

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**EFEKTÍVNY VÝPOČET SEIZMICKÉHO POHYBU
METÓDOU KONEČNÝCH ELEMENTOV**

DIZERTAČNÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2008

Mgr. MARTIN BALAŽOVJECH

Efektívny výpočet seizmického pohybu metódou konečných elementov

DIZERTAČNÁ PRÁCA

Mgr. Martin Balažovjeh

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

4.1.9 GEOFYZIKA

Školiteľ: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2008

PodĎakovanie

Za odborné vedenie, podporu, cenné rady a diskusie v doktorandskom štúdiu Ďakujem môjmu školiteľovi prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. Ďakujem Doc. RNDr. Ladislavovi Haladovi, CSc. za odbornú pomoc, spoluprácu a cenné rady v priebehu celej práce. Ďakujem aj Mgr. Martinovi Gálishovi, PhD. za užitočné diskusie a numerické testy, prof. RNDr. Jánovi Pišútovi, DrSc. za pomoc a cenné rady, RNDr. Petrovi Pažákovi za ochotu a pomoc pri riešení technických problémov. Ďakujem kolegom z Katedry astronómie, fyziky Zeme a meteorológie FMFI UK za vytvorenie tvorivého prostredia, za ich podporu a porozumenie.

Abstrakt

Mgr. Martin Balažovjeh

Efektívny výpočet seizmického pohybu
metódou konečných elementov

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Školiteľ: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2008

?? strán

Predkladaná dizertačná práca je venovaná riešeniu pohybovej rovnice kontinua metódou konečných elementov (MKE) s cieľom vytvoriť výpočtový algoritmus, ktorý bude efektívnejší ako známe algoritmy z hľadiska výpočtového času a pamäti.

V úvodnej časti sú vysvetlené dve formulácie MKE. Formulácia s maticou tuhosti a formulácia s vektorom vratnej sily. Formulácia s maticou tuhosti má vysoké nároky na operačnú pamäť počítača ale nízke nároky na výpočtový čas. Formulácia s vektorom vratnej sily má naopak nízke nároky na operačnú pamäť počítača ale vysoké nároky na výpočtový čas.

V hlavnej časti predkladanej dizertačnej práce navrhujeme nový spôsob výpočtu vo formulácii MKE s vektorom vratnej sily, ktorý výrazne redukuje nároky na výpočtový čas pri zachovaní nárokov na operačnú pamäť počítača. Hlavná myšlienka urýchlenia výpočtu spočíva v použití nových bázových funkcií, ktoré umožňujú využiť vo výpočte e-invarianty. e-invariantmi sme nazvali nové efektívne parametre, ktoré eliminujú nadbytočnú informáciu vo výpočte vratnej sily a znižujú tak celkový počet operácií.

Kľúčové slová: metóda konečných elementov, e-invarianty, ortogonálna
báza, vektor vratnej sily

Predhovor

Jednou zo zásadných úloh seizmológie je predpoveď seizmického pohybu na záujmovej lokalite počas budúcich zemetrasení. Seizmický pohyb povrchu Zeme je spôsobený seizmickými vlnami. Seizmické vlny sú vlny, ktoré sa šíria v zemskom telese. Sú generované pri vzniku a šírení trhliny na seizmoaktívnom zlome.

Vnútro Zeme možno z hľadiska šírenia seizmických vln považovať za viskoelastické kontinuum. Charakteristické časy pri vzniku a šírení trhliny a následné periódy seizmických vln sú relatívne krátke. Dominantným je preto elasticke správanie vnútra Zeme. Nemožno však zanedbať útlm v dôsledku viskoelasticity. Šírenie vln v elasticom alebo viskoelastickom kontinuu sa riadi pohybovou rovnicou kontinua. Vzhľadom na to, že povrch Zeme má zložitú topografickú štruktúru a vnútro Zeme je nehomogénne, riešime pohybovú rovnicu kontinua približnými metódami. V prípade seizmického pohybu povrchu Zeme spôsobeného zemetraseniami sú najdôležitejšie numerické metódy. Stručnú ale výstižnú charakteristiku numerického modelovania seizmického pohybu možno nájsť napríklad v práci Moczo a Kristek (2004).

Numerické metódy používané v seizmológii možno rozdeliť do troch hlavných skupín:

1. hraničné metódy,
2. doménové metódy,
3. hybridné metódy.

Do prvej skupiny patria napr. metóda hraničných elementov a metóda diskretných vlnových čísiel. Do druhej skupiny patria napr. metóda konečných elementov (MKE), metóda spektrálnych prvkov a metóda konečných diferencií (MKD). Do tretej skupiny patria rôzne kombinácie individuálnych metód.

Hraničné metódy sú presnejšie ako doménové, ale prakticky ich môžeme použiť v prípade jednoduchých modelov, ktoré pozostávajú len z dvoch-troch homogénnych vrstiev. V prípade dostatočne realistických modelov, ktoré sú štrukturálne zložené, používame doménové metódy, ako sú MKD a MKE. V súčasnosti je dominantná metóda MKD, ktorá je časovo a pamäťovo veľmi efektívna a tiež aplikovateľná na zložené modely. Podrobný výklad možno nájsť napr. v monografiách Moczo et al. (2004, 2007a, 2007b).

MKD má problémy so splnením okrajových podmienok na povrchu Zeme, ktorý má zložitú topografiu. MKE tieto problémy nemá. V úvode dizertačnej práce podrobne vysvetlíme dve formulácie riešenia pohybovej rovnice kontinua pomocou MKE:

1. formuláciu s maticou tuhosti,
2. formuláciu s vektorom vratnej sily.

Formulácia s maticou tuhosti si vyžaduje príliš veľkú počítačovú pamäť a pre veľké a štruktúralne zložité modely je nepoužiteľná. V takomto prípade používame formuláciu s vektorom vratnej sily, ktorá má nízke nároky na počítačovú pamäť ale extrémne vysoké nároky na výpočtový čas. Hlavná časť dizertačnej práce pojednáva o algoritme, ktorý redukuje nároky na výpočtový čas v MKE formulácii s vektorom vratnej sily.

Obsah

1	Úvod - súčasný stav problematiky	15
1.1	Numerické modelovanie seizmického pohybu	15
1.2	Metóda konečných elementov	16
1.3	Pohybová rovnica kontinua	17
1.4	Formulácia MKE s maticou tuhosti	19
1.4.1	Diskretizácia oblasti na podoblasti (<i>elementy</i>)	19
1.4.2	Diskretizácia priestorovej časti pohybovej rovnice pre element	21
1.4.3	Vytváranie rovnice pre celú oblasť	23
1.4.4	Riešenie rovnice pre celú oblasť	25
1.4.5	Problém s operačnou pamäťou počítača	26
1.4.6	Výpočet diagonálnej matice hmotnosti	26
1.5	Formulácia MKE s vektorom vratnej sily	28
1.5.1	Lokálny vektor vratnej sily	29
1.5.2	Výpočet lokálneho vektora vratnej sily	30
1.5.3	Vektor vratnej sily	31
2	Ciele dizertačnej práce	32
3	Výsledky dizertačnej práce	33
3.1	e-invarianty v 1D probléme	33
3.1.1	Transformačná matica e-invariantov	36
3.1.2	Výpočet lokálneho vektora vratnej sily s využitím e-invariantov	38
3.1.3	Algoritmus	39
3.2	Lokálny vektor vratnej sily v 2D probléme	39
3.2.1	Výpočet lokálneho vektora vratnej sily	43
3.2.2	Algoritmus bez využitia e-invariantov	47
3.2.3	Výpočet lokálneho vektora vratnej sily s využitím e-invariantov	49
3.2.4	Transformácia do e-invariantov	59
3.2.5	Algoritmus s využitím e-invariantov	60
3.3	Lokálny vektor vratnej sily v 3D probléme	63

3.3.1	Algoritmus bez využitia e-invariantov	67
3.3.2	e-invarianty	73
3.3.3	Algoritmus s využitím e-invariantov	76
3.4	Prípad elementu v tvare kocky	85
3.4.1	Algoritmus s využitím e-invariantov	87
3.5	Porovnanie výpočtových algoritmov	89
3.6	Zahrnutie realistického útlmu	91
4	Záver	94
	Literatúra	96

Zoznam obrázkov

1.4.1	<i>Diskretizácia oblasti.</i>	20
1.4.2	<i>Lokálny vektor vratnej sily.</i>	23
1.4.3	<i>Spájanie elementov.</i>	24
1.4.4	<i>Aproximácia časti kontinua s jednotkovou plochou medzi uzlami x_1 a x_2 nehmotnou pružinou so závažiami na oboch koncoch.</i>	28
1.4.5	<i>Fyzikálny model diskretizovaného elastického 1D prostredia s diagonálnou maticou hmotnosti.</i>	28
1.5.1	<i>Ilustrácia alternatívneho spôsobu výpočtu vektora vratnej sily.</i>	29
3.1.1	<i>e-invarianty v 1D probléme.</i>	34
3.2.1	<i>Bilineárna transformácia.</i>	40
3.2.2	<i>Bilineárna transformácia a e-invarianty.</i>	51
3.6.1	<i>Reologický model generalizovaného Maxwellovho telesa v definícii Emmerich a Korn (1987) – GMB-EK. Pružina predstavuje Hookove elastické teleso a tlmič predstavuje Stokesove viskózne teleso.</i>	91

Zoznam tabuliek

3.5.1	<i>Porovnanie počtov aritmetických operácií v 2D algoritmoch.</i>	90
3.5.2	<i>Porovnanie počtov aritmetických operácií v 3D algoritmoch.</i>	90
3.5.3	<i>Porovnanie výpočtových časov.</i>	90

1 Úvod - súčasný stav problematiky

1.1 Numerické modelovanie seizmického pohybu

Seizmický pohyb je vibračný mechanický pohyb povrchu Zeme počas zemetrasenia spôsobený seizmickými vlnami. Seizmické vlny sú generované pri šírení trhliny na zlome.

Keďže k vzniku a šíreniu trhliny dochádza v hĺbkach 1 až 10 *km* pod povrchom Zeme a porušená časť zlomu môže byť rádovo 10^0 až 10^5 *km*², priamy riadený fyzikálny experiment nie je možný. Priame merania seizmického pohybu sú obmedzené na povrch Zeme a takmer celá informácia o šírení trhliny a šírení seizmických vln je zakódovaná v záznamoch seizmometrov. Zložitosť procesu šírenia trhliny na zlome a vnútornej štruktúry Zeme neumožňuje použiť na výpočet seizmického pohybu analytické metódy. Preto je nástrojom na výpočet seizmického pohybu numerické modelovanie zlomového procesu a následného šírenia seizmických vln.

Na kvantitatívny popis procesu šírenia trhliny na zlome, šírenia seizmických vln v Zemi a seizmického pohybu zemského povrchu používame ako model lineárne elastické, prípadne viskoelastické kontinuum.

Numerické metódy riešenia možno rozdeliť do troch hlavných skupín:

1. hraničné metódy,
2. doménové metódy,
3. hybridné metódy.

Hraničné metódy (napr. metóda diskretných vlnových čísel, Bouchon, 1981) sú pomerne presné, avšak aplikovateľné len na veľmi jednoduché modely.

Medzi doménové metódy patria: metóda konečných elementov (napr. Serón et al., 1989; Bielak et al., 2003; Yoshimura et al., 2003), metóda konečných diferencií (napr. Moczo et al. 2004, 2007a, 2007b), metóda spektrálnych elementov (napr. Komatitsch a Tromp, 1999; Chaljub et al., 2007) alebo ADER-DG metóda (napr. Käser a Dumbser, 2006; Dumbser a Käser, 2006; Käser et al., 2007; de la Puente et al., 2007; Dumbser et al., 2007). Doménové metódy sú menej presné ako hraničné metódy, ale sú aplikovateľné aj na zložité realistické modely.

Hybridné metódy sú také kombinácie dvoch alebo viacerých metód, v ktorých sa eliminujú nevýhody a súčasne využijú výhody jednotlivých metód. Príklady hybridných metód možno nájsť napr. v nasledujúcich prácach: Alexeev a Mikhailenko (1980), Emmerich (1989), Gaffet a Bouchon (1989), Emmerich (1992), Bouchon a Coutant (1994), Robertsson (1996), Zahradník a Moczo (1996), Moczo et al. (1997).

1.2 Metóda konečných elementov

Metóda konečných elementov (MKE) je variačná numerická metóda na riešenie partiálnych diferenciálnych rovníc. Za jej historický začiatok sa považuje práca Courant (1943). MKE možno bližšie charakterizovať ako Ritzovu alebo Galerkinovu metódu, v ktorej riešenie rovnice na danej oblasti je aproximované funkciami, ktoré sú po častiach polynomiálne. Jednotlivé podoblasti, na ktorých sú funkcie polynómy, sa nazývajú elementy.

Elementy môžu mať rôzny tvar a veľkosť, čo umožňuje efektívnejšie pokryť výpočtovú oblasť. Rôzny tvar elementov umožňuje pokryť oblasť s komplikovanou geometriou. Rôzna veľkosť elementov umožňuje použiť menšie elementy na pokrytie tej časti oblasti, kde je potrebná vyššia presnosť výpočtu. Vyššiu presnosť výpočtu však možno dosiahnuť aj zvýšením rádu polynómu, ktorý predstavuje aproximované riešenie na danom elemente. V niektorých prípadoch, keď všetky elementy majú rovnakú veľkosť a tvar, dostaneme pomocou MKE a MKD rovnakú výslednú sústavu lineárnych algebraických rovníc.

V seizmológii používame MKE na výpočet šírenia trhliny a seizmických vln. Na výpočet šírenia seizmických vln aplikovali MKE napr. Lysmer a Drake (1971, 1972), Smith (1974, 1975), Day (1977), Serón et al. (1989), Toshinawa a Ohmachi (1992), Bao (1998), Bao et al. (1998), Aagaard et al. (2001), Bielak et al. (2003), Yoshimura et al. (2003), Ma a Liu (2006).

Na skúmanie šírenia trhliny na seizmickom zlome použili MKE napr. Andrews (1999), Oglesby (1999), Oglesby et al. (1998, 2000).

V nasledujúcom texte budeme podrobnejšie analyzovať prípad šírenia seizmických vln v dokonale elastickom prostredí.

1.3 Pohybová rovnica kontinua

Šírenie vln v elastickom prostredí sa riadi pohybovou rovnicou kontinua. Najskôr sa budeme zaoberať šírením pozdĺžnej rovinnej vlny v smere osi x . Analyzujeme teda 1D problém pohybovej rovnice

$$\rho u_{x,tt} = \tau_{xx,x} + f_x . \quad (1.3.1)$$

Rovnica (1.3.1) vyjadruje fakt, že v každom bode elastického kontinua sú v rovnováhe tri sily pôsobiace na jednotkový objem kontinua: hustota zotrvačnej sily, hustota vratnej sily a hustota externej sily.

1. **hustota zotrvačnej sily** je $\rho u_{x,tt}$, kde ρ je hustota, u_x je posunutie v x -ovom smere a $u_{x,tt}$ je druhá derivácia posunutia podľa času v bode x .

2. **hustota vratnej sily** $r_x = \tau_{xx,x}$ je derivácia tenzora napätia podľa x -ovej súradnice a vyjadruje reakciu kontinua na deformáciu. Tenzor napätia τ_{xx} je sila pôsobiaca kolmo na jednotkovú plochu v smere osi x . Pre elastické kontinuum je napätie dané Hookovým zákonom

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_{x,x} , \quad (1.3.2)$$

kde λ a μ sú Laméove elastické parametre prostredia.

3. **hustota externej sily** f_x je sila, ktorá pochádza od vonkajších zdrojov a môže tiež reprezentovať seizmický zdroj.

Rovnicu (1.3.1) riešime v oblasti $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = \langle 0, L \rangle$ kde $\Omega = (0, L)$ reprezentuje vnútro a Γ hranicu oblasti $x = 0$ a $x = L$. Podmienky riešenia rovnice (1.3.1) môžu byť okrajové (Dirichletove, Neumannove) a počiatkové.

Dirichletove podmienky predpisujú hodnoty posunutia na hranici:

$$u_x(0, t) = d_0, \quad u_x(L, t) = d_L . \quad (1.3.3)$$

Neumannove podmienky predpisujú napätia na hranici:

$$\tau_{xx}(0, t) = \tau_0, \quad \tau_{xx}(L, t) = \tau_L . \quad (1.3.4)$$

Vzťahy vyjadrujú rovnováhu napätia medzi vnútrom a hranicou. V nasledujúcom texte budeme uvažovať Neumannove okrajové podmienky.

Počiatkové podmienky predpisujú posunutia

$$u_x(x, 0) = u_0(x); \quad \forall(x) \in \Omega, \quad t = 0 \quad (1.3.5)$$

a rýchlosti

$$u_x(x, 0),_t = v_0(x); \quad \forall(x) \in \Omega, \quad t = 0 \quad (1.3.6)$$

v oblasti Ω v čase $t = 0$.

Rovnica (1.3.1) je splnená práve vtedy, ak má nulový reziduál \mathcal{R}_x , tj. ak platí

$$\mathcal{R}_x = \rho u_{x,tt} - \tau_{xx,x} - f_x = 0. \quad (1.3.7)$$

Aby to tak bolo, musí byť \mathcal{R}_x ortogonálny k celému priestoru funkcií s bázou $w_i \in \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_\infty\}$, v ktorom hľadáme riešenie, teda musí platiť

$$\int_0^L (w_i \mathcal{R}_x) \, dx = 0, \quad (1.3.8)$$

kde $i \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$. Po dosadení (1.3.7) do (1.3.8) dostaneme **integrálnu silnú formu pohybovej rovnice** (1.3.1)

$$\int_0^L (w_i \rho u_{x,tt} - w_i \tau_{xx,x} - w_i f_x) \, dx = 0. \quad (1.3.9)$$

Štandardnou úpravou takýchto rovníc je prenesenie priestorovej derivácie zo zložky tenzora napätia na bázové funkcie w_i pomocou vzťahu

$$w_i \tau_{xx,x} = (w_i \tau_{xx}),_x - w_{i,x} \tau_{xx}. \quad (1.3.10)$$

Pravú stranu rovnice (1.3.10) dosadíme do (1.3.9) a dostaneme

$$\int_0^L [w_i \rho u_{x,tt} - (w_i \tau_{xx}),_x + w_{i,x} \tau_{xx} - w_i f_x] \, dx = 0. \quad (1.3.11)$$

Integrál (1.3.11) rozdelíme,

$$\int_0^L (w_i \rho u_{x,tt} + w_{i,x} \tau_{xx} - w_i f_x) \, dx - \int_0^L [(w_i \tau_{xx}),_x] \, dx = 0 \quad (1.3.12)$$

a na druhú časť rovnice aplikujeme divergenčnú teorému:

$$\int_0^L [(w_i \tau_{xx}),_x] \, dx = [w_i \tau_{xx}]_0^L. \quad (1.3.13)$$

Ak do pravej strany rovnice (1.3.13) dosadíme Neumannove okrajové podmienky (1.3.4) môžeme rovnicu (1.3.12) vyjadriť v tvare **slabej formy v posunutí a napätí (displacement stress weak form)**:

$$\int_0^L (w_i \rho u_{x,tt} + w_{i,x} \tau_{xx} - w_i f_x) dx = [w_i(L) \tau_L - w_i(0) \tau_0]. \quad (1.3.14)$$

Ak dosadíme za tenzor napätia vzťah (1.3.2), dostaneme tvar **slabej formy v posunutí (displacement weak form)**:

$$\int_0^L [w_i \rho u_{x,tt} + w_{i,x} (\lambda + 2\mu) u_{x,x} - w_i f_x] dx = [w_i(L) \tau_L - w_i(0) \tau_0]. \quad (1.3.15)$$

Dostali sme vyjadrenie pohybovej rovnice v **slabej forme**. Tieto vzťahy predstavujú základné rovnice pre numerické riešenie 1D problému pomocou konečných elementov. V ďalšom sa budeme zaoberať postupom výpočtu pre formuláciu (1.3.15).

1.4 Formulácia MKE s maticou tuhosti

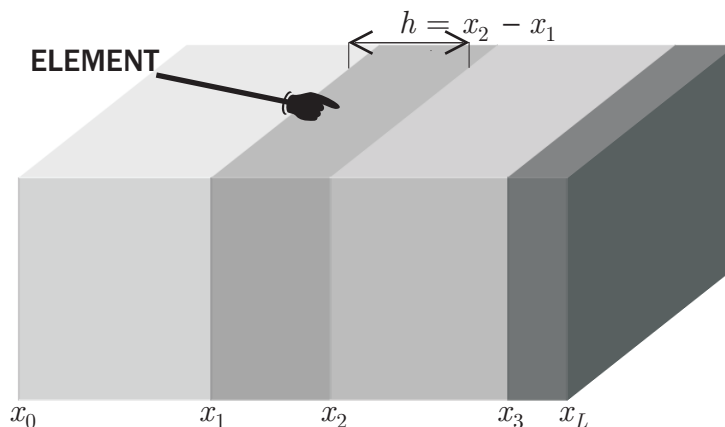
Postup v prípade numerického riešenia pohybovej rovnice (1.3.15) metódou konečných elementov môžeme rozdeliť do štyroch základných krokov :

1. diskretizácia oblasti na podoblasti (*elementy*) Ω^e ,
2. diskretizácia priestorovej časti pohybovej rovnice na každom elemente,
3. vytváranie rovnice pre celú oblasť,
4. riešenie rovnice pre celú oblasť.

