Model vzostupného prúdu ne-newtonovskej kvapaliny	32
4.1	Efektívna viskozita ne-newtonovskej kvapaliny	32
4.2	Formulácia problému	37
4.3	Bezrozmerné riadiace rovnice	39

4.4	Podobnostná formulácia	40
5	Numerické riešenie problému	42
5.1	Numerické riešenie rovníc newtonovskej kvapaliny	42
5.1.1	Metóda strelby	42
5.1.2	Diskusia výsledkov	43
5.2	Numerické riešenie rovníc ne-newtonovskej kvapaliny	45
5.2.1	Metóda konečných diferencií	45
5.2.2	Aplikácia metódy konečných diferencií na diferenciálny systém pre ne-newtonovský prípad	47
5.2.3	Výsledky a ich diskusia	49
	Záver	56
	Literatúra	56
	Príloha	60

Zoznam obrázkov

2.1	Schematický prierez litosférou pod sopkou Kilauea na Havaii.	10
2.2	Fotografie z laboratórneho experimentu	13
2.3	Numerický model vzniku vzostupného prúdu	14
2.4	Povrchová elevácia	15
2.5	Numerické modely vzostupných prúdov	16
2.6	Model rozloženia plášťových vzostupných prúdov	17
3.1	Schematický obrázok osovymetrického plášťového vzostupného prúdu	25
3.2	Profil vertikálneho toku pre rôzne fixované z	27
4.1	Závislosť viskozity od teploty	34
4.2	Schematické grafy na určenie aktivačnej energie a aktivačného objemu .	36
5.1	Grafy newtonovského prípadu	44
5.2	Závislosť efektívnej hrúbky hraničnej vrstvy na Prandtlovom čísle	44
5.3	Náčrt Newtonovej metódy	48
5.4	Grafy pre Newton 1 a Newton 2	53
5.5	Grafy pre mokrý olivín	54
5.6	Grafy pre suchý olivín	55

Zoznam tabuliek

5.1	Reologické parametre.	50
5.2	Ostatné rozmerné fyzikálne parametre.	50
5.3	Tabuľka hrúbky hraničných vrstiev	52

Kapitola 1

Úvod

Plášťové vzostupné prúdy predstavujú určitú formu plášťovej konvekcie, prostriedok prenosu tepla a materiálu z najhlbších častí planéty na jej povrch. Sú samostatnou jednotkou podrobujúcou sa fyzikálnym zákonom riadiacich zemské vnútro. Ich vznik inicializujú nestability v hraničných vrstvách a nie sú priamo spojené s tektonikou platní. Vo všeobecnosti je existencia vzostupných prúdov prijatá na základe numerických i laboratórnych experimentov, geologických a geochemických dát a predovšetkým seizmickej tomografie. Matematický model plášťového vzostupného prúdu je aj cieľom predkladanej práce.

Práca je rozdelená do piatich kapitol. Druhá kapitola predstavuje stručný prehľad o súčasných poznatkoch plášťových vzostupných prúdov. Prvá časť kapitoly obsahuje krátky popis najznámejších prírodných útvarov vytvorených touto formou plášťovej konvekcie, v ďalších častiach sa zaoberáme modelmi vzostupných prúdov získaných na základe numerických výpočtov a laboratórnych experimentov.

V tretej kapitole uvádzame reprodukciu matematickej analýzy konvekcie nad bodovým zdrojom s použitím konštantnej viskozity (Fujii (1962)). Odvodíme riadiace rovnice a zavedieme pojem prúdovej funkcie a podobnostnej transformácie.

Najdôležitejšou časťou diplomovej práce je štvrtá kapitola, ktorá je zameraná na pôvodný model vzostupného prúdu s využitím nelineárnej, ne-newtonovskej reológie.

Numerické riešenia rovníc odvodených pre newtonovský a ne-newtonovský plášť uvádzame v piatej kapitole. Nachádza sa tu aj krátky popis numerických metód, ktoré sme použili. Záverečná kapitola obsahuje diskusiu a grafy našich výsledkov. Na záver práce prikladáme časť programu na riešenie problému metódou konečných diferencií v symbolickom výpočtovom prostriedku Mathematica 5.2.

Táto diplomová práca je zameraná na model plášťového vzostupného prúdu s využitím poznatkov o ne-newtonovských kvapalinách. Hlavným cieľom bolo aplikovanie nelineárnej reológie na zemský plášť a priblížiť sa tak k reálnej Zemi. Pre splnenie tohto cieľa bolo potrebné splniť nasledujúce úlohy:

-
- matematicky sformulovať problém osovosymetrického vzostupného prúdu s využitím teórie hraničných vrstiev
 - definovať vzťah medzi rýchlosťou deformácie a tenzorom napätia v ne-newtonovskej kvapaline
 - zbezrozmerniť riadiace rovnice a určiť kontrolné bezrozmerné parametre a charakteristickú dĺžku
 - riešiť odvodené rovnice s využitím numerických metód pre okrajové úlohy nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc
 - fyzikálne interpretovať získané výsledky a porovnať ich s newtonovským prípadom

Kapitola 2

Plášťové vzostupné prúdy

Tektonika platní a plášťové vzostupné prúdy boli do geológie uvedené súčasne Wilsonom a Morganom v 60-tych a začiatkom 70-tych rokov. Tektonika platní si rýchlo získala záujem vedcov, zatiaľ čo vzostupné prúdy skôr zostávali v úzadí. Počas 20-tych rokov geovedci sústredili svoje úsilie hlavne na pochopenie tektoniky platní a jej zdokumentovanie. Pozornosť na vzostupné prúdy obrátili až koncom 80-tych rokov a počas 90-tych rokov narástol počet publikácií o plášťových prúdoch exponenciálne. Prvé modely boli veľmi jednoduché, plášť opisovali newtonovskou kvapalinou, vzostupné prúdy pochádzali z hraničných vrstiev s veľkými teplotnými gradientmi. S postupom času bolo jasné, že tieto zjednodušené modely nestačia realite a tak začali modelovať plášť s použitím ne-newtonovských kvapalín, s gradientmi ako vo viskozite tak aj v hustote, a nakoniec, od dvojrozmerných modelov prešli k trojrozmerným.

Enormné množstvo dát z geofyziky, geochemie a geológie zhrnul na základe prác publikovaných predovšetkým v 90-tych rokoch Condie (2001). Niektoré poznatky, najmä základné charakteristiky, fyzikálne vlastnosti a stavba plášťových vzostupných prúdov, sú prezentované v tejto kapitole.

2.1 Horúce škvrny

Väčšina vulkanickej aktivity je spojená s aktívnymi tektonickými procesmi na rozhraní platní. Izolovaná vulkanická činnosť, ktorá sa nevzťahuje na tieto miesta, formuje lineárny reťazec vulkánov, ktorých vek narastá systematicky v smere pohybu litosférickej dosky. Príkladom takéhoto druhu vulkanizmu sú Havajské ostrovy v Tichom oceáne, pláň Yellowstone-Snake River na západe Spojených štátov amerických a Ninetyeast Ridge v Indickom oceáne. Všetky tieto prírodné štruktúry sa formujú nad tzv. *horúcimi škvrnami*¹, ktoré, ako sa zdá, sú povrchovým prejavom vzostupných plášťových

¹*Hotspots* v angl. lit.

prúdov². Vzostupné prúdy spôsobujú čiastočné natavenie spodnej litosféry, čím sa tvoria rezervoáre magmy, ktorá je vulkanickými erupciami vyvrhnutá na zemský povrch. Pohybom zemskej kôry ponad relatívne stacionárne zásobárne magmy vo vrchných častiach plášťa vznikajú viditeľné stopy horúcich škvŕn³. Väčšina horúcich škvŕn na Zemi sa nachádza nad *vzostupnými tokmi* v plášti⁴, ktoré sa formujú ako reakcia na studené toky v oblastiach subdukcie. Vzostupné toky spôsobujú zdvih zemského povrchu až do výšky niekoľkých sto metrov a keďže zvyšujú teplotu horného plášťa, sú príčinou jeho rozsiahleho natavenia, čím podnecujú vznik vulkanickej činnosti. Vzostupné prúdy a plášťové toky začínajú svoj život v tepelnej hraničnej vrstve D” priamo nad rozhraním jadro–plášť.

V súčasnosti je na Zemi identifikovaných 40 až 150 aktívnych horúcich škvŕn. Najlepšie zdokumentované horúce škvŕny sa nachádzajú na kontinentoch i v oceánoch, ale ich rozloženie je skôr nepravidelné. Niektoré sa vyskytujú v blízkosti oceánskych chrbtov ako napríklad Island, Sv. Helena a Tristan v Atlantickom bazéne a niektoré v strede tektonických platní ako napríklad Hawaii. Počet horúcich škvŕn približne koreluje s výškami geoidu; veľké množstvo horúcich škvŕn v blízkosti Afriky a Tichého oceána totiž spadá do dvoch oblastí s najväčšími anomáliami v geoide, ktoré sú spôsobené práve procesmi prebiehajúcimi hlboko v zemskom plášti.

2.2 Ostrovná reťaz Hawaiian-Emperor

Vulkanická reťaz Hawaiian-Emperor je lineárna štruktúra vulkanických ostrovov, podmorských hrebeňov a vulkanických pohorí rozprestierajúcich sa takmer 6000 km naprieč severným Tichým oceánom, kde je nakoniec ponorená do Kurilskej priekopy. Ostrovná reťaz zahŕňa okolo 107 vulkánov s kumulatívnym objemom viac ako 10^6 km³. Vek vulkánov postupne narastá od dnešnej hodnoty (Hawajský ostrov) až do 80 miliónov rokov (morské pohoria Detroit); ostrý zlom v smere ostrovného reťazca má približne 43 miliónov rokov, kedy Pacifická platňa zmenila smer svojho pohybu. V súčasnosti sú na Hawaji aktívne sopky Mauna Loa a Kilauea. Hawajská horúca škvŕna sa nachádza približne 30–50 km od severného pobrežia Hawajských ostrovov pod aktívnym morským masívom Loihi. Hawaiian-Emperor sa postupne vytvoril pohybom Pacifickej platne najskôr na sever a potom na západ vzhľadom na Hawajskú horúcu škvŕnu počas posledných 100 miliónov rokov. Na oceánskom dne sa tak vytvorila stopa z vyhasnutých vulkánov, ktoré boli náhle odrezané od zdroja magmy, zatiaľ čo za nimi vznikali nové sopky.

Objem vyvrhutej magmy na jednotku dĺžky (alebo času) pozdĺž vulkanickej stopy

² *Mantle plumes* v angl. lit.

³ *Hotspot tracks* v angl. lit.

⁴ *Mantle upwelling* v angl. lit.

značne narastá smerom od ostrovnej reťaze Emperor (300 km) až po koniec Hawajských ostrovov. Hawajský vzostupný prúd v súčasnosti produkuje najväčšie množstvo lávy za celú jeho 80 miliónov rokov dlhú históriu. Jediný časový úsek, ktorý nezaznamenal nárast erupcií, je pred 43 miliónmi rokmi, kedy nastala zmena smeru v pohybe Pacifickej dosky. Od tej doby sa vulkanická aktivita Hawajskej horúcej škrvny neustále zvyšuje, čo naznačuje, že chvost Hawajského vzostupného prúdu je neustále zásobovaný novým materiálom z najhlbších častí zemského plášťa.

2.3 Yellowstone

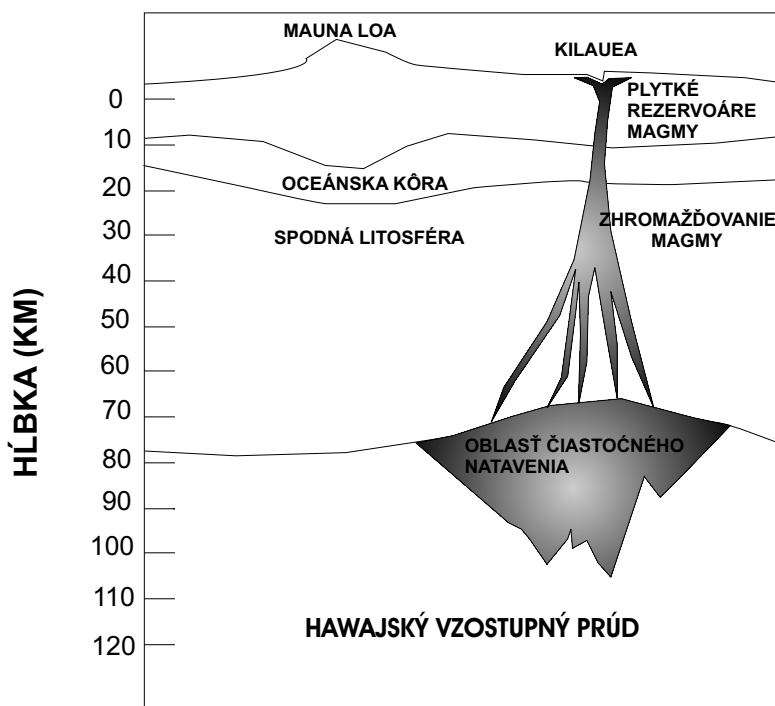
Stopy horúcich škvŕn sa nachádzajú aj na kontinentoch, hoci sú oveľa slabšie definované ako v oceánskych bazénoch a to vďaka menšej hrúbke litosféry. Príkladom je horúca škrvna Great Meteor v Atlantickom bazéne, ponad ktorou sa pred 80 až 120 miliónmi rokov posúvala Severná Amerika smerom na severozápad. Z nevelkého počtu identifikovaných kontinentálnych horúcich škvŕn je najznámejšia Yellowstonská stopa v Amerických Kordilerách. Jej prítomnosť prezrádza vysoký tepelný tok, zníženie rýchlosti seizmických vln a hustoty v plytkých hĺbkach, rozsiahle severozápadné topografické vydutie a vysoká elektrická vodivosť pod Yellowstonským národným parkom vo Wyomingu. Priamym dôkazom vzostupného prúdu sú anomálne nízke rýchlosti pozdĺžnych seizmických vln v hĺbkach okolo 200 km. Definitívnym dôkazom pohybu Severoamerickej platne ponad vzostupný prúd v tejto oblasti je vek vulkánov, ktorý postupne narastá severozápadne od Yellowstonského národného parku po Snake River Plain v štáte Idaho.

Prítomnosť vzostupných prúdov je doprevádzaná topografickou eleváciou⁵ litosféry, ktorá dosahuje priemer 1000 až 2000 km, výšku cez 1000 m a je charakteristická pre oceánsku aj kontinentálnu litosféru. Súčasné teleseismické výskumy Yellowstonskej horúcej škrvny odhalili, že pod jej topografickou eleváciou sa nachádza plášť dvojakeho druhu: čiastočne natavený plášť s nízkymi rýchlosťami priamo pod horúcou škrvnou a obohatený plášť (o nekompatibilné prvky) s vyššími rýchlosťami pod jej bočnými okrajmi. Získané rýchlosti sú konzistentné s modelom vzostupného prúdu, v ktorom vztlaková sila, spôsobená natavením jeho vrchných častí, poháňa konvekciu, ktorá odsunie zvyšok materiálu na okraj vzostupného prúdu.

2.4 Seizmicita a tektonika horúcich škvŕn

Horúce škrvny s aktívnymi sopkami sú seizmicky aktívne. Na Havaii je seizmická činnosť koncentrovaná v okolí aktívnych sopiek Mauna Loa a Kilauea a podmorských

⁵ *Swell* v angl. lit.



Obr. 2.1: Schematický prierez litosférou pod sopkou Kilauea na Havaii.

pohorí Loihi. Zemetrasenia v okolí Kilauea majú pôvod v hĺbkach 1–4 km v systémoch trhlín alebo pozdĺž vertikálnej magmy pod vulkánom. Väčšina plytkých zemetrasení pochádza z hĺbky 15 km, ktorá približne koinciduje s Moho diskontinuitou pod Havajskými ostrovmi. Tieto zemetrasenia sprevádzajúce erupcie sopiek sú zriedka magnitúda väčšieho ako 4 a sú zapríčinené zmenami objemu v rezervoároch magmy. Hlbšie zemetrasenia s hypocentrom v hĺbke 60 km (spodná časť litosféry) sú rovnomernejšie rozložené v čase a majú väčšie magnitúda (do 7). Obrázok 2.1 znázorňuje transport magmy pod sopkou Kilauea získaný na základe petrologických a seizmických dát. Magma vzniká čiastočným natavením litosféry vrchnou časťou vzostupného prúdu. Malé dávky magmy unikajú z oblastí natavenia a zbierajú sa v hĺbke okolo 20 až 30 km, kde čiastočná kryštalizácia odstráni z magmy olivín a ostatné fázy. Veľká koncentrácia zemetrasení v týchto hĺbkach odráža deformácie spojenými s presunom magmy do plytších rezervoárov (hĺbka 5–10 km), kde dochádza k ďalšej čiastočnej kryštalizácii a k odstráneniu veľkého množstva pyroxénov a plagioklasov.

Yellowstonská horúca škvŕna je charakterizovaná intenzívnym rojom plytkých zemetrasení, ktoré sú spôsobené napätiami spojené s pohybom magmy v plytkých hĺbkach (< 10 km). Zemská kôra je tu ohriata na teplotu 350–450 °C. Vrchná vrstva kôry s typickou hrúbkou 10–15 km ($V_p = 5.9\text{--}6.1$ km/s) je pod Yellowstonskou oblasťou veľmi tenká alebo úplne absentuje, pretože je nahradená magmatickými horninami z Yello-

wstonskej horúcej škvry. Yellowstone Plateau sa počas obdobia medzi rokmi 1923 a 1984 tektonicky zdvihlo až o 100 cm, čo reflektuje transport magmy do vrchnej kôry. Rýchlosti seizmických vln sú vo vrchnom plášti pod vulkanickou pláňou Yellowstone a Snake River smerom na severozápad anomálne nízke až do hĺbky 200 km.

2.5 Stavba vzostupných prúdov

Vnútna štruktúra a stavba vzostupných plášťových prúdov sa mení počas ich existencie, pričom rozoznávame štyri vývinové štádiá. Prvé je stúpajúce štádium, ktoré pozostáva z *hlavy* a z *chvosta* vzostupného prúdu. V druhom štádiu je hlava sploštená a čiastočne sa natavuje, čím obohacuje litosféru o magmatické horniny. Niektoré zvyšky vzostupného prúdu môžu byť vmiešané do horného plášťa. Počas tretieho štádia je chvost zdeformovaný plášťovými tokmi. Ak je odklonenie stúpajúceho prúdu veľmi veľké ($> 60^\circ$ od vertikály), môže sa stať nestabilným a rozdeliť sa do niekoľkých oddelených fragmentov. Horúce škvry, ktoré produkujú väčšinu vulkanických reťazcov v Tichooceánskom bazéne sú vzhľadom na seba relatívne fixované. Aby mohli zostať fixované, ich chvosty nemôžu byť veľmi ovplyvnené plášťovou konvekciou. Steinberger a O'Connell (1998) ukázali, že deformácii a roztrhnutiu chvosta sa dá vyhnúť, ak viskozita astenosféry je značne menšia ako viskozita spodného plášťa, odkiaľ vzostupný prúd vyrastá. Hoci sú vzostupné prúdy unášané predovšetkým v hornom plášti v dôsledku advekcie astenosféry, nízka viskozita astenosféry zabezpečuje vysokú vertikálnu rýchlosť chvosta, čím zabráni jeho veľkému vychýleniu.

Ako sme už spomenuli, sopky z horúcich škvŕn sa formujú na topografických eleváciách. Tieto oblasti sú charakteristické zvýšeným tokom tepla a tenkou litosférou, ktorá je vytlačená nahor vztlakovými silami v plášti. Jediným modelom, ktorý vie adekvátne vysvetliť súvis medzi tokom tepla a hrúbkou litosféry je model vzostupných prúdov. Keďže má vzostupný prúd väčšiu teplotu ako okolitý plášť, produkuje magmu, ktorá stúpa k zemskému povrchu a vytvára vulkanické reťazce na pohybujúcej sa litosfére. Model plášťových vzostupných prúdov podporujú aj chemické a izotopické dáta.

Litosférické platne sa ponárajú do zemského plášťa v oblastiach subdukčných zón. Keďže sú subdukujúce platne relatívne studené, znižujú teplotu okolitého prostredia, a tak zanechávajú relatívne teplý plášť v oblasti medzi dvoma subdukujúcimi zónami. Práve v týchto oblastiach plášťa, známych ako plášťové vzostupné toky, pôsobia relatívne veľké vztlakové sily, ktoré riadia spätný tok. Vzostupné toky spôsobujú eleváciu zemského povrchu až do výšky niekoľko sto metrov a keďže zvyšujú teplotu najvrchnejšieho plášťa, dochádza k jeho čiastočnému nataveniu a tým k vzniku vulkanizmu. V súčasnosti sa v plášti nachádzajú dva rozsiahle vzostupné toky; jeden pod Africkou platňou a jeden pod Pacifickou platňou.

Čo sa týka rýchlosti seizmických vln a anomálií v rozložení hustoty, najzaujímavejšie

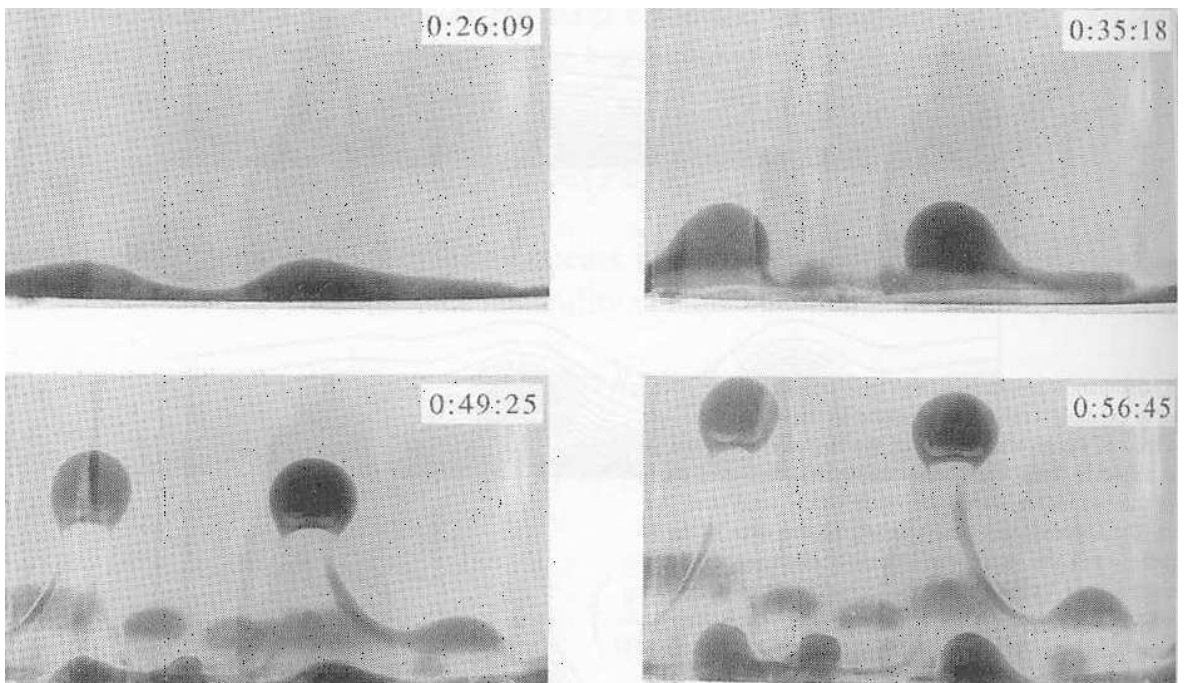
sú dve pozorovania: (1) oblasti s anomálne vysokými rýchlosťami šírenia seizmických vln sa zhodujú s oblasťami ponárajúcich sa dosiek, a (2) dve oblasti s anomálne nízkymi rýchlosťami sa nachádzajú pod Afrikou a Pacifickým bazénom. Rýchlosť šírenia seizmických vln je nízka v relatívne teplom plášti, teda v oblastiach vzostupných tokov, ktoré začínajú v D'' vrstve a dosahujú hĺbky stredného plášťa. V plytkých hĺbkach sa prejavuje iba Pacifická anomália, ktorá pokračuje až po spodnú litosféru.

2.6 Modely plášťových vzostupných prúdov

Predtým ako prejdeme k modelom opisujúcim správanie plášťových vzostupných prúdov je potrebné popísať ich kvapalné vlastnosti. Zatiaľ čo kvapalina je substancia schopná podrobiť sa akejkolvek deformácii, pevná látka znesie len určitú veľkosť deformácie predtým ako sa zlomí. Väčšina pevných látok sa deformuje pri pôsobení sily a po jej odstránení sa látka vracia späť do pôvodného tvaru, na rozdiel od kvapaliny, ktorej tvar sa po zaniknutí vonkajšej sily nemení. Newtonovská kvapalina je látka, ktorej rýchlosť deformácie je priamo úmerná pôsobiacej sile. V zemskom plášti je tečenie spôsobené napätiami, ktoré vedú k deformáciám plášťových hornín. Vzťah medzi napätím a rýchlosťou deformácie je vyjadrený pomocou viskozity kvapaliny. Vo viskózných kvapalinách, ktoré sa podrobujú veľmi pomalým tečeniam, sú riadiace sily v rovnováhe s viskóznymi silami. Z tohoto dôvodu môžeme pracovať s plášťom ako s nestlačiteľnou kvapalinou. Či sa celý alebo len časť zemského plášťa správa ako newtonovská kvapalina je stále predmetom diskusie.

Ak horúcu kvapalinu injektujeme do chladnejšej kvapaliny v laboratórnej nádrži, teplejšia kvapalina začne stúpať ako vzostupný prúd. Experimenty Griffithsa a Campbella (1990, 1991) ukázali, že ak viskozita a hustota vzostupných prúdov je nižšia ako okolité médium, vzostupný prúd sa rozdelí do dvoch častí: takmer sférická hlava a relatívne tenký chvost spojený so zdrojom vzostupného prúdu. Obrázok 2.2 znázorňuje vznik vzostupných prúdov spôsobený Rayleigh–Taylorovou nestabilitou (z experimentu Bercovica a Kellyho (1997)). Tento typ vzostupných prúdov sa formuje aj v zemskom plášti. V experimentoch Griffithsa a Campbella je priemer chvosta určený viskozitou injektovanej kvapaliny, zatiaľ čo od viskozity okolitého prostredia závisí rýchlosť stúpania a veľkosť hlavy. Keď hlava vzostupného prúdu dosiahne vrchnú časť laboratórnej nádrže, je takmer symetrická a horizontálne rozťahnutá pod povrchom (analógia so zemskou litosférou). V momente, keď sa zastaví vertikálny pohyb hlavy, je i naďalej chvostom dodávaný horúci materiál zo zdroja. Ak do experimentu dodáme aj pohyb povrchovej dosky, hlava sa čiastočne deformuje a je unášaná pohybom dosky, zatiaľ čo chvost vzostupného prúdu je len odklonený od vertikály. Veľkosť chvosta kriticky závisí od viskozity vzostupného prúdu – čím nižšia viskozita, tým menší jeho polomer.

Vzostupné prúdy s veľkými vztlakovými tokmi ($\geq 10^5 \text{ N s}^{-1}$) nebývajú v dôsledku

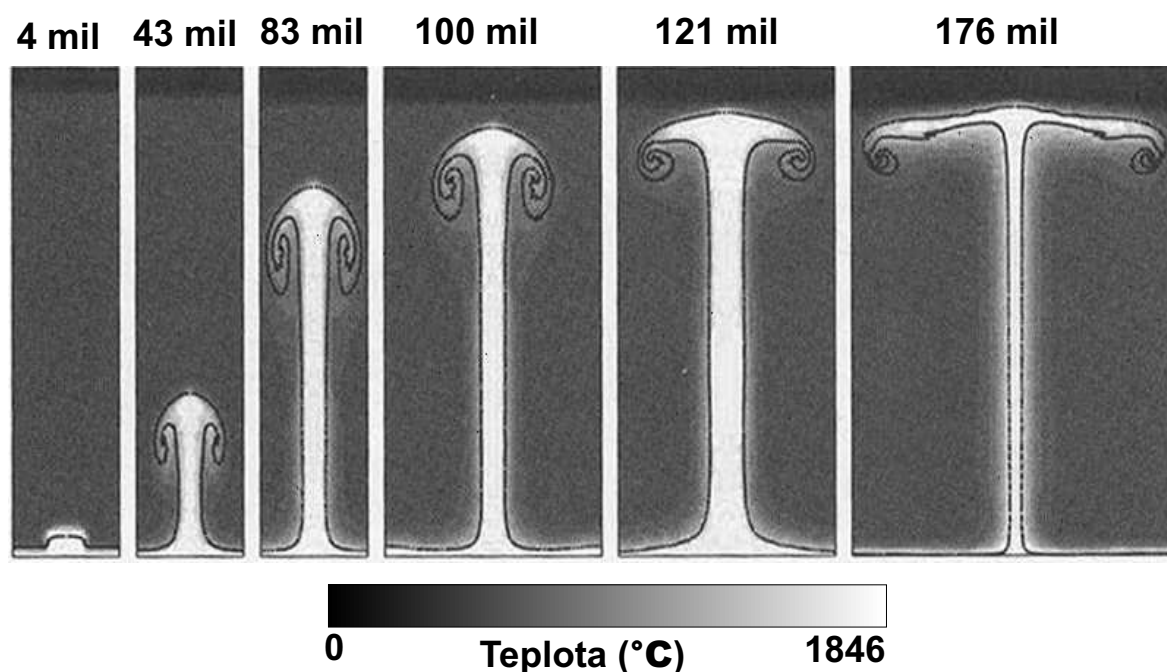


Obr. 2.2: Fotografie z laboratórneho experimentu Bercovica a Kellyho (1997) znázorňujúce vznik vzostupného prúdu spôsobený nestabilitou tenkej, nízko-hustotnej, nízko-viskózne kvapalnej vrstvy glukózy pod hlbokou, vysoko-hustotnou a vysoko-viskóznou kvapalnou vrstvou. Časová škála je znázornená (v hod.).

plášťovej konvekcie značne odchýlené od vertikály a zostávajú spojené s ich zdrojmi v hlbokom plášti. Slabšie prúdy so vztlakovým tokom menším ako 10^4 N s^{-1} nemusia dosiahnuť povrch a ich hlavy sa môžu odpojiť a vytvoriť tak malé diapíry. V súčasnom plášti má väčšina vzostupných prúdov po dosiahnutí litosféry priemer až 1000 km a viac, po rozťahnutí o litosféru až 1500 km, čo je približne veľkosť malých oblastí vyvretého čadiča na zemskom povrchu. Najväčšie vzostupné prúdy presahujú priemer 1500 km a dosahujú až 3000 km, čo je veľkosť rozsiahlych oblastí vyvretých hornín⁶ akými sú Karro–Ferrar Province v južnej Afrike a Antarktída.

Numerické modely plášťových vzostupných prúdov Daviesa (1999) a ostatných s teplotne-závislou viskozitou potvrdzujú a rozširujú laboratórne experimenty. Na obrázku 2.3 je model zachytávajúci vývoj vzostupného prúdu počas 175 miliónov rokov. Rýchlosť stúpania vzostupného prúdu je najväčšia počas prvých 100 miliónov rokov. Potom, čo horúci materiál dosiahne hlavu vzostupného prúdu, začne spomaľovať a hlava po dotyku s litosférou zmenší svoju hrúbku a značne sa zväčší jej polomer (176 mil.). Teploto z prúdu čiastočne uniká a čiastočne ohrieva materiál strhnutý hlavou. Teplota

⁶Tzv. *Large Igneous Provinces (LIP)*.

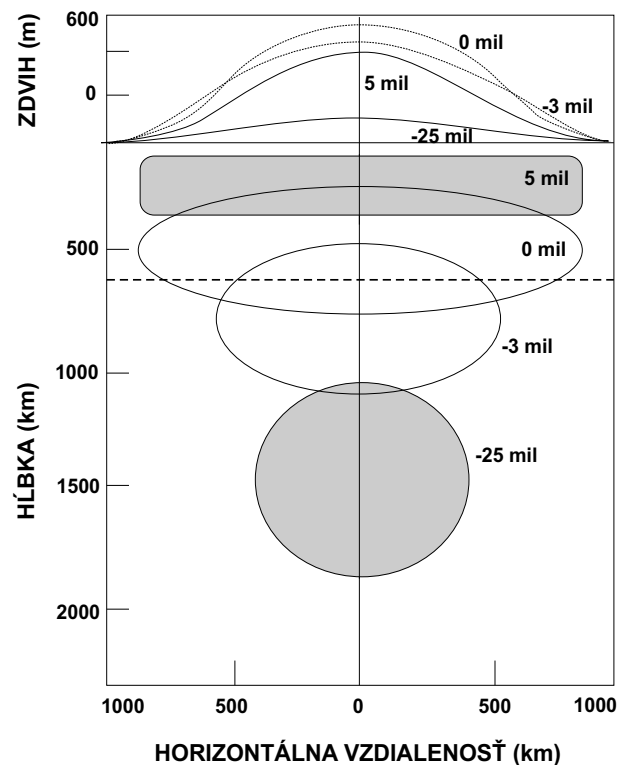


Obr. 2.3: Numerický model vzniku vzostupného prúdu z tepelnej hraničnej vrstvy (D''). Viskozita je funkciou teploty a okolitý plášť má viskozitu 10^{22} Pa s, [Davies (1999)].

hlavy tak je nižšia ako teplota chvosta a vyššia ako teplota okolitého plášťa. Podobné vlastnosti boli pozorované aj v experimentálnych modeloch Griffithsa a Campbella (1990).

Ďalšie experimenty Griffithsa a Campbella (1991) poukazujú na pôvod vydutia litosféry a následný kolaps spôsobený ochladením vzostupného prúdu. Zaujímavé je, že vydutie povrchu začína už v čase, keď sa vzostupný prúd nachádza ešte len v spodnom plášti a pokračuje ďalších 20 miliónov rokov. Maximálna rýchlosť vydutia je však dosiahnutá za posledné 4 milióny rokov, kedy hlava vzostupného prúdu vstupuje do nízko-viskóznej oblasti a zóny znížených rýchlostí seizmických vln v spodnej litosfére (obrázok 2.4). Maximálna topografická elevácia 600 m je vypočítaná z priemernej teplotnej anomálie hlavy iba 100°C , nachádzajúcej sa v hĺbke 200 km (0 rokov) s priemerom 1300 km. Nesmieme však zabúdať na fakt, že časy vypočítané pre tento model kriticky závisia od viskozity vzostupného plášťa.

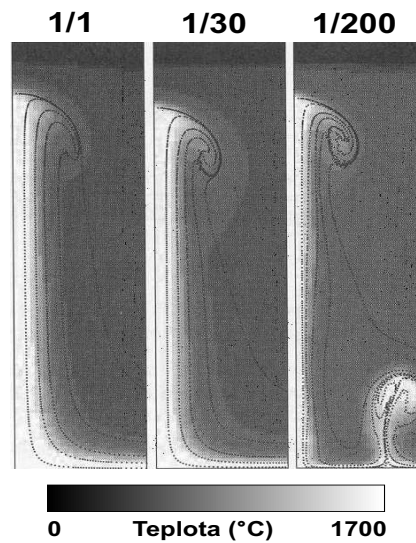
Vzostupné prúdy v newtonovskom plášti prekonajú vzdialenosť D'' vrstva–litosféra približne za 50 miliónov rokov. Výpočty ne-newtonovskej kvapaliny odhadujú ešte väčšiu rýchlosť vzostupných prúdov – rádovo metre za rok. Ne-newtonovské vzostupné prúdy tak dosiahnu litosféru za niekoľko miliónov rokov, čo je približne o rád rýchlejšie ako newtonovské vzostupné prúdy. Navyše ne-newtonovské vzostupné prúdy zmenšujú hrúbku litosféry viskóznym a adiabatickým ohrievaním oveľa efektívnejšie ako



Obr. 2.4: Vzťah medzi povrchovou eleváciou a veľkosťou vzostupného prúdu založený na laboratórnych experimentoch Griffithsa a Campbella (1991).

vzostupné prúdy s newtonovskými vlastnosťami. Na rozdiel od hláv newtonovských prúdov, ktoré sú jasné a hladké, ne-newtonovské hlavy majú komplexnú vnútornú štruktúru; ne-newtonovské chvosty sú v porovnaní s newtonovskými relatívne úzke, ohraničené veľkými teplotnými a rýchlostnými gradientmi.

Strhávanie okolitého materiálu vzostupným prúdom počas jeho stúpania bolo potvrdené numerickým i experimentálnym modelovaním. Stúpajúci horúci materiál prenáša časť svojho tepla do okolitého plášťa, čím znižuje jeho viskozitu, a tak sa čiastočne stáva súčasťou stúpajúceho prúdu. Vzostupný prúd tak nenesie len zdrojový materiál z D'' vrstvy, ale i geochemické prvky z vrchných častí plášťa. V modeli Kelloga a Kinga (1997) je vzostupný prúd zložený z materiálu, ktorého viskozita je silne závislá na teplote. Hlava vzostupného prúdu nadobúda tvar hříbu, ktorá strháva okolitý materiál, zatiaľ čo s chvostom sa mieša len malá časť materiálu. To znamená, že hlava nesie materiál kontaminovaný plášťom a chvost je zložený z materiálu z D'' vrstvy. Davies (1999) ukázal, že stupeň kontaminácie okolitým plášťom závisí od pomeru viskozity vzostupného prúdu a viskozity okolitého plášťa (obrázok 2.5). Samozrejme, čím je viskozita vzostupného prúdu bližšia k viskozite plášťa, tým je kontaminácia väčšia.



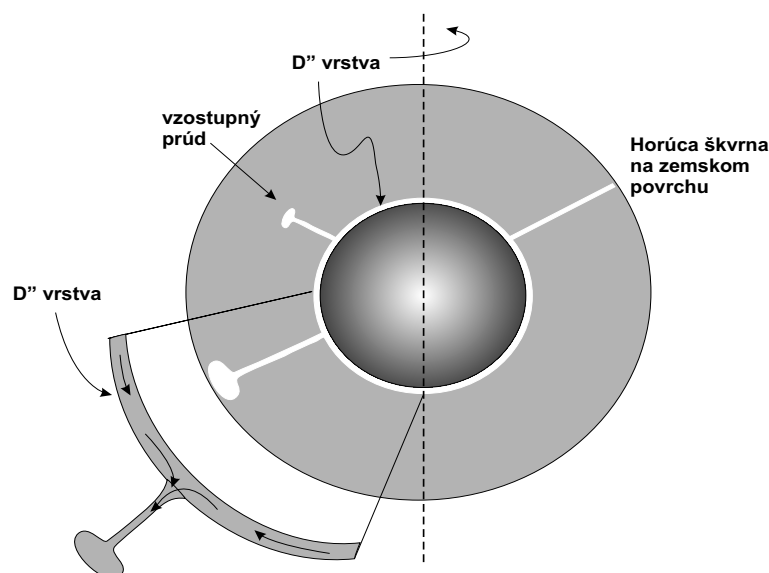
Obr. 2.5: Numerické modely vzostupných prúdov s tromi rozdielnymi pomermi viskozity prúdu ku viskozite okolitého plášťa (na vrchu).