1.4.1 Diskretizácia oblasti na podoblasti (elementy)

Diskretizácia oblasti alebo generovanie konečno-elementnej siete znamená, že oblasť $\bar{\Omega} = \langle 0, L \rangle$ rozdelíme na podoblasti (*elementy*) $\Omega^e = \langle x_j, x_{j+1} \rangle$ určené polohami uzlových bodov $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_L\}$, kde e je číslo elementu. Inými slovami, elastické kontinuum rozdelíme rovinami kolmými na os x na rôzne dlhé časti s rôznymi materiálovými parametrami, tak ako je to znázornené na Obr.1.4.1.

Následne vyjadríme rovnicu (1.3.15) všeobecne pre ľubovoľný element e ,



Obr. 1.4.1. Diskretizácia oblasti.

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [w_i \rho u_{x,tt} + w_{i,x} (\lambda + 2\mu) u_{x,x} - w_i f_x] dx = [w_i(L)\tau_{j+1} - w_i(0)\tau_j], \quad (1.4.1)$$

kde τ_{j+1}, τ_j sú napätia na hranici elementu.

Nech x je globálna súradnica a ξ lokálna súradnica. Na zobrazenie medzi nimi použijeme lineárne bázové funkcie

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 - \xi) \\ (1 + \xi) \end{bmatrix}. \quad (1.4.2)$$

Pomocou bázových funkcií transformujeme body ξ z jednotkového intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ na body x , ktoré ležia na na intervale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$. Pre lepšiu prehľadnosť zápisu môžeme uvažovať konkrétny element, napr. $j = 1$. Okraje intervalu potom budú v uzlových bodoch

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T. \quad (1.4.3)$$

Transformáciu vyjadríme ako skalárny súčin vektora bázových funkcií (1.4.2) s vektorom súradníc uzlových bodov (1.4.3),

$$x = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad (1.4.4)$$

pričom Jacobián transformácie je

$$\mathbf{J} = x_{,\xi} = b_{1,\xi} x_1 + b_{2,\xi} x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{h}{2}, \quad (1.4.5)$$

kde $h = x_2 - x_1$ je dĺžka elementu.

Na aproximáciu riešenia pre element použijeme Lagrangeov interpolačný polynóm generovaný rovnakými bázovými funkciami,

$$u_x = \mathbf{b}^T \mathbf{u}_x = b_1 u_{x1} + b_2 u_{x2} \quad (1.4.6)$$

kde $\mathbf{u}_x = [u_{x1}, u_{x2}]^T$ sú x -ové časovo závislé hodnoty riešenia vo vrcholoch (*uzloch*). V takomto prípade ide o tzv. izoparametrickú reprezentáciu, tj. reprezentáciu polohového vektora a vektora posunutia pomocou rovnakých bázových funkcií. Môžeme teda definovať vektor

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ u_{x1} & u_{x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Vb}. \quad (1.4.7)$$

Derivácie prvkov vektora \mathbf{c} podľa ľubovoľnej priestorovej súradnice vyjadríme pomocou derivácií bázových funkcií

$$\mathbf{c}_{,x} = \mathbf{Vb}_{,x}, \quad \mathbf{c}_{,\xi} = \mathbf{Vb}_{,\xi}. \quad (1.4.8)$$

1.4.2 Diskretizácia priestorovej časti pohybovej rovnice pre element

Ak priestor váhových funkcií w_i v rovnici (1.4.1) vyjadrenej pre element nahradíme zložkami vektora \mathbf{b} , dostaneme

$$\int_{-1}^1 [\mathbf{bb}^T \rho \mathbf{u}_{x,tt} + (\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x} \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_x - \mathbf{b} f_x] x_{,\xi} d\xi = \begin{bmatrix} (b_1(1)\tau_2 - b_1(-1)\tau_1) \\ (b_2(1)\tau_2 - b_2(-1)\tau_1) \end{bmatrix}. \quad (1.4.9)$$

Hodnoty $\mathbf{u}_{x,tt}$, \mathbf{u}_x sú nezávislé od ξ , môžeme ich teda vybrať pred integrál,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (\rho \mathbf{bb}^T) x_{,\xi} d\xi \mathbf{u}_{x,tt} \\ & + \int_{-1}^1 [(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x} \mathbf{b}_{,x}^T] x_{,\xi} d\xi \mathbf{u}_x \\ & = \int_{-1}^1 (\mathbf{b} f_x) x_{,\xi} d\xi + \begin{bmatrix} -\tau_1 \\ +\tau_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Postupne vypočítame integrály v rovnici (1.4.10), pričom materiálové parametre budeme uvažovať konštantné. Ak vypočítame prvý integrál

$$\int_{-1}^1 (\rho \mathbf{bb}^T) x_{,\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \left(\rho \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 \end{bmatrix} \frac{h}{2} \right) d\xi = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (1.4.11)$$

dostaneme **maticu hmotnosti**

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (1.4.12)$$

kde $m = \rho h$ je hmotnosť časti kontinua medzi bodmi x_1 a x_2 , ktorá je znázornená na Obr. 1.4.1 a má jednotkový prierez. Teraz rozpíšeme druhý integrál

$$\int_{-1}^1 [(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x} \mathbf{b}_{,x}^T] x_{,\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \left((\lambda + 2\mu) \begin{bmatrix} b_{1,x} & b_{1,x} & b_{1,x} & b_{2,x} \\ b_{2,x} & b_{1,x} & b_{2,x} & b_{2,x} \end{bmatrix} \right) x_{,\xi} d\xi. \quad (1.4.13)$$

Vzhľadom na to, že $b_{1,x} = b_{1,\xi} \xi_{,x}$ a $b_{2,x} = b_{2,\xi} \xi_{,x}$, dostaneme pre vzťah (1.4.13)

$$\int_{-1}^1 \left((\lambda + 2\mu) \begin{bmatrix} b_{1,\xi} \xi_{,x} & b_{1,\xi} \xi_{,x} & b_{1,\xi} \xi_{,x} & b_{2,\xi} \xi_{,x} \\ b_{2,\xi} \xi_{,x} & b_{1,\xi} \xi_{,x} & b_{2,\xi} \xi_{,x} & b_{2,\xi} \xi_{,x} \end{bmatrix} \right) x_{,\xi} d\xi. \quad (1.4.14)$$

Ak vypočítame integrál (1.4.14), dostaneme **maticu tuhosti**

$$\mathbf{K}^e = \frac{(\lambda + 2\mu)}{h} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad (1.4.15)$$

kde $k = \frac{(\lambda+2\mu)}{h}$ je koeficient tuhosti kontinua medzi bodmi x_1 a x_2 s jednotkovým prierezom, pozri Obr. 1.4.1. V rovnici (1.4.10) vystupuje súčin matice tuhosti \mathbf{K}^e s vektorom posunutia \mathbf{u}_x

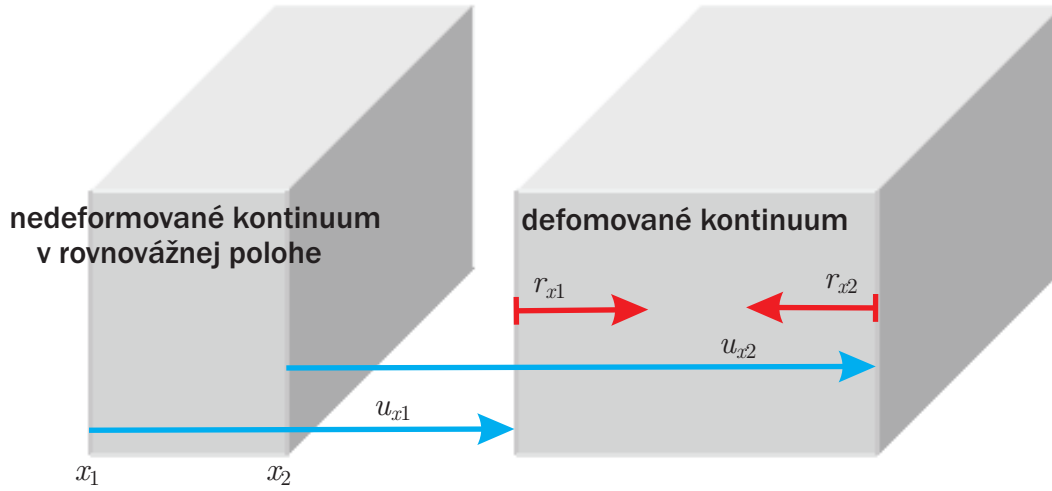
$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k(u_{x2} - u_{x1}) \\ k(u_{x2} - u_{x1}) \end{bmatrix}. \quad (1.4.16)$$

Ak tuhosťou časti kontinua k vynásobíme zmenu jeho dĺžky ($u_{x2} - u_{x1}$), dostaneme silu v dôsledku deformácie. Teda vratnú silu, znázornenú na Obr.1.4.2, ktorá sa snaží vrátiť uvažovanú časť kontinua späť do pôvodnej nedeformovanej podoby. Vektor, ktorý dostaneme, ak vynásobíme \mathbf{K}^e s \mathbf{u}_x , sa nazýva **lokálny vektor vratnej sily**

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{x2} \end{bmatrix}. \quad (1.4.17)$$

Lokálny vektor vratnej sily sa viaže na deformáciu konkrétneho elementu a nezávisí od deformácie susedných elementov. V treťom integráli rovnice (1.4.10) interpolujeme hustotu externých síl $f_x = b_1 f(x_1) + b_2 f(x_2)$ pomocou bázy b_1, b_2 . Pre funkčné hodnoty hustoty externých síl $f(x_1)$ a $f(x_2)$, ktoré pôsobia v bodoch x_1 a x_2 , dostaneme

$$\int_{-1}^1 (\mathbf{b} f_x) x_{,\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \left(\begin{bmatrix} b_1 b_1 f(x_1) + b_1 b_2 f(x_2) \\ b_2 b_1 f(x_1) + b_2 b_2 f(x_2) \end{bmatrix} \right) \frac{h}{2} d\xi \quad (1.4.18)$$



Obr. 1.4.2. Lokálny vektor vratnej sily.

a po vypočítaní integrálu dostaneme

$$\frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2f(x_1) + f(x_2) \\ f(x_1) + 2f(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}^e. \quad (1.4.19)$$

Keď máme všetky integrály vypočítané, môžeme vyjadriť rovnicu (1.4.9) v semidiskrét-
nom tvare

$$\mathbf{M}^e \mathbf{u}_{x,tt} + \mathbf{K}^e \mathbf{u}_x = \mathbf{f}^e + \begin{bmatrix} -\tau_1 \\ +\tau_2 \end{bmatrix}, \quad (1.4.20)$$

alebo

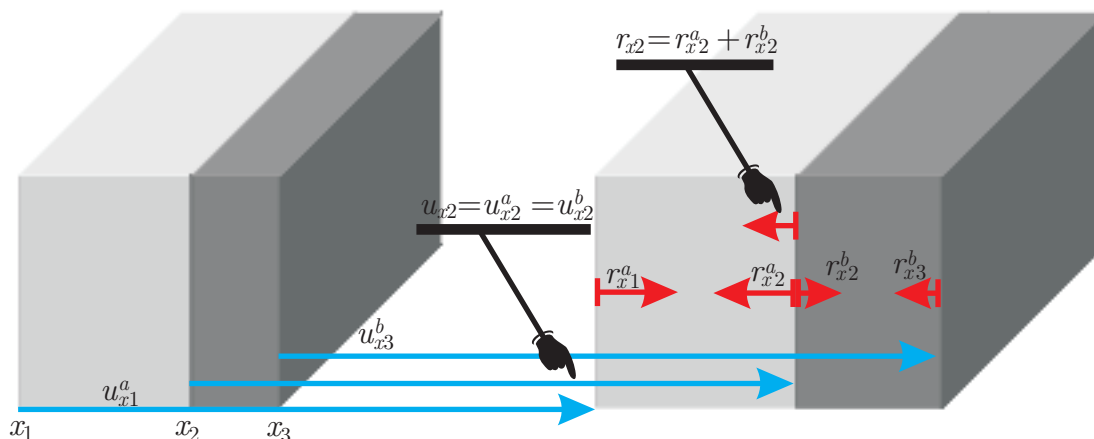
$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2m^e & m^e \\ m^e & 2m^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1,tt}^e \\ u_{x_2,tt}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^e & -k^e \\ -k^e & +k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1}^e \\ u_{x_2}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x_1}^e \\ f_{x_2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^e \\ +\tau_2^e \end{bmatrix}. \quad (1.4.21)$$

Dostali sme sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc. Takto vyjadrené lokálne rovnice
pre každý element Ω^e spájame do globálnej rovnice pre celú výpočtovú oblasť Ω .

1.4.3 Vytváranie rovnice pre celú oblasť

Budeme uvažovať dva elementy $\Omega^a = \langle x_1, x_2 \rangle$ a $\Omega^b = \langle x_2, x_3 \rangle$ znázornené na Obr.
1.4.3, ktoré majú spoločný uzol x_2 . Pre oba elementy vyjadríme rovnice

$$\mathbf{M}^a \mathbf{u}_{x,tt} + \mathbf{K}^a \mathbf{u}_x = \mathbf{f}^a + \begin{bmatrix} -\tau_1^a \\ +\tau_2^a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^b \mathbf{u}_{x,tt} + \mathbf{K}^b \mathbf{u}_x = \mathbf{f}^b + \begin{bmatrix} -\tau_2^b \\ +\tau_3^b \end{bmatrix}. \quad (1.4.22)$$



Obr. 1.4.3. Spájanie elementov.

Ak rovnice rozpíšeme, dostaneme

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2m^a & m^a \\ m^a & 2m^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x1}^a \\ a_{x2}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^a & -k^a \\ -k^a & +k^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^a \\ u_{x2}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x1}^a \\ f_{x2}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^a \\ +\tau_2^a \end{bmatrix}, \quad (1.4.23)$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2m^b & m^b \\ m^b & 2m^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x2}^b \\ a_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^b & -k^b \\ -k^b & +k^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2}^b \\ u_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x2}^b \\ f_{x3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_2^b \\ +\tau_3^b \end{bmatrix}, \quad (1.4.24)$$

kde $a_{xi}^e = u_{xi,tt}^e$. Kvôli zostaveniu rovnice pre celú oblasť, je vhodné použiť nasledujúci maticový zápis

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2m^a & m^a & 0 & 0 \\ m^a & 2m^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m^b & m^b \\ 0 & 0 & m^b & 2m^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x1}^a \\ a_{x2}^a \\ a_{x2}^b \\ a_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^a & -k^a & 0 & 0 \\ -k^a & +k^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +k^b & -k^b \\ 0 & 0 & -k^b & +k^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^a \\ u_{x2}^a \\ u_{x2}^b \\ u_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x1}^a \\ f_{x2}^a \\ f_{x2}^b \\ f_{x3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^a \\ +\tau_2^a \\ -\tau_2^b \\ +\tau_3^b \end{bmatrix}. \quad (1.4.25)$$

Ak využijeme fakt, že napätie τ_2^a je v spoločnom uzle v rovnováhe s napätím τ_2^b , teda $+\tau_2^a - \tau_2^b = 0$, môžeme sústavu zredukovať sčítaním riadkov

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2m^a & m^a & 0 & 0 \\ m^a & 2m^a & 2m^b & m^b \\ 0 & 0 & m^b & 2m^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x1}^a \\ a_{x2}^a \\ a_{x2}^b \\ a_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^a & -k^a & 0 & 0 \\ -k^a & +k^a & +k^b & -k^b \\ 0 & 0 & -k^b & +k^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^a \\ u_{x2}^a \\ u_{x2}^b \\ u_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x1}^a \\ f_{x2}^a + f_{x2}^b \\ f_{x3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^a \\ 0 \\ +\tau_3^b \end{bmatrix}. \quad (1.4.26)$$

Ak využijeme fakt, že zrýchlenia a posunutia v spoločných uzloch sú spojité, $a_{x_2}^a = a_{x_2}^b = a_{x_2}$ a $u_{x_2}^a = u_{x_2}^b = u_{x_2}$, môžeme prepísať skalárny súčin stredného riadku matice hmotnosti s vektorom zrýchlenia

$$m^a a_{x_1}^a + 2m^a a_{x_2}^a + 2m^b a_{x_2}^b + m^b a_{x_3}^b = m^a a_{x_1}^a + a_{x_2}(2m^a + 2m^b) + m^b a_{x_3}^b \quad (1.4.27)$$

a skalárny súčin stredného riadku matice tuhosti s vektorom posunutia

$$-k^a u_{x_1}^a + k^a u_{x_2}^a + k^b u_{x_2}^b - k^b u_{x_3}^b = -k^a u_{x_1}^a + u_{x_2}(k^a + k^b) - k^b u_{x_3}^b. \quad (1.4.28)$$

V maticovej rovnici to znamená sčítanie príslušných stĺpcov:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2m^a & m^a & 0 \\ m^a & 2(m^a + m^b) & m^b \\ 0 & m^b & 2m^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x_1}^a \\ a_{x_2} \\ a_{x_3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^a & -k^a & 0 \\ -k^a & (+k^a + k^b) & -k^b \\ 0 & -k^b & +k^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1}^a \\ u_{x_2} \\ u_{x_3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x_1}^a \\ f_{x_2} \\ f_{x_3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^a \\ 0 \\ +\tau_3^b \end{bmatrix}. \quad (1.4.29)$$

Dostali sme konečno-elementnú semidiskrétnu rovnicu pre výpočtovú oblasť $\langle x_1, x_3 \rangle$.

Ak analogickým spôsobom popripájame aj ostatné elementy a budeme uvažovať voľné okraje kontinua, teda $\tau_0^b = 0$ a $\tau_L^b = 0$, dostaneme rovnicu

$$\mathbb{M} \mathbf{u}_{tt} = \mathbb{K} \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.4.30)$$

pre celú výpočtovú oblasť Ω , kde \mathbb{M} a \mathbb{K} sú globálna matica hmotnosti a globálna matica tuhosti. \mathbf{f} je zdrojový člen.

1.4.4 Riešenie rovnice pre celú oblasť

V dynamických problémoch sa zvykne časový diferenciálny operátor aproximovať napr. diferenčným. Ak na aproximácie druhej časovej derivácie použijeme centrálnu diferenciu druhého rádu, rovnica (1.4.30) v čase $t = m \Delta t$ sa transformuje do rovnice

$$\mathbb{M} \frac{\mathbf{u}^{m+1} - 2\mathbf{u}^m + \mathbf{u}^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \mathbb{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (1.4.31)$$

Rovnicu (1.4.31), tj. sústavu lineárnych algebraických rovníc ďalej riešime explicitnou formou výpočtu

$$\mathbf{u}^{m+1} = \Delta t^2 (\mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbf{u}^m + \mathbf{f}) - \mathbf{u}^{m-1} + 2\mathbf{u}^m, \quad (1.4.32)$$

kde neznáme hodnoty riešenia \mathbf{u}^{m+1} v čase $t = (m+1) \Delta t$ počítame zo známych hodnôt riešenia \mathbf{u}^m a \mathbf{u}^{m-1} v predchádzajúcich časových hladinách.

1.4.5 Problém s operačnou pamäťou počítača

Algoritmus s maticou hmotnosti a tuhosti predstavuje pre seizmologické výpočty v 2D a 3D probléme veľké pamäťové nároky.

1. Pri výpočte podľa schémy (1.4.32) je treba uchovávať v pamäti inverznú maticu hmotnosti \mathbb{M}^{-1} . Aby sme obišli tento problém, používame namiesto \mathbb{M} **diagonálnu maticu hmotnosti**, tzv. lumped mass matrix \mathbb{M}_L , ktorej inverzná matica je tiež diagonálna. Vplyv \mathbb{M}_L na presnosť a stabilitu riešenia je vysvetlená napríklad v Strang a Fix (1973).

2. Pri výpočte podľa schémy (1.4.32) sa v každej časovej hladine počíta globálny vektor vratnej sily $\mathbf{r}^m = \mathbb{K}\mathbf{u}^m$ tak, že sa násobí globálna matica tuhosti s vektorom posunutí, ktorý obsahuje známe hodnoty posunutia z predchádzajúceho cyklu. Matica \mathbb{K} môže mať tak veľké rozmery, že ju nie je možné uchovať v operačnej pamäti počítača. V 1D probléme potrebujeme na výpočet jednej vratnej sily informáciu o posunutiach v troch uzloch. Posunutie v tom uzle, v ktorom silu počítame a v dvoch susedných uzloch. To vedie na prácu s trojdiagonálnou maticou. V 2D probléme, keď používame štvoruholníkovú sieť, potrebujeme informáciu o x -ových a y -ových zložkách posunutia z deviatich uzlov a matica tuhosti má $2 \times 9 = 18$ diagonál. V 3D probléme často používame sieť poskladanú zo šesťstenových elementov a na výpočet jednej zložky sily potrebujeme informáciu o posunutiach v 27 uzloch. V takomto prípade má matica tuhosti $3 \times 27 = 81$ diagonál. Práca s takouto maticou si v prípade štruktúrne a geometricky zložitých modelov vyžaduje 100 GB a viac operačnej pamäte.

Na výpočet vektora vratnej sily nie je však potrebné uchovávať v pamäti prvky globálnej matice tuhosti. Je možný alternatívny spôsob výpočtu vektora vratnej sily, v ktorom v každej časovej hladine počítame nanovo prvky lokálnych vektorov vratnej sily a tie potom pospájame do globálneho vektora. Zodpovedajúca formulácia a príslušný algoritmus sú vysvetlené v podkapitole 1.5.