2.7 Fázové premeny a vzostupné prúdy

V zemskom plášti sa nachádzajú dve hlavné seizmické diskontinuity spôsobené fázovými premenami: prechod s kladným Clapeyronovským sklonom ($\partial p/\partial T > 0$) v hĺbke 410 km, kde sa najčastejšie vyskytujúca hornoplášťová hornina, spinel, transformuje do Mg-spinelu, a prechod so záporným Clapeyronovským sklonom ($\partial p/\partial T < 0$) v hĺbke 660 km, kde sa spinel mení na perovskit a magnesiowustit. Prechody s kladným Clapeyronovským sklonom podporujú plášťovú konvekciu, zatiaľ čo diskontinuita v 660 km konvekciu bráni; v závislosti od teploty plášťa a veľkosti sklonu sa táto diskontinuita môže stať neprekonateľnou bariérou. Od Clapeyronovského sklonu samozrejme závisí aj dopad fázových premen na stúpanie vzostupných prúdov. Napríklad, pri priemernom sklone $-2 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$ prenikne vzostupný prúd diskontinuitou v 660 km pomerne ľahko. Rýchlosť stúpania sa spomalí v blízkosti hranice a chvost vzostupného prúdu sa sploští, ale po prejdení cez bariéru sa znovu narovná a vstúpi do nízko-viskózneho horného plášťa. Pri strednom sklone $-2.5 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$ prenikne diskontinuitou len hlava vzostupného prúdu a zvyšná časť chvosta sa nahromadí v blízkosti hranice. Pri Clapeyronovskom sklone $-3 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$ vzostupný prúd nie je schopný prekonať diskontinuitu, ale laterálne sa rozťahne v jej okolí. Keďže v súčasnosti vzostupné prúdy dosahujú základňu litosféry, zdá sa, že Clapeyronov sklon v zóne fázovej premeny spinelu je blízko $-2 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$. Numerické modely Bruneta a Yuena (2000) naznačujú, že niektoré vzostupné prúdy môžu byť „uväznené“ medzi 410- a 660-km fázovými hranicami. V ich modeli rozoznávame tri typy vzostupných prúdov. Prvý z nich vzniká v D' vrstve a je stacionárny viac ako 200 miliónov rokov. Tieto vzostupné prúdy produkujú vulka-

nizmus s progresívnym vekom, ktorý nájdeme na ostrovných reťazcoch ako napríklad Hawaiian-Emperor. Druhý typ vzostupných prúdov takisto vzniká v D'' vrstve, ale sú flexibilnejšie a môžu byť naklonené konvektujúcim plášťom; v niektorých prípadoch sa hlava odpojí od zvyšku vzostupného prúdu. Tento typ vzostupných prúdov vytvára chaotický vulkanizmus ostrovných reťazcov a podmorských pohorí ako napríklad ostrovy Society. Tretím typom sú rozsiahle vzostupné prúdy⁷, ktoré na rozdiel od menších prúdov vytvárajú tenkú tepelnú hraničnú vrstvu v hĺbke 660 km, ktorá potom slúži ako miesto vzniku ďalších menších vzostupných prúdov. Príkladom tohto typu vulkanizmu je už spomínaný Karoo-Ferrar.

Už dávnejšie bolo pozorované, že rozloženie horúcich škvrn po zemskom povrchu nie je úplne náhodné, ale že sa koncentrujú v nízkych zemepisných šírkach, hlavne v oblastiach Pacifického a Afrického vzostupného toku. Podobne na Venuši sa väčšina vulkánov nachádza medzi 40° severnej a južnej šírky, ich najväčšie zoskupenie nájdeme medzi 180° a 300°. Na Zemi sú horúce škvrny približne symetricky rozložené s maximom výskytu medzi 20° a 30° okolo rovníka a s výrazným píkcom na 80° južnej zemepisnej šírky. Oliver a Ghent (2000) navrhli riešenie tohto fenoménu, a to, že tok horúceho, nízko-viskózneho materiálu v D'' vrstve je ovplyvnený rotačnými silami Zeme. Odstredivá sila a diferenciálna rotácia dokáže presunúť materiál D'' vrstvy z vyšších šírok do oblastí približne 30°, kde sa naakumuluje (obrázok 2.6). Materiál sa tu zdržiava



Obr. 2.6: Model rozloženia plášťových vzostupných prúdov. Nízko-viskóznym materiál migruje v rámci D'' vrstvy z vyšších zemepisných šírok do nízkych vďaka tangenciálnej zložke odstredivej sily.

⁷ *Superplumes* v angl. lit.

až pokým nenadobudne kritické hodnoty potrebné pre vznik vzostupného prúdu alebo sa odčerpá už existujúcim vzostupným prúdom. Je zaujímavé poznamenať, že týmto modelom by sa dalo vysvetliť aj symetrické rozloženie horúcich škvŕn na Venuši, čo by znamenalo, že Venuša má alebo skôr mala v minulosti aktívnu D'' vrstvu.

Kapitola 3

Model vzostupného prúdu newtonovskej kvapaliny

3.1 Geofyzikálna motivácia

Fakt, že Zemské pevné vnútro sa správa ako kvapalina z hľadiska geologickej časovej škály, bol všeobecne akceptovaný až koncom 19. storočia. Skutočnosť, že povrch vodnej hladiny (geoid) a povrch Zeme približne koincidujú, implikuje, že zemské vnútro je blízko k hydrostatickej rovnováhe, teda v podmienke, ktorá môže byť dosiahnutá len tečením. Zemská kôra sa tak dá prirovnať k škrupine plávajúcej na vodnej hladine. Kvapalné správanie plášťa v dlhých časových škálach je v kontraste s elastickým správaním v krátkych časových škálach, vďaka ktorému sa v plášti môžu elasticky šíriť seizmické vlny s relatívne malým útlmom. Takáto kombinácia reológií sa na prvý pohľad môže zdať neprijateľná, ale v prírode nachádzame viacero podobných javov ako napríklad ľad na ľadovcoch. Ľadom sa šíria seizmické vlny v časových škálach niekoľkých sekúnd, ale z hľadiska ročných časových škál tečie.

Plášťová konvekcia ovplyvňuje vývin Zeme ako celok – jej topografiu, gravitačné pole, geodynamo, klimatický systém, evolúciu biologickej zložky, tvorbu minerálnych a uhlíkových zdrojov. Je hlavným mechanizmom prenosu tepla z hĺbín planéty na jej povrch a príčinou tektoniky platní, vzniku kontinentov, vulkánov, zemetrasení a pohorí. Vzťah plášťovej konvekcie k týmto fenoménom je detailne spracovaný v knihe Schubert, Turcotte, Olson (2001), z ktorej v kapitolách 3.2, 3.3 a 4.1 vyberáme stručné poznámky o reológii použitých kvapalín a viskozite a odvodíme riadiace rovnice popisujúce procesy v zemskom plášti.

3.2 Viskozita pláštá

Na začiatok uvažujme jednoduchý model pre materiály, ktoré sa správajú ako tuhé telesá v krátkych časových škálach a ako kvapalina v dlhých časových škálach. Pre elastické materiály platí lineárna závislosť medzi elastickou deformáciou ε_e a napätím τ

$$\varepsilon_e = \frac{\tau}{E}, \quad (3.1)$$

kde E je Youngov modul. Kvapaliny spĺňajú lineárny newtonovský viskózný vzťah medzi rýchlosťou deformácie $d\varepsilon_f/dt$ a napätím τ

$$\frac{d\varepsilon_f}{dt} = \frac{\tau}{2\mu}, \quad (3.2)$$

kde μ je viskozita kvapaliny. Maxwellov model pre viskoelastické telesá určuje ich rýchlosť deformácie $d\varepsilon/dt$ ako superpozíciu rýchlosti deformácie elastického telesa $d\varepsilon_e/dt$ a rýchlosti deformácie kvapaliny $d\varepsilon_f/dt$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_f}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{2\mu} \tau. \quad (3.3)$$

Rovnica (3.3) je základným vzťahom v reológii, dávajúcim do vzťahu rýchlosť deformácie, napätie a rýchlosť zmeny napätia pre viskoelastické Maxwellovo teleso. Uvažujme viskoelastické teleso, ktoré je náhle deformované v čase $t = 0$ a deformácia ε_0 je konštantná v čase $t > 0$. V dôsledku rýchleho pôsobenia deformácie dominuje časová derivácia a materiál sa správa elasticky. Preto počiatočné napätie τ_0 v čase $t = 0+$ je

$$\tau_0 = E\varepsilon_0. \quad (3.4)$$

Následne sa deformácia nemení, $d\varepsilon/dt = 0$, a rovnica (3.3) sa redukuje do tvaru

$$0 = \frac{\tau}{2\mu} + \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt}. \quad (3.5)$$

Rovnicu integrujeme s počiatočnou podmienkou $\tau = \tau_0$ v čase $t = 0$ a dostávame

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{Et}{2\mu}\right), \quad (3.6)$$

teda napätie relaxuje na hodnotu $1/e$ pôvodnej hodnoty za čas $2\mu/E$. Definujme viskoelastický relaxačný čas t_{ve}

$$t_{ve} \equiv \frac{\mu}{E}. \quad (3.7)$$

V časových škálach kratších ako t_{ve} sa materiály správajú elasticky a v dlhších časových škálach zase ako newtonovské viskózne kvapaliny. Pre zemský plášť je Youngov modul

$E = 70$ GPa a viskozita $\mu = 10^{21}$ Pa s, a teda z rovnice (3.7) je viskoelastický relaxačný čas pre plášť $t_{ve} = 450$ rokov. Tento model nám poskytuje vysvetlenie, prečo seizmické vlny (časové škály 1–100s) sa šíria elasticky a prečo plášťová konvekcia (časové škály 1–100 miliónov rokov) sa javí ako tečenie kvapaliny.

Aj keď v praxi bežne pracujeme s hodnotami viskozity, nie je v skutočnosti preukázané, že zemský plášť sa správa ako lineárne viskózne médium. Vo všeobecnosti opisujeme tečenie plášťa pomocou jeho „viskozity“, ktorá je však iba aproximáciou komplexnejšej reológie kvapalín. Viskozita pevného plášťa bola prvý krát kvantitatívne určená Haskellom v roku 1937 (pozri napr. Davies (1999), Turcotte a Schubert (2002)). Elevácia pobrežných terás v Škandinávii ukazuje, že zemský povrch sa neustále zdvíha spod záťaže ľadu z doby ľadovej. Uvažujúc o plášti ako o vysokoviskózne kvapaline, Haskell vysvetlil súčasný zdvih Škandinávie za predpokladu, že plášť má viskozitu približne 10^{20} Pa s.

3.3 Riadiace rovnice

Jednou zo základných vlastností kvapalín je ich schopnosť deformácie s konštantnou rýchlosťou deformácie pri aplikovaní konštantných napätí. V prípade takmer nestlačiteľných kvapalín ako je voda, deformácia spôsobuje relatívne malé zmeny hustoty, na rozdiel od plynu, kde zmena hustoty zohráva dôležitú úlohu. Kvapalina je kontinuum, ak dĺžkové škály zmien vlastností kvapaliny, ako je napr. rýchlosť, sú veľké v porovnaní s atomárnymi a molekulovými škálami. Riešenie problémov tečenia kvapalín zahŕňa riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc v mechanike kontinua.

3.3.1 Rovnica spojitosti

Zákon zachovania hmoty musí byť splnený pre všetky infinitenzimálne objemové elementy kvapaliny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (3.8)$$

kde x_i je polohový vektor, ρ je hustota a u_i vektor rýchlosti kvapaliny. Prvý člen rovnice (3.8) reprezentuje zmenu hustoty v elementárnom objeme, druhý člen plošný tok cez jednotku objemu. Rovnicu (3.8) môžeme prepísať pomocou totálnej derivácie

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.9)$$

kde operátor D/Dt vyjadruje časovú deriváciu sledujúc pohyb kvapalného elementu. Zákon zachovania hmoty v tvare (3.9) opisuje zmenu objemu sledujúc istý kvapalný

element (Lagrangovský pohyb). V prípade nestlačiteľných kvapalín, kde $D\rho/Dt \equiv 0$, sa rovnica (3.9) redukuje na tvar

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.10)$$

Rýchlosť nestlačiteľnej kvapaliny je solenoidálna (má nulovú divergenciu).

3.3.2 Navier–Stokesova rovnica

Rovnováha síl pôsobiacich na kvapalnú element je popísaná rovnicou zachovania hybnosti. Podľa druhého Newtonovho zákona akákoľvek nerovnováha síl spôsobí zrýchlenie kvapalného elementu. Riadiaca rovnica je

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (3.11)$$

Na ľavej strane rovnice (3.11) je násobená hmotnosť elementu kvapaliny na jednotku objemu s jeho zrýchlením Du_i/Dt . Prvé dva členy na pravej strane rovnice zahŕňajú plošné sily a tretí člen objemovú silu pôsobiacu na jednotku objemu kvapalného elementu. Plošné sily v kvapaline sú tie, ktoré pôsobia na hraničiace plochy elementov a ich veľkosť je úmerná ploche, cez ktorú pôsobia. Objemové sily pôsobia na celý objem kvapalného elementu a ich veľkosť je úmerná objemu elementu. Ako jedinú objemovú silu uvažujeme tiažovú silu; g_i je tiažové zrýchlenie. Ďalšie objemové sily sú napríklad elektrostatičká, elektromagnetická, odstredivá a Coriolisova sila. Hoci Coriolisova sila v dôsledku rotácie Zeme je dôležitá v meteorológii, v oceánografii a v zemskom kvapalnom jadre, jej pôsobenie je zanedbateľné v zemskom plášti; odstredivá sila je zahrnutá v tiažovej.

Plošná sila je rozdelená do dvoch častí: jedna súvisí s hydrodynamickým tlakom p a druhá s deviačným napätím opísaným tenzorom napätia τ_{ij} . Pri absencii tečenia, jedinou plošnou silou je tlak kolmý na plochu, na ktorú pôsobí; tlaková sila pôsobiaca na infinitenzimálnu plochu dA_i je $-pdA_i$. Ak kvapalina tečie, ďalšie sily pôsobia kolmo a rovnobežne k ploche kvapalných elementov. Tieto deviačné plošné sily vznikajú rýchlostnými gradientami v kvapaline a vlastnosťou kvapaliny známou ako viskozita. Zložky deviačných napätí sú sily na jednotku plochy; napätia pôsobiace paralelne k ploche, tzv. strižné napätia ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$), spolu s normálovými napätiami ($\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$) tvoria zložky symetrického tenzora ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$); plošná sila pôsobiaca na infinitenzimálnu plochu kvapalného elementu dA_j je $\tau_{ij}dA_j$.

Relatívne rýchlostné pole v infinitenzimálnom okolí bodu v kvapaline pozostáva z rotácie tuhého telesa s uhlovou rýchlosťou $\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}(\partial u_k/\partial x_j)$ ¹ (polovica rotácie

¹ e_{ijk} je antisymetrický tenzor; má hodnotu +1 ak i, j, k sú rôzne a v poradí 123123 \dots , -1 ak i, j, k sú rôzne a v poradí 132132 \dots , a 0 ak niektoré z i, j, k sú identické.

rýchlosti) a zo zmeny deformácie opísanej tenzorom rýchlosti deformácie $\dot{\epsilon}_{ij}$. Rotácia rýchlosti kvapaliny rovná dvojnásobku lokálnej uhlovej rýchlosti elementu je v dynamike tekutín známa ako vírovosť (vorticita) ζ_i . Tenzor rýchlosti deformácie $\dot{\epsilon}_{ij}$ je daný vzťahom

$$\dot{\epsilon}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.12)$$

Stopa tenzora $\dot{\epsilon}_{ii} = \partial u_i / \partial x_i$ vyjadruje rýchlosť zmeny objemu kvapalného elementu a nediagonálne zložky tenzora predstavujú rýchlosť zmeny strižných napätí.

Nenulové zmeny deformácie generujú deviačné napätia a pre väčšinu kvapalín je závislosť τ_{ij} na $\dot{\epsilon}_{ij}$ lineárna. Takéto kvapaliny sa nazývajú newtonovské a ak sú navyše izotropné, potom vzťah medzi τ_{ij} a $\dot{\epsilon}_{ij}$ je

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}, \quad (3.13)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerov delta symbol, μ je dynamická viskozita a λ druhá viskozita. Priemer normálových napätí na tri navzájom kolmé roviny v jednom bode kvapaliny je $\tau_{ii}/3$ a zo vzťahu (3.13) sa rovná

$$\frac{\tau_{ii}}{3} = \dot{\epsilon}_{ii} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \equiv k_B \dot{\epsilon}_{ii}, \quad (3.14)$$

kde k_B je objemová viskozita, ktorá predstavuje mieru disipácie v tlaku alebo ťahu. Pre väčšinu kvapalín je k_B veľmi malé a často sa položí rovné nule (Stokesov predpoklad). Ak $k_B = 0$, reologický zákon (3.13) prejde do tvaru

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3}\mu\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (3.15)$$

Ak posledný vzťah dosadíme do rovnice (3.11), uvažujeme nestlačiteľnú kvapalinu ($\partial u_k / \partial x_k = 0$) a ak je dynamická viskozita konštantná v priestore, Navier–Stokesova rovnica sa zjednoduší do tvaru

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i. \quad (3.16)$$

3.3.3 Rovnica vedenia tepla

Akceptácia plášťovej konvekcie na konci 60-tych rokov minulého storočia priniesla prirodzené vysvetlenie pre vysoké teplotné gradienty v blízkosti zemského povrchu; sú dôsledkom tepelných hraničných vrstiev spojených s plášťovou konvekciou. Mimo hraničnej vrstvy je prenos tepla primárne uskutočňovaný konvekciou a teplotné gradienty sú takmer adiabatické. V systéme plášť–kôra rozoznávame tri rozdielne režimy prenosu

tepla. Po prvé sú to oblasti, kde prevláda advekčný prenos tepla spôsobený vertikálnym pohybom hmoty nad ostatnými mechanizmami prenosu. Do tejto kategórie patrí väčšina spodného plášťa takisto ako časť vrchného plášťa pod litosférou – približne 90% celého plášťa. Prakticky sem patrí aj celé vonkajšie jadro. Po druhé, v plášti sa nachádzajú oblasti, kde okrem prenosu tepla advekciou vstupuje do hry aj prenos tepla vedením. Tieto oblasti nazývame tepelné hraničné vrstvy a tvoria ich oceánická litosféra, D” vstava v najspodnejšej časti plášťa a časť podkôrovej litosféry pod kontinentami. Nakoniec tu máme oblasti kde dominuje prenos tepla vedením, akou je napr. kontinentálna kôra. Tieto oblasti však tvoria menej ako 2% celého objemu Zeme.

Aplikáciou druhého termodynamického zákona na element kvapaliny dostávame rovnicu lokálneho zachovania energie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho H, \quad (3.17)$$

kde T je teplota, k je koeficient tepelnej vodivosti, H je nárast vnútornej energie na jednotku hmotnosti a S je entropia. Členy na pravej strane rovnice (3.17) postupne predstavujú nárast tepelnej energie spôsobenú viskóznou disipáciou, tepelnú vodivosť a vnútorný zdroj tepla. Rovnica tepelnej energie môže byť napísaná vo viacerých alternatívnych formách. Ak uvažujeme nestlačiteľnú kvapalinu, $D\rho/Dt = 0$, rovnicu (3.17) môžeme napísať v tvare

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \phi + \rho H. \quad (3.18)$$

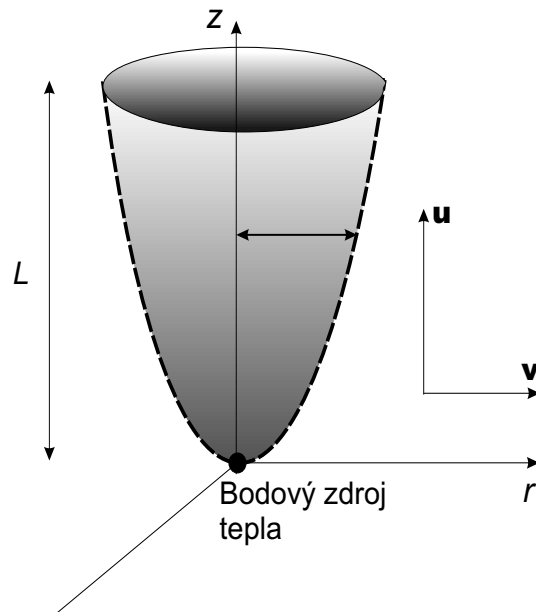
Ak neuvažujeme straty spôsobené viskóznou disipáciou ($\phi = 0$) a vnútorné zdroje ($H = 0$), rovnicu (3.18) upravíme na rovnicu vedenia tepla

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (3.19)$$

kde κ je koeficient tepelnej difuzivity ($\kappa = k/\rho c_v$).