1.4.6 Výpočet diagonálnej matice hmotnosti

Jeden zo štandardných postupov, ako získame z lokálnej matice hmotnosti

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \left(\rho \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 \end{bmatrix} \frac{h}{2} \right) d\xi \quad (1.4.33)$$

diagonálnu maticu, tzv. lumped mass matrix, je výpočet integrálu (1.4.33) Lobattovou numerickou integráciou

$$\int_{-1}^1 [f(\xi)] d\xi \approx f(-1) + f(+1). \quad (1.4.34)$$

Bázové funkcie majú nasledujúce vlastnosti:

$$\begin{aligned} \xi = -1 &\Rightarrow b_1 = 1 \quad b_2 = 0, \\ \xi = +1 &\Rightarrow b_1 = 0 \quad b_2 = 1. \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

Na výpočet (1.4.33) použijeme Lobattovu numerickú integráciu

$$\frac{\rho h}{2} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 \end{bmatrix} = \frac{\rho h}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 \times 1 & 0 \times 1 \\ 1 \times 0 & 0 \times 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \times 0 & 0 \times 1 \\ 1 \times 0 & 1 \times 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{\rho h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.4.36)$$

Získali sme **diagonálnu maticu hmotnosti**

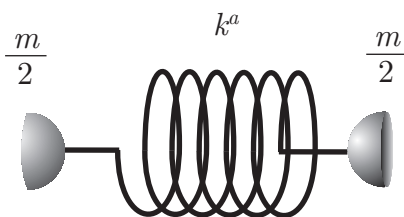
$$\mathbf{M}_L^e = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.4.37)$$

ktorá vyjadruje fakt, že hmotnosť elementu $m = \rho h$ je sústredená v jeho uzloch. Ak v rovnici (1.4.21) nahradíme plnú maticu hmotnosti \mathbf{M}^e diagonálnou maticou \mathbf{M}_L^e dostaneme rovnicu

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1,tt}^e \\ u_{x2,tt}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^e & -k^e \\ -k^e & +k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^e \\ u_{x2}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x1}^e \\ f_{x2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^e \\ +\tau_2^e \end{bmatrix}. \quad (1.4.38)$$

Rovnica (1.4.38) opisuje vynútené kmity dvoch rovnakých telies, nakreslených na Obr. 1.4.4, s hmotnosťami $\frac{m}{2}$. Telesá sú spojené nehmotnou pružinou, ktorá má tuhosť k^e . Vynucujúca sila, ktorá pôsobí na ľavé teleso, je rovná sile $f_{x1}^e + \tau_1^e$, ktorá pôsobí na jednotkovú plochu kontinua v uzle x_1 . Vynucujúca sila, ktorá pôsobí na pravé teleso, je rovná sile $f_{x2}^e - \tau_2^e$, ktorá pôsobí na jednotkovú plochu kontinua v uzle x_2 . Z takýchto lokálnych rovníc potom skladáme globálnu rovnicu

$$\begin{bmatrix} \frac{m^a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^a+m^b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x1}^a \\ a_{x2}^a \\ a_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +k^a & -k^a & 0 \\ -k^a & (+k^a + k^b) & -k^b \\ 0 & -k^b & +k^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^a \\ u_{x2}^a \\ u_{x3}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{x1}^a \\ f_{x2}^a \\ f_{x3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^a \\ 0 \\ +\tau_3^b \end{bmatrix}, \quad (1.4.39)$$

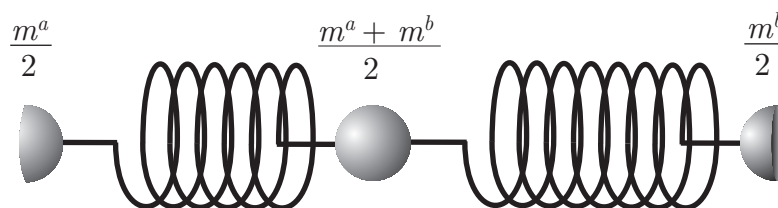


Obr. 1.4.4. Aproximácia časti kontinua s jednotkovou plochou medzi uzlami x_1 a x_2 nehmotnou pružinou so závažiami na oboch koncoch.

kde globálna matica hmotnosti

$$\mathbb{M}_L^e = \begin{bmatrix} \frac{m^a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^a}{2} + \frac{m^b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m^a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^b}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4.40)$$

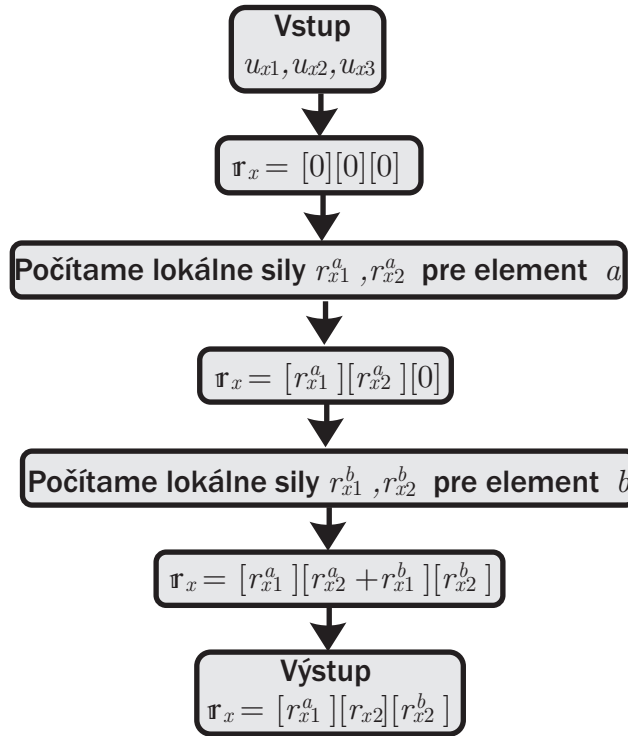
je tiež diagonálna, pričom každému uzlu je priradený aritmetický priemer $\frac{m^a+m^b}{2}$ hmotností susedných pružín.



Obr. 1.4.5. Fyzikálny model diskretizovaného elastického 1D prostredia s diagonálnou maticou hmotnosti.

1.5 Formulácia MKE s vektorom vratnej sily

Spôsob výpočtu prvkov vektora vratnej sily bez použitia matice tuhosti nazývame formulácia MKE s vektorom vratnej sily. Takáto formulácia a implementácia je založená na postupe, ktorý naznačil Ralph Archuleta (Archuleta, 1976), ktorý sa odvoláva na prácu Frazier a Petersen (1974). Môžeme ju nájsť aj v prácach napr. Moczo et al. (2007a), Galis (2007). Hlavná myšlienka výpočtu spočíva v tom, že najskôr počítame prvky lokálneho vektora vratnej sily, ktoré potom skladáme do vektora vratnej sily pre celú výpočtovú oblasť. Postup je schematicky znázornený na Obr. 1.5.1.



Obr. 1.5.1. Ilustrácia alternatívneho spôsobu výpočtu vektora vratnej sily.

1.5.1 Lokálny vektor vratnej sily

Lokálny vektor vratnej sily sme v (1.4.17) definovali ako súčin lokálnej matice tuhosti s vektorom posunutia

$$\mathbf{r}^e = \begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix}. \quad (1.5.1)$$

Dostali sme ho vypočítaním integrálu

$$\mathbf{r}^e = \left\{ \int_{-1}^1 [(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x} \mathbf{b}_{,x}^T] x_{,\xi} d\xi \right\} \mathbf{u}_x \quad (1.5.2)$$

v rovnici (1.4.10). Vektor posunutia \mathbf{u}_x nezávisí od ξ . Môžeme ho teda vložiť pod integrál

$$\mathbf{r}^e = \int_{-1}^1 [\mathbf{b}_{,x} (\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_x] x_{,\xi} d\xi \quad (1.5.3)$$

a rozpísať

$$\begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{x2} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \left(\begin{bmatrix} b_{1,\xi} \xi_{,x} (\lambda + 2\mu) b_{1,\xi} \xi_{,x} u_1 + b_{1,\xi} \xi_{,x} (\lambda + 2\mu) b_{2,\xi} \xi_{,x} u_2 \\ b_{2,\xi} \xi_{,x} (\lambda + 2\mu) b_{1,\xi} \xi_{,x} u_1 + b_{2,\xi} \xi_{,x} (\lambda + 2\mu) b_{2,\xi} \xi_{,x} u_2 \end{bmatrix} \right) x_{,\xi} d\xi. \quad (1.5.4)$$

1.5.2 Výpočet lokálneho vektora vratnej sily

Ľahko pochopiteľný a štandardný algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily je nasledovný: 1. Vypočítame derivácie bázových funkcií podľa ξ

$$b_{1,\xi} = \frac{1 - \xi}{2},_{,\xi} = -\frac{1}{2}, \quad b_{2,\xi} = \frac{1 + \xi}{2},_{,\xi} = +\frac{1}{2}. \quad (1.5.5)$$

2. Vypočítame Jacobián transformácie (1.4.5)

$$x_{,\xi} = b_{1,\xi} x_1 + b_{2,\xi} x_2 = \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{h}{2}. \quad (1.5.6)$$

3. Vypočítame inverzný Jacobián

$$\xi_{,x} = \frac{1}{x_{,\xi}} = \frac{2}{h}. \quad (1.5.7)$$

4. Vypočítame derivácie bázových funkcií podľa x

$$b_{1,x} = b_{1,\xi} \xi_{,x} = \frac{-1}{h}, \quad b_{2,x} = b_{2,\xi} \xi_{,x} = \frac{1}{h}. \quad (1.5.8)$$

5. Aproximujeme deriváciu posunutia u_x podľa x

$$u_{x,x} = b_{1,x} u_{x1} + b_{2,x} u_{x2} = \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h}. \quad (1.5.9)$$

6. Vypočítame napätie

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_{x,x}. \quad (1.5.10)$$

7. Vypočítame hustotu vratnej sily

$$\begin{aligned} h_1 &= b_{1,x} \tau_{xx} = \frac{-1}{h} \tau_{xx} = \frac{-1}{h} (\lambda + 2\mu) u_{x,x} \\ &= \frac{-1}{h} (\lambda + 2\mu) \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h}, \\ h_2 &= b_{2,x} \tau_{xx} = \frac{+1}{h} \tau_{xx} = \frac{+1}{h} (\lambda + 2\mu) u_{x,x} \\ &= \frac{+1}{h} (\lambda + 2\mu) \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h}. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

8. Vypočítame prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned} r_{x1} &= \int_{-1}^1 (h_1) x_{,\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \left[\frac{-1}{h} (\lambda + 2\mu) \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h} \right] \frac{h}{2} d\xi \\ &= -1 (\lambda + 2\mu) \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h}, \\ r_{x2} &= \int_{-1}^1 (h_2) x_{,\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \left[\frac{+1}{h} (\lambda + 2\mu) \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h} \right] \frac{h}{2} d\xi \\ &= +1 (\lambda + 2\mu) \frac{u_{x2} - u_{x1}}{h}. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

V 2D a 3D probléme sa situácia komplikuje. Jacobián priestorovej transformácie, ako uvidíme neskôr, býva vo všeobecnosti funkciou priestorových súradníc. Integrácia potrebná na výpočet lokálneho vektora vratnej sily býva veľmi komplikovaná. Treba počítať integrály zo zložitých racionálnych funkcií a preto používame numerickú integráciu. Keďže prvky lokálneho vektora treba počítať v každej časovej hladine, celkový výpočet trvá veľmi dlho. Dlhý výpočtový čas je cenou za nízke pamäťové nároky.

1.5.3 Vektor vratnej sily

Skalárny súčin stredného riadku matice tuhosti s vektorom posunutia v rovnici (1.4.29) môžeme upraviť nasledovne:

$$-k^a u_{x_1}^a + k^a u_{x_2}^a + k^b u_{x_2}^b - k^b u_{x_3}^b = k^a (u_{x_2}^a - u_{x_1}^a) - k^b (u_{x_3}^b - u_{x_2}^b). \quad (1.5.13)$$

Vzhľadom k tomu, že $r_{x_2}^a = k^a (u_{x_2}^a - u_{x_1}^a)$ je vratná sila spôsobená deformáciou pružiny nad $\langle x_1, x_2 \rangle$ v uzle x_2 a $r_{x_2}^b = -k^b (u_{x_3}^b - u_{x_2}^b)$ je vratná sila spôsobená deformáciou pružiny nad $\langle x_2, x_3 \rangle$ v tom istom uzle x_2 , pravá strana rovnice (1.5.13) znamená, že globálna vratná sila pôsobiaca v uzle x_2 je súčtom lokálnych vratných síl, teda

$$r_{x_2} = r_{x_2}^a + r_{x_2}^b. \quad (1.5.14)$$

2 Ciele dizertačnej práce

1. Vytvoríť nový algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily, ktorý bude efektívny z hľadiska nárokov na výpočtový čas a pamäť. Nový algoritmus by nemal zvýšiť pamäťové nároky štandardného algoritmu výpočtu vratnej sily, avšak mal by podstatne znížiť nároky na výpočtový čas.
2. Vykonať numerické testy na porovnanie rýchlostí výpočtov so štandardným a novým algoritmom.

3 Výsledky dizertačnej práce

Za najdôležitejší výsledok dizertačnej práce považujeme vytvorenie nového spôsobu výpočtu lokálneho vektora vratnej sily. Uvedený spôsob bol publikovaný v prácach Ballažovjeh a Halada (2007), Moczo et al. (2007a). Princíp spočíva v použití nových bázových funkcií, ktoré umožňujú definovať a využiť e-invarianty vo výpočte.

3.1 e-invarianty v 1D probléme

Pri výpočte lokálneho vektora vratnej sily používame ako vstupné hodnoty polohy uzlov a posunutia v uzloch. Posunutia a polohy uzlov však v sebe uchovávajú viac informácie, ako je potrebné na výpočet lokálneho vektora vratnej sily. Polohy uzlov uchovávajú informáciu o tom, kde sa pružina nachádza. Posunutia v uzloch zas uchovávajú informáciu o tom, kam sa pružina v dôsledku deformácie posunie. Lokálne vratné sily sú od tejto informácie nezávislé. Na výpočet lokálnych síl stačí informácia o tom, aká je pružina dlhá a ako zmení svoj tvar. Okrem toho zo zákona akcie a reakcie vieme že sily, ktoré vznikli len v dôsledku zmeny tvaru pružiny, sú rovnako veľké a opačne orientované a preto ich nemusíme počítať každú osobitne. Namiesto polôh uzlov, posunutí a síl v uzloch definujeme nové parametre, 1D e-invarianty, ktoré eliminujú vo výpočte lokálneho vektora vratnej sily nadbytočnú informáciu. Budeme rozlišovať tri skupiny e-invariantov: e-invarianty priestorovej transformácie, e-invarianty posunutí a e-invarianty lokálnych síl.

Uvažujme o pružine nakreslenej na Obr. 3.1.1, ktorej polohu určujú body x_1 a x_2 . Priestorovú transformáciu (1.4.4) môžeme vyjadriť pomocou štandardnej bázy \mathbf{b}^T

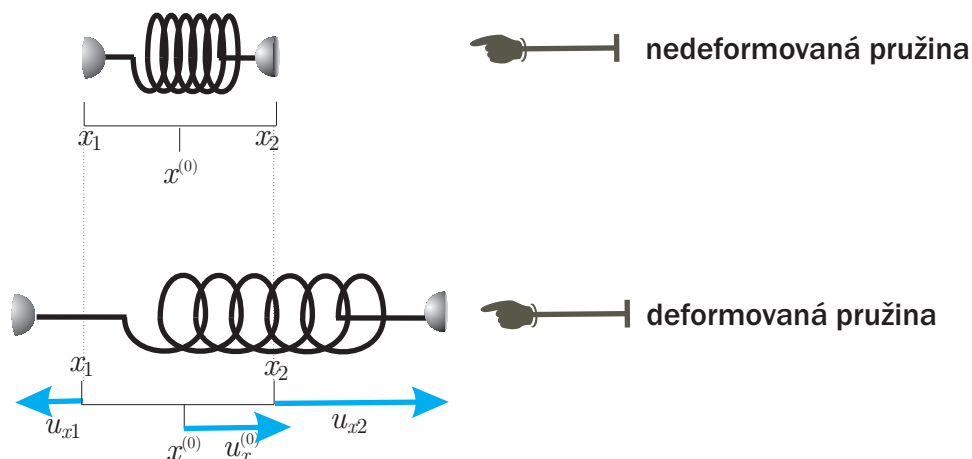
$$x = \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \frac{(1 - \xi)}{2} x_1 + \frac{(1 + \xi)}{2} x_2 \quad (3.1.1)$$

alebo pomocou novej bázy ¹ $\mathbf{b}^{(inv)T} = [1, \xi]$,

$$x = \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{x}^{(inv)} = 1x^{(0)} + \xi x^{(1)}, \quad (3.1.2)$$

kde $\mathbf{x}^{(inv)} = [x^{(0)}, x^{(1)}]^T = [(x_1 + x_2)/2, (x_2 - x_1)/2]^T$. Na výpočet vratných síl, ktoré pôsobia na konce pružiny, potrebujeme Jacobián transformácie $\mathbf{J} = x, \xi$. Môžeme ho vyjadriť pomocou štandardnej bázy

¹Prvky novej bázy sú na intervale $\langle -1, +1 \rangle$ navzájom ortogonálne funkcie.



Obr. 3.1.1. e -invarianty v 1D probléme.

$$x_{,\xi} = \mathbf{b}_{,\xi}^T \mathbf{x} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad (3.1.3)$$

alebo pomocou novej bázy

$$x_{,\xi} = \mathbf{b}_{,\xi}^{(inv)T} \mathbf{x}^{(inv)} = 0x^{(0)} + 1x^{(1)}. \quad (3.1.4)$$

Koeficient $x^{(0)} = (x_2 + x_1)/2$ vo výpočte nepotrebujeme, pretože platí $1_{,x} = 0$. Koeficient $x^{(1)}$ nesie nadbytočnú informáciu o tom, kde sa pružina nachádza. Na výpočet sily stačí informácia o tom, aká je pružina dlhá, teda stačí používať $x^{(1)} = (x_2 - x_1)/2$, čo je v tomto prípade Jacobián transformácie. e -invariant $x^{(1)}$ nesie len nutnú informáciu potrebnú na výpočet a nezávisí od toho, kde sa pružina nachádza.

Interpoláciu posunutia môžeme vyjadriť použitím štandardnej bázy \mathbf{b}^T

$$u_x = \mathbf{b}^T \mathbf{u}_x = \frac{(1 - \xi)}{2}u_{x1} + \frac{(1 + \xi)}{2}u_{x2} \quad (3.1.5)$$

alebo pomocou novej bázy

$$u_x = \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)} = 1u_x^{(0)} + \xi u_x^{(1)}, \quad (3.1.6)$$

kde $\mathbf{u}_x^{(inv)} = [u_x^{(0)}, u_x^{(1)}]^T = [(u_{x1} + u_{x2})/2, (u_{x2} - u_{x1})/2]^T$. Na výpočet vratných síl, ktoré pôsobia na konce pružiny potrebujeme derivácie posunutia. Derivácie posunutia môžeme vyjadriť pomocou štandardnej bázy

$$u_{x,x} = \mathbf{b}_{,\xi}^T \xi_{,x} \mathbf{u}_x = -\frac{1}{2}\xi_{,x} u_{x1} + \frac{1}{2}\xi_{,x} u_{x2}, \quad (3.1.7)$$

alebo pomocou novej bázy

$$u_{x,x} = \mathbf{b}_{,\xi}^{(inv)T} \xi_{,x} \mathbf{u}_x^{(inv)} = 0u_x^{(0)} + \xi_{,x} u_x^{(1)}. \quad (3.1.8)$$

Koeficient $u_x^{(0)} = (u_{x2} + u_{x1})/2$ vo výpočte nepotrebujeme, pretože platí $1_{,x} = 0$. Koeficient $u_x^{(0)}$ nesie nadbytočnú informáciu o tom, kam sa pružina pohne. Na výpočet sily stačí informácia o tom, ako pružina zmení svoju dĺžku $u_x^{(1)} = (u_{x2} - u_{x1})/2$. e-invariant $u_x^{(1)}$ nesie len nutnú informáciu potrebnú na výpočet a nezávisí od toho, kam sa pružina pohne. V ďalšom kroku použijeme deriváciu posunutia na výpočet napätia $\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_{x,x}$. Z napätia môžeme počítať sily na koncoch pružiny použitím štandardnej bázy

$$r_1 = \int_{-1}^1 \left(\tau_{xx} \frac{-1}{2} \right) d\xi, \quad r_2 = \int_{-1}^1 \left(\tau_{xx} \frac{1}{2} \right) d\xi, \quad (3.1.9)$$

čo spĺňa zákon akcie a reakcie $r_1 = -r_2$. Efektívnejšie bude počítať iba jednu silu r_2 a druhej sile r_1 priradiť jej zápornú hodnotu. Ak vo vzťahoch (3.1.9) namiesto derivácie štandardnej bázy $\frac{1}{2}(1 - \xi)_{,\xi} = -\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}(1 + \xi)_{,\xi} = \frac{1}{2}$ použijeme derivácie novej bázy $1_{,\xi} = 0$ a $\xi_{,\xi} = 1$, dostaneme nasledujúce integrály:

$$\int_{-1}^1 \tau_{xx} 1_{,\xi} d\xi, \quad \int_{-1}^1 \tau_{xx} \xi_{,\xi} d\xi. \quad (3.1.10)$$

Ak novú bázu vyjadríme pomocou štandardnej bázy

$$1 = b_1 + b_2, \quad \xi = b_2 - b_1 \quad (3.1.11)$$

a dosadíme do výrazu (3.1.10), dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tau_{xx} \frac{b_1 + b_2}{2}_{,\xi} d\xi &= \int_{-1}^1 \tau_{xx} \frac{b_{1,\xi} + b_{2,\xi}}{2} d\xi = r_1 + r_2, \\ \int_{-1}^1 \tau_{xx} \frac{b_2 - b_1}{2}_{,\xi} d\xi &= \int_{-1}^1 \tau_{xx} \frac{b_{2,\xi} - b_{1,\xi}}{2} d\xi = r_2 - r_1. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

V tomto prípade prvý e-invariant

$$r^{(0)} = (r_2 + r_1)/2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\tau_{xx} 0) d\xi = 0 \quad (3.1.13)$$

predstavuje priemernú lokálnu silu pôsobiacu na pružinu. Nulový koeficient pri tenzore napätia hovorí, že táto sila je nulová a teda ju počítať netreba. Druhý e-invariant

$$r^{(1)} = (r_2 - r_1)/2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\tau_{xx} 1) d\xi = r_2 \quad (3.1.14)$$

predstavuje lokálnu silu potrebnú na deformáciu pružiny.

Keď sme použili novú bázu na interpoláciu posunutia, ukázalo sa, akú informáciu stačí na výpočet použiť ako vstupné údaje. Keď sme použili novú bázu ako váhu, ukázalo sa, čo stačí integrovať, aby sme získali lokálny vektor vratnej sily.

3.1.1 Transformačná matica e-invariantov

Transformáciu do novej bázy

$$\begin{aligned} 1 &= +\frac{(1-\xi)}{2} + \frac{(1+\xi)}{2} = +b_1 + b_2, \\ \xi &= -\frac{(1-\xi)}{2} + \frac{(1+\xi)}{2} = -b_1 + b_2 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

môžeme vyjadriť maticovou rovnicou

$$\mathbf{b}^{(inv)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.16)$$

Transformačnú maticu označíme \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.17)$$

Stĺpce matice \mathbf{T} sú vlastné vektory matice tuhosti

$$\begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2k \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.18)$$

kde vlastné čísla matice tuhosti sú $[2k, 0]$. Vlastný vektor $[+1, -1]^T$ vyjadruje fakt, že ak sa konce pružiny posunú o $u_1 = +1$ a $u_2 = -1$, pružina sa roztiahne a teda sily, ktoré vzniknú v dôsledku deformácie pružiny, sú $r_1 = +2k$ a $r_2 = -2k$. Na druhej strane vlastný vektor $[+1, +1]^T$ vyjadruje fakt, že ak sa konce pružiny posunú o $u_1 = +1$ a $u_2 = +1$, pružina sa neroztiahne a teda sily, ktoré vzniknú v dôsledku deformácie pružiny, sú $r_1 = 0$ a $r_2 = 0$.

Riadky prípadne stĺpce matice \mathbf{T} sú navzájom ortogonálne vektory a majú rovnakú normu $\sqrt{2}$. Matica \mathbf{T} má teda vlastnosť

$$\frac{1}{2}\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \quad (3.1.19)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matica. Táto vlastnosť umožní vyjadriť štandardnú izoparametrickú reprezentáciu (3.2.57) pomocou novej ortogonálnej bázy s využitím výpočtových e-invariantov. Postup je nasledovný:

1. Medzi vektor bazových funkcií \mathbf{b} a maticu uzlov a posunutí \mathbf{V} vložíme jednotkovú maticu \mathbf{I}

$$\begin{bmatrix} x \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ u_{x1} & u_{x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.20)$$

2. Využijeme vlastnosť (3.1.19) a jednotkovú maticu rozpíšeme podľa $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^T\mathbf{T}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ u_{x1} & u_{x2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.21)$$

3. Transformačnú maticu \mathbf{T} aplikujeme na vektor bázových funkcií \mathbf{b} a maticu uzlov a posunutí \mathbf{V} , $(\mathbf{V}\frac{1}{2}\mathbf{T}^T)(\mathbf{T}\mathbf{b})$, čím získame štandardnú izoparametrickú reprezentáciu \mathbf{c} vyjadrenú ako súčin matice e-invariantov $\mathbf{V}^{(inv)}$ s vektorom novej bázy $\mathbf{b}^{(inv)}$

$$\begin{bmatrix} x \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)} & x^{(1)} \\ u_x^{(0)} & u_x^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (3.1.22)$$

V nasledujúcom postupe ukážeme, ako možno vyjadriť vektor vratnej sily

$$\mathbf{r}^e = \int_{-1}^1 [\mathbf{b}_{,x}(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_x] x_{,\xi} \, d\xi \quad (3.1.23)$$

pomocou e-invariantov a novej bázy.

Pred integrál a medzi skalárny súčin vektora posunutí a vektora derivácií štandardnej bázy aplikujeme jednotkovú maticu \mathbf{I} :

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{I} \int_{-1}^1 [\mathbf{b}_{,x}(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{I} \mathbf{u}_x] x_{,\xi} \, d\xi. \quad (3.1.24)$$

Jednotkovú maticu rozpíšeme podľa (3.1.19):

$$\mathbf{r}^e = \frac{1}{2}\mathbf{T}^T\mathbf{T} \int_{-1}^1 [\mathbf{b}_{,x}(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^T \frac{1}{2}\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{u}_x] x_{,\xi} \, d\xi. \quad (3.1.25)$$

Pretože transformačná matica \mathbf{T} nezávisí od ξ , môžeme ju vsunúť pod integrál:

$$\mathbf{r}^e = \frac{1}{2}\mathbf{T}^T \int_{-1}^1 [\mathbf{T}\mathbf{b}_{,x}(\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^T \frac{1}{2}\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{u}_x] x_{,\xi} \, d\xi. \quad (3.1.26)$$

Ak využijeme pravidlo $\mathbf{b}_{,x}^T \frac{1}{2}\mathbf{T}^T = (\frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{b}_{,x})^T$ a aplikujeme transformačnú maticu,

$$\mathbf{r}^e = \frac{1}{2}\mathbf{T}^T \int_{-1}^1 [(\mathbf{T}\mathbf{b}_{,x})(\lambda + 2\mu) (\frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{b}_{,x})^T(\mathbf{T}\mathbf{u}_x)] x_{,\xi} \, d\xi, \quad (3.1.27)$$

dostaneme vektor vratnej sily vyjadrený v novej báze pomocou e-invariantov,

$$\mathbf{r}^e = \frac{1}{2}\mathbf{T}^T \int_{-1}^1 [\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} (\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)}] x_{,\xi} \, d\xi, \quad (3.1.28)$$

kde integrál vo výraze (3.1.28) nazveme e-invariantným vektorom vratnej sily

$$\mathbf{r}^{(inv)} = \int_{-1}^1 [\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} (\lambda + 2\mu) \mathbf{b}_{,x}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)}] x_{,\xi} \, d\xi. \quad (3.1.29)$$

V nasledujúcom texte ukážeme schému na výpočet lokálneho vektora vratnej sily pomocou e-invariantov, ktorú neskôr zovšeobecníme pre 2D a 3D problém.

3.1.2 Výpočet lokálneho vektora vratnej sily s využitím e-invariantov

1. Vypočítame e-invarianty:

$$x^{(1)} = (x_2 - x_1)/2 = \frac{h}{2}, \quad u_x^{(1)} = (u_{x2} - u_{x1})/2. \quad (3.1.30)$$

2. Vypočítame derivácie nových báзовých funkcií podľa ξ :

$$1_{,\xi} = 0, \quad \xi_{,\xi} = 1. \quad (3.1.31)$$

3. Jacobián transformácie je (1.4.5):

$$x_{,\xi} = x^{(1)} = \frac{h}{2}. \quad (3.1.32)$$

4. Vypočítame inverzný Jacobián:

$$\xi_{,x} = \frac{1}{x_{,\xi}} = \frac{2}{h}. \quad (3.1.33)$$

5. Derivácia báзовой funkcie podľa x je inverzný Jacobián.

6. Vypočítame deriváciu posunutia u_x podľa x :

$$u_{x,x} = 0u_x^{(0)+} = \frac{2}{h}u_x^{(1)}. \quad (3.1.34)$$

7. Vypočítame napätie:

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_{x,x}. \quad (3.1.35)$$

8. Vypočítame hustotu invariantnej vratnej sily:

$$\begin{aligned} h^{(0)} &= 0\tau_{xx}, \\ h^{(1)} &= \xi_{,x} \tau_{xx}. \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

9. Vypočítame prvky lokálneho e-invariantného vektora vratnej sily:

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= \int_{-1}^1 (0) x_{,\xi} d\xi, \\ r^{(1)} &= \int_{-1}^1 (h^{(1)}) x_{,\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

10. Vypočítame prvky lokálneho vektora vratnej sily:

$$\begin{aligned} r_1^e &= +r^{(0)} - r^{(1)} \\ r_2^e &= +r^{(0)} + r^{(1)} \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Výpočtová schéma pomocou e-invariantov predstavuje návod, ako vytvoriť efektívny algoritmus. Pri vytváraní algoritmu si všimame, pri ktorých e-invariantoch sa vyskytujú nuly. Príslušné e-invarianty z výpočtu vynecháme.

3.1.3 Algoritmus

Výsledný algoritmus je jednoduchý:

$$\begin{aligned} r_1^e &= (\lambda + 2 * \mu) * \frac{(u_{x2} - u_{x1})}{(x_2 - x_1)}, \\ r_2^e &= -r_1^e. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

V rovnici (3.1.39) symbol $*$ znamená operáciu násobenia. Tento symbol použijeme v tomto význame aj v ďalších rovniciach, ktoré budú špecifikovať výpočtový algoritmus. Použitie symbolu je "grafickou" pomôckou na určenie počtu aritmetických operácií v algoritme.

3.2 Lokálny vektor vratnej sily v 2D probléme

Budeme sa zaoberať dvojrozmerným problémom pohybovej rovnice kontinua

$$\begin{aligned} \rho u_{x,tt} &= \tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} + f_x, \\ \rho u_{y,tt} &= \tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} + f_y. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

V rovnici (3.2.1) je hustota zotrvačnej sily $\rho \vec{u}_{,tt} = [\rho u_{x,tt}, \rho u_{y,tt}]^T$, kde ρ je hustota, u_x a u_y sú x -ové a y -ové zložky posunutia. Hustota vratnej sily je daná divergenciou tenzora napätia

$$\vec{r} = \text{div } \vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} \\ \tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} \end{bmatrix}, \quad (3.2.2)$$

kde Hookov zákon v dvojrozmernom probléme má tvar

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{bmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Hustota externej sily je daná vektorom $\vec{f} = [f_x, f_y]^T$.

V nasledujúcom texte budeme uvažovať elementy v tvare konvexných štvoruholníkov určených polohami vrcholov (*uzlami*) $(x_{i(e)}, y_{i(e)})$. ($i = 1, 2, 3, 4$) je číslo uzla pre konkrétny element e . Slabá forma pohybovej rovnice (3.2.1) pre element e má tvar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} (w_k \rho u_{x,tt} + w_{k,x} \tau_{xx} + w_{k,y} \tau_{xy} - w_k f_x) d\Omega &= \oint_{\Gamma_e} (w_k \tau_{xn}) d\Gamma, \\ \int_{\Omega_e} (w_k \rho u_{y,tt} + w_{k,x} \tau_{yx} + w_{k,y} \tau_{yy} - w_k f_y) d\Omega &= \oint_{\Gamma_e} (w_k \tau_{yn}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

kde $w_k \in \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_\infty\}$ sú váhové funkcie. Na zobrazenie medzi globálnym súradnicovým systémom (x, y) a lokálnym súradnicovým systémom (ξ, η) použijeme bilinéarne štvoruholníkové bázové funkcie

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \end{bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

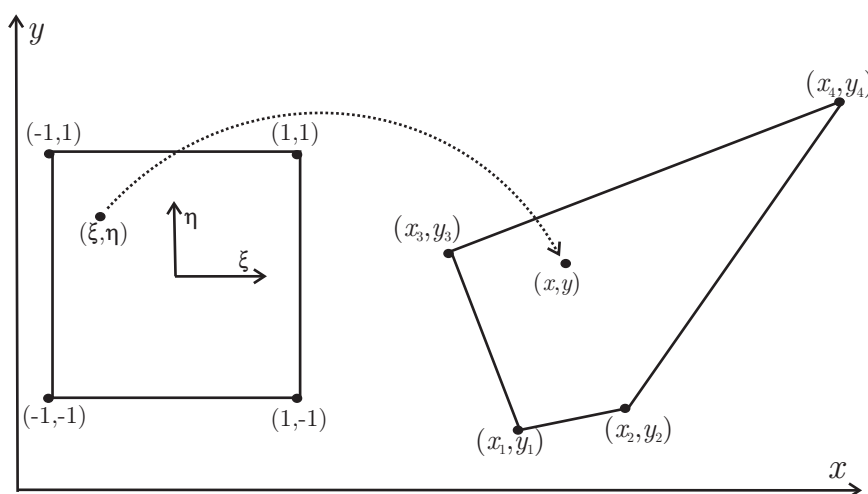
Pomocou bázových funkcií transformujeme body (ξ, η) jednotkového štvorca s vrcholmi v bodoch

$$\boldsymbol{\xi} = [-1, +1, -1, +1]^T, \quad \boldsymbol{\eta} = [-1, -1, +1, +1]^T \quad (3.2.6)$$

na body (x, y) štvoruholníkového elementu Ω^e s vrcholmi v bodoch

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \quad \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T \quad (3.2.7)$$

tak, ako je to znázornené na Obr. 3.2.1



Obr. 3.2.1. Bilineárna transformácia.

Transformáciu vyjadríme ako skalárny súčin vektora bázových funkcií (3.2.5) s vektormi súradníc vrcholov (1.4.3)

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{b}^T \mathbf{x} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4, \\ y &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Na aproximáciu riešenia pre element použijeme Lagrangeov interpolačný polynóm generovaný rovnakými bázovými funkciami

$$\begin{aligned} u_x &= \mathbf{b}^T \mathbf{u}_x = b_1 u_{x1} + b_2 u_{x2} + b_3 u_{x3} + b_4 u_{x4}, \\ u_y &= \mathbf{b}^T \mathbf{u}_y = b_1 u_{y1} + b_2 u_{y2} + b_3 u_{y3} + b_4 u_{y4}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

kde $\mathbf{u}_x = [u_{x1}, u_{x2}, u_{x3}, u_{x4}]^T$ a $\mathbf{u}_y = [u_{y1}, u_{y2}, u_{y3}, u_{y4}]^T$ sú x -ové a y -ové časovo závislé hodnoty riešenia vo vrcholoch (*uzloch*). Izoparametrickú reprezentáciu vyjadríme v maticovom tvare

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{u}_x^T \mathbf{b} \\ \mathbf{u}_y^T \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{b}. \quad (3.2.10)$$

Ak priestor váhových funkcií w_i v rovnici (3.2.4) aproximujeme zložkami vektora \mathbf{b} , potom ľavú stranu rovnice môžeme vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b} \rho u_{x,tt} + \mathbf{b}_{,x} \tau_{xx} + \mathbf{b}_{,y} \tau_{xy} - \mathbf{b} f_x) \text{Det} \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b} \rho u_{y,tt} + \mathbf{b}_{,x} \tau_{yx} + \mathbf{b}_{,y} \tau_{yy} - \mathbf{b} f_y) \text{Det} \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

kde lokálny vektor vratnej sily má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x} \tau_{xx} + \mathbf{b}_{,y} \tau_{xy}) \text{Det} \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ \mathbf{r}_y &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x} \tau_{yx} + \mathbf{b}_{,y} \tau_{yy}) \text{Det} \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Výpočtom lokálneho vektora vratnej sily sa budeme bližšie zaoberať a preto ho vyjadríme v rozpísanom tvare:

$$\mathbf{r}_x = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} b_{1,x} \tau_{xx} + b_{1,y} \tau_{xy} \\ b_{2,x} \tau_{xx} + b_{1,y} \tau_{xy} \\ b_{3,x} \tau_{xx} + b_{1,y} \tau_{xy} \\ b_{4,x} \tau_{xx} + b_{1,y} \tau_{xy} \end{bmatrix} \text{Det} \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{r}_y = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} b_{1,x} \tau_{yx} + b_{1,y} \tau_{yy} \\ b_{2,x} \tau_{yx} + b_{1,y} \tau_{yy} \\ b_{3,x} \tau_{yx} + b_{1,y} \tau_{yy} \\ b_{4,x} \tau_{yx} + b_{1,y} \tau_{yy} \end{bmatrix} \text{Det} \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta.$$

Tenzor napätia je daný Hookovým zákonom:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \alpha u_{x,x} + \lambda u_{y,y} \ , \\ \tau_{xy} &= \mu (u_{x,y} + u_{y,x}) \ , \\ \tau_{yy} &= \alpha u_{y,y} + \lambda u_{x,x} \ , \\ \alpha &= \lambda + 2\mu.\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

Vzhľadom k tomu, že \mathbf{u}_x a \mathbf{u}_y nie sú závislé od priestorových súradníc, môžeme derivácie posunutia (3.2.9) preniesť na báзовé funkcie:

$$\begin{aligned}u_{x,x} &= \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_x = b_{1,x} u_{x1} + b_{2,x} u_{x2} + b_{3,x} u_{x3} + b_{4,x} u_{x4} \ , \\ u_{x,y} &= \mathbf{b}_{,y}^T \mathbf{u}_x = b_{1,y} u_{x1} + b_{2,y} u_{x2} + b_{3,y} u_{x3} + b_{4,y} u_{x4} \ , \\ u_{y,x} &= \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_y = b_{1,x} u_{y1} + b_{2,x} u_{y2} + b_{3,x} u_{y3} + b_{4,x} u_{y4} \ , \\ u_{y,y} &= \mathbf{b}_{,y}^T \mathbf{u}_y = b_{1,y} u_{y1} + b_{2,y} u_{y2} + b_{3,y} u_{y3} + b_{4,y} u_{y4} \ .\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

Použijeme reťazové pravidlo a derivácie báзовých funkcií podľa x, y vyjadríme pomocou derivácií báзовých funkcií podľa ξ, η :

$$\mathbf{b}_{,x} = \mathbf{b}_{,\xi} \xi_{,x} + \mathbf{b}_{,\eta} \eta_{,x} \ , \quad \mathbf{b}_{,y} = \mathbf{b}_{,\xi} \xi_{,y} + \mathbf{b}_{,\eta} \eta_{,y} \ .\tag{3.2.16}$$

Rozpísaním vektora báзовých funkcií dostaneme

$$\begin{aligned}b_{1,x} &= b_{1,\xi} \xi_{,x} + b_{1,\eta} \eta_{,x} \ , & b_{1,y} &= b_{1,\xi} \xi_{,y} + b_{1,\eta} \eta_{,y} \ , \\ b_{2,x} &= b_{2,\xi} \xi_{,x} + b_{2,\eta} \eta_{,x} \ , & b_{2,y} &= b_{2,\xi} \xi_{,y} + b_{2,\eta} \eta_{,y} \ , \\ b_{3,x} &= b_{3,\xi} \xi_{,x} + b_{3,\eta} \eta_{,x} \ , & b_{3,y} &= b_{3,\xi} \xi_{,y} + b_{3,\eta} \eta_{,y} \ , \\ b_{4,x} &= b_{4,\xi} \xi_{,x} + b_{4,\eta} \eta_{,x} \ , & b_{4,y} &= b_{4,\xi} \xi_{,y} + b_{4,\eta} \eta_{,y} \ ,\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

kde derivácie ξ, η podľa x, y

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\tag{3.2.18}$$

sú prvkami inverznej matice Jacobiánu transformácie (3.2.8)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} .\tag{3.2.19}$$

Prvky Jacobiánu transformácie, teda derivácie x, y podľa ξ, η , vyjadríme pomocou derivácií báзовých funkcií podľa ξ, η :

$$\begin{aligned}
 x_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^T \mathbf{x} = b_{1,\xi} x_1 + b_{2,\xi} x_2 + b_{3,\xi} x_3 + b_{4,\xi} x_4 , \\
 y_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^T \mathbf{y} = b_{1,\xi} y_1 + b_{2,\xi} y_2 + b_{3,\xi} y_3 + b_{4,\xi} y_4 , \\
 x_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^T \mathbf{x} = b_{1,\eta} x_1 + b_{2,\eta} x_2 + b_{3,\eta} x_3 + b_{4,\eta} x_4 , \\
 y_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^T \mathbf{y} = b_{1,\eta} y_1 + b_{2,\eta} y_2 + b_{3,\eta} y_3 + b_{4,\eta} y_4 .
 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Derivácie básových funkcií podľa lokálnych súradníc sú

$$\mathbf{b}_{,\xi} = \begin{bmatrix} b_{1,\xi} \\ b_{2,\xi} \\ b_{3,\xi} \\ b_{4,\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)(1-\eta) \\ (+1)(1-\eta) \\ (-1)(1+\eta) \\ (+1)(1+\eta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{,\eta} = \begin{bmatrix} b_{1,\eta} \\ b_{2,\eta} \\ b_{3,\eta} \\ b_{4,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)(1-\xi) \\ (-1)(1+\xi) \\ (+1)(1-\xi) \\ (+1)(1+\xi) \end{bmatrix}. \tag{3.2.21}$$

V nasledujúcom texte sa budeme zaoberať výpočtom lokálneho vektora vratnej sily.