3.4 Model vzostupného prúdu newtonovskej kvapaliny generovaný bodovým zdrojom tepla

Laminárna konvekcia generovaná bodovým zdrojom bola analyzovaná matematicky v práci Fujii (1962), ktorú v tejto kapitole reprodukuje. Riadiace rovnice uvedené v predchádzajúcej časti sú odvodené všeobecne s výnimkou niektorých úprav spojených s reológiou (napr. newtonovsky viskózne správanie), hoci pri ich aplikovaní na tepelnú konvekciu v zemskom plášti ich môžeme značne zjednodušiť. Vzhľadom na to, že vzostupný prúd vytvára dve hraničné vrstvy, v ktorých sa teplota a vertikálna rýchlosť



Obr. 3.1: Schematický obrázok osovymetrickeho plášťového vzostupného prúdu.

menia s radiálnou vzdialenosťou od osi prúdu oveľa rýchlejšie ako v smere pozdĺž prúdu, zjednodušenie spočíva v aplikovaní teórie hraničných vrstiev, tzv. *hranično-vrstvovej aproximácie* (pozri napr. Acheson (1990)).

V prípade 2D ustálenej konvekcie nad bodovým zdrojom tepla je geometria problému nasledovná: z , r sú vertikálna a horizontálna súradnica s počiatkom v bodovom zdroji tepla a u , v zložky rýchlosti v smere z , r (obrázok 3.1). Riadiace rovnice – rovnicu kontinuity, Navier–Stokesovu rovnicu a rovnicu vedenia tepla – vyjadríme v cylindrických súradniciach (r, θ, z) . Predpokladáme, že vzostupný kvapalný prúd je osovymetrický, takže premenné nezávisia od uhla θ . Ľavú stranu Navier–Stokesovej rovnice upravíme pre prípad ustáleného toku ($\partial \mathbf{u} / \partial t \equiv \mathbf{0}$) a aplikujeme Boussinesquovu aproximáciu (rovnici predelíme referenčnou hustotou $\bar{\rho}$, pričom $\rho = \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}) + \rho'$ je lokálna hustota a ρ' je odchýlka od referenčnej hustoty a vezmeme $\rho' / \bar{\rho} \rightarrow 0$). Referenčná hustota $\bar{\rho}$ súvisí s \bar{T} a \bar{p} cez stavovú rovnicu. Pre zemský plášť je však zmena hustoty s teplotou väčšia ako zmena hustoty s tlakom, preto zo stavovej rovnice dostávame $\rho / \bar{\rho} = \beta T$, kde β je koeficient objemovej tepelnej rozťažnosti.

Ďalej preškálujeme dĺžku v smere osi z na $L\bar{z}$ a v smere osi r na $\delta\bar{r}$, pričom $\delta \ll L$, členy rádu $\ll 1$ zanedbáme a rovnice (3.10), (3.16) a (3.19) zjednodušíme na tvar

$$\frac{\partial}{\partial z}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0, \quad (3.20)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial r} = g\beta T + \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad (3.21)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial z} + v\frac{\partial T}{\partial r} = \kappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \quad (3.22)$$

kde g označuje gravitačné zrýchlenie, β koeficient objemovej tepelnej rozťažnosti, ν kinematickú viskozitu ($\nu = \mu/\rho$) a κ tepelnú difuzivitu.

Okrajové podmienky sú nasledovné.

Pre $r = 0$:

$$v = 0, \quad \partial u/\partial r = 0 \quad (\text{nulové deviačné napätia}), \quad \partial T/\partial r = 0 \quad (\text{nulový tepelný tok}). \quad (3.23)$$

Pre $r \rightarrow \infty$:

$$u = 0, \quad T = 0. \quad (3.24)$$

Rovnice (3.20)–(3.22) predstavujú systém parciálnych diferenciálnych rovníc s okrajovými podmienkami (3.23) a (3.24) pre neznáme u , v a T .

3.5 Prúdová funkcia. Podobnostná transformácia

Prúdová funkcia v našom probléme je definovaná pre nestlačiteľný, osovosymetrický ($\partial/\partial\theta = 0$) tok v cylindrických súradniciach nasledovne

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (3.25)$$

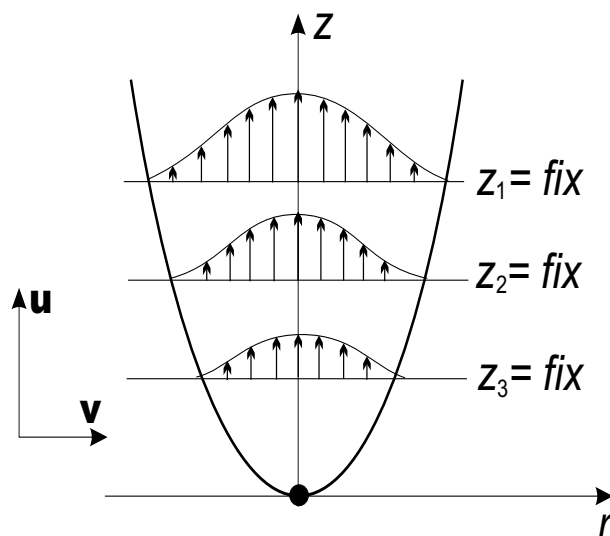
$$v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (3.26)$$

a teda spĺňa rovnicu kontinuity

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} = 0.$$

Z definície prúdovej funkcie vyplýva, že krivka konštantnej ψ ($d\psi = 0$) je v každom bode rovnobežná s vektorom rýchlosti (u, v) ; takáto krivka sa nazýva prúdočiara. Ak je tok ustálený ($\partial/\partial t = 0$), prúdočiarly sú identické s dráhami kvapalných častíc; toto však nie je prípad časovo-závislých, neustálených tokov.

Profily toku v smere osi z sú sebe-podobné pre rôzne fixované z (obrázok 3.2).



Obr. 3.2: Profil vertikálneho toku pre rôzne fixované z indikujúci sebe-podobnosť riešení. Ich vyjadrením je funkcia $\eta(r, z) = r/G(z)$.

Zavedenie podobnostnej premennej $\eta(r, z) = r/G(z)$ a funkcií $\psi(r, z) = F(z)f(\eta)$ a $T(r, z) = H(z)h(\eta)$ vedie k vyjadreniu rýchlostných zložiek

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{F}{G} f',$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \left(\frac{dF}{dz} f - F f' \frac{\eta}{G} \frac{dG}{dz} \right),$$

kde $f' = df/d\eta$, $h' = dh/d\eta$. Zavedenie podobnostných premenných redukuje parciálnu diferenciálnu rovnicu na zodpovedajúcu obyčajnú diferenciálnu rovnicu v premennej η . Podobnostné riešenie však zároveň musí spĺňať požadované okrajové podmienky vyjadrené pomocou podobnostných premenných. Dosadením príslušných výrazov zložiek rýchlostí do rovníc (3.21) a (3.22) prejdeme k ekvivalentnému systému nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\frac{1}{\nu} f'^2 \left(\frac{dF}{dz} - \frac{2F}{G} \frac{dG}{dz} \right) + \frac{dF}{dz} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\eta} f f' - f f'' \right) = \frac{g\beta H h}{\nu F} G^2 r^2 + \eta f''' - f'' + \frac{1}{\eta} f', \quad (3.27)$$

$$F \frac{dH}{dz} f' h - \frac{dF}{dz} H f h' = \kappa H (h' + \eta h''). \quad (3.28)$$

V rovniciach sa okrem funkcií premennej η vyskytujú aj funkcie premennej z a jej derivácie. Tieto funkcie bližšie určíme na základe fyzikálnych úvah – pomocou zákonov zachovania kinetickej a tepelnej energie.

3.6 Zákon zachovania tepelnej energie

Teplo, ktoré dodáva bodový zdroj za jednotku času (vďaka čomu sa vôbec vybudí konvekcia), je charakterizované veličinou Q_p . Jej jednotka je Js^{-1} . Toto teplo zohreje za 1 s objem kvapaliny $\int_0^\infty \int_0^{2\pi} ur \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^\infty ur \, dr$. Integrovaný tok cez plochu kolmú na os vzostupného prúdu na konštantnej úrovni z je potom daný výrazom

$$Q_p = 2\pi\rho c_p \int_0^\infty uTr \, dr. \quad (3.29)$$

Rovnicu (3.22) vynásobíme r a integrujeme v r na intervale $(0, \infty)$ a vo φ na intervale $(0, 2\pi)$

$$\int_0^\infty ur \frac{\partial T}{\partial z} \, dr + \int_0^\infty vr \frac{\partial T}{\partial r} \, dr = \kappa \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \, dr. \quad (3.30)$$

Druhý intergál rovnice vyjadríme metódou *per partes*

$$\int_0^\infty vr \frac{\partial T}{\partial r} \, dr = 0 - \int_0^\infty T(v + v'r) \, dr = \int_0^\infty Tr \frac{\partial v}{\partial z} \, dr,$$

kde sme využili rovnicu kontinuity a hraničné podmienky

$$r \frac{\partial v}{\partial z} + v + r \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \text{t.z.} \quad (v + v'r) = -r \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Pravá strana rovnice (3.30) sa rovná nule ($\partial T / \partial r|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$), takže rovnica nadobúda tvar

$$\int_0^\infty ur \frac{\partial T}{\partial z} \, dr + \int_0^\infty Tr \frac{\partial v}{\partial z} \, dr = 0.$$

Predchádzajúca rovnica sa dá napísať v tvare

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} (urT) \, dr = \frac{d}{dz} \int_0^\infty urT \, dr = 0, \quad \text{teda} \quad \int_0^\infty urT \, dr = \text{const.}$$

Z toho vyplýva, že

$$Q_p = 2\pi\rho c_p \int_0^\infty urT \, dr = \text{const.}$$

V premennej η môžeme písať

$$\int_0^{\infty} uTr dr = FH \int_0^{\infty} f'h d\eta = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p}, \quad \text{teda } FH = \text{const.}$$

Z poslednej rovnice máme podmienku $(dF/dz)H + (dH/dz)F = 0$, čo je zákon zachovania tepelnej energie dodávanej bodovým zdrojom.

3.7 Zákon zachovania hybnosti

Aplikovaním rovnakého postupu na rovnicu (3.21) dostaneme ďalšiu integrálnu väzbu medzi $F(z)$, $H(z)$, $G(z)$

$$\frac{dF}{dz}G - F\frac{dG}{dz} = \text{const} \frac{HG^5}{F}. \quad (3.31)$$

Dosadením podmienky $HdF/dz + FdH/dz = 0$ do rovnice (3.28) určíme $F(z)$.

Ak

$$\frac{dF}{dz} = \nu \Rightarrow F = \nu z$$

a

$$\frac{dF}{dz}/\kappa = \nu/\kappa \equiv Pr$$

kde Pr je Prandtlovo číslo.

Normalizáciou $\int_0^{\infty} f'h d\eta = 1$ určíme hodnotu Q_p , pretože

$$FH \int_0^{\infty} f'h d\eta = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p}, \quad \text{takže } FH = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p}.$$

Odtiaľ

$$H(z) = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p} \frac{1}{F} = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p \nu} \frac{1}{z}.$$

Funkciu $G(z)$ určíme, ak normujeme Archimedov člen na jednotku, teda

$$\frac{g\beta HG^4}{\nu F} = \frac{g\beta Q_p G^4}{2\pi\rho c_p \nu^3 z^2} = 1 \Rightarrow G(z) = \left(\frac{2\pi\rho c_p \nu^3}{g\beta Q_p} \right)^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}}.$$

Teraz môžeme určiť $\eta(r, z)$

$$\eta(r, z) = \frac{r}{G(z)} = \left(\frac{g\beta Q_p}{2\pi\rho c_p \nu^3} z^2 \right)^{\frac{1}{4}} \frac{r}{z}.$$

3.8 Grashoffovo číslo

Grashoffovo číslo je principiálny bezrozmerný parameter, ktorý je súčinom bezrozmerného Rayleighovho a Prandtlovho čísla. Rayleighovo číslo je pomerom typickej vztlakovej sily a typickej viskóznej sily. Prandtlovo číslo je pomerom kinematickej viskozity kvapaliny a tepelnej difuzivity. Hoci sa Grashoffovo číslo nazýva „číslo“, v modeli tohto typu (sebe-podobnom) to nie je číslo, ale funkcia. Konkrétne, je to funkcia vertikálnej premennej. Toto je dôvod, prečo sa analýza tohto typu nazýva „lokálnou“, a napokon, aj samotné Grashoffovo číslo sa nazýva „lokálnym“. To znamená, že výsledky pre rôzne fixované z sú kvantitatívne rovnaké, len ich treba preškálovať. V tomto prípade je Grashoffovo číslo odvodené z výrazu pre podobnostnú premennú η

$$\mathcal{G}_p(z) = \frac{g\beta\Theta_p(z)z^3}{\nu^2}, \quad (3.32)$$

kde $\Theta_p(z)$ je výraz rozmeru teploty

$$\Theta_p(z) = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p\nu z}. \quad (3.33)$$

Funkcie vyjadrené pomocou týchto parametrov môžeme potom napísať v tvare

$$F(z) = \nu z, \quad (3.34)$$

$$H(z) = \Theta_p(z), \quad (3.35)$$

$$G(z) = \mathcal{G}_p(z)^{-\frac{1}{4}}z, \quad (3.36)$$

$$\eta(r, z) = \mathcal{G}_p(z)^{\frac{1}{4}}r/z, \quad (3.37)$$

a po ich dosadení do (3.27) a (3.28) dostaneme konečný tvar rovníc

$$\eta f''' - f'' + \frac{1}{\eta}f' + \eta^2 h = \frac{1}{\eta}ff' - ff'', \quad (3.38)$$

$$(\eta h')' + Pr(fh)' = 0. \quad (3.39)$$

Okrajové podmienky prepísané do premennej η sú nasledovné

$$\frac{1}{\eta}f - \frac{1}{2}f' = 0, \quad \left(\frac{f'}{\eta}\right)' = 0, \quad h' = 0 \quad (\eta = 0), \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{\eta}f' = 0, \quad h = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty). \quad (3.41)$$

3.9 Analytické riešenie pre $Pr=2$

Pre $Pr = 2$ sa rovnice (3.38) a (3.39) dajú riešiť analyticky. Ak zákon zachovania hybnosti zapíšeme v tvare

$$\frac{1}{\eta} f'^2 - h\eta = 0, \quad \text{teda} \quad h = \left(\frac{f'}{\eta}\right)^2, \quad (3.42)$$

dosadíme do rovnice (3.38), predelíme η a upravíme, rovnica prejde do tvaru

$$\left(f'' - \frac{1}{\eta}f' + \frac{1}{\eta}ff'\right)' = 0.$$

Po integrácii a uvažovaní hraničných podmienok dostaneme

$$f'' - \frac{1}{\eta}f' + \frac{1}{\eta}ff' = 0.$$

Ďalej použijeme podmienky pre $\eta = 0$ a predchádzajúcu rovnicu upravíme na tvar

$$2\eta^2 \left(\frac{f'}{\eta}\right)' + (f^2)' = 0.$$

Po druhej integrácii (s použitím *per partes* pre výpočet prvého integrálu) máme

$$2\eta f' - 4f + f^2 = 0.$$

Posledná rovnica je nelineárna diferenciálna rovnica, ktorej riešením je funkcia

$$f(\eta) = \frac{\alpha\eta^2}{1 + \frac{1}{4}\alpha\eta^2}. \quad (3.43)$$

Z rovnice (3.42) máme

$$h(\eta) = \left(\frac{f'}{\eta}\right)^2 = \frac{4\alpha^2}{(1 + \frac{\alpha}{4}\eta^2)^4}, \quad (3.44)$$

kde konštantu α určíme z normalizačnej podmienky $\int_0^\infty f'h \, d\eta = 1$

$$\int_0^\infty f'h \, d\eta = 8\alpha^3 \int_0^\infty \frac{\eta \, d\eta}{(1 + \frac{\alpha}{4}\eta^2)^6} = \frac{16}{5}\alpha^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Funkcia $h(\eta)$ vyhovuje rovnici (3.39) len pre $Pr = 2$. Riešenia pre hodnoty Prandtlovho čísla rôzne od 2 musia byť získané numericky (kapitola 5.1).

Kapitola 4

Model vzostupného prúdu ne-newtonovskej kvapaliny

Štúdium ne-newtonovských kvapalín bolo iniciované narastajúcim používaním týchto kvapalín v chemickej, potravinárskej a petrochemickej technológii. Predikcia rýchlosti prenosu tepla a túžba pochopiť efekty kvapaliny, ktoré vykazujú silné zmeny v efektívnej viskozite so zmenami rýchlosti strižnej deformácie tak bola v záujme praktického využitia (pozri napr. Schulman, Bakov, Zaltsgendler (1975); Emery, Chi, Dale (1971); Kubair, Pei (1967); Magyari, Keller, Pop (2003); Huang, Chen (1990)). Cieľom tejto kapitoly je aplikovať charakteristické vlastnosti ne-newtonovskej kvapaliny na zemský plášť, odvodiť riadiace rovnice, určiť okrajové podmienky a identifikovať dôležité bez-rozmerné parametre.

4.1 Efektívna viskozita ne-newtonovskej kvapaliny

Hoci je problematika tečenia pláštá dobre definovaná, neznamená to, že sa plášť správa ako newtonovsky viskózna kvapalina ako ju opisuje rovnica (3.2). Dôvodom je, že kvapalinu môže reprezentovať všeobecná funkcionálna závislosť medzi rýchlosťou deformácie a napätím. Väčšina kvapalín je veľmi dobre aproximovaná mocninovým vzťahom

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\tau^n, \quad (4.1)$$

kde A je reologická konštanta. Ak $n = 1$, kvapalina je newtonovsky viskózna a rýchlosť deformácie je lineárne závislá od napätia. Alternatívny mechanizmus správania sa kvapalín udáva mocninný zákon pri $n \approx 3$.

Pri teplotách blízkyh k teplotám tavenia kryštalických látok sa tieto deformujú „pomaly“, podobne ako kvapalina. K takejto deformácii dochádza pri pôsobení napätia a je spôsobená tepelne aktivovaným pohybom atómov a iónov v dôsledku kryštalických defektov ako sú dislokácie a vakencie. Hlavným deformačným mechanizmom

spojeným s plášťovou konvekciou sú migrácia atómov/iónov (známy ako difúzia alebo Herring-Nabarrovo tečenie) a dislokačná migrácia (dislokačné tečenie).

Uvažujme najprv difúzne tečenie. Vakencie sú prázdne miesta v kryštalickej mriežke. Pri nenulovej teplote sa koncentrácia vakancií nachádza v rovnováhe a je tepelne závislá. Atómy sa premiestňujú pohybom susedných vakancií; tento pohyb nazývame difúzny proces, ktorý vedie k deformácii – tečeniu. Difúzia atómov v kryštalickej látke je tepelne aktivovaný proces. Relevantný difúzny koeficient D je daný Arrheniovým vzťahom

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{(E^* + pV^*)}{RT} \right],$$

kde E^* je aktivačná energia na jeden mól, V^* je aktivačný objem na jeden mól, R je plynová konštanta, a D_0 frekvenčný faktor. Aktivačná energia je súčtom energie potrebnej pre vznik vakancie a energetickej bariéry zabráňujúcej migrácii atómu do susednej vakancie a člen pV^* zahŕňa vplyv tlaku na redukovanie počtu vakancií a rast energetickej bariéry. Exponenciálna teplotná závislosť vyplýva priamo z Maxwell–Bolzmannovho rozdelenia energií atómov – udáva jednak počet atómov, ktoré majú dostatočnú energiu, aby prekonal energetickú bariéru a mohli tak preskočiť do vakancie, a takisto počet miest v mriežke, ktoré sú vakanciami.