3.2.1 Výpočet lokálneho vektora vratnej sily

Zavedieme substitúciu

$$\begin{aligned}
 \xi_m &= 1 - \xi, & \eta_m &= 1 - \eta, \\
 \xi_p &= 1 + \xi, & \eta_p &= 1 + \eta
 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

a vyjadríme derivácie básových funkcií podľa lokálnych súradníc (3.2.21)

$$\mathbf{b}_{,\xi} = \begin{bmatrix} b_{1,\xi} \\ b_{2,\xi} \\ b_{3,\xi} \\ b_{4,\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\eta_m \\ +\eta_m \\ -\eta_p \\ +\eta_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{,\eta} = \begin{bmatrix} b_{1,\eta} \\ b_{2,\eta} \\ b_{3,\eta} \\ b_{4,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\xi_m \\ -\xi_p \\ +\xi_m \\ +\xi_p \end{bmatrix}. \tag{3.2.23}$$

Derivácie básových funkcií podľa lokálnych súradníc (3.2.23) dosadíme do (3.2.20):

$$\begin{aligned}
 x_{,\xi} &= \frac{1}{4}(-\eta_m x_1 + \eta_m x_2 - \eta_p x_3 + \eta_p x_4), \\
 y_{,\xi} &= \frac{1}{4}(-\eta_m y_1 + \eta_m y_2 - \eta_p y_3 + \eta_p y_4), \\
 x_{,\eta} &= \frac{1}{4}(-\xi_m x_1 - \xi_p x_2 + \xi_m x_3 + \xi_p x_4), \\
 y_{,\eta} &= \frac{1}{4}(-\xi_m y_1 - \xi_p y_2 + \xi_m y_3 + \xi_p y_4).
 \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Pre prvky Jacobiánu dostaneme výraz

$$\begin{aligned}
 x_{,\xi} &= \frac{1}{4}(\eta_m(x_2 - x_1) + \eta_p(x_4 - x_3)), \\
 y_{,\xi} &= \frac{1}{4}(\eta_m(y_2 - y_1) + \eta_p(y_4 - y_3)), \\
 x_{,\eta} &= \frac{1}{4}(\xi_m(x_3 - x_1) + \xi_p(x_4 - x_2)), \\
 y_{,\eta} &= \frac{1}{4}(\xi_m(y_3 - y_1) + \xi_p(y_4 - y_2)),
 \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

kde priestorové diferencie označíme nasledovne:

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= x_{21}, & x_4 - x_3 &= x_{43}, \\
 y_2 - y_1 &= y_{21}, & y_4 - y_3 &= y_{43}, \\
 x_3 - x_1 &= x_{31}, & x_4 - x_2 &= x_{42}, \\
 y_3 - y_1 &= y_{31}, & y_4 - y_2 &= y_{42}.
 \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Vzťahy (3.2.26) dosadíme do (3.2.25) a dostaneme

$$\begin{aligned}
 x_{,\xi} &= \frac{1}{4}x_{\xi} = \frac{1}{4}(\eta_m x_{21} + \eta_p x_{43}), \\
 y_{,\xi} &= \frac{1}{4}y_{\xi} = \frac{1}{4}(\eta_m y_{21} + \eta_p y_{43}), \\
 x_{,\eta} &= \frac{1}{4}x_{\eta} = \frac{1}{4}(\xi_m x_{31} + \xi_p x_{42}), \\
 y_{,\eta} &= \frac{1}{4}y_{\eta} = \frac{1}{4}(\xi_m y_{31} + \xi_p y_{42}).
 \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Pomocou premenných $x_{\xi}, y_{\xi}, x_{\eta}, y_{\eta}$ vyjadríme Jacobián

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_{\xi} & y_{\xi} \\ x_{\eta} & y_{\eta} \end{bmatrix} \tag{3.2.28}$$

a determinant Jacobiánu

$$Det\mathbf{J} = x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta} = \frac{1}{16}(x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}). \tag{3.2.29}$$

Ak vyjadríme derivácie lokálnych súradníc podľa globálnych súradníc pomocu $x_{\xi}, y_{\xi}, x_{\eta}, y_{\eta}$,

$$\begin{aligned}
 \xi_{,x} &= \frac{y_{,\eta}}{Det\mathbf{J}} = \frac{y_{\eta}}{4Det\mathbf{J}}, \\
 \eta_{,x} &= \frac{-x_{,\eta}}{Det\mathbf{J}} = \frac{-x_{\eta}}{4Det\mathbf{J}}, \\
 \xi_{,y} &= \frac{-y_{,\xi}}{Det\mathbf{J}} = \frac{-y_{\xi}}{4Det\mathbf{J}}, \\
 \eta_{,y} &= \frac{x_{,\xi}}{Det\mathbf{J}} = \frac{x_{\xi}}{4Det\mathbf{J}},
 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

dostaneme pre derivácie bázových funkcií podľa globálnych súradníc

$$\begin{aligned}
 b_{1,x} &= b_{1,\xi} \frac{y_{\eta}}{4Det\mathbf{J}} + b_{1,\eta} \frac{-x_{\eta}}{4Det\mathbf{J}}, & b_{1,y} &= b_{1,\xi} \frac{-y_{\xi}}{4Det\mathbf{J}} + b_{1,\eta} \frac{x_{\xi}}{4Det\mathbf{J}}, \\
 b_{2,x} &= b_{2,\xi} \frac{y_{\eta}}{4Det\mathbf{J}} + b_{2,\eta} \frac{-x_{\eta}}{4Det\mathbf{J}}, & b_{2,y} &= b_{2,\xi} \frac{-y_{\xi}}{4Det\mathbf{J}} + b_{2,\eta} \frac{x_{\xi}}{4Det\mathbf{J}}, \\
 b_{3,x} &= b_{3,\xi} \frac{y_{\eta}}{4Det\mathbf{J}} + b_{3,\eta} \frac{-x_{\eta}}{4Det\mathbf{J}}, & b_{3,y} &= b_{3,\xi} \frac{-y_{\xi}}{4Det\mathbf{J}} + b_{3,\eta} \frac{x_{\xi}}{4Det\mathbf{J}}, \\
 b_{4,x} &= b_{4,\xi} \frac{y_{\eta}}{4Det\mathbf{J}} + b_{4,\eta} \frac{-x_{\eta}}{4Det\mathbf{J}}, & b_{4,y} &= b_{4,\xi} \frac{-y_{\xi}}{4Det\mathbf{J}} + b_{4,\eta} \frac{x_{\xi}}{4Det\mathbf{J}}.
 \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Derivácie básových funkcií podľa lokálnych súradníc vyjadríme pomocou (3.2.23):

$$\begin{aligned}
 b_{1,x} &= \left(\frac{-\eta_m}{4} y_\eta + \frac{\xi_m}{4} x_\eta \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{1,y} &= \left(\frac{\eta_m}{4} y_\xi - \frac{\xi_m}{4} x_\xi \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 b_{2,x} &= \left(\frac{\eta_m}{4} y_\eta + \frac{\xi_p}{4} x_\eta \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{2,y} &= \left(\frac{-\eta_m}{4} y_\xi - \frac{\xi_p}{4} x_\xi \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 b_{3,x} &= \left(\frac{-\eta_p}{4} y_\eta - \frac{\xi_m}{4} x_\eta \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{3,y} &= \left(\frac{\eta_p}{4} y_\xi + \frac{\xi_m}{4} x_\xi \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 b_{4,x} &= \left(\frac{\eta_p}{4} y_\eta - \frac{\xi_p}{4} x_\eta \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{4,y} &= \left(\frac{-\eta_p}{4} y_\xi + \frac{\xi_p}{4} x_\xi \right) / 4 \text{Det} \mathbf{J}.
 \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Koeficient 1/4 presunieme za zátvorku:

$$\begin{aligned}
 b_{1,x} &= (-\eta_m y_\eta + \xi_m x_\eta) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{1,y} &= (\eta_m y_\xi - \xi_m x_\xi) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 b_{2,x} &= (\eta_m y_\eta + \xi_p x_\eta) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{2,y} &= (-\eta_m y_\xi - \xi_p x_\xi) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 b_{3,x} &= (-\eta_p y_\eta - \xi_m x_\eta) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{3,y} &= (\eta_p y_\xi + \xi_m x_\xi) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 b_{4,x} &= (\eta_p y_\eta - \xi_p x_\eta) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, & b_{4,y} &= (-\eta_p y_\xi + \xi_p x_\xi) / 16 \text{Det} \mathbf{J}.
 \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Výrazy v zátvorkách označíme

$$\begin{aligned}
 b_{1x} &= -\eta_m y_\eta + \xi_m x_\eta, & b_{1y} &= \eta_m y_\xi - \xi_m x_\xi, \\
 b_{2x} &= \eta_m y_\eta + \xi_p x_\eta, & b_{2y} &= -\eta_m y_\xi - \xi_p x_\xi, \\
 b_{3x} &= -\eta_p y_\eta - \xi_m x_\eta, & b_{3y} &= \eta_p y_\xi + \xi_m x_\xi, \\
 b_{4x} &= \eta_p y_\eta - \xi_p x_\eta, & b_{4y} &= -\eta_p y_\xi + \xi_p x_\xi
 \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

a použijeme ich na interpoláciu posunutia:

$$\begin{aligned}
 u_{x,x} &= (b_{1x} u_{x1} + b_{2x} u_{x2} + b_{3x} u_{x3} + b_{4x} u_{x4}) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 u_{x,y} &= (b_{1y} u_{x1} + b_{2y} u_{x2} + b_{3y} u_{x3} + b_{4y} u_{x4}) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 u_{y,x} &= (b_{1x} u_{y1} + b_{2x} u_{y2} + b_{3x} u_{y3} + b_{4x} u_{y4}) / 16 \text{Det} \mathbf{J}, \\
 u_{y,y} &= (b_{1y} u_{y1} + b_{2y} u_{y2} + b_{3y} u_{y3} + b_{4y} u_{y4}) / 16 \text{Det} \mathbf{J}.
 \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Výrazy v zátvorkách označíme

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= b_{1x} u_{x1} + b_{2x} u_{x2} + b_{3x} u_{x3} + b_{4x} u_{x4}, \\
 u_{xy} &= b_{1y} u_{x1} + b_{2y} u_{x2} + b_{3y} u_{x3} + b_{4y} u_{x4}, \\
 u_{yx} &= b_{1x} u_{y1} + b_{2x} u_{y2} + b_{3x} u_{y3} + b_{4x} u_{y4}, \\
 u_{yy} &= b_{1y} u_{y1} + b_{2y} u_{y2} + b_{3y} u_{y3} + b_{4y} u_{y4}
 \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

a použijeme ich na interpoláciu napätia

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= (\alpha u_{xx} + \lambda u_{yy})/16 \text{Det}\mathbf{J} , \\
 \tau_{xy} &= \mu (u_{xy} + u_{yx}) /16 \text{Det}\mathbf{J} , \\
 \tau_{yy} &= (\alpha u_{yy} + \lambda u_{xx})/16 \text{Det}\mathbf{J} .
 \end{aligned}
 \tag{3.2.37}$$

Integrand vo vzťahu (3.2.13) (*hustotu vratnej sily*) označíme

$$\begin{aligned}
 h_{x1} &= (b_{1,x} \tau_{xx} + b_{1,y} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} , & h_{y1} &= (b_{1,x} \tau_{yx} + b_{1,y} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{x2} &= (b_{2,x} \tau_{xx} + b_{2,y} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} , & h_{y2} &= (b_{2,x} \tau_{yx} + b_{2,y} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{x3} &= (b_{3,x} \tau_{xx} + b_{3,y} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} , & h_{y3} &= (b_{3,x} \tau_{yx} + b_{3,y} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{x4} &= (b_{4,x} \tau_{xx} + b_{4,y} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} , & h_{y4} &= (b_{4,x} \tau_{yx} + b_{4,y} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.38}$$

a vyjadríme pomocou b_{ix} a b_{iy} , kde $i = (1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned}
 h_{x1} &= \left(\frac{b_{1x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xx} + \frac{b_{1y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xy} \right) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{x2} &= \left(\frac{b_{2x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xx} + \frac{b_{2y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xy} \right) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{x3} &= \left(\frac{b_{3x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xx} + \frac{b_{3y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xy} \right) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{x4} &= \left(\frac{b_{4x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xx} + \frac{b_{4y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{xy} \right) \text{Det}\mathbf{J} ,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.39}$$

$$\begin{aligned}
 h_{y1} &= \left(\frac{b_{1x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yx} + \frac{b_{1y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yy} \right) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{y2} &= \left(\frac{b_{2x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yx} + \frac{b_{2y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yy} \right) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{y3} &= \left(\frac{b_{3x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yx} + \frac{b_{3y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yy} \right) \text{Det}\mathbf{J} , \\
 h_{y4} &= \left(\frac{b_{4x}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yx} + \frac{b_{4y}}{16 \text{Det}\mathbf{J}} \tau_{yy} \right) \text{Det}\mathbf{J} .
 \end{aligned}$$

Determinant Jacobiánu vykrátíme:

$$\begin{aligned}
 h_{x1} &= (b_{1x} \tau_{xx} + b_{1y} \tau_{xy})/16 , & h_{y1} &= (b_{1x} \tau_{yx} + b_{1y} \tau_{yy})/16 , \\
 h_{x2} &= (b_{2x} \tau_{xx} + b_{2y} \tau_{xy})/16 , & h_{y2} &= (b_{2x} \tau_{yx} + b_{2y} \tau_{yy})/16 , \\
 h_{x3} &= (b_{3x} \tau_{xx} + b_{3y} \tau_{xy})/16 , & h_{y3} &= (b_{3x} \tau_{yx} + b_{3y} \tau_{yy})/16 , \\
 h_{x4} &= (b_{4x} \tau_{xx} + b_{4y} \tau_{xy})/16 , & h_{y4} &= (b_{4x} \tau_{yx} + b_{4y} \tau_{yy})/16 .
 \end{aligned}
 \tag{3.2.40}$$

Aby sme nemuseli deliť každé h_{xi} , h_{yi} , vydelíme tenzor napätia. Teda stačí vynásobiť prvky tenzora napätia výrazom

$$D_J = \frac{1}{16 \cdot 16 \cdot \text{Det}\mathbf{J}} = \frac{0.0625}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} .
 \tag{3.2.41}$$

3.2.2 Algoritmus bez využitia e-invariantov

Na výpočet lokálneho vektora vratnej sily (3.2.12) sa štandardne používa numerická integrácia. Uvedieme algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily vyjadreného v štandardnej báze použitím Gaussovej kvadratury. Ku každému algoritmickeému kroku uvedieme počty operácií delenia, násobenia, sčítania/odčítania, pre ktoré použijeme symboly \div , $*$, \pm .

Algoritmus

Vynulujeme premenné pre prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned} r_{x1} &= 0 & r_{y1} &= 0 \\ r_{x2} &= 0 & r_{y2} &= 0 \\ r_{x3} &= 0 & r_{y3} &= 0 \\ r_{x4} &= 0 & r_{y4} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Vypočítame diferencie priestorových súradníc

$$\begin{aligned} x_{21} &= x_2 - x_1 & x_{43} &= x_4 - x_3 \\ y_{21} &= y_2 - y_1 & y_{43} &= y_4 - y_3 \\ x_{31} &= x_3 - x_1 & x_{42} &= x_4 - x_2 \\ y_{31} &= y_3 - y_1 & y_{42} &= y_4 - y_2 \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 8$$

Začiatok integračného cyklu

Vypočítame funkčné hodnoty $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$ v integračných bodoch použitím vzťahu (3.2.27)

$$\begin{aligned} \xi_p &= 1 + \xi & \eta_p &= 1 + \eta \\ \xi_m &= 1 - \xi & \eta_m &= 1 - \eta \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

$$\begin{aligned}
 x_\xi &= \eta_m * x_{21} + \eta_p * x_{43} \\
 y_\xi &= \eta_m * y_{21} + \eta_p * y_{43} \\
 x_\eta &= \xi_m * x_{31} + \xi_p * x_{42} \\
 y_\eta &= \xi_m * y_{31} + \xi_p * y_{42}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.45}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 8 \quad \pm \mapsto 8$$

Podľa (3.2.41) vypočítame

$$D_J = \frac{0.0625}{x_\xi * y_\eta - y_\xi * x_\eta} \tag{3.2.46}$$

$$\div \mapsto 1 \quad * \mapsto 2 \quad \pm \mapsto 1$$

Podľa (3.2.34) vypočítame

$$\begin{aligned}
 \eta_m y_\eta &= \eta_m * y_\eta & \xi_m x_\eta &= \xi_m * x_\xi \\
 \eta_m y_\xi &= \eta_m * y_\xi & \xi_p x_\eta &= \xi_m * x_\eta \\
 \xi_p x_\xi &= \xi_p * x_\xi & \eta_p y_\eta &= \eta_p * y_\eta \\
 \eta_p y_\xi &= \eta_p * y_\xi & \xi_m x_\xi &= \xi_p * x_\eta
 \end{aligned}
 \tag{3.2.47}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1x} &= \xi_m x_\eta - \eta_m y_\eta & b_{1y} &= \eta_m y_\xi - \xi_m x_\xi \\
 b_{2x} &= \eta_m y_\eta + \xi_p x_\eta & b_{2y} &= -\eta_m y_\xi - \xi_p x_\xi \\
 b_{3x} &= -\eta_p y_\eta - \xi_m x_\eta & b_{3y} &= \eta_p y_\xi + \xi_m x_\xi \\
 b_{4x} &= \eta_p y_\eta - \xi_p x_\eta & b_{4y} &= \xi_p x_\xi - \eta_p y_\xi
 \end{aligned}
 \tag{3.2.48}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 8 \quad \pm \mapsto 10$$

Podľa (3.2.36) vypočítame

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= b_{1x} * u_{x1} + b_{2x} * u_{x2} + b_{3x} * u_{x3} + b_{4x} * u_{x4} \\
 u_{xy} &= b_{1y} * u_{x1} + b_{2y} * u_{x2} + b_{3y} * u_{x3} + b_{4y} * u_{x4} \\
 u_{yx} &= b_{1x} * u_{y1} + b_{2x} * u_{y2} + b_{3x} * u_{y3} + b_{4x} * u_{y4} \\
 u_{yy} &= b_{1y} * u_{y1} + b_{2y} * u_{y2} + b_{3y} * u_{y3} + b_{4y} * u_{y4}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.49}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 16 \quad \pm \mapsto 12$$

Podľa (3.2.37) vypočítame

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lambda + \mu + \mu \\
\tau_{xx} &= (\alpha * u_{xx} + \lambda * u_{yy}) * D_J \\
\tau_{xy} &= \mu * (u_{xy} + u_{yx}) * D_J \\
\tau_{yy} &= (\alpha * u_{yy} + \lambda * u_{xx}) * D_J
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 8 \quad \pm \mapsto 5$$

Podľa (3.2.40) vypočítame

$$\begin{aligned}
h_{x1} &= b_{1x} * \tau_{xx} + b_{1y} * \tau_{xy} & h_{y1} &= b_{1x} * \tau_{yx} + b_{1y} * \tau_{yy} \\
h_{x2} &= b_{2x} * \tau_{xx} + b_{1y} * \tau_{xy} & h_{y2} &= b_{2x} * \tau_{yx} + b_{1y} * \tau_{yy} \\
h_{x3} &= b_{3x} * \tau_{xx} + b_{1y} * \tau_{xy} & h_{y3} &= b_{3x} * \tau_{yx} + b_{1y} * \tau_{yy} \\
h_{x4} &= b_{4x} * \tau_{xx} + b_{1y} * \tau_{xy} & h_{y4} &= b_{4x} * \tau_{yx} + b_{1y} * \tau_{yy}
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 16 \quad \pm \mapsto 8$$

$$\begin{aligned}
r_{x1} &= r_{x1} + h_{x1} & r_{y1} &= r_{y1} + h_{y1} \\
r_{x2} &= r_{x2} + h_{x2} & r_{y2} &= r_{y2} + h_{y2} \\
r_{x3} &= r_{x3} + h_{x3} & r_{y3} &= r_{y3} + h_{y3} \\
r_{x4} &= r_{x4} + h_{x4} & r_{y4} &= r_{y4} + h_{y4}
\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 8$$

Koniec integračného cyklu

3.2.3 Výpočet lokálneho vektora vratnej sily s využitím e-invariantov

V tomto paragrafe navrhujeme nový spôsob výpočtu lokálneho vektora vratnej sily, ktorý je založený na použití novej bázy. Nová báza umožní využiť e-invarianty množiny hodnôt vyskytujúcich sa vo výpočte. Prvky novej bázy sú najjednoduchšie možné funkcie, ktoré generujú priestor bilineárnych polynómov a sú na jednotkovom štvorci $\xi \in \langle -1, 1 \rangle$ a $\eta \in \langle -1, 1 \rangle$ navzájom ortogonálne. e-invarianty zasa eliminujú nadbytočnú informáciu z výpočtu lokálneho vektora vratnej sily.

Novú bázu

$$\mathbf{b}^{(inv)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \eta\xi \end{bmatrix} \quad (3.2.53)$$

dostaneme z prvkov vektora starej bázy transformáciou

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \eta\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad (3.2.54)$$

kde transformačnú maticu označíme

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.55)$$

Riadky matice \mathbf{T} sú navzájom ortogonálne vektory s rovnakou normou 2 a preto platí

$$\frac{1}{4}\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}, \quad (3.2.56)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matica. Vlastnosť (3.2.56) umožní vyjadriť izoparametrickú formu

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{b} \quad (3.2.57)$$

pomocou novej bázy s využitím e-invariantov takto:

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{b} = \mathbf{V}\mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{V} \left(\frac{1}{4}\mathbf{T}^T\mathbf{T} \right) \mathbf{b} = \left(\mathbf{V}\frac{1}{4}\mathbf{T}^T \right) (\mathbf{T}\mathbf{b}) = \mathbf{V}^{(inv)}\mathbf{b}^{(inv)}. \quad (3.2.58)$$

Prvky matice $\mathbf{V}^{(inv)}$ sú e-invarianty priestorových súradníc a posunutí.

Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{V}^{(inv)}\mathbf{b}^{(inv)}$ môžeme vyjadriť v rozpísanom tvare:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(12)} \\ y^{(0)} & y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(12)} \\ u_x^{(0)} & u_x^{(1)} & u_x^{(2)} & u_x^{(12)} \\ u_y^{(0)} & u_y^{(1)} & u_y^{(2)} & u_y^{(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \eta\xi \end{bmatrix}. \quad (3.2.59)$$

V nasledujúcom texte najskôr podrobnejšie analyzujeme priestorovú transformáciu vyjadrenú pomocou novej bázy s využitím e-invariantov,

$$\begin{aligned} x &= x^{(0)}1 + x^{(1)}\xi + x^{(2)}\eta + x^{(12)}\xi\eta, \\ y &= y^{(0)}1 + y^{(1)}\xi + y^{(2)}\eta + y^{(12)}\xi\eta. \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

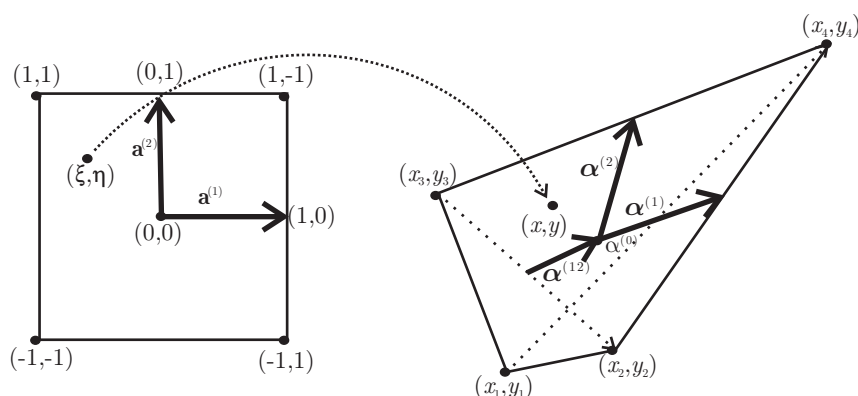
Na výpočet lokálneho vektora vratnej sily potrebujeme prvky Jacobiánu priestorovej transformácie. Vzhľadom k tomu, že $[x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(12)}]$ a $[y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(12)}]$ nie sú závislé od priestorových súradníc ξ, η , môžeme derivácie globálnych súradníc x, y preniesť na nové bázové funkcie. Derivácie globálnych súradníc podľa lokálnych súradníc potom budú:

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= x^{(0)}0 + x^{(1)}1 + x^{(2)}0 + x^{(12)}\eta, \\ y_{,\xi} &= y^{(0)}0 + y^{(1)}1 + y^{(2)}0 + y^{(12)}\eta, \\ x_{,\eta} &= x^{(0)}0 + x^{(1)}0 + x^{(2)}1 + x^{(12)}\xi, \\ y_{,\eta} &= y^{(0)}0 + y^{(1)}0 + y^{(2)}1 + y^{(12)}\xi. \end{aligned} \quad (3.2.61)$$

Prvé e-invarianty sú x -ová a y -ová súradnica geometrického stredu $\alpha^{(0)} = [x^{(0)}, y^{(0)}]$ v štvoruholníkovom elemente, kde

$$x^{(0)} = \frac{+x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y^{(0)} = \frac{+y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}. \quad (3.2.62)$$

Tento bod je obrazom bodu $[\xi, \eta] = [0, 0]$ v transformácii priestorových súradníc, ktorá je znázornená na Obr. 3.2.2. Bod $\alpha^{(0)}$ určuje polohu elementu vo výpočtovej ob-



Obr. 3.2.2. Bilineárna transformácia a e-invarianty.

lasti nezávisle od veľkosti, tvaru a natočenia elementu. Nulové koeficienty vo vzťahoch

(3.2.61), ktoré sa vyskytujú pri e-invariantoch $x^{(0)}$ a $y^{(0)}$, ukazujú, že výpočet lokálneho vektora vratnej sily nezávisí od polohy elementu. Je to nadbytočná informácia, ktorú pri tvorbe algoritmu z výpočtu vynecháme.

Ďalšie e-invarianty sú x -ové a y -ové súradnice vektorov $\alpha^{(1)} = [x^{(1)}, y^{(1)}]$ a $\alpha^{(2)} = [x^{(2)}, y^{(2)}]$. Tieto vektory sú obrazmi vektorov $\mathbf{a}^{(1)} = [\xi, \eta] = [1, 0]$ a $\mathbf{a}^{(2)} = [\xi, \eta] = [0, 1]$. Ich súradnice sú

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)}{4}, & y^{(1)} &= \frac{(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4)}{4}, \\ x^{(2)} &= \frac{(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)}{4}, & y^{(2)} &= \frac{(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)}{4}. \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

Vektor $\alpha^{(1)}$ vedie z bodu $\alpha^{(0)} = [x^{(0)}, y^{(0)}]$ do stredu strany určenej uzlami [2,4]. Vektor $\alpha^{(2)}$ vedie z bodu $\alpha^{(0)}$ do stredu strany určenej uzlami [3,4]. Tento fakt vyjadrujú nasledujúce vzťahy

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{(x_2 + x_4)}{2} - x^{(0)}, & y^{(1)} &= \frac{(y_2 + y_4)}{2} - y^{(0)}, \\ x^{(2)} &= \frac{(x_3 + x_4)}{2} - x^{(0)}, & y^{(2)} &= \frac{(y_3 + y_4)}{2} - y^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

Tieto vektory sú nezávislé od polohy elementu. Ich dĺžky

$$|\alpha^{(1)}| = \sqrt{x^{(1)}x^{(1)} + y^{(1)}y^{(1)}}, \quad |\alpha^{(2)}| = \sqrt{x^{(2)}x^{(2)} + y^{(2)}y^{(2)}}, \quad (3.2.65)$$

a uhol

$$\beta = \text{Arccos}\left(\frac{x^{(1)}y^{(1)} + x^{(2)}y^{(2)}}{|\alpha^{(1)}||\alpha^{(2)}|}\right) \quad (3.2.66)$$

sú nezávislé od otočenia elementu okolo bodu $\alpha^{(0)}$. Nulové koeficienty pri súradniciach $x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}$ a $y^{(2)}$ vo výraze (3.2.61) ukazujú, na ktorých miestach ich môžeme vo výpočte vynechať.

Posledné e-invarianty sú súradnice

$$x^{(12)} = \frac{1}{4} (+x_1 - x_2 - x_3 + x_4), \quad y^{(12)} = \frac{1}{4} (+y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \quad (3.2.67)$$

vektora $\alpha^{(12)}$. Tento vektor je obrazom nulového vektora na jednotkovom elemente. Vedie z bodu $\alpha^{(0)}$ do stredu uhlopriečky 2, 3 spájajúcej body $[x_2, y_2]$ a $[x_3, y_3]$ a nezávisí od polohy elementu

$$x^{(12)} = x^{(0)} - \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \quad y^{(12)} = y^{(0)} - \frac{1}{2}(y_2 + y_3). \quad (3.2.68)$$

Veľkosť vektora je

$$|\boldsymbol{\alpha}^{(12)}| = \sqrt{x^{(12)}x^{(12)} + y^{(12)}y^{(12)}}. \quad (3.2.69)$$

Táto hodnota je nezávislá od rotácie a môže byť použitá ako miera toho, ako veľmi sa štvoruholník líši od rovnobežníka. V prípade rovnobežníka sú stredy oboch uhlopriečok v bode $\alpha^{(0)}$ a tento vektor je nulový. Tento fakt má veľký význam pri tvorbe algoritmu, pretože ak je element rovnobežník, determinant Jacobiánu je konštantný:

$$\text{Det}\mathbf{J} = \text{Det} \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \text{Det} \begin{bmatrix} (x^{(1)} + x^{(12)}\eta) & (x^{(2)} + x^{(12)}\xi) \\ (y^{(1)} + y^{(12)}\eta) & (y^{(2)} + y^{(12)}\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.2.70)$$

Ak výraz (3.2.70) vyjadríme v tvare

$$\text{Det}\mathbf{J} = \text{Det} \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{bmatrix} + \xi \text{Det} \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(12)} \\ y^{(1)} & y^{(12)} \end{bmatrix} + \eta \text{Det} \begin{bmatrix} x^{(12)} & x^{(2)} \\ y^{(12)} & y^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.71)$$

ľahko vidieť, že pre vektor $\boldsymbol{\alpha}^{(12)} = [x^{(12)}, y^{(12)}] = [0, 0]$ je determinant Jacobiánu

$$\text{Det}\mathbf{J} = \text{Det} \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.2.72)$$

nezávislý od priestorových súradníc a teda je konštantný.

Ďalšia časť izoparametrickej reprezentácie (3.2.59) je interpolácia posunutí pomocou novej bázy a e-invariantov:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^{(0)}1 + u_x^{(1)}\xi + u_x^{(2)}\eta + u_x^{(12)}\xi\eta, \\ u_y &= u_y^{(0)}1 + u_y^{(1)}\xi + u_y^{(2)}\eta + u_y^{(12)}\xi\eta. \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

Lokálny vektor vratnej sily závisí od derivácií posunutia podľa globálnych súradníc x, y . Vzhľadom k tomu, že $[u_x^{(0)}, u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, u_x^{(12)}]$ a $[u_y^{(0)}, u_y^{(1)}, u_y^{(2)}, u_y^{(12)}]$ nie sú závislé od priestorových súradníc x, y , môžeme derivácie posunutí u_x, u_y preniesť na nové bázové funkcie. Derivácie posunutia podľa globálnych súradníc potom budú

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= u_x^{(0)}0 + u_x^{(1)}\xi_{,x} + u_x^{(2)}\eta_{,x} + u_x^{(12)}(\xi\eta)_{,x}, \\ u_{y,x} &= u_y^{(0)}0 + u_y^{(1)}\xi_{,x} + u_y^{(2)}\eta_{,x} + u_y^{(12)}(\xi\eta)_{,x}, \\ u_{x,y} &= u_x^{(0)}0 + u_x^{(1)}\xi_{,y} + u_x^{(2)}\eta_{,y} + u_x^{(12)}(\xi\eta)_{,y}, \\ u_{y,y} &= u_y^{(0)}0 + u_y^{(1)}\xi_{,y} + u_y^{(2)}\eta_{,y} + u_y^{(12)}(\xi\eta)_{,y}, \end{aligned} \quad (3.2.74)$$

kde derivácie ξ, η podľa x, y sú prvky inverzného Jacobiánu

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{bmatrix}. \quad (3.2.75)$$

Prvé e-invarianty sú x -ová a y -ová zložka strednej hodnoty posunutí v uzloch [1, 2, 3, 4]

$$u_x^{(0)} = \frac{u_{x1} + u_{x2} + u_{x3} + u_{x4}}{4}, \quad u_y^{(0)} = \frac{u_{y1} + u_{y2} + u_{y3} + u_{y4}}{4}. \quad (3.2.76)$$

Tieto e-invarianty vyjadrujú celkové posunutie časti pružného kontinua aproximovaného štvoruholníkom $\beta^{(0)} = [u_x^{(0)}, u_y^{(0)}]$. Nulové koeficienty vo vzťahoch (3.2.74), ktoré sa vyskytujú pri e-invariantoch $u_x^{(0)}$ a $u_y^{(0)}$, ukazujú, že výpočet lokálneho vektora vratnej sily nezávisí od toho, kam sa časť kontinua posunie. Je to nadbytočná informácia, ktorú pri tvorbe algoritmu z výpočtu vynecháme. Význam ostatných e-invariantov, ako uvidíme neskôr, sa prejaví pri výpočte vektora vratnej sily pre špeciálny prípad elementu v tvare štvorca.

Ak dosadíme deformácie do vzťahu pre výpočet napätia, môžeme počítat prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x} \tau_{xx} + \mathbf{b}_{,y} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ \mathbf{r}_y &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x} \tau_{yx} + \mathbf{b}_{,y} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (3.2.77)$$

Vo vzťahu (3.2.77) vyjadríme derivácie štandardných bázových funkcií podľa x, y pomocou derivácií nových bázových funkcií podľa x, y

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{,x} &= (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(inv)})_{,x} = \left(\frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}^{(inv)}\right)_{,x} = \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)}, \\ \mathbf{b}_{,y} &= (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(inv)})_{,y} = \left(\frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}^{(inv)}\right)_{,y} = \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \end{aligned} \quad (3.2.78)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{xx} + \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{xy}\right) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ \mathbf{r}_y &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{yx} + \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{yy}\right) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (3.2.79)$$

Ak vo výraze (3.2.79) vyberieme inverznú transformačnú maticu pred integrál, dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{xx} + \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ \mathbf{r}_y &= \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{yx} + \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

Ďalej zľava vynásobíme transformačnou maticou obe strany rovnice (3.2.80)

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}_x &= \mathbf{T}^{\frac{1}{4}} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{xx} + \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ \mathbf{Tr}_y &= \mathbf{T}^{\frac{1}{4}} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{yx} + \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta,\end{aligned}\tag{3.2.81}$$

a dostaneme vzťah pre e-invarianty lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x^{(inv)} &= \mathbf{Tr}_x = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{xx} + \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ \mathbf{r}_y^{(inv)} &= \mathbf{Tr}_y = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} \tau_{yx} + \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta.\end{aligned}\tag{3.2.82}$$

Vzťah (3.2.82) rozpíšeme:

$$\begin{aligned}r_x^{(0)} &= +r_{x1} + r_{x2} + r_{x3} + r_{x4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0\tau_{xx} + 0\tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ r_x^{(1)} &= -r_{x1} + r_{x2} - r_{x3} + r_{x4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\xi_{,x} \tau_{xx} + \xi_{,y} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ r_x^{(2)} &= -r_{x1} - r_{x2} + r_{x3} + r_{x4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\eta_{,x} \tau_{xx} + \eta_{,x} \tau_{xy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ r_x^{(12)} &= +r_{x1} - r_{x2} - r_{x3} + r_{x4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\xi\eta)_{,x} \tau_{xx} + (\xi\eta)_{,x} \tau_{xy}] \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta,\end{aligned}\tag{3.2.83}$$

$$\begin{aligned}r_y^{(0)} &= +r_{y1} + r_{y2} + r_{y3} + r_{y4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0\tau_{yx} + 0\tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ r_y^{(1)} &= -r_{y1} + r_{y2} - r_{y3} + r_{y4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\xi_{,x} \tau_{yx} + \xi_{,y} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ r_y^{(2)} &= -r_{y1} - r_{y2} + r_{y3} + r_{y4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\eta_{,x} \tau_{yx} + \eta_{,x} \tau_{yy}) \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta, \\ r_y^{(12)} &= +r_{y1} - r_{y2} - r_{y3} + r_{y4} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\xi\eta)_{,x} \tau_{yx} + (\xi\eta)_{,x} \tau_{yy}] \text{Det}\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta.\end{aligned}\tag{3.2.84}$$

Prvý e-invariant $[r_x^{(0)}, r_y^{(0)}]$ vyjadruje súčet lokálnych vratných síl pôsobiacich na element. Nulové koeficienty, ktoré sa vyskytujú pri zložkách tenzora napätia, vyjadrujú fakt, že túto informáciu vo výpočte nepotrebujeme. Význam ostatných e-invariantov, ako uvidíme neskôr, sa prejaví pri výpočte vektora vratnej sily pre špeciálny prípad elementu v tvare štvorca.

Príklad

Budeme uvažovať o štvorcoch, ktoré majú rovnakú veľkosť a orientáciu ako referenčný element. V tomto prípade sa priestorová transformácia medzi lokálnymi a globálnymi súradnicami redukuje na posunutie

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \xi = x^{(0)} + \xi, \\ y &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \eta = y^{(0)} + \eta \end{aligned} \quad (3.2.85)$$

v konečno-elementnej sieti. Inverzná transformácia je potom posunutie v opačnom smere:

$$\begin{aligned} \xi &= x^{(0)} - x, \\ \eta &= y^{(0)} - y. \end{aligned} \quad (3.2.86)$$

Zo vzťahov (3.2.85) a (3.2.86) vyplýva, že Jacobián transformácie i Jacobián inverznej transformácie je jednotková matica

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} x,\xi & x,\eta \\ y,\xi & y,\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi,x & \eta,x \\ \xi,y & \eta,y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.87)$$

a

$$Det\mathbf{J} = 1. \quad (3.2.88)$$

V takomto prípade pre derivácie nových báзовých funkcií $\mathbf{b}^{(inv)}$ podľa x a y dostaneme

$$\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi,x \\ \eta,x \\ (\eta\xi),x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi,y \\ \eta,y \\ (\eta\xi),y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (3.2.89)$$

Tieto derivácie bázy použijeme na výpočet derivácií posunutí vo vzťahu (3.2.74):

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= u_x^{(0)}0 + u_x^{(1)}1 + u_x^{(2)}0 + u_x^{(12)}\eta, \\ u_{y,x} &= u_y^{(0)}0 + u_y^{(1)}1 + u_y^{(2)}0 + u_y^{(12)}\eta, \\ u_{x,y} &= u_x^{(0)}0 + u_x^{(1)}0 + u_x^{(2)}1 + u_x^{(12)}\xi, \\ u_{y,y} &= u_y^{(0)}0 + u_y^{(1)}0 + u_y^{(2)}1 + u_y^{(12)}\xi. \end{aligned} \quad (3.2.90)$$

Prvé e-invarianty (3.2.62) sme analyzovali pri výpočte derivácií posunutí pre všeobecný štvoruholník. Druhé e-invarianty

$$u_x^{(1)} = \frac{-u_{x1} + u_{x2} - u_{x3} + u_{x4}}{4}, \quad u_y^{(1)} = \frac{-u_{y1} + u_{y2} - u_{y3} + u_{y4}}{4} \quad (3.2.91)$$

prepíšeme do tvaru

$$u_x^{(1)} = \frac{\frac{u_{x1}+u_{x3}}{2} - \frac{u_{x2}+u_{x4}}{2}}{2}, \quad u_y^{(1)} = \frac{\frac{u_{y1}+u_{y3}}{2} - \frac{u_{y2}+u_{y4}}{2}}{2}, \quad (3.2.92)$$

kde $\frac{u_{x1}+u_{x3}}{2}$ a $\frac{u_{y1}+u_{y3}}{2}$ je priemerná x -ová a y -ová zložka posunutia medzi uzlami [1, 3]. $\frac{u_{x2}+u_{x4}}{2}$ a $\frac{u_{y2}+u_{y4}}{2}$ je zasa priemerná x -ová a y -ová zložka posunutia medzi uzlami [2, 4]. Ak vezmeme do úvahy, že x -ový a y -ový rozmer elementu je $h = 2$, tak vidno, že druhý e-invariant predstavuje aproximáciu $u_{x,x}$ a $u_{y,y}$ x -ovou diferenciou. Nulové koeficienty, ktoré sa vyskytujú vo vzťahoch (3.2.90) pri e-invariantoch $u_x^{(1)}$ a $u_y^{(1)}$ vyjadrujú fakt, že na aproximáciu derivácie posunutia podľa y je diferencia podľa x zbytočná informácia. Tretie e-invarianty

$$u_x^{(2)} = \frac{-u_{x1} - u_{x2} + u_{x3} + u_{x4}}{4}, \quad u_y^{(2)} = \frac{-u_{y1} - u_{y2} + u_{y3} + u_{y4}}{4} \quad (3.2.93)$$

prepíšeme do tvaru

$$u_x^{(2)} = \frac{\frac{u_{x3}+u_{x4}}{2} - \frac{u_{x1}+u_{x2}}{2}}{2}, \quad u_y^{(2)} = \frac{\frac{u_{y3}+u_{y4}}{2} - \frac{u_{y1}+u_{y2}}{2}}{2}, \quad (3.2.94)$$

kde $\frac{u_{x1}+u_{x2}}{2}$ a $\frac{u_{y1}+u_{y2}}{2}$ je priemerná x -ová a y -ová zložka posunutia medzi uzlami [1, 2]. $\frac{u_{x3}+u_{x4}}{2}$ a $\frac{u_{y3}+u_{y4}}{2}$ je priemerná x -ová a y -ová zložka posunutia medzi uzlami [3, 4]. Ak vezmeme do úvahy, že x -ový a y -ový rozmer elementu je $h = 2$, vidno, že tretí e-invariant predstavuje aproximáciu $u_{x,y}$ a $u_{y,y}$ y -ovou diferenciou. Nulové koeficienty, ktoré sa vyskytujú vo vzťahoch (3.2.90) pri e-invariantoch, $u_x^{(2)}$ a $u_y^{(2)}$ vyjadrujú fakt, že na aproximáciu derivácie posunutia podľa x je diferencia podľa y zbytočná informácia. Ak nadbytočnú informáciu vynecháme, môžeme vyjadriť derivácie posunutí podľa globálnych súradníc x, y nasledovne:

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= u_x^{(1)} + \eta u_x^{(12)}, & u_{x,y} &= u_x^{(2)} + \xi u_x^{(12)}, \\ u_{y,x} &= u_y^{(1)} + \eta u_y^{(12)}, & u_{y,y} &= u_y^{(2)} + \xi u_y^{(12)}. \end{aligned} \quad (3.2.95)$$