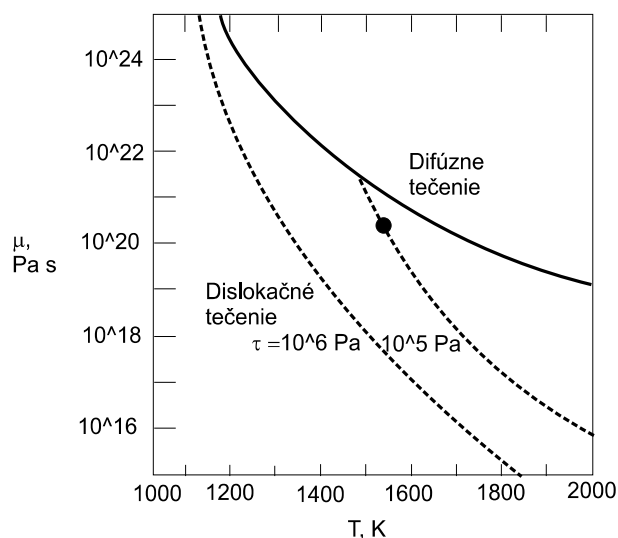
Druhým mechanizmom vzniku deformácie je dislokačné tečenie. Dislokácie sú čiarové (jednorozmerné) poruchy v kryštalickej mriežke. Dislokácia je definovaná v termínoch Burgersových vektorov b , ktoré sú mierou relatívneho posunutia atómov¹. Experimenty aj teória ukazujú, že vzťah medzi rýchlosťou deformácie $\dot{\epsilon}$ a napätím τ platný pre difúzne aj dislokačné tečenie je daný vzťahom

$$\dot{\epsilon} = A \left(\frac{\tau}{\mu_{\text{modul strižnosti}}} \right)^n \left(\frac{b}{d} \right)^m \exp \left[-\frac{(E^* + pV^*)}{RT} \right],$$

kde A je predexponenciálny faktor, μ je modul strižnosti, d je veľkosť zrna, a b je magnitúda Burgersovho vektora. Typické hodnoty pre n a m sú $n = 1$ a $m = 2.5$ pre difúzne tečenie a $n = 3.5$ a $m = 0$ pre dislokačné tečenie. Pre difúzne tečenie je vzťah medzi rýchlosťou deformácie $\dot{\epsilon}$ a napätím τ lineárny, čo vedie k newtonovskej viskozite. V prípade dislokačného tečenia je vzťah medzi rýchlosťou deformácie $\dot{\epsilon}$ a napätím τ silne nelineárny, a vedie k nelineárnej viskóznej reológii.

Najväčšie zastúpenie minerálov vo vrchnom plášti majú olivín, ortopyroxén, klinopyroxén a garnety. Jeden typ minerálu kontroluje reológiu hornín, ak jeho objemové zastúpenie je viac ako 20–30% a ak je značne slabší ako ostatné minerály. Najčastejšie vyskytujúcim sa minerálom v zemskom plášti je olivín a je pravdepodobne aj najslabším, takže jeho reológia je veľmi dominantná. Dôležitou otázkou je, či práve difúzne

¹Tzv. *slíp*.



Obr. 4.1: Závislosť viskozity od teploty je daná pre niekoľko hodnôt napätí. Plná čiara označuje difúzne tečenie; viskozita nie je závislá od napätia. Čiarkované čiary označujú dislokačné tečenie ilustrujú závislosť na napätí. Čierny bod reprezentuje typické podmienky pre plášťovú konvekciu.

tečenie je ten hlavný deformačný mechanizmus v hornom plášti. Prechod od dislokačného tečenia k difúznemu nastáva vtedy, ak pod daným napätím, je rýchlosť deformácie daná týmito dvoma mechanizmami rovnaká. Dislokačné tečenie je aplikovateľným mechanizmom pre veľké hodnoty napätí a pri vysokých teplotách, zatiaľ čo difúzne tečenie je dominantné pre malé napätia a nízke teploty. Závislosť viskozity od teploty pri difúznom alebo dislokačnom tečení je na obrázku 4.1. Väčšina autorov, ktorí publikovali laboratórne štúdie o deformáciách v plášti, prišli k záveru, že práve dislokačné tečenie je tým mechanizmom, ktorý riadi proces deformácie vo vrchnom plášti. Tento záver však nie je konzistentný s takmer všetkými štúdiami postglaciálneho zdvihu, ktorý uprednostňuje skôr newtonovskú viskozitu vrchného plášťa.

Skalárny vzťah medzi rýchlosťou deformácie $\dot{\epsilon}$ a napätím τ môže byť zovšeobecnený do konštitučného vzťahu medzi tenzormi rýchlosti deformácie a deviačného napätia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{B} \left(\frac{\tau_2}{\mu_{m.striž.}} \right)^{n-1} \exp \left[- \left(\frac{E^* + pV^*}{RT} \right) \right] \tau_{ij}, \quad (4.2)$$

$$B = \left(\frac{A}{\mu_{m.striž.}} \right)^{-1} \left(\frac{b}{d} \right)^{-m}, \quad (4.3)$$

kde τ_2 je odmocnina druhého invariantu tenzora deviačných napätí², a koeficient B zahŕňa závislosť na tuhosti a veľkosti zrna. Použijúc vzťah

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij},$$

kde μ je viskozita, definujeme viskozitnú funkciu nasledovne

$$\mu = \frac{B}{2} \left(\frac{\tau_2}{\mu_{m.striž.}} \right)^{1-n} \exp \left(\frac{E^* + pV^*}{RT} \right). \quad (4.4)$$

Parametre n, E^*, V^* sú získavané experimentálne (Ranalli, 1987). Exponent n býva určený z krivky variácie rýchlosti deformácie od napätia (pri konštantnom tlaku a teplote) v logaritmickej mierke:

$$\left. \frac{\partial (\ln \dot{\varepsilon})}{\partial (\ln \tau)} \right|_{p,T} = n.$$

Lineárny vzťah sa zvyčajne zachováva len v limitnom intervale napätia (typicky 2 rády). Ak sa napätie mení v rozsahu niekoľkých rádov, potom hodnota n narastá s napätím, čo môže viesť k rôznym mechanizmom tečenia s rôznymi hodnotami n . Aktivačné parametre sú získavané z grafov

$$-R \left. \frac{\partial (\ln \dot{\varepsilon}/A)}{\partial (1/T)} \right|_{p=0,\tau} = E^*,$$

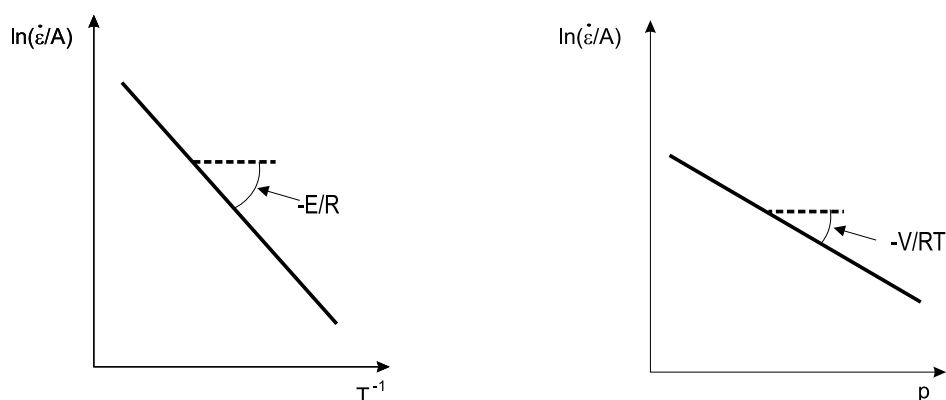
$$-R T \left. \frac{\partial (\ln \dot{\varepsilon}/A)}{\partial p} \right|_{\tau,T} = V^*.$$

Určenie aktivačnej energie si preto vyžaduje merania rýchlosti deformácie pri konštantnom napätí a rozličných teplotách; E^* je potom určená zo sklonu krivky v Arrheniovom grafe (obrázok 4.2 vľavo). Experimenty s veľkým rozsahom teplôt často dávajú len zdanlivú aktivačnú energiu, ktorá sa mení s teplotou; je to pravdepodobne dôsledok superpozície dvoch alebo viacerých mechanizmov s rôznymi aktivačnými energiami. Pri určovaní aktivačného objemu sú napätie a teplota konštantné a rýchlosť deformácie je pozorovaná pri rôznych tlakoch (obrázok 4.2 vpravo). Určenie aktivačného objemu je experimentálne zložitejšie a preto sa berú hodnoty V^* približne rovné atomárnemu objemu.

V ďalšej časti budeme pracovať s efektívnou viskozitou získanou zo vzťahu me-

²1. invariant je definovaný ako $\det |\bar{\tau}|$

2. invariant je definovaný ako $\bar{\tau} : \bar{\tau} \equiv \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} = \tau_{11}^2 + \tau_{12}^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{22}^2$



Obr. 4.2: Schematické grafy na určenie aktivačnej energie (vľavo) a aktivačného objemu (vpravo).

dzi napätím a rýchlosťou deformácie na základe experimentálneho fitu (Froidevaux a Schubert (1975); Schubert a Turcotte (1972); Post (1973); Kohlstedt a Goetze (1974), pozri tiež tabuľky 5.1 a 5.2), konkrétne

$$\tau = \left[\frac{1}{2} \frac{T}{B_n} \exp \left(\frac{E^* + pV^*}{RT} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} \right]^{1/n}. \quad (4.5)$$

Poznamenávame, že v (4.5) je okrem exponenciálnej závislosti efektívna viskozita závislá na teplote aj lineárne. Ostatné parametre majú rovnaký význam ako v prípade teoretickej formulácie. Funkcia efektívnej viskozity nadobúda nasledujúci tvar

$$\mu_{\text{eff}} = \left[\frac{1}{2} \frac{T}{B_n} \exp \left(\frac{E^* + pV^*}{RT} \right) \right]^{1/n} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{-(n-1)/n}. \quad (4.6)$$

Efektívna viskozita ne-newtonovského materiálu (na rozdiel od newtonovského) je funkciou napätia (okrem toho, samozrejme, je aj funkciou teploty, tlaku a materiálových parametrov). Efektívna viskozita klesá s narastajúcim napätím (alebo rýchlosťou deformácie), a teda nie je materiálovým parametrom v tom istom zmysle ako je lineárna viskozita. V ne-newtonovských materiáloch, hoci sú všetky ostatné parametre (T , p , atď.) fixné, nemôžeme hovoriť o viskozite materiálu, ale len o viskozite *pri danom napätí* (alebo *pri danej rýchlosti deformácie*).

Ako sme už spomenuli, laboratórne štúdie uprednostňujú dislokačné tečenie ako dominantný mechanizmus deformácie najvrchnejšej časti plášťa. Ak by dislokačné tečenie bolo charakteristické pre celý plášť, museli by sme použiť silne nelineárnu reológiu s viskozitou $\mu \sim \tau^{-2.5}$. Na druhej strane však štúdie založené na postglaciálnom zdvihu ukazujú, že pohyby plášťa spôsobené povrchovou záťažou sú dostatočne vysvetlené lineárnou newtonovskou reológiou. Racionalizácia týchto dvoch štúdií by bola možná,

ak by tečenia spojené s postglaciálnym zdvihom boli položené nad konvektujúcim plášťom. Ak by deviačné napätia spojené so zdvihom boli menšie ako deviačné napätia v konvektujúcom plášti, mohli by sme očakávať lineárne tečenie spojené so zdvihom hoci aj v ne-newtonovskom plášti. Vo vrchnom plášti kontrolujú správanie viskozitnej funkcie odchýlky v teplote, zatiaľ čo v spodnom plášti sú variácie tlaku rovnako dôležité. Keďže teplota rýchlo narastá s rastúcou hĺbkou, efektívna viskozita plášťa sa znižuje až kým nedosiahne pozorovateľné hodnoty 10^{19} – 10^{21} Pa s v astenosfére.

4.2 Formulácia problému

V nasledujúcej časti aplikujeme numerické a analytické prostriedky na riešenie problémov dynamiky tekutín a prenosu tepla pre ne-newtonovské kvapaliny, pričom sa vyskytnú určité komplikácie spôsobené nelinearitou medzi tenzorom rýchlosti deformácie a tenzorom napätia. Podobne ako v časti, kde sme sa zaoberali newtonovskými kvapalinami, upravíme najskôr riadiace rovnice pre prípad ne-newtonovskej kvapaliny; geometria problému je rovnaká.

Pri úprave pohybovej rovnice vychádzame z Navier–Stokesovej rovnice (3.11), ktorú prepíšeme do tvaru pre ustálený tok a nestlačiteľnú kvapalinu, pričom predpokladáme, že rýchlosť sa zachováva každým kvapalným elementom ($D\mathbf{u}/Dt \equiv \mathbf{0}$)

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} + \rho \mathbf{g}. \quad (4.7)$$

Kombináciou Boussinesquovej aproximácie ($\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $\rho'/\bar{\rho} \rightarrow \infty$, kde $\bar{\rho}$ je referenčná hustota a ρ' je odchýlka od $\bar{\rho}$) a linearizovanej stavovej rovnice

$$\rho = \rho(T) = \bar{\rho} [1 - \alpha (T - \bar{T})],$$

kde α je koeficient tepelnej rozťažnosti a \bar{T} referenčná teplota, získame odchýlku od referenčnej hustoty $\rho' = -\bar{\rho}\alpha (T - \bar{T})$. Ak tiažové zrýchlenie smeruje nadol ($\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$), posledný člen rovnice upravíme nasledovne

$$\rho \mathbf{g} = \bar{\rho} \mathbf{g} + \rho' \mathbf{g} = -\bar{\rho} g \hat{\mathbf{e}}_3 + \bar{\rho} \alpha (T - \bar{T}) g \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Ak využijeme, že

$$-\nabla p - \nabla (\bar{\rho} g z) = -\nabla (p + \bar{\rho} g z) \equiv -\nabla \Pi,$$

rovnica (4.7) prejde do tvaru

$$\mathbf{0} = -\nabla \Pi + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}} + \rho \alpha g (T - T_\infty) \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (4.8)$$

kde Π je hydrodynamický tlak.

Vzhľadom na geometriu a osovú symetriu nášho problému vyjadríme tenzor napätia v cylindrických súradniciach (r, θ, z) . Ak využijeme podmienku nestlačiteľnosti $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$, pre zložky tenzora napätia platí

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{rr}, \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu\frac{v}{r} = 2\mu\dot{\epsilon}_{\theta\theta}, \\ \tau_{zz} &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial z} = 2\mu\dot{\epsilon}_{zz}, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = 0, \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\mu\dot{\epsilon}_{rz}.\end{aligned}$$

Rovnica (4.8) v cylindrických súradniciach v zložkovom tvare nadobúda tvar

$$0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r}, \quad (4.9)$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \alpha\rho g(T - T_\infty) \quad (4.10)$$

a rovnica kontinuity

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.11)$$

V procese konvekcie formujúci sa vzostupný prúd vytvára dve hraničné vstvy: tepelnú hraničnú vrstvu s hrúbkou δ_T a hraničnú vrstvu vertikálnej rýchlosti s hrúbkou δ_u . Predpokladáme, že vzostupný prúd je úzky, a teda rýchlosť (vertikálna) a teplota sa menia s radiálnou vzdialenosťou od osi prúdu rýchlo v porovnaní s tým, ako sa menia v smere pozdĺž prúdu. Tak ako v prípade newtonovskej kvapaliny, použijeme na zjednodušenie problému hranično-vrstvovú aproximáciu. Konkrétne, ak typická dĺžka v smere osi z je L a v smere osi r sú δ_T alebo δ_u , pričom $\delta_T/L \ll 1$ alebo $\delta_u/L \ll 1$, potom platí: $\partial/\partial z \ll \partial/\partial r$ (zmeny v smere osi z sú oveľa menšie ako zmeny v smere r). Vertikálnu rýchlosť označíme u , horizontálnu rýchlosť v a z rovnice kontinuity dostávame, že $v \ll u$, čo je v súlade s predpokladom, že vertikálna rýchlosť je dominantná. Podobne ohodnotíme aj zložky tenzora napätia a zistíme, že dominantným prvkom tenzora je $\partial u/\partial r$ a ostatné členy sú v porovnaní s ním zanedbateľne malé. Rovnicu (4.9) použijeme na určenie rádu hydrodynamického tlaku, ktorého zmeny v smere r aj z sú zanedbateľne malé v porovnaní s členmi rovnice (4.10). Rovnica (4.8) po hranično-vrstvovej aproximácii nakoniec nadobúda tvar

$$0 = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \alpha\rho g(T - T_\infty). \quad (4.12)$$

Vzhľadom na to, že sa zaoberáme časťami plášťa, v ktorých dominantným mechanizmom prenosu tepla je advekcia, rovnicu (3.19) budeme uvažovať v tvare

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T, \quad (4.13)$$

kde $\kappa = k/(\rho c_p)$ je koeficient tepelnej difuzivity, k koeficient tepelnej vodivosti, c_p špecifické teplo pri konštantnom tlaku a ρ hustota. Podobne ako v prípade Navier–Stokesovej rovnice prepíšeme rovnicu (4.13) do cylindrických súradníc a problém zjednodušíme použitím hranično-vrstvovej aproximácie

$$v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (4.14)$$

Ľavá strana rovnice (4.14) vyjadruje advekciu tepla radiálnym a vertikálnym tokom, ktorá je vyrovnávaná radiálnou difúziou tepla na pravej strane rovnice. Keďže tok nahor je rýchly, difúzia tepla je slabá vo vertikálnom smere a dominantnou časťou celého Laplaciánu sú gradienty v radiálnom smere.

4.3 Bezrozmerné riadiace rovnice

Vyjadrenie rovníc v bezrozmernej forme prináša dôležité bezrozmerné parametre, ktoré kontrolujú správanie systému. V ďalšej formulácii sú nezávislé premenné (r, z) škálované pomocou charakteristickej dĺžky h , ktorú budeme bližšie špecifikovať neskôr. Závislé premenné sú škálované nasledovne. Rýchlosť škálujeme na základe tepelno-difúznej rýchlostnej škály κ/h a bezrozmerná premenná pre teplotu je definovaná vzťahom

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty},$$

kde T_c je teplota na osi vzostupného prúdu a T_∞ teplota okolitého plášťa. Bezrozmerná teplota je škálovaná vzhľadom na rozdiel teplôt na osi prúdu a okolitého plášťa ($\Delta T = T_c - T_\infty$). Pomocou vzťahu (4.6) a bezrozmerných premenných definujeme ďalšie bezrozmerné parametre

$$\mathcal{A} \equiv \frac{E^* + pV^*}{R(T_c - T_\infty)}, \quad \mathcal{C} \equiv \frac{T_\infty}{T_c - T_\infty}.$$

Pomer týchto dvoch parametrov,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = \frac{E^* + pV^*}{RT_\infty},$$

hovorí o kvantitatívnej závislosti deformácie od aktivačného objemu a energie v podmienkach ďaleko od osi vzostupného prúdu. Faktor, ktorý sa objavuje v reologickom zákone (4.6), vyjadríme pomocou bezrozmerných parametrov

$$\exp\left(\frac{E^* + pV^*}{RT}\right) = \exp\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \frac{1}{1 + \vartheta/\mathcal{C}}\right).$$

Bezrozmerná rovnica spojitosti a vedenia tepla majú tvar

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{v}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (4.15)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{r}} + \bar{u} \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{r}} \right), \quad (4.16)$$

kde veličiny s pruhom označujú bezrozmerné premenné. Predtým, ako prejdeme k zbezrozmerneniu Navier–Stokesovej rovnice, musíme vyjadriť deriváciu tenzora napätia $\partial \tau / \partial r$ pomocou vzťahu (4.5). Získaný výraz potom aproximujeme v zmysle teórie hraničných vrstiev, dosadíme do rovnice (4.12) a zbezrozmerníme. Navier–Stokesova rovnica po zbezrozmernení nadobúda tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{G} e^{\mathcal{A}/(\mathcal{C}n)} \left[(\mathcal{C} + \vartheta) e^{\mathcal{A}/(\mathcal{C}+\vartheta)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right| \right]^{(n-1)/n} \vartheta - \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[(\mathcal{C} + \vartheta) e^{\mathcal{A}/(\mathcal{C}+\vartheta)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right| \right] \\ - n \frac{1}{\bar{r}} (\mathcal{C} + \vartheta) e^{\mathcal{A}/(\mathcal{C}+\vartheta)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right| = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde \mathcal{G} je Grashoffovo číslo

$$\mathcal{G} \equiv \left(\frac{1}{2} \right)^{-1/n} n B_n^{1/n} \kappa^{-1/n} \Delta T^{(n-1)/n} h^{(n+2)/n} \rho g \alpha e^{-\mathcal{A}/(\mathcal{C}n)}. \quad (4.18)$$

Náš model je polonekonečný; na to, aby sme mohli čokoľvek kvantitatívne povedať pre Zem, musíme zvoliť určitú referenčnú hladinu. Vzhľadom na sebe-podobnosť ju možno zvoliť ľubovoľne; v našom prípade je hladina definovaná rovnicou $\mathcal{G} \equiv 1$. Z tejto rovnice získame charakteristickú dĺžku h

$$h = \Delta T^{-\frac{n-1}{n+2}} (\rho g \alpha n)^{-\frac{n}{n+2}} \left(\frac{\kappa}{2B_n} \right)^{\frac{1}{n+2}} e^{\mathcal{A}/[\mathcal{C}(n+2)]}. \quad (4.19)$$

4.4 Podobnostná formulácia

Podobne ako v kapitole 3.5 definujeme bezrozmernú prúdovú funkciu $\bar{\psi}(\bar{r}, \bar{z})$ vzťahmi

$$\bar{v} = -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}}, \quad (4.20)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}}. \quad (4.21)$$

Podobnostnú premennú $\eta(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{r}/G(\bar{z})$ použijeme vo vyjadreniach bezrozmernej prúdovej funkcie a teploty

$$\bar{\psi}(\bar{r}, \bar{z}) = F(\bar{z}) f(\eta), \quad (4.22)$$

$$\vartheta(\bar{r}, \bar{z}) = H(\bar{z}) h(\eta). \quad (4.23)$$

Funkcie $G(\bar{z})$, $F(\bar{z})$, $H(\bar{z})$ určíme tak, aby sme z rovníc (4.16) a (4.17) dostali obyčajné diferenciálne rovnice v premennej η . Vyjadrením \bar{u} a \bar{v} pomocou vzťahov (4.22) a (4.23) a dosadením do rovnice vedenia tepla a Navier–Stokesovej rovnice v bezrozmernom tvare dostávame

$$F \frac{dH}{d\bar{z}} f' h - \frac{dF}{d\bar{z}} H f h' = H (h' + \eta h''), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & e^{A[1/C-1/(C+h)]/n} (C+h)^{-\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{\eta^2} |\eta f'' - f'| \right]^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{F}{G^3} \right)^{\frac{n-1}{n}} h + 2 \frac{F}{G^4} \frac{1}{\eta^3} |\eta f'' - f'| \\ & - \left(1 - \frac{A}{C+h} \right) \frac{1}{C+h} \frac{F}{G^4} H \frac{1}{\eta^2} |\eta f'' - f'| h' - \frac{F}{G^4} \frac{1}{\eta} f''' - n \frac{F}{G^4} \frac{1}{\eta^3} |\eta f'' - f'| = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

kde $f' = df/d\eta$ a $h' = dh/d\eta$. Ak v rovniciach (4.24) a (4.25) položíme

$$H(\bar{z}) \equiv 1, \quad F(\bar{z}) \equiv \bar{z}, \quad G(\bar{z}) \equiv \bar{z}^{\frac{1}{n+3}}$$

dostaneme ekvivalentný systém obyčajných diferenciálnych rovníc

$$h' + \eta h'' = -f h', \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & e^{A[1/C-1/(C+h)]/n} (C+h)^{-\frac{1}{n}} \eta^{\frac{2}{n}} |\eta f'' - f'|^{\frac{n-1}{n}} h - \left(1 - \frac{A}{C+h} \right) \frac{1}{C+h} |\eta f'' - f'| h' \\ & - (n-2) \frac{1}{\eta} |\eta f'' - f'| + \eta f''' = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

pre neznáme $f(\eta)$ a $h(\eta)$.

Okrajové podmienky (3.23) a (3.24) prepísané do premennej η sú nasledovné.

Pre $\eta = 0$

$$f' = \frac{n+3}{\eta} f, \quad \left(\frac{f'}{\eta} \right)' = 0, \quad h = 1. \quad (4.28)$$

Pre $\eta \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\eta} f' = 0, \quad h = 0. \quad (4.29)$$

Numerické riešenie diferenciálneho systému (4.26)–(4.29) je prezentované v kapitole 5.2.2.

Kapitola 5

Numerické riešenie problému

Diferenciálne systémy (3.38)–(3.41) pre newtonovský prípad a (4.26)–(4.29) pre ne-newtonovský prípad nie je vo všeobecnosti možné riešiť analyticky. Na riešenie týchto problémov musíme zvoliť vhodné numerické metódy, ktoré transformujú pôvodné diferenciálne rovnice na systém algebraických rovníc. Rovnice newtonovskej kvapaliny sme riešili *metódou strelby*, popísanej v kapitole 5.1. Každá numerická metóda je špecifická v tom, ako reprezentuje riešenie používajúc množinu diskrétnych bodov a ako aproximuje derivácie hľadaných funkcií. Jednou z týchto metód je *metóda konečných diferencií*, ktorú sme použili pri numerickom riešení rovníc odvodených pre ne-newtonovskú kvapalinu (kapitola 5.2.1).

5.1 Numerické riešenie rovníc newtonovskej kvapaliny

5.1.1 Metóda strelby

Systém obyčajných diferenciálnych rovníc (3.38) a (3.39) predstavuje okrajový problém, ktorý sme numericky riešili pomocou *metódy strelby* (pozri napr. Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery (1992)). Okrajový problém vo všeobecnosti pozostáva z obyčajných diferenciálnych rovníc a z prislúchajúcich hraničných podmienok definovaných vo viac ako jednom bode. Systém diferenciálnych rovníc piateho rádu (3.38) a (3.39)

najskôr prepíšeme na systém piatich diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$f' = u, \quad (5.1)$$

$$u' = v, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\eta}v' = -\frac{1}{\eta^3}(f-1)(v\eta-u) - h, \quad (5.3)$$

$$h' = w, \quad (5.4)$$

$$\eta w' = -w - Pr(uh + fw). \quad (5.5)$$

Okrajové podmienky (3.40) a (3.41) nadobúdajú tvar

$$\frac{1}{\eta}f - \frac{1}{2}u = 0, \quad \frac{1}{\eta}v - \frac{1}{\eta^2}u = 0, \quad w = 0, \quad (\eta = 0) \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{\eta}u = 0, \quad h = 0. \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (5.7)$$

Podstatou metódy strelby je, že okrajový problém sa uvažuje ako počiatkový problém s počiatkovými podmienkami (5.6) a

$$\frac{1}{\eta}u = p, \quad (5.8)$$

$$h = q, \quad (5.9)$$

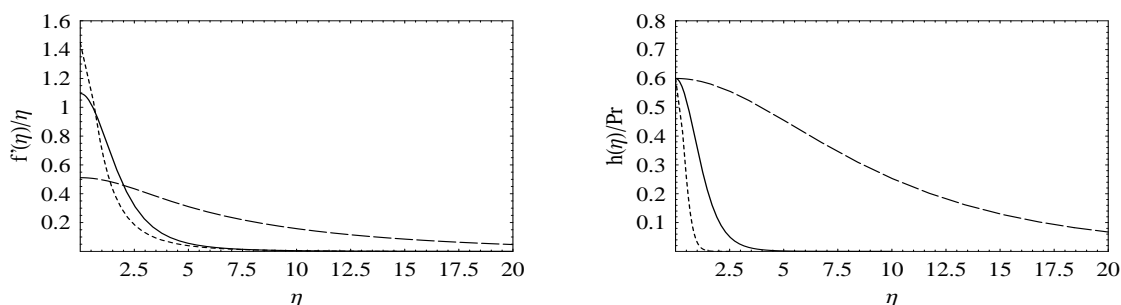
kde p a q sú počiatkové odhady, ktoré sú postupne spresnené tak, aby boli splnené podmienky v $\eta \rightarrow \infty$. Metóda strelby využíva iteratívnu metódu na riešenie nelineárnych rovníc pre nájdenie takých počiatkových odhadov, pre ktoré sú splnené podmienky (5.7). Riešenie takéhoto počiatkového problému je potom aproximáciou riešenia pôvodného okrajového problému.

Ako počiatkové odhady p a q v našom probléme sme použili analytické riešenia pre $Pr = 2$ (hodnoty $f(0)$ a $h(0)$, viď kapitola 2.5). Riešenia pre $Pr = 0.1$ a $Pr = 10$ sme získali fixovaním q a následným určením p . Alternatívny spôsob je kontinuácia v Pr , čiže v každom kroku meníme hodnotu Prandtlovho čísla, pričom ako počiatkové odhady použijeme hodnoty z predchádzajúceho kroku. Táto metóda je však nekonvergentná; možný dôvod nekonvergenzie je numerická nestabilita nelineárneho systému. Grafy bezrozmernej vertikálnej rýchlosti f'/η a škálovanej bezrozmernej teploty h/Pr pre $Pr = 0.1, 2, 10$ sú zobrazené na obrázku 5.1. Výsledky sú zhodné s grafmi v práci Fujiiho (1962) pre $Pr = 2$ a 10 (bodový zdroj).

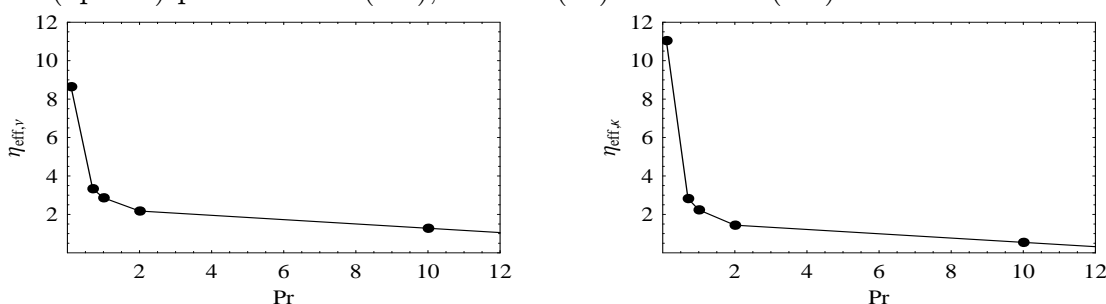
5.1.2 Diskusia výsledkov

- Dominantné bezrozmerné parametre systému (pri fixovanom z) pre bodový zdroj sú

$$\mathcal{G}_p(z) = \frac{g\beta\Theta_p(z)z^3}{\nu^2}; \quad \Theta_p(z) = \frac{Q_p}{2\pi\rho c_p\nu} \frac{1}{z}.$$



Obr. 5.1: Bezrozmerná vertikálna rýchlosť f'/η (vľavo) a škálovaná bezrozmerná teplota h/Pr (vpravo) pre $Pr = 0.1$ (---), $Pr = 2$ (—) a $Pr = 10$ (···).



Obr. 5.2: Závislosť efektívnej hrúbky hraničnej vrstvy na Prandtlovom čísle: efektívna hrúbka hraničnej vrstvy vertikálnej rýchlosti $\eta_{\text{eff},\nu}$ (vľavo), efektívna hrúbka teplotnej hraničnej vrstvy $\eta_{\text{eff},\kappa}$ (vpravo).

- Definícia hrúbky hraničnej vrstvy v tomto prípade nie je vo všeobecnosti udaná. Ak hrúbku vzostupného prúdu definujeme v bezrozmernej rovine $f' - \eta$, efektívnu hodnotu hrúbky hraničnej vrstvy η_1 určíme napr. vzťahom $f'(\eta_1) = f'(0)/e$. Potom reálna (rozmerná) hrúbka prúdu je

$$\delta = \left(\frac{2\pi c_p \rho \nu^3}{g\beta Q_p} \right) \eta_1 z^{1/2},$$

čiže vzostupný prúd mení svoju hrúbku s druhou odmocninou vzdialenosti od bodového zdroja a so štvrtou odmocninou tepelného toku.

- Analytické riešenie je známe pre $Pr = 2$ a existuje v každom bode rýchlostného a teplotného poľa. Pre vertikálnu rýchlosť v tomto prípade platí

$$u = (zg\beta T)^{1/2}.$$

- Z analýzy vyplývajú vzťahy pre maximum vertikálnej rýchlosti u_{max} a maximálnej

teploty T_{\max}

$$u_{\max} = \left(\frac{f'}{\eta} \right)_0 \left(\frac{g\beta}{2\pi\nu c_p \rho} \right)^{1/2} Q_p^{1/2},$$

$$T_{\max} = h(0) \frac{Q_p}{2\pi\nu c_p \rho z}.$$

- Z grafov 5.1 vidíme, že zmena bezrozmernej vertikálnej rýchlosti f'/η v závislosti od Prandtlovho čísla je relatívne malá. Podobne to platí i pre škálovanú bezrozmernú teplotu h/Pr . Hodnoty efektívnej hrúbky vertikálno-rýchlostnej a tepelnej hraničnej vrstvy $\eta_{\text{eff},\nu}$ a $\eta_{\text{eff},\kappa}$ sú v závislosti od Prandtlovho čísla na obrázku 5.2. Pre malé hodnoty Prandtlovho čísla hrúbka hraničných vrstiev prudko narastá a s narastajúcim Prandtlovým číslom sa hodnoty $\eta_{\text{eff},\nu}$ a $\eta_{\text{eff},\kappa}$ asymptoticky blížia k nule.

5.2 Numerické riešenie rovníc ne-newtonovskej kvapaliny

5.2.1 Metóda konečných diferencií

Rovnice ne-newtonovskej kvapaliny (4.26)–(4.29) sme riešili pomocou *metódy konečných diferencií* (pozri napr. Kenneth (2003); Moczo a kol. (2004)). Metóda konečných diferencií patrí do tzv. sieťových metód¹. V sieťových metódach sa interval riešenia pokrýje priestorovou sieťou a každá funkcia je reprezentovaná jej hodnotami v uzloch siete. Priestorové rozloženie uzlov môže byť v princípe ľubovoľné, výrazne však ovplyvňuje presnosť výpočtu. O hodnotách medzi uzlami siete nie je urobený žiadny predpoklad. Derivácia funkcie je aproximovaná tzv. konečno-diferenčnou formulou, ktorá využíva hodnoty funkcie v konkrétnych uzloch siete.

Pri konštrukcii konečno-diferenčného modelu je potrebné pokryť celú riešenú oblasť priestorovou sieťou, aproximovať derivácie konečno-diferenčnými formulami, aproximovať funkcie a počiatkové a/alebo okrajové podmienky vo všetkých bodoch siete a na záver skonštruovať systém algebraických rovníc. Analýza vytvorenej schémy zahŕňa vyšetrenie jej konzistentnosti s pôvodným systémom, stability a konvergenencie. Konečno-diferenčná rovnica (FDE)² je *konzistentná* s parciálnou diferenciálnou rovnicou (PDE)³

¹ *Grid-point methods* v angl.lit.

² *Finite-difference equation* v angl. lit.

³ *Partial differential equation* v angl. lit.

ak pri zmenšovaní priestorového kroku sa rozdiel medzi FDE a PDE limitne blíži k nule

$$|PDE - FDE| \rightarrow 0 \quad \text{ak} \quad h \rightarrow 0.$$

Hovoríme, že konečno-diferenčná schéma je *stabilná* ak numerické riešenie je ohraničené a presné riešenie je ohraničené a *nestabilná* ak numerické riešenie je neohraničené a presné riešenie je ohraničené. Keďže riešenie väčšiny fyzikálnych problémov je ohraničené, tak aj riešenie FDE musí byť ohraničené. Analýza stability môže byť urobená len pre lineárne PDE. Nelineárne PDE musia byť najskôr lokálne zlinearizované. Najčastejšie používanou metódou pre analýzu stability je von Neumannova metóda. Konečno-diferenčná schéma je *konvergentná* ak pri zmenšovaní priestorového kroku sa riešenie FDE (u_{FDE}) blíži k presnému riešeniu PDE (u_{PDE})

$$|u_{PDE} - u_{FDE}| \rightarrow 0 \quad \text{ak} \quad h \rightarrow 0.$$

Konzistentnosť je vlastnosť FDE, ktorá dáva do vzťahu FDE a PDE. Stabilita a konvergencia sú vlastnosťami numerického riešenia FDE. Vzťahujú sa k metóde (k schéme, k algoritmu), ktorá bola použitá pre získanie numerického riešenia.

Konečno-diferenčná sieť pozostáva z konečného počtu diskretných bodov. V prípade 1-rozmernej výpočtovej oblasti s premennou x môžeme sieť zložiť z uzlov jednoduchým priestorovým usporiadaním

$$x_i = x_0 + i\Delta x \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

kde Δx je priestorový krok. Vo väčšine problémov sa používa takáto rovnomerná sieť s rovnakým priestorovým krokom $\Delta x = h$. Iné typy sietí, ako napríklad nerovnomerné (nehomogénne) siete, siete s premenlivou dĺžkou priestorového kroku, sú používané v prípade, ak sú lepšie prispôsobiteľné geometrii problému alebo zjednodušujú konečno-diferenčné aproximácie derivácií.

Konečno-diferenčné schémy aproximujú prislúchajúce derivácie funkcií v diferenciálnych rovniciach. Motivácia tohto kroku vychádza z predpokladu, že ak funkcia f je diferencovateľná v okolí bodu x , môžeme túto funkciu rozvinúť do Taylorovho radu okolo bodu x

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Jednoduchými algebraickými úpravami dostávame

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.10)$$

Vzťah (5.10) je známy ako centrálné diferencie druhého rádu presnosti (chyba vzniknutá pri skrátaní radu je úmerná h^2) pre prvú a druhú deriváciu funkcie f . Často sa používajú aproximácie prvého rádu (chyba je úmerná h), tzv. dopredná a dozadná formula

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (5.11)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (5.12)$$

Okrajové podmienky musia byť, samozrejme, takisto aproximované konečno-diferenčnými formulami, použiteľnými na ľavej a pravej hranici

$$f'(x) = \frac{4f(x+h) - f(x+2h) - 3f(x)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) + 3f(x) - 4f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Numerická implementácia metódy konečných diferencií je uvedená v Prílohe.

5.2.2 Aplikácia metódy konečných diferencií na diferenciálny systém pre ne-newtonovský prípad

Skôr ako aplikujeme metódu konečných diferencií na systém rovníc a okrajových podmienok odvodených v časti pre ne-newtonovskú kvapalinu, prepíšeme rovnice (4.26) a (4.27) na systém piatich rovníc prvého rádu

$$f' - u = 0, \quad (5.13)$$

$$u' - v = 0, \quad (5.14)$$

$$e^{A[1/C-1/(C+h)]/n} (C+h)^{-\frac{1}{n}} \eta^{\frac{2}{n}} |\eta v - u|^{\frac{n-1}{n}} h - \left(1 - \frac{A}{C+h}\right) \frac{1}{C+h} |\eta v - u| w$$

$$- (n-2) \frac{1}{\eta} |\eta v - u| + \eta v' = 0, \quad (5.15)$$

$$h' - w = 0, \quad (5.16)$$

$$w + \eta w' + fw = 0. \quad (5.17)$$

Okrajové podmienky prejdú do nasledujúceho tvaru

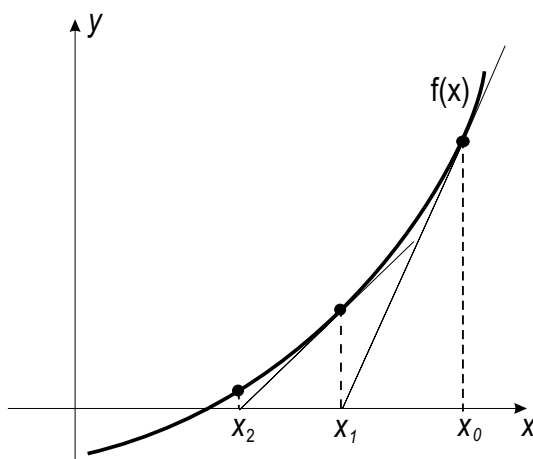
Pre $\eta = 0$

$$u = \frac{n+3}{\eta} f, \quad \frac{1}{\eta} v - \frac{1}{\eta^2} u = 0, \quad h = 1. \quad (5.18)$$

Pre $\eta \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\eta} u = 0, \quad h = 0. \quad (5.19)$$

Konečno-diferenčnú schému sme vytvorili nahradením jednotlivých derivácií v rovniciach konečno-diferenčnými aproximáciami. Zvolili sme dopredné diferencie, ktoré aproximujú spojité funkcie premennej η v diskrétnych bodoch podľa vzťahu 5.10. Oblasť riešenia $0 \leq \eta \leq \eta_{max}$, kde η_{max} aproximuje ∞ je pokrytá rovnomernou sieťou s priestorovým krokom $\Delta\eta = (\eta_{max} - \eta_{min}) / (NP - 1)$, kde NP je počet uzlových bodov. Hodnoty funkcie pre prvý a posledný uzlový bod sú doplnené z okrajových podmienok. Rovnice a okrajové podmienky aproximované v každom uzlovom bode konečnými diferenciami tvoria systém nelineárnych algebraických rovníc, ktorý riešime pomocou *Newtonovej metódy*. Samotná metóda vychádza z Taylorovho radu zachovaním jeho



Obr. 5.3: Náčrt Newtonovej metódy.

prvých dvoch členov ($f(x_0 + a) \sim f(x_0) + f'(x_0)a$), kde x_0 je počiatočne zvolený bod, ktorý je nutné upraviť o hodnotu posunutia a tak, aby bolo možné priblížiť sa k hľadanému koreňu pri riešení polynómu $f(x_0 + a) = 0$ (obrázok 5.3).