Pre e-invarianty lokálnych síl v prípade jednotkového štvorca platí

$$\begin{aligned} r_x^{(0)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0\tau_{xx} + 0\tau_{xy}) \, d\xi \, d\eta, & r_y^{(0)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0\tau_{yx} + 0\tau_{yy}) \, d\xi \, d\eta, \\ r_x^{(1)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1\tau_{xx} + 0\tau_{xy}) \, d\xi \, d\eta, & r_y^{(1)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1\tau_{yx} + 0\tau_{yy}) \, d\xi \, d\eta, \\ r_x^{(2)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0\tau_{xx} + 1\tau_{xy}) \, d\xi \, d\eta, & r_y^{(2)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0\tau_{yx} + 1\tau_{yy}) \, d\xi \, d\eta, \\ r_x^{(12)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\eta\tau_{xx} + \xi\tau_{xy}) \, d\xi \, d\eta, & r_y^{(12)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\eta\tau_{yx} + \xi\tau_{yy}) \, d\xi \, d\eta, \end{aligned} \quad (3.2.96)$$

kde nulové koeficienty pri prvkoch tenzora napätia ukazujú, čo netreba integrovať. Vo výrazoch (3.2.96) analyticky vypočítame integrály z prvkov tenzora napätia, ktoré vyjadríme pomocou derivácií posunutí (3.2.95):

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \left(u_x^{(1)} + \eta u_x^{(12)} \right) + \lambda \left(u_y^{(2)} + \xi u_y^{(12)} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(u_x^{(2)} + \xi u_x^{(12)} + u_y^{(1)} + \eta u_y^{(12)} \right), \\ \tau_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \left(u_y^{(2)} + \xi u_y^{(12)} \right) + \lambda \left(u_x^{(1)} + \eta u_x^{(12)} \right).\end{aligned}\quad (3.2.97)$$

Integrály vyjadríme z prvkov tenzora napätia násobených deriváciami bázových funkcií:

$$\begin{aligned}\eta\tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \left(\eta u_x^{(1)} + \eta^2 u_x^{(12)} \right) + \lambda \left(\eta u_y^{(2)} + \eta \xi u_y^{(12)} \right), \\ \eta\tau_{xy} &= \mu \left(\eta u_x^{(2)} + \xi \eta u_x^{(12)} + \eta u_y^{(1)} + \eta^2 u_y^{(12)} \right), \\ \xi\tau_{xy} &= \mu \left(\xi u_x^{(2)} + \xi^2 u_x^{(12)} + \xi u_y^{(1)} + \xi \eta u_y^{(12)} \right), \\ \xi\tau_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \left(\xi u_y^{(2)} + \xi^2 u_y^{(12)} \right) + \lambda \left(\xi u_x^{(1)} + \xi \eta u_x^{(12)} \right).\end{aligned}\quad (3.2.98)$$

Pri výpočte integrálov využijeme ortogonalitu bázových funkcií a vypočítané integrály použijeme na výpočet e-invariantov síl:

$$\mathbf{r}_x^{(inv)} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda + 2\mu) u_x^{(1)} + \lambda u_y^{(2)} \\ \mu \left(u_x^{(2)} + u_y^{(1)} \right) \\ \frac{1}{3} (\lambda + 3\mu) u_x^{(12)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_y^{(inv)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(u_x^{(2)} + u_y^{(1)} \right) \\ (\lambda + 2\mu) u_y^{(2)} + \lambda u_x^{(1)} \\ \frac{1}{3} (\lambda + 3\mu) u_y^{(12)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.99)$$

Vzťahy (3.2.92) a (3.2.94) vyjadrujú fakt, že e-invarianty posunutia $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$, $u_y^{(1)}$, $u_y^{(2)}$ sú aproximácie x -ovej a y -ovej zložky derivácií posunutí diferenciami. Ak porovnáme prvky vektorov $\mathbf{r}_x^{(inv)}$ a $\mathbf{r}_y^{(inv)}$ s Hookovým zákonom, zistíme, že e-invarianty $r_x^{(1)}$, $r_x^{(2)}$, $r_y^{(1)}$, $r_y^{(2)}$ sú zložky tenzora napätia aproximované diferenciami:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &\approx r_x^{(1)} = (\lambda + 2\mu) u_x^{(1)} + \lambda u_x^{(2)}, \\ \tau_{xy} &\approx r_x^{(2)} = \mu \left(u_y^{(1)} + u_x^{(2)} \right), \\ \tau_{yx} &\approx r_y^{(1)} = \mu \left(u_x^{(2)} + u_y^{(1)} \right), \\ \tau_{yy} &\approx r_y^{(2)} = (\lambda + 2\mu) u_y^{(2)} + \lambda u_x^{(1)}.\end{aligned}\quad (3.2.100)$$

Z e-invariantov dostaneme použitím inverznej transformácie prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_x^{(inv)}, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_y^{(inv)}. \quad (3.2.101)$$

3.2.4 Transformácia do e-invariantov

Transformáciu do e-invariantov možno zapísať ako súčin transformačnej matice a matice polôh uzlov a posunutí v uzloch

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & u_{x1} & u_{y1} \\ x_2 & y_2 & u_{x2} & u_{y2} \\ x_3 & y_3 & u_{x3} & u_{y4} \\ x_4 & y_4 & u_{x3} & u_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)} & y^{(0)} & u_x^{(0)} & u_y^{(0)} \\ x^{(1)} & y^{(1)} & u_x^{(1)} & u_y^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} & u_x^{(2)} & u_y^{(2)} \\ x^{(12)} & y^{(12)} & u_x^{(12)} & u_y^{(12)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.102)$$

Transformačná matica \mathbf{T} je zložená z troch submatíc \mathbf{T}_1 a jednej submatice $-\mathbf{T}_1$, kde

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (3.2.103)$$

je transformačná matica pre 1D problém. Transformáciu (3.2.102) teda môžeme vyjadriť pomocou submatíc v tvare

$$\left[\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \\ -1 & -1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} \\ u_{x2} & u_{y2} \\ u_{x3} & u_{y4} \\ u_{x3} & u_{y4} \end{bmatrix} \right] = \left[\begin{bmatrix} x^{(0)} & y^{(0)} \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} \\ x^{(12)} & y^{(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(0)} & y^{(0)} \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ u_x^{(2)} & u_y^{(2)} \\ u_x^{(12)} & u_y^{(12)} \end{bmatrix} \right], \quad (3.2.104)$$

alebo

$$\begin{bmatrix} +\mathbf{T}_1 & +\mathbf{T}_1 \\ -\mathbf{T}_1 & +\mathbf{T}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{12} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{X}_{34} & \mathbf{U}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(01)} & \mathbf{U}^{(01)} \\ \mathbf{X}^{(212)} & \mathbf{U}^{(212)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.105)$$

Ľavú stranu maticovej rovnice (3.2.105) roznásobíme:

$$\begin{bmatrix} +\mathbf{T}_1 & +\mathbf{T}_1 \\ -\mathbf{T}_1 & +\mathbf{T}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{12} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{X}_{34} & \mathbf{U}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1\mathbf{X}_{12} + \mathbf{T}_1\mathbf{X}_{34} & \mathbf{T}_1\mathbf{U}_{12} + \mathbf{T}_1\mathbf{U}_{34} \\ \mathbf{T}_1\mathbf{X}_{34} - \mathbf{T}_1\mathbf{X}_{12} & \mathbf{T}_1\mathbf{U}_{34} - \mathbf{T}_1\mathbf{U}_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.2.106)$$

V pravej strane maticovej rovnice (3.2.106) sa zdvojene vyskytujú násobenia submatíc

$$\mathbf{T}_1\mathbf{X}_{12}, \mathbf{T}_1\mathbf{X}_{34}, \mathbf{T}_1\mathbf{U}_{12}, \mathbf{T}_1\mathbf{U}_{34}. \quad (3.2.107)$$

Najskôr vynásobíme tieto submatice, čo znamená 16 operácií \pm . Výsledné matice potom sčítame/odčítame podľa (3.2.106), čo znamená 16 operácií \pm . To znamená, že na transformáciu potrebujeme celkom 32 operácií \pm . Ak by sme vykonali transformáciu

násobením podľa (3.2.102), potrebovali by sme 48 operácií \pm . V samotnom algoritme okrem tohto zjednodušenia ešte redukuje transformáciu maticu z rozmeru 4×4 na rozmer 3×4 vynechaním prvého riadku, čím eliminujeme z výpočtu e-invarianty $x^{(0)}, y^{(0)}, u_x^{(0)}, u_y^{(0)}$, od ktorých lokálny vektor vratnej sily nezávisí.

3.2.5 Algoritmus s využitím e-invariantov

Uvedieme algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily vyjadreného v novej báze, ktorá umožní vo výpočte využiť e-invarianty. Ku každému algoritmicke kroku uvedieme počty operácií delenia, násobenia, sčítania/odčítania, pre ktoré použijeme symboly \div , $*$, \pm .

Algoritmus

Vynulujeme premenné pre prvky e-invariantov lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned} r_x^{(1)} &= 0 & r_y^{(1)} &= 0 \\ r_x^{(2)} &= 0 & r_y^{(2)} &= 0 \\ r_x^{(12)} &= 0 & r_y^{(12)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.108)$$

Transformujeme polohy a posunutia v uzloch do e-invariantov (3.2.102)

$$\begin{aligned} x_{21} &= x_2 - x_1 & u_{x21} &= u_{x2} - u_{x1} \\ y_{21} &= y_2 - y_1 & u_{y21} &= u_{y2} - u_{y1} \\ x_{43} &= x_4 - x_3 & u_{x43} &= u_{x4} - u_{x3} \\ y_{43} &= y_4 - y_3 & u_{y43} &= u_{y4} - u_{y3} \end{aligned} \quad (3.2.109)$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 8$$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x_{43} + x_{21} & y^{(1)} &= y_{43} + y_{21} \\ x^{(2)} &= x_4 + x_3 - x_2 - x_1 & y^{(2)} &= y_4 + x_3 - x_2 - x_1 \\ x^{(12)} &= x_{43} - x_{21} & y^{(12)} &= y_{43} - y_{21} \\ u_x^{(1)} &= u_{x43} + u_{x21} & u_y^{(1)} &= u_{y43} + u_{y21} \\ u_x^{(2)} &= u_{x4} + u_{x3} - u_{x2} - u_{x1} & u_y^{(2)} &= u_{y4} + u_{y3} - u_{y2} - u_{y1} \\ u_x^{(12)} &= u_{x43} - u_{x21} & u_y^{(12)} &= u_{y43} - u_{y21} \end{aligned} \quad (3.2.110)$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 20$$

Začiatok integračného cyklu

Vypočítame funkčné hodnoty $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$ v integračných bodoch použitím vzťahu (3.2.61)

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= x^{(1)} + x^{(12)} * \eta \\ y_{,\xi} &= y^{(1)} + y^{(12)} * \eta \\ x_{,\eta} &= x^{(2)} + x^{(12)} * \xi \\ y_{,\eta} &= y^{(2)} + y^{(12)} * \xi \end{aligned} \quad (3.2.111)$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 4 \quad \pm \mapsto 4$$

Podľa (3.2.41) vypočítame

$$D_J = \frac{0.0625}{x_\xi * y_\eta - y_\xi * x_\eta} \quad (3.2.112)$$

$$\div \mapsto 1 \quad * \mapsto 2 \quad \pm \mapsto 1$$

Vypočítame derivácie ξ, η podľa x, y

$$\begin{aligned} \xi_x &= y_{,\eta} & \xi_y &= -y_{,\xi} \\ \eta_x &= -x_{,\eta} & \eta_y &= x_{,\xi} \\ \xi\eta_x &= y_{,\eta} * \eta - x_{,\eta} * \xi & \xi\eta_y &= \xi * x_{,\xi} - y_{,\xi} * \eta \end{aligned} \quad (3.2.113)$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 4 \quad \pm \mapsto 4$$

Podľa (3.2.74) vypočítame

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_x^{(1)} * \xi_x + u_x^{(2)} * \eta_x + u_x^{(12)} * \xi\eta_x \\ u_{yx} &= u_y^{(1)} * \xi_x + u_y^{(2)} * \eta_x + u_y^{(12)} * \xi\eta_x \\ u_{xy} &= u_x^{(1)} * \xi_y + u_x^{(2)} * \eta_y + u_x^{(12)} * \xi\eta_y \\ u_{yy} &= u_y^{(1)} * \xi_y + u_y^{(2)} * \eta_y + u_y^{(12)} * \xi\eta_y \end{aligned} \quad (3.2.114)$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 12 \quad \pm \mapsto 8$$

Podľa (3.2.37) vypočítame

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \lambda + \mu + \mu \\
 \tau_{xx} &= (\alpha * u_{xx} + \lambda * u_{yy}) * D_J \\
 \tau_{xy} &= \mu * (u_{xy} + u_{yx}) * D_J \\
 \tau_{yy} &= (\alpha * u_{yy} + \lambda * u_{xx}) * D_J
 \end{aligned}
 \tag{3.2.115}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 8 \quad \pm \mapsto 5$$

Vypočítame integrand vo vzťahu (3.2.83)

$$\begin{aligned}
 h_x^{(1)} &= \xi_x * \tau_{xx} + \xi_y * \tau_{xy} & h_y^{(1)} &= \xi_x * \tau_{yx} + \xi_y * \tau_{yy} \\
 h_x^{(1)} &= \eta_x * \tau_{xx} + \eta_y * \tau_{xy} & h_y^{(1)} &= \eta_x * \tau_{yx} + \eta_y * \tau_{yy} \\
 h_x^{(1)} &= \xi\eta_x * \tau_{xx} + \xi\eta_y * \tau_{xy} & h_y^{(1)} &= \xi\eta_x * \tau_{yx} + \xi\eta_y * \tau_{yy}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.116}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 12 \quad \pm \mapsto 6$$

$$\begin{aligned}
 r_x^{(1)} &= r_x^{(1)} + h_x^{(1)} & r_y^{(1)} &= r_y^{(1)} + h_y^{(1)} \\
 r_x^{(2)} &= r_x^{(2)} + h_x^{(2)} & r_y^{(2)} &= r_y^{(2)} + h_y^{(2)} \\
 r_x^{(12)} &= r_x^{(12)} + h_x^{(12)} & r_y^{(12)} &= r_y^{(12)} + h_y^{(12)}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.117}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 6$$

Koniec integračného cyklu

Podľa (3.2.101) transformujeme e-invarianty síl na lokálny vektor vratnej sily

$$\begin{aligned}
 r_{x43} &= r_x^{(1)} + r_x^{(2)} & r_{y43} &= r_y^{(1)} + r_y^{(2)} \\
 r_{x1} &= r_x^{(12)} - r_{x43} & r_{y1} &= r_y^{(12)} - r_{y43} \\
 r_{x2} &= r_x^{(1)} - r_x^{(2)} - r_x^{(12)} & r_{y2} &= r_y^{(1)} - r_y^{(2)} - r_y^{(12)} \\
 r_{x3} &= r_x^{(2)} - r_x^{(1)} - r_x^{(12)} & r_{y3} &= r_y^{(2)} - r_y^{(1)} - r_y^{(12)} \\
 r_{x4} &= r_x^{(12)} + r_{x43} & r_{y4} &= r_y^{(12)} + r_{y43}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.118}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 14$$

3.3 Lokálny vektor vratnej sily v 3D probléme

Budeme sa zaoberať trojrozmerným problémom pohybovej rovnice kontinua

$$\begin{aligned}
 \rho u_{x,tt} &= \tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x, \\
 \rho u_{y,tt} &= \tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{yz,z} + f_y, \\
 \rho u_{z,tt} &= \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \tau_{zz,z} + f_z.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

V rovnici (3.3.1) je hustota zotrvačnej sily $\rho \vec{u}_{,tt} = [\rho u_{x,tt}, \rho u_{y,tt}, \rho u_{z,tt}]^T$, kde ρ je hustota, u_x , u_y a u_z sú v x -ová, y -ová a z -ová zložka posunutia. Hustota vratnej sily je daná divergenciou tenzora napätia

$$\vec{r} = \text{div } \vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} \\ \tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{yz,z} \\ \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \tau_{zz,z} \end{bmatrix}
 \tag{3.3.2}$$

a Hookov zákon v trojrozmernom probléme má tvar

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix}.
 \tag{3.3.3}$$

Hustota externej sily je daná vektorom $\vec{f} = [f_x, f_y, f_z]^T$.

V nasledujúcom texte budeme uvažovať elementy v tvare konvexných šesťstenov určených polohami vrcholov $(x_{i(e)}, y_{i(e)}, z_{i(e)})$. ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) je číslo uzla pre konkrétny element e . Slabá forma pohybovej rovnice (3.3.1) pre element e má tvar

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^e} \rho \ddot{u}_x w_k \, d\Omega &= \int_{\Omega^e} (\tau_{xx} w_{k,x} + \tau_{xy} w_{k,y} + \tau_{xz} w_{k,z}) \, d\Omega \\
 &+ \int_{\Gamma^e} \tau_{xn} w_k \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} f_x w_k \, d\Omega , \\
 \int_{\Omega^e} \rho \ddot{u}_y w_k \, d\Omega &= \int_{\Omega^e} (\tau_{yx} w_{k,x} + \tau_{yy} w_{k,y} + \tau_{yz} w_{k,z}) \, d\Omega \\
 &+ \int_{\Gamma^e} \tau_{yn} w_k \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} f_y w_k \, d\Omega , \\
 \int_{\Omega^e} \rho \ddot{u}_z w_k \, d\Omega &= \int_{\Omega^e} (\tau_{zx} w_{k,x} + \tau_{zy} w_{k,y} + \tau_{zz} w_{k,z}) \, d\Omega \\
 &+ \int_{\Gamma^e} \tau_{zn} w_k \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} f_z w_k \, d\Omega ,
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

kde $w_k \in \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_\infty\}$ sú váhové funkcie. Na zobrazenie medzi globálnym súradnicovým systémom, (x, y) a lokálnym súradnicovým systémom (ξ, η) použijeme bilinéarne štvoruholníkové bázové funkcie

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\ (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \end{bmatrix} . \tag{3.3.5}$$

Pomocou bázových funkcií transformujeme body (ξ, η, ζ) jednotkovej kocky s vrcholmi v bodoch

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi} &= [-1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1]^T , \\
 \boldsymbol{\eta} &= [-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1]^T , \\
 \boldsymbol{\zeta} &= [-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1]^T ,
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

na body (x, y, z) šesťstenového elementu Ω^e s vrcholmi v bodoch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T , \\
 \mathbf{y} &= [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8]^T , \\
 \mathbf{z} &= [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8]^T .
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Transformáciu vyjadríme ako skalárny súčin vektora bázových funkcií (3.3.5) s vektormi súradníc vrcholov (3.3.7)

$$x = \mathbf{b}^T \mathbf{x} , \quad y = \mathbf{b}^T \mathbf{y} , \quad z = \mathbf{b}^T \mathbf{z} . \quad (3.3.8)$$

Na aproximáciu riešenia pre element použijeme Lagrangeov interpolačný polynóm generovaný rovnakými bázovými funkciami

$$u_x = \mathbf{b}^T \mathbf{u}_x , \quad u_y = \mathbf{b}^T \mathbf{u}_y , \quad u_z = \mathbf{b}^T \mathbf{u}_z , \quad (3.3.9)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= [u_{x1}, u_{x2}, u_{x3}, u_{x4}, u_{x5}, u_{x6}, u_{x7}, u_{x8}]^T , \\ \mathbf{u}_y &= [u_{y1}, u_{y2}, u_{y3}, u_{y4}, u_{y5}, u_{y6}, u_{y7}, u_{y8}]^T , \\ \mathbf{u}_z &= [u_{z1}, u_{z2}, u_{z3}, u_{z4}, u_{z5}, u_{z6}, u_{z7}, u_{z8}]^T \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

sú x -ové, y -ové a z -ové časovo závislé hodnoty riešenia v uzloch.