V našom prípade má systém rovníc $NP \times 5$ neznámych, čo znamená, že počiatočný odhad musí byť vektor dĺžky $NP \times 5$. Newtonova metóda nám redukuje problém na riešenie sústavy rovníc

$$\text{jac}^k \cdot \Theta^k = -\mathbf{G}^k, \quad (5.20)$$

kde

$$\Theta^k = \mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k. \quad (5.21)$$

jac^k je jakobián sústavy vyjadrený na základe k -teho odhadu vektora \mathbf{g}^k , vektor \mathbf{G}^k je tvorený ľavými stranami rovníc. V prvom kroku dosadíme počiatočný odhad \mathbf{g}^0 do systému rovníc, čím získame vektor Θ^0 . Nový vektor \mathbf{g}^1 dostaneme tak, že vektor Θ^0 pripočítame k predchádzajúcemu vektoru \mathbf{g}^0 podľa vzťahu (5.21). Iterácie opakujeme až pokiaľ nie je splnená podmienka $\Theta^k = \mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k \doteq \mathbf{0}$. Ak je počiatočný odhad blízky k exaktnému riešeniu, Newtonova metóda konverguje k tomuto riešeniu kvadraticky.

Preto je veľmi dôležité správne „odhadnúť“ počiatočnú hodnotu. Túto sme získali z riešenia linearizovaných rovníc (5.15) a (5.17). Nelineárne členy rovníc sme násobili parametrom τ , ktorý sme položili rovný nule, čím sme dostali systém rovníc, ktorý sa dá riešiť analyticky. Pripomenieme, že riešením sú funkcie premennej η . Počiatočný odhad sme získali vyjadrením týchto funkcií v uzlových bodoch konečno-diferenčnej siete. Na riešenie úplných nelineárnych rovníc newtonovskej kvapaliny sme použili numerickú kontinuáciu v τ , to znamená, že v ďalšom kroku sme zvyšovali jeho hodnotu až po $\tau = 1$, pričom ako počiatočný odhad sme použili riešenie pre predchádzajúcu hodnotu τ . Pri riešení rovníc ne-newtonovskej kvapaliny sme pridali ešte numerickú kontinuáciu v n – začali sme s $n = 1$ a v ďalšom kroku sme n zvýšili, pričom pri každej hodnote n prebehla jedna kontinuácia v τ . Numerický výpočet je teda tvorený dvoma cyklami: vonkajší cyklus (kontinuácia v n) a vnútorný cyklus (kontinuácia v τ). Takto postupujeme až po $n = 3$ a $\tau = 1$.

5.2.3 Výsledky a ich diskusia

Náš výpočet je rozdelený do dvoch častí; v prvej časti riešime rovnice pre $n = 1$ (model vzostupného prúdu s newtonovskou reológiou), a v druhej časti prejdeme numerickou kontinuáciou k ne-newtonovskej reológii ($n = 3$). Výpočty sú prevedené pre rôzne rozdiely teplôt medzi stredom vzostupného prúdu (T_c) a ďaleko od jeho osi (T_∞). Použité reologické parametre a konštanty pre jednotlivé prípady sú uvedené v tabuľkách 5.2.3 a 5.2.3. Materiály *Newton 1* a *Newton 2* zodpovedajúce newtonovskej reológii sme prebrali z prác Froidevaux a Schubert (1975) a Schubert a Turcotte (1972). Reologické parametre pre *mokrý* a *suchý olivín* sú získané z experimentov Post (1973) a Kohlstedt a Goetze (1974). V prípade ne-newtonovských materiálov uvažujeme dolný a horný odhad možných hodnôt aktivačného objemu.

Metóda numerickej kontinuácie riešení sa úspešne použila pri integrácii sebe-podobných obyčajných diferenciálnych rovníc modelu vzostupného prúdu s nelineárnou, ne-newtonovskou reológiou zodpovedajúcou tzv. mokrým a suchým olivínom pre teplotné rozdiely 100 a 200 K. V niektorých prípadoch sa kontinuácia v τ dala obísť, pretože riešenia s kontinuáciou a bez nej konvergovali k tomu istému riešeniu, čo má význam z časového hľadiska. Naopak, kontinuácia v n je citlivá na výber kroku v n ; pre niektoré hodnoty n numerický algoritmus nekonvergoval, čo naznačuje, že prechod od jedného riešenia k druhému v priestore parametra n pravdepodobne nie je spojitý.

n	$T_c - T_\infty$ (°C)	V^* (cm ³ mol ⁻¹)	E^* (J mol ⁻¹)	B_n (cm s °C g ⁻¹ , $n = 1$; cm ³ s ⁵ °C g ⁻³ , $n = 3$)
Newton 1 ($n = 1$)	100, 200	11	4×10^5	2.4×10^{-3}
Newton 2 ($n = 1$)	100, 200	9	4.4×10^5	1.8×10^{-4}
Mokrý olivín ($n = 3$)	100, 200	11, 30	4×10^5	5.4×10^{-15}
Suchý olivín ($n = 3$)	100, 200	11, 30	5.2×10^5	6.45×10^{-13}

Tabuľka 5.1: Reologické parametre.

R (J mol ⁻¹ °C ⁻¹)	8.315
T_∞ (°C)	1623.16
κ (cm ² s ⁻¹)	10^{-2}
ρ (g cm ⁻³)	3.3
g (cm s ⁻²)	10^3
α (°C ⁻¹)	3×10^{-5}
z (km)	200

Tabuľka 5.2: Ostatné rozmerné fyzikálne parametre.

Na to, aby sme vedeli povedať niečo o kvantitatívnych vlastnostiach modelu, potrebujeme prejsť späť k rozmerným veličinám. Prechod od bezrozmernej škály rýchlosti a teploty k ich rozmerným tvarom je priamočiary. Na základe týchto veličín potom určíme strižné napätie a efektívnu viskozitu ako funkciu vzdialenosti od osi vzostupného prúdu. Grafy rozmernej teploty, horizontálnej a vertikálnej rýchlosti, strižného napätia a efektívnej viskozity pre rôzne materiály sú zobrazené na stranách 53–55.

Priebeh teploty je daný rozdielom teploty vzostupného prúdu a teploty plášťa ďaleko od osi prúdu ($T_\infty = 1350$ °C). Na osi vzostupného prúdu sme predpísali teplotný rozdiel 100 a 200 °C. Teplota dosahuje maximálne hodnoty v strede vzostupného prúdu, vo veľkej vzdialenosti od osi sa teplota prúdu blíži k teplote okolitého plášťa. Grafy s priebehom funkcií teploty porovnávajú priebeh teploty pre Newton 1 (plné čiary) verzus Newton 2 (bodkované čiary), mokrý a suchý olivín s aktivačným objemom $11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (plné čiary) verzus mokrý a suchý olivín s aktivačným objemom $30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (bodkované čiary). V prvom prípade (plné čiary) klesá teplota rýchlejšie, čo sa odráža v hrúbke teplotnej hraničnej vrstvy (porovnaj tab. 3.3).

Vertikálna rýchlosť verzus vzdialenosť od osi vzostupného prúdu je klesajúca funkcia. Zaujímavým výsledkom je porovnanie vertikálnych rýchlostí vzhľadom na teplotný rozdiel. Pri konštantných materiálových parametroch s narastajúcim teplotným rozdielom narastá vertikálna rýchlosť prúdu. Naopak, pri konštantnom teplotnom rozdieli závisí vertikálna rýchlosť od typu materiálu, z ktorého je plášť zložený, a teda od jeho reológie. Maximálna vertikálna rýchlosť newtonovského vzostupného prúdu je 12 cm/rok (Newton 1; teplotný rozdiel 200 K), zatiaľ čo maximálna vertikálna rýchlosť ne-newtonovského prúdu je 70 cm/rok (mokrý olivín; teplotný rozdiel 200 K; aktivačný objem $11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$). Zároveň však treba poznamenať, že v ne-newtonovskej reológii má na hodnotu vertikálnej rýchlosti veľký vplyv aktivačný objem. Pri jeho zmene z hodnoty $11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ na $30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ sa vertikálna rýchlosť zmenší približne o jeden rád.

Horizontálne rýchlosti sú nulové na osi vzostupného prúdu a narastajú so vzdialenosťou od osi. Hodnoty horizontálnej rýchlosti sa menia relatívne málo, na úrovni desiatín centimetra za rok.

Strižné napätie závisí od teplotného rozdielu ako aj od vertikálnej rýchlosti. Od osi vzostupného prúdu postupne narastá a maximálne hodnoty 4×10^5 až 2×10^7 Pa dosahuje vo vzdialenosti 5–20 km. V prípade newtonovskej kvapaliny má na gradient v strižnom napätí najväčší vplyv teplotné rozdelenie; maximálne hodnoty strižného napätia sa dosahujú pri väčšom teplotnom rozdieli. Naopak, v prípade ne-newtonovských materiálov na strižné napätie vplyva najviac hodnota aktivačného objemu.

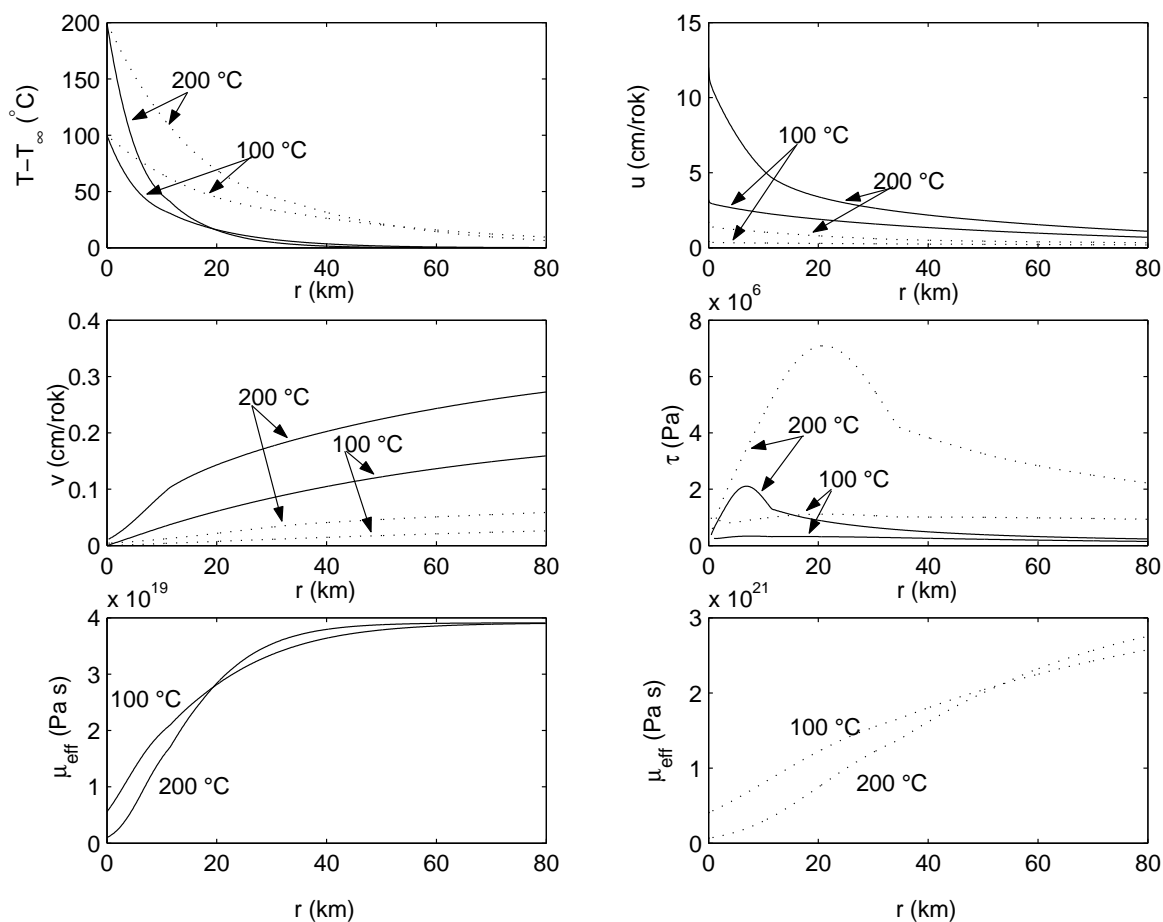
Efektívna viskozita nadobúda najnižšie hodnoty na osi vzostupného prúdu, čo súvisí s maximálnou teplotou v tejto oblasti ako naznačuje exponenciálny faktor vo vzťahu pre efektívnu viskozitu. Hodnoty sa pohybujú rádovo okolo 10^{19} až 10^{22} Pa s, pričom v hraničnej vrstve, kde teplota rýchlo klesá, je viskozita nízka, ale ďalej takisto rýchlo narastá.

materiál	δ_T (km)	δ_u (km)
newton 1, 100	8.89	48.26
newton 1, 200	6.41	12.77
newton 2, 100	26.43	110.24
newton 2, 200	18.70	28.48
wo, 100, V11	4.4	3.88
wo, 100, V30	19.32	12.35
wo, 200, V11	2.92	1.94
wo, 200, V30	12.56	7
do, 100, V11	9.2	6.38
do, 100, V30	40.36	21.05
do, 200, V11	5.98	3.49
do, 200, V30	25.63	12.35

Tabuľka 5.3: Tabuľka hrúbky hraničných vrstiev. Označenie: wo–mokrý olivín, do–suchý olivín, 100–teplotný rozdiel 100 K, 200–teplotný rozdiel 200 K, V11–aktivačný objem $11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$, V30–aktivačný objem $30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$.

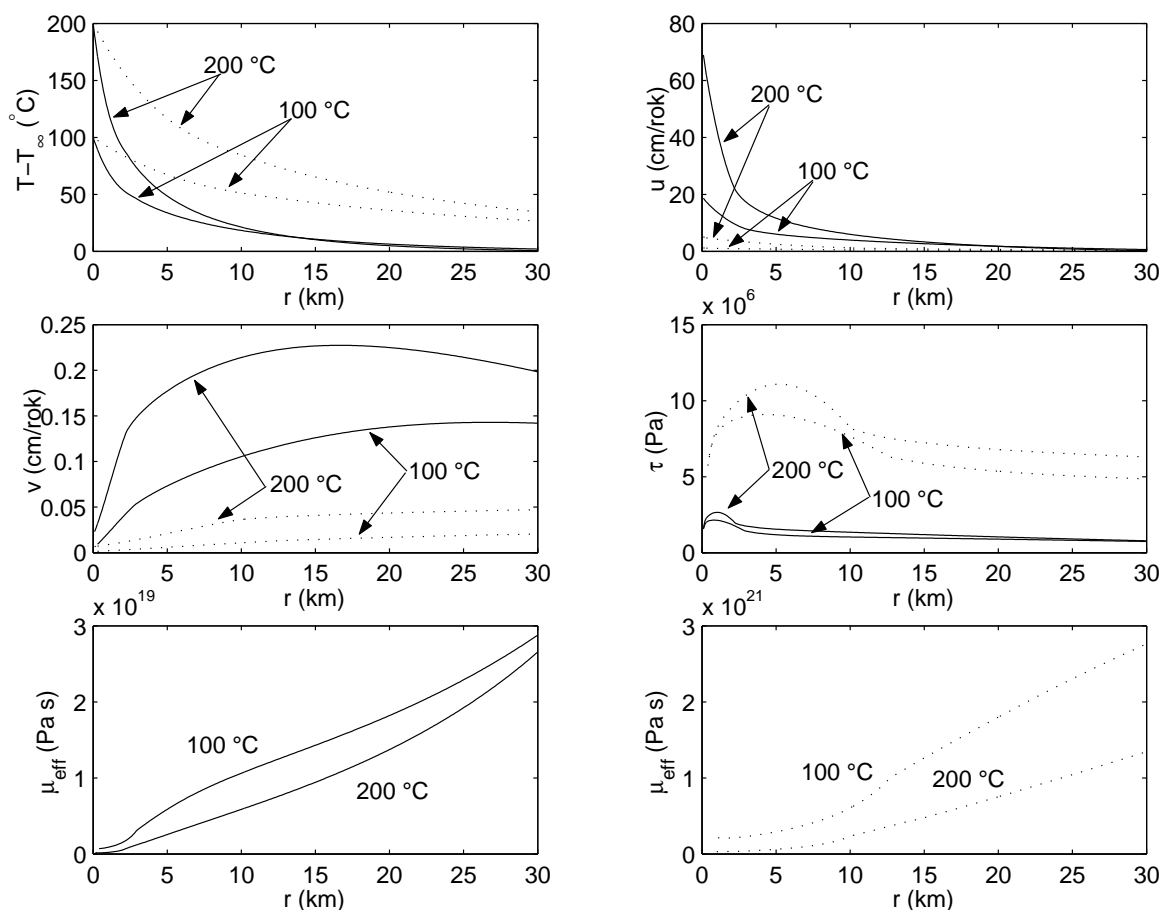
Hrúbka hraničnej vrstvy (teplotná aj rýchlostná) v modeli s teplotne závislou viskozitou je úmerná $h^{(n+2)/(n+3)}$, kde h je charakteristická dĺžka daná vzťahom (4.19). Keďže charakteristická dĺžka bola získaná normovaním Grashoffovho čísla na jednotku, hrúbka hraničných vrstiev súvisí s bezrozmernými parametrami systému ako Rayleighovo a Prandtlovo číslo. Hrúbky tepelnej hraničnej vrstvy (δ_T) a hraničnej vrstvy vertikálnej rýchlosti (δ_u) sú rôzne pre jednotlivé materiály, závisia od teplotného rozdielu a aktivačného objemu. Ich hodnoty sme dostali podobne ako v prípade konvekcie nad bodovým zdrojom tepla, čiže ako vzdialenosť, na ktorej hodnoty T a u poklesnú e -krát. Uvedené sú v tabuľke 5.3.

Newton 1 (—), Newton 2 (···); $n = 1$



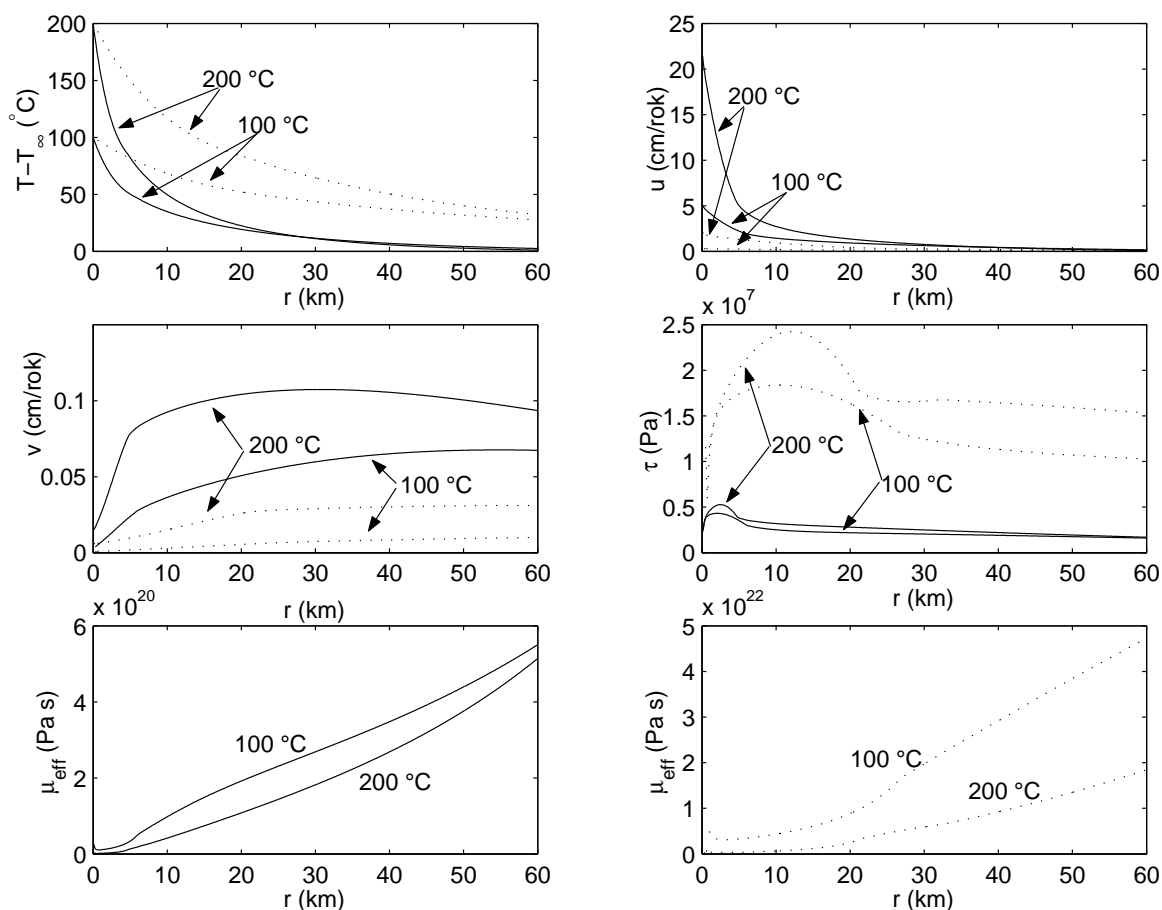
Obr. 5.4: Grafy teploty T , vertikálnej rýchlosti u , horizontálnej rýchlosti v , strižného napätia τ a efektívnej viskozity μ_{eff} v závislosti od vzdialenosti od osi vzostupného prúdu r . Plné a čiarkované čiary zodpovedajú prípadom Newton 1 a Newton 2. Reologický parameter je $n = 1$.

Mokrý Olivín; $n = 3$, $V^* = 11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (—),
 $V^* = 30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (···)



Obr. 5.5: Grafy teploty T , vertikálnej rýchlosti u , horizontálnej rýchlosti v , strižného napätia τ a efektívnej viskozity μ_{eff} v závislosti od vzdialenosti od osi vzostupného prúdu r . Plné a čiarkované čiary predstavujú postupne mokrý olivín s $V^* = 11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ a s $V^* = 30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$. Reologický parameter je $n = 3$.

Suchý Olivín; $n = 3$, $V^* = 11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (—),
 $V^* = 30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (···)



Obr. 5.6: Grafy teploty T , vertikálnej rýchlosti u , horizontálnej rýchlosti v , strižného napätia τ a efektívnej viskozity μ_{eff} v závislosti od vzdialenosti od osi vzostupného prúdu r . Plné a čiarkované čiar predávajú postupne suchý olivín s $V^* = 11 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ a s $V^* = 30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$. Reologický parameter je $n = 3$.

Záver

Práca je zameraná na matematický model osovymetrických plášťových vzostupných prúdov s využitím teórie hraničných vrstiev. Úlohou bolo aplikovať poznatky o ne-newtonovských kvapalinách na zemský plášť.

V prvej časti sme zreprodukovali konvekciu generovanú bodovým zdrojom tepla s konštantnou viskozitou a newtonovskou kvapalinou (Fujii (1962)). Diferenciálny systém sme riešili pomocou metódy strelby.

V druhej časti sme postup zopakovali v pôvodnom modeli vzostupného prúdu s využitím nelineárnej reológie s teplotne závislou efektívnou viskozitou. Základ analýzy tvorí riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc prostredníctvom zavedenia prúdovej funkcie a podobnostnej transformácie za účelom získať ekvivalentný systém obyčajných diferenciálnych rovníc. Tento systém sme riešili metódou konečných diferencií. Pri integrácii sebe-podobných obyčajných diferenciálnych rovníc s nelineárnou, ne-newtonovskou reológiou zodpovedajúcou tzv. mokrým a suchým olivínom sa úspešne použila metóda numerickej kontinuácie. Podarilo sa nám získať rozmerné veličiny systému a porovnať ich pre newtonovské a ne-newtonovské materiály. Hodnoty vertikálnej rýchlosti, strižného napätia a efektívnej viskozity nášho modelu sú kvantitatívne porovnateľné so známymi odhadmi týchto veličín v zemskom plášti.

V geologickej minulosti boli hodnoty teploty plášťa vyššie ako dnešné hodnoty a tým aj vyššie Rayleighovo číslo, čiže konvektívny režim v plášti vyzeral odlišne ako v súčasnosti. Experimentálne a numerické modely poukazujú na existenciu dvoch konvektívnych režimov: konvekcia s nízkou turbulenciou pri Rayleighových číslach menších ako 4×10^7 a s vysokou turbulenciou s väčšími Rayleighovými číslami. Vysoká turbulencia je charakterizovaná početnými, relatívne malými, neprepojenými vzostupnými prúdmi (alebo diapírmami) a chaotickou konvekciou.

Veľmi zaujímavým rozšírením nášho modelu by bolo zahrnutie efektov zdrojového člena, ktorý by modeloval turbulentný tepelný tok generovaný okolitou chaotickou konvekciou.

Literatúra

- [Acheson (1990)] ACHESON, D. J. (1990). Elementary Fluid Dynamics. *Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*.
- [Bercovici a Kelly (1997)] BERCOVICI, D. AND KELLY, A. (1997). The non-linear initiation of diapirs and plume head. *Phys. Earth Planet. Int.*, **101**, 119–30.
- [Brunet a Yuen (2000)] BRUNET, D. AND YUEN, D.A. (2000). Mantle plumes pinched in the transition zones. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **178**, 13–27.
- [Condie (2001)] CONDIE, C.K. (2001). Mantle plumes and their record in Earth history. *Cambridge University Press*.
- [Davies, (1999)] DAVIES, G. F. (1999). Dynamic Earth. *Cambridge University Press*.
- [Emery, Chi, Dale (1971)] EMERY, A.F., CHI, H.W., DALE, J.D. (1971). Free convection through vertical plane layers of non-newtonian power law fluids. *Journal of Heat Transfer*, 164–171.
- [Froidevaux a Schubert (1975)] FROIDEVAUX, C. AND SCHUBERT, G. (1975). Plate motion and structure of the continental asthenosphere. A realistic model of the upper mantle. *J. Geophys. Res.*, **80**, 2553–2565.
- [Fujii (1962)] FUJII, T. (1962). Theor of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **6**, 597–606.
- [Griffiths, Campbell (1990)] GRIFFITHS, R.W. AND CAMPBELL, I.H. (1990). Stirring and structure on mantle plumes. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **99**, 66–78.
- [Griffiths, Campbell (1991)] GRIFFITHS, R.W. AND CAMPBELL, I.H. (1991). Interaction of mantle plumes heads with the Earth's surface and of small-scale convection. *J. Geophys. Res.*, **96**, 295–310.

-
- [Huang, Chen (1990)] HUANG, MING-JER., CHEN, CHA'O-KUANG. (1990). Local similarity solutions of free convective heat transfer from a vertical plate to non-Newtonian power law fluids. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 119–125.
- [Kellogg a King (1997)] KELLOGG, L.H. AND KING, S.D. (1997). The effect of temperature-dependent viscosity on the structure of new plumes in the mantle: Results of a finite element model in a spherical, axisymmetric shell. *Earth Planet Sci. Lett.*, **148**, 13–26.
- [Kenneth (2003)] KENNETH, A.L. (2003). Numerical solution of partial differential equations. www.maths.gla.ac.uk/~kal/NSPDE.pdf
- [Kohlstedt a Goetze (1974)] KOHLSTEDT, D. L. AND GOETZE, C. (1974). Low-stress high-temperature creep in olivine single crystals. *J. Geophys. Res.*, **79**, 2045–2051.
- [Kubair, Pei (1967)] KUBAIR, V.G., PEI, D.C.T. (1967). Combined laminar free and forced convection heat transfer to non-newtonian fluids. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **11**, 855–869.
- [Magyari, Keller, Pop (2003)] MAGYARI, E., KELLER, B., POP, I. (2003). Heat transfer characteristic of a boundary-layer flow driven by a power-law shear over a semi-infinite flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **47**, 31–34.
- [Moczo a kol. (2004)] MOCZO, P., KRISTEK, J., HALADA, L. (2004). The finite-difference method for seismologists. *Comenius University Bratislava*.
- [Oliver a Ghent (2000)] OLIVER, D.H. AND GHENT, R.R. (2000). Superplumes and rotation-induced flow along the CMB. *Geol. Soc. America*, **32**, A–314.
- [Post (1973)] POST, R. L. AND GRIGGS, D. T. (1973). The Earth's mantle: evidence of non-newtonian flow. *Science*, **181**, 1242–1244.
- [Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery (1992)] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. (1992). Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing. *Cambridge University Press*.
- [Ranalli (1987)] RANALLI, G. (1987). Rheology of the Earth. *Allen & Unwin*.
- [Schubert, Turcotte, Olson (2001)] SCHUBERT, G., TURCOTTE, D.L., OLSON, P. (2001). Mantle convection in the Earth and planets. *Cambridge University Press*.
- [Schubert a Turcotte (1972)] SCHUBERT, G. AND TURCOTTE, D. L. (1972). One-dimensional model of shallow-mantle convection. *J. Geophys. Res.*, **77**, 945–951.

- [Schulman, Baikov, Zaltsgendler (1975)] SCHULMAN, Z.P., BAIKOV, V.I., ZALTS-
GENDLER, E.A. (1975). An approach to prediction of free convection in non-
newtonian fluids. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19**, 1003–1007.
- [Steinberger, O’Connell (1998)] STEINBERGER, B. AND O’CONNELL, R.J. (1998).
Advection of plumes in mantle flow: Implications for hotspot motion, mantle vis-
cosity and plume distribution. *Geophys. J. Int.*, **132**, 412–34.
- [Turcotte, Schubert (2002)] TURCOTTE, D. L. AND SCHUBERT, G. (2002). Geody-
namics. *Cambridge University Press*.

Príloha

Fragment programu na riešenie rovníc ne-newtonovskej kvapaliny s využitím metódy konečných diferencií.

System diferenciálnych rovníc 1. rádu:

$$\begin{aligned}
 \text{ODEsTau} &= \{f'[\eta] - u[\eta] == 0, \\
 &u'[\eta] - v[\eta] == 0, \\
 &\tau e^{A/n} (1/c - 1/(c+h[\eta])) (c + h[\eta])^{-1/n} \eta^{2/n} \left(((\eta v[\eta] - u[\eta])^2)^{1/2} \right)^{n-1} h[\eta] \\
 &- \tau (1 - A/(c + h[\eta])) 1/(c + h[\eta]) ((\eta v[\eta] - u[\eta])^2)^{1/2} w[\eta] \\
 &- (n - 2) 1/\eta ((\eta v[\eta] - u[\eta])^2)^{1/2} + \eta v'[\eta] == 0, \\
 &h'[\eta] - w[\eta] == 0, \\
 &w[\eta] + \eta w'[\eta] + \tau f[\eta] w[\eta] == 0\}
 \end{aligned}$$

Aproximácia derivácií konečno-diferenčnými formulami:

$$\begin{aligned}
 \text{FDRules} &= \\
 &\{f'[\eta] \rightarrow (f[i] - f[i - 1])/\Delta\eta, f[\eta] \rightarrow (1/2)(f[i] + f[i - 1]), \\
 &u'[\eta] \rightarrow (u[i] - u[i - 1])/\Delta\eta, u[\eta] \rightarrow (1/2)(u[i] + u[i - 1]), \\
 &v'[\eta] \rightarrow (v[i] - v[i - 1])/\Delta\eta, v[\eta] \rightarrow (1/2)(v[i] + v[i - 1]), \\
 &h'[\eta] \rightarrow (h[i] - h[i - 1])/\Delta\eta, h[\eta] \rightarrow (1/2)(h[i] + h[i - 1]), \\
 &w'[\eta] \rightarrow (w[i] - w[i - 1])/\Delta\eta, w[\eta] \rightarrow (1/2)(w[i] + w[i - 1])\};
 \end{aligned}$$

Nahradenie derivácií v rovniciach konečno-diferenčnými formulami:

$$\text{FDTemplateTau} = \text{ODEsTau}/.\text{FDRules}/.\eta \rightarrow \eta[i]$$

Riešenie linearizovaných rovníc:

$$\text{DSolve}[\{h'[\eta] + \eta h''[\eta] == 0, h[\text{zero}] == 1, h[\eta\text{max}] == 0\}, h[\eta], \eta]$$

$$\text{DSolve}[\{f'[\eta]/\eta + \eta f'''[\eta] == f''[\eta], f'[\text{zero}] == 4 f[\text{zero}]/\text{spe}, f'[\eta\text{max}] \eta\text{max} == 0, 1/\text{spe} (f''[\text{zero}]) - (1/\text{spe}^2) f'[\text{zero}] == \text{eps}\}, f[\eta], \eta]//\text{Simplify}$$

Vytvorenie konečno-diferenčnej siete; príprava počiatočného vektora:

```
eps:=10-4; spe:=10-5; zero:=10-6;
ηmin = 0; ηmax = 20; NP = 40;
Δη = N[(ηmax - ηmin)/(NP - 1)];
```

```
myGrid = Join[{zero}, Table[η[i] = (i - 1)Δη, {i, 2, NP}]];
```

```
f̄ = Array[f, NP]; ū = Array[u, NP]; v̄ = Array[v, NP];
h̄ = Array[h, NP]; w̄ = Array[w, NP];
ḡ = Flatten [Table [{f̄[[i]], ū[[i]], v̄[[i]], h̄[[i]], w̄[[i]]}, {i, 1, NP}]];
```

```
fLinear[η_]:= (eps spe2 (zero2 - η2 + (spe - 2 zero) zero Log[zero] + 2 η2Log[η]
- spe zero Log[ηmax] + 2 zero2Log[ηmax] - 2 η2Log[ηmax]))/
(4 (spe + (spe - zero)Log[zero] + (-spe + zero)Log[ηmax]));
```

```
uLinear[η_]:= eps spe2η (-Log[η] + Log[ηmax])/
spe + (spe - zero) Log[zero] + (-spe + zero)Log[ηmax];
```

```
vLinear[η_]:= eps spe2(-1 - Log[η] + Log[ηmax])/
spe + (spe - zero) Log[zero] + (-spe + zero) Log[ηmax];
```

```
hLinear[η_]:= Log[η] - Log[ηmax]/Log[zero] - Log[ηmax];
```

```
wLinear[η_]:= 1/η (Log[zero] - Log[ηmax]);
```

Okrajové podmienky:

```
BC1 = u[1] - (n + 3)/spe(f[1]) == 0;
BC2 = 1/spe(v[1]) - (1/spe2)(u[1]) == 0;
BC3 = h[1] - 1 == 0;
BC4 = (1/ηmax)(u[NP]) == 0;
BC5 = h[NP] == 0;
```

Vytvorenie počiatočného vektora:

```
initialf = Thread[fLinear[Flatten[Transpose[{myGrid}]/{- → η-} → {η}]]];
```



```

initialu = Thread[uLinear[Flatten[Transpose[{myGrid}]/.{_ -> η-} -> {η}]]];
initialv = Thread[vLinear[Flatten[Transpose[{myGrid}]/.{_ -> η-} -> {η}]]];
initialh = Thread[hLinear[Flatten[Transpose[{myGrid}]/.{_ -> η-} -> {η}]]];
initialw = Thread[wLinear[Flatten[Transpose[{myGrid}]/.{_ -> η-} -> {η}]]];
initial = Flatten[Table[{initialf[[i]], initialu[[i]], initialv[[i]], initialh[[i]],
initialw[[i]]}, {i, 1, NP}]];

```

```

Δf = Array[Δf, NP]; Δu = Array[Δu, NP]; Δv = Array[Δv, NP]; Δh = Array[Δh, NP];
Δw = Array[Δw, NP];

```

```

Θ̄ = Flatten [Table [{Δf[[i]], Δu[[i]], Δv[[i]], Δh[[i]], Δw[[i]]}, {i, 1, NP}]];

```

Počet iterácií potrebných ku konvergencii Newtonovej metódy s presnosťou menšou ako vzdialenosť dvoch bodov v konečno-diferenčnej sieti:

```

FDEqnsTau = Flatten[{Table[FDTemplateTau, {i, 2, NP}], BC1, BC2, BC3, BC4, BC5}];
G = Map[#[[1]]&, FDEqnsTau];
jac = Outer [D, Map[#[[1]]&, FDEqnsTau], g];
NewtonEqn[S_List]:= Thread [jac.Θ̄ == -G] /.param100V11/.n -> 1/.τ -> 1
/.Thread [g -> S];
iterk = Thread [Nest [(# + Flatten [Θ̄/.Solve[NewtonEqn[#]])] &, initial, 1]];
iterkk = Thread [Nest [(# + Flatten [Θ̄/.Solve[NewtonEqn[#]])] &, initial, 2]];
k = 2;
While[
Max[Abs[iterk - iterkk]] > Δη,
iterk = Thread [Nest [(# + Flatten [Θ̄/.Solve[NewtonEqn[#]])] &, initial, k]];
iterkk = Thread [Nest [(# + Flatten [Θ̄/.Solve[NewtonEqn[#]])] &, initial, k + 1]];
k++;

```

Iterácia v τ a n ; vykreslenie bezrozmerných riešení v každej iterácii:

```

τsteps = 10; Δτ = 1/τsteps
guess = initial; Do[Print["n = ", n];
Do[
Print["τ = ", τ];
FDEqnsTau = Flatten[{Table[FDTemplateTau, {i, 2, NP}], BC1, BC2, BC3, BC4, BC5}];
G = Map[#[[1]]&, FDEqnsTau];
jac = Outer [D, Map[#[[1]]&, FDEqnsTau], g];

```

```

NewtonEqn[S_List]:=Thread [jac. $\bar{\Theta}$  == -G] /.param100V11/.Thread [ $\bar{g}$  → S];
sol100V11 = Thread [Nest [(# + Flatten [ $\bar{\Theta}$ /.Solve[NewtonEqn[#]])] &, guess, 6]];
pltf100V11 = ListPlot[Transpose[{myGrid, Table[Partition[sol100V11, 5][[i, 1]], {i, 1, NP}]}],
PlotJoined → True, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction → Identity];
plth100V11 = ListPlot[Transpose[{myGrid, Table[Partition[sol100V11, 5][[i, 4]], {i, 1, NP}]}],
PlotJoined → True, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0], DisplayFunction → Identity];
Show[{pltf100V11, plth100V11}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
AxesLabel → {" $\eta$ ", "f[ $\eta$ ]", "h[ $\eta$ "]};
guess = sol100V11;
FDEqnsTau=.; jac=.; G=., { $\tau$ , 0.1, 1,  $\Delta\tau$ }, {n, 1., 3., 0.25}]

```