Ak priestor váhových funkcií w_i v rovnici (3.3.4) aproximujeme zložkami vektora \mathbf{b} , prvý integrál na ľavej strane rovnice vyjadruje lokálny vektor vratnej sily

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tau_{xx} \mathbf{b}_{,x} + \tau_{xy} \mathbf{b}_{,y} + \tau_{xz} \mathbf{b}_{,z}) \text{DetJ} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta , \\ \mathbf{r}_y^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tau_{yx} \mathbf{b}_{,x} + \tau_{yy} \mathbf{b}_{,y} + \tau_{yz} \mathbf{b}_{,z}) \text{DetJ} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta , \\ \mathbf{r}_z^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tau_{zx} \mathbf{b}_{,x} + \tau_{zy} \mathbf{b}_{,y} + \tau_{zz} \mathbf{b}_{,z}) \text{DetJ} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta , \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

kde tenzor napätia je daný Hookovým zákonom Vzhľadom k tomu, že \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y a \mathbf{u}_z nie sú závislé od priestorových súradníc, môžeme derivácie posunutia (3.3.9) preniesť na bázové funkcie

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_x , & u_{x,y} &= \mathbf{b}_{,y}^T \mathbf{u}_x , & u_{x,z} &= \mathbf{b}_{,z}^T \mathbf{u}_x , \\ u_{y,x} &= \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_y , & u_{y,y} &= \mathbf{b}_{,y}^T \mathbf{u}_y , & u_{y,z} &= \mathbf{b}_{,z}^T \mathbf{u}_y , \\ u_{z,x} &= \mathbf{b}_{,x}^T \mathbf{u}_z , & u_{z,y} &= \mathbf{b}_{,y}^T \mathbf{u}_z , & u_{z,z} &= \mathbf{b}_{,z}^T \mathbf{u}_z . \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Použijeme reťazové pravidlo a derivácie bázových funkcií podľa x, y, z vyjadríme pomocou derivácií bázových funkcií podľa ξ, η, ζ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{,x} &= \mathbf{b}_{,\xi} \xi_{,x} + \mathbf{b}_{,\eta} \eta_{,x} + \mathbf{b}_{,\zeta} \zeta_{,x} , \\ \mathbf{b}_{,y} &= \mathbf{b}_{,\xi} \xi_{,y} + \mathbf{b}_{,\eta} \eta_{,y} + \mathbf{b}_{,\zeta} \zeta_{,y} , \\ \mathbf{b}_{,z} &= \mathbf{b}_{,\xi} \xi_{,z} + \mathbf{b}_{,\eta} \eta_{,z} + \mathbf{b}_{,\zeta} \zeta_{,z} , \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

kde derivácie ξ, η, ζ podľa x, y, z ,

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} & \zeta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} & \zeta_{,y} \\ \xi_{,z} & \eta_{,z} & \zeta_{,z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - y_{,\zeta} z_{,\eta} & y_{,\zeta} z_{,\xi} - y_{,\xi} z_{,\zeta} & y_{,\xi} z_{,\eta} - y_{,\eta} z_{,\xi} \\ x_{,\zeta} z_{,\eta} - x_{,\eta} z_{,\zeta} & x_{,\xi} z_{,\zeta} - x_{,\zeta} z_{,\xi} & x_{,\eta} y_{,\xi} - x_{,\xi} y_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - x_{,\zeta} y_{,\eta} & x_{,\zeta} y_{,\xi} - x_{,\xi} y_{,\zeta} & x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi} \end{bmatrix}, \quad (3.3.14)$$

sú prvkami inverznej matice Jacobiánu transformácie (3.3.8)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} & x_{,\zeta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} & y_{,\zeta} \\ z_{,\xi} & z_{,\eta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}. \quad (3.3.15)$$

Prvky Jacobiánu vyjadríme pomocou derivácií báзовých funkcií podľa ξ, η, ζ ,

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^T \mathbf{x}, & x_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^T \mathbf{x}, & x_{,\zeta} &= \mathbf{b}_{,\zeta}^T \mathbf{x}, \\ y_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^T \mathbf{y}, & y_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^T \mathbf{y}, & y_{,\zeta} &= \mathbf{b}_{,\zeta}^T \mathbf{y}, \\ z_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^T \mathbf{z}, & z_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^T \mathbf{z}, & z_{,\zeta} &= \mathbf{b}_{,\zeta}^T \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

kde derivácie báзовých funkcií podľa lokálnych súradníc ξ, η, ζ sú

$$\mathbf{b}_{,\xi} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1(1 - \eta - \zeta + \eta\zeta) \\ +1(1 - \eta - \zeta + \eta\zeta) \\ -1(1 + \eta - \zeta - \eta\zeta) \\ +1(1 + \eta - \zeta - \eta\zeta) \\ -1(1 - \eta + \zeta - \eta\zeta) \\ +1(1 - \eta + \zeta - \eta\zeta) \\ -1(1 + \eta + \zeta + \eta\zeta) \\ +1(1 + \eta + \zeta + \eta\zeta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{,\eta} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1(1 - \xi - \zeta + \xi\zeta) \\ -1(1 + \xi - \zeta - \xi\zeta) \\ +1(1 - \xi - \zeta + \xi\zeta) \\ +1(1 + \xi - \zeta - \xi\zeta) \\ -1(1 - \xi + \zeta - \xi\zeta) \\ -1(1 + \xi + \zeta + \xi\zeta) \\ +1(1 - \xi + \zeta - \xi\zeta) \\ +1(1 + \xi + \zeta + \xi\zeta) \end{bmatrix}, \quad (3.3.17)$$

$$\mathbf{b}_{,\zeta} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ -1(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ -1(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \\ -1(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ +1(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ +1(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ +1(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \\ +1(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \end{bmatrix}.$$

3.3.1 Algoritmus bez využitia e-invariantov

Uvedieme algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily vyjadreného v štandardnej báze použitím Gaussovej kvadratury. Ku každému algoritmickému kroku uvedieme počty operácií delenia, násobenia, sčítania/odčítania, pre ktoré použijeme symboly \div , $*$, \pm .

Algoritmus

Vynulujeme premenné pre prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned}
 r_{x1} &= 0 & r_{y1} &= 0 & r_{z1} &= 0 \\
 r_{x2} &= 0 & r_{y2} &= 0 & r_{z2} &= 0 \\
 r_{x3} &= 0 & r_{y3} &= 0 & r_{z3} &= 0 \\
 r_{x4} &= 0 & r_{y4} &= 0 & r_{z4} &= 0 \\
 r_{x5} &= 0 & r_{y5} &= 0 & r_{z5} &= 0 \\
 r_{x6} &= 0 & r_{y6} &= 0 & r_{z6} &= 0 \\
 r_{x7} &= 0 & r_{y7} &= 0 & r_{z7} &= 0 \\
 r_{x8} &= 0 & r_{y8} &= 0 & r_{z8} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Vypočítame diferencie priestorových súradníc

$$\begin{aligned}
 x_{21} &= x_2 - x_1 & y_{21} &= y_2 - y_1 & z_{21} &= z_2 - z_1 \\
 x_{43} &= x_4 - x_3 & y_{43} &= y_4 - y_3 & z_{43} &= z_4 - z_3 \\
 x_{65} &= x_6 - x_5 & y_{65} &= y_6 - y_5 & z_{65} &= z_6 - z_5 \\
 x_{87} &= x_8 - x_7 & y_{87} &= y_8 - y_7 & z_{87} &= z_8 - z_7 \\
 x_{31} &= x_3 - x_1 & y_{31} &= y_3 - y_1 & z_{31} &= z_3 - z_1 \\
 x_{42} &= x_4 - x_2 & y_{42} &= y_4 - y_2 & z_{42} &= z_4 - z_2 \\
 x_{75} &= x_7 - x_5 & y_{75} &= y_7 - y_5 & z_{75} &= z_7 - z_5 \\
 x_{86} &= x_8 - x_6 & y_{86} &= y_8 - y_6 & z_{86} &= z_8 - z_6
 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

$$\begin{aligned}
 x_{51} &= x_5 - x_1 & y_{51} &= y_5 - y_1 & z_{51} &= z_5 - z_1 \\
 x_{62} &= x_6 - x_2 & y_{62} &= y_6 - y_2 & z_{62} &= z_6 - z_2 \\
 x_{73} &= x_7 - x_3 & y_{73} &= y_7 - y_3 & z_{73} &= z_7 - z_3 \\
 x_{84} &= x_8 - x_4 & y_{84} &= y_8 - y_4 & z_{84} &= z_8 - z_4
 \end{aligned}
 \tag{3.3.20}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 36$$

Začiatok integračného cyklu

Vypočítame funkčné hodnoty v integračných bodoch pre funkcie $b_{i\xi} = 8b_{i,\xi}$, $b_{i\eta} = 8b_{i,\eta}$, $b_{i\zeta} = 8b_{i,\zeta}$, kde i je číslo konkrétnej bázevej funkcie

$$\begin{aligned}
 \eta\zeta &= \eta * \zeta & \xi\zeta &= \xi * \zeta & \xi\eta &= \xi * \eta \\
 \eta_p &= 1 + \eta & \xi_p &= 1 + \xi \\
 \eta_m &= 1 - \eta & \xi_m &= 1 - \xi
 \end{aligned}
 \tag{3.3.21}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_{\eta_p} &= \zeta + \zeta\eta & \zeta_{\xi_p} &= \zeta + \xi\zeta & \eta_{\xi_p} &= \eta + \eta\xi \\
 \zeta_{\eta_m} &= \zeta - \zeta\eta & \zeta_{\xi_m} &= \zeta - \xi\zeta & \eta_{\xi_m} &= \eta - \eta\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2\xi} &= \eta_m - \zeta_{\eta_p} & b_{3\eta} &= \xi_m - \zeta_{\xi_p} & b_{5\zeta} &= \xi_m - \eta_{\xi_p} \\
 b_{4\xi} &= \eta_p - \zeta_{\eta_m} & b_{4\eta} &= \xi_p - \zeta_{\xi_m} & b_{6\zeta} &= \xi_p - \eta_{\xi_m} \\
 b_{6\xi} &= \eta_m + \zeta_{\eta_m} & b_{7\eta} &= \xi_m + \zeta_{\xi_m} & b_{7\zeta} &= \xi_m + \eta_{\xi_m} \\
 b_{8\xi} &= \eta_p + \zeta_{\eta_p} & b_{8\eta} &= \xi_p + \zeta_{\xi_p} & b_{8\zeta} &= \xi_p + \eta_{\xi_p}
 \end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 3 \quad \pm \mapsto 22$$

Vypočítame funkčné hodnoty $x_\xi = 8x_{,\xi}$, $y_\xi = 8y_{,\xi}$, $z_\xi = 8z_{,\xi}$, $x_\eta = 8x_{,\eta}$, $y_\eta = 8y_{,\eta}$, $z_\eta = 8z_{,\eta}$, $x_\zeta = 8x_{,\zeta}$, $y_\zeta = 8y_{,\zeta}$, $z_\zeta = 8z_{,\zeta}$ v integračných bodoch použitím vzťahu

$$\begin{aligned}
 x_\xi &= b_{2\xi} * x_{21} + b_{4\xi} * x_{43} + b_{6\xi} * x_{65} + b_{8\xi} * x_{87} \\
 y_\xi &= b_{2\xi} * y_{21} + b_{4\xi} * y_{43} + b_{6\xi} * y_{65} + b_{8\xi} * y_{87} \\
 z_\xi &= b_{2\xi} * z_{21} + b_{4\xi} * z_{43} + b_{6\xi} * z_{65} + b_{8\xi} * z_{87} \\
 \\
 x_\eta &= b_{3\eta} * x_{31} + b_{4\eta} * x_{42} + b_{7\eta} * x_{75} + b_{8\eta} * x_{86} \\
 y_\eta &= b_{3\eta} * y_{31} + b_{4\eta} * y_{42} + b_{7\eta} * y_{75} + b_{8\eta} * y_{86} \\
 z_\eta &= b_{3\eta} * z_{31} + b_{4\eta} * z_{42} + b_{7\eta} * z_{75} + b_{8\eta} * z_{86} \\
 \\
 x_\zeta &= b_{5\zeta} * x_{51} + b_{6\zeta} * x_{62} + b_{7\zeta} * x_{73} + b_{8\zeta} * x_{84} \\
 y_\zeta &= b_{5\zeta} * y_{51} + b_{6\zeta} * y_{62} + b_{7\zeta} * y_{73} + b_{8\zeta} * y_{84} \\
 z_\zeta &= b_{5\zeta} * z_{51} + b_{6\zeta} * z_{62} + b_{7\zeta} * z_{73} + b_{8\zeta} * z_{84}
 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 36 \quad \pm \mapsto 27$$

Vypočítame funkčné hodnoty $D_J = 1/Det\mathbf{J}$ v integračných bodoch

$$\begin{aligned}
 d_1 &= y_\eta * z_\zeta - y_\zeta * z_\eta \\
 d_2 &= y_\zeta * z_\xi - y_\xi * z_\zeta \\
 d_3 &= y_\xi * z_\eta - y_\eta * z_\xi \\
 \\
 D_J &= \frac{0.001953125}{x_\xi * d_1 + x_\eta * d_2 + x_\zeta * d_3}
 \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

$$\div \mapsto 1 \quad * \mapsto 9 \quad \pm \mapsto 5$$

Vypočítame funkčné hodnoty derivácií lokálnych súradníc podľa globálnych súradníc, ktoré sú násobené determinantom Jacobiánu v integračných bodoch

$$\begin{aligned}
 \xi_x &= d_1 & \eta_x &= d_2 & \zeta_x &= d_2 \\
 \xi_y &= x_\zeta * z_\eta - x_\eta * z_\zeta & \eta_y &= x_\xi * z_\zeta - x_\zeta * z_\xi & \zeta_y &= x_\eta * y_\xi - x_\xi * z_\eta \\
 \xi_z &= x_\eta * y_\zeta - x_\zeta * y_\eta & \eta_z &= x_\zeta * y_\xi - x_\xi * y_\zeta & \zeta_z &= x_\xi * y_\eta - x_\eta * y_\xi
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 12 \quad \pm \mapsto 6$$

Vypočítame derivácie bázových funkcií podľa x, y, z

$$\begin{aligned}
 b_{2\xi}\xi_x &= b_{2\xi} * \xi_x & b_{3\eta}\eta_x &= b_{3\eta} * \eta_x & b_{5\zeta}\zeta_x &= b_{5\zeta} * \zeta_x \\
 b_{4\xi}\xi_x &= b_{4\xi} * \xi_x & b_{4\eta}\eta_x &= b_{4\eta} * \eta_x & b_{6\zeta}\zeta_x &= b_{6\zeta} * \zeta_x \\
 b_{6\xi}\xi_x &= b_{6\xi} * \xi_x & b_{7\eta}\eta_x &= b_{7\eta} * \eta_x & b_{7\zeta}\zeta_x &= b_{7\zeta} * \zeta_x \\
 b_{8\xi}\xi_x &= b_{8\xi} * \xi_x & b_{8\eta}\eta_x &= b_{8\eta} * \eta_x & b_{8\zeta}\zeta_x &= b_{8\zeta} * \zeta_x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1x} &= -b_{2\xi}\xi_x - b_{3\eta}\eta_x - b_{5\zeta}\zeta_x, \\
 b_{2x} &= b_{2\xi}\xi_x - b_{4\eta}\eta_x - b_{6\zeta}\zeta_x, \\
 b_{3x} &= b_{3\eta}\eta_x - b_{4\xi}\xi_x - b_{7\zeta}\zeta_x, \\
 b_{4x} &= b_{4\xi}\xi_x + b_{4\eta}\eta_x - b_{8\zeta}\zeta_x, \\
 b_{5x} &= b_{5\zeta}\zeta_x - b_{7\eta}\eta_x - b_{6\xi}\xi_x, \\
 b_{6x} &= b_{6\xi}\xi_x - b_{8\eta}\eta_x + b_{6\zeta}\zeta_x, \\
 b_{7x} &= b_{7\eta}\eta_x - b_{8\xi}\xi_x + b_{7\zeta}\zeta_x, \\
 b_{8x} &= b_{8\xi}\xi_x + b_{8\eta}\eta_x + b_{8\zeta}\zeta_x,
 \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2\xi}\xi_y &= b_{2\xi} * \xi_y & b_{3\eta}\eta_y &= b_{3\eta} * \eta_y & b_{5\zeta}\zeta_y &= b_{5\zeta} * \zeta_y \\
 b_{4\xi}\xi_y &= b_{4\xi} * \xi_y & b_{4\eta}\eta_y &= b_{4\eta} * \eta_y & b_{6\zeta}\zeta_y &= b_{6\zeta} * \zeta_y \\
 b_{6\xi}\xi_y &= b_{6\xi} * \xi_y & b_{7\eta}\eta_y &= b_{7\eta} * \eta_y & b_{7\zeta}\zeta_y &= b_{7\zeta} * \zeta_y \\
 b_{8\xi}\xi_y &= b_{8\xi} * \xi_y & b_{8\eta}\eta_y &= b_{8\eta} * \eta_y & b_{8\zeta}\zeta_y &= b_{8\zeta} * \zeta_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1y} &= -b_{2\xi}\xi_y - b_{3\eta}\eta_y - b_{5\zeta}\zeta_y, \\
 b_{2y} &= b_{2\xi}\xi_y - b_{4\eta}\eta_y - b_{6\zeta}\zeta_y, \\
 b_{3y} &= b_{3\eta}\eta_y - b_{4\xi}\xi_y - b_{7\zeta}\zeta_y, \\
 b_{4y} &= b_{4\xi}\xi_y + b_{4\eta}\eta_y - b_{8\zeta}\zeta_y, \\
 b_{5y} &= b_{5\zeta}\zeta_y - b_{7\eta}\eta_y - b_{6\xi}\xi_y, \\
 b_{6y} &= b_{6\xi}\xi_y - b_{8\eta}\eta_y + b_{6\zeta}\zeta_y, \\
 b_{7y} &= b_{7\eta}\eta_y - b_{8\xi}\xi_y + b_{7\zeta}\zeta_y, \\
 b_{8y} &= b_{8\xi}\xi_y + b_{8\eta}\eta_y + b_{8\zeta}\zeta_y,
 \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2\xi}\xi_z &= b_{2\xi} * \xi_z & b_{3\eta}\eta_z &= b_{3\eta} * \eta_z & b_{5\zeta}\zeta_z &= b_{5\zeta} * \zeta_z \\
 b_{4\xi}\xi_z &= b_{4\xi} * \xi_z & b_{4\eta}\eta_z &= b_{4\eta} * \eta_z & b_{6\zeta}\zeta_z &= b_{6\zeta} * \zeta_z \\
 b_{6\xi}\xi_z &= b_{6\xi} * \xi_z & b_{7\eta}\eta_z &= b_{7\eta} * \eta_z & b_{7\zeta}\zeta_z &= b_{7\zeta} * \zeta_z \\
 b_{8\xi}\xi_z &= b_{8\xi} * \xi_z & b_{8\eta}\eta_z &= b_{8\eta} * \eta_z & b_{8\zeta}\zeta_z &= b_{8\zeta} * \zeta_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1z} &= -b_{2\xi}\xi_z - b_{3\eta}\eta_z - b_{5\zeta}\zeta_z, \\
 b_{2z} &= b_{2\xi}\xi_z - b_{4\eta}\eta_z - b_{6\zeta}\zeta_z, \\
 b_{3z} &= b_{3\eta}\eta_z - b_{4\xi}\xi_z - b_{7\zeta}\zeta_z, \\
 b_{4z} &= b_{4\xi}\xi_z + b_{4\eta}\eta_z - b_{8\zeta}\zeta_z, \\
 b_{5z} &= b_{5\zeta}\zeta_z - b_{7\eta}\eta_z - b_{6\xi}\xi_z, \\
 b_{6z} &= b_{6\xi}\xi_z - b_{8\eta}\eta_z + b_{6\zeta}\zeta_z, \\
 b_{7z} &= b_{7\eta}\eta_z - b_{8\xi}\xi_z + b_{7\zeta}\zeta_z, \\
 b_{8z} &= b_{8\xi}\xi_z + b_{8\eta}\eta_z + b_{8\zeta}\zeta_z,
 \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 36 \quad \pm \mapsto 51$$

Vypočítame derivácie posunutí podľa x, y, z

$$u_{xx} = u_{x1} * b_{1x} + u_{x2} * b_{2x} + u_{x3} * b_{3x} + u_{x4} * b_{4x} + u_{x5} * b_{5x} + u_{x6} * b_{6x} + u_{x7} * b_{7x} + u_{x8} * b_{8x}$$

$$u_{xy} = u_{x1} * b_{1y} + u_{x2} * b_{2y} + u_{x3} * b_{3y} + u_{x4} * b_{4y} + u_{x5} * b_{5y} + u_{x6} * b_{6y} + u_{x7} * b_{7y} + u_{x8} * b_{8y}$$

$$u_{xz} = u_{x1} * b_{1z} + u_{x2} * b_{2z} + u_{x3} * b_{3z} + u_{x4} * b_{4z} + u_{x5} * b_{5z} + u_{x6} * b_{6z} + u_{x7} * b_{7z} + u_{x8} * b_{8z}$$

$$u_{yx} = u_{y1} * b_{1x} + u_{y2} * b_{2x} + u_{y3} * b_{3x} + u_{y4} * b_{4x} + u_{y5} * b_{5x} + u_{y6} * b_{6x} + u_{y7} * b_{7x} + u_{y8} * b_{8x}$$

$$u_{yy} = u_{y1} * b_{1y} + u_{y2} * b_{2y} + u_{y3} * b_{3y} + u_{y4} * b_{4y} + u_{y5} * b_{5y} + u_{y6} * b_{6y} + u_{y7} * b_{7y} + u_{y8} * b_{8y}$$

$$u_{yz} = u_{y1} * b_{1z} + u_{y2} * b_{2z} + u_{y3} * b_{3z} + u_{y4} * b_{4z} + u_{y5} * b_{5z} + u_{y6} * b_{6z} + u_{y7} * b_{7z} + u_{y8} * b_{8z}$$

$$u_{zx} = u_{z1} * b_{1x} + u_{z2} * b_{2x} + u_{z3} * b_{3x} + u_{z4} * b_{4x} + u_{z5} * b_{5x} + u_{z6} * b_{6x} + u_{z7} * b_{7x} + u_{z8} * b_{8x}$$

$$u_{zy} = u_{z1} * b_{1y} + u_{z2} * b_{2y} + u_{z3} * b_{3y} + u_{z4} * b_{4y} + u_{z5} * b_{5y} + u_{z6} * b_{6y} + u_{z7} * b_{7y} + u_{z8} * b_{8y}$$

$$u_{zz} = u_{z1} * b_{1z} + u_{z2} * b_{2z} + u_{z3} * b_{3z} + u_{z4} * b_{4z} + u_{z5} * b_{5z} + u_{z6} * b_{6z} + u_{z7} * b_{7z} + u_{z8} * b_{8z}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 72 \quad \pm \mapsto 63$$

Vypočítame napätia

$$\begin{aligned}
 YD_J &= D_J * (\lambda + \mu + \mu) \\
 \lambda D_J &= D_J * \lambda \\
 \mu D_J &= D_J * \mu \\
 \\
 \tau_{xx} &= YD_J * u_{xx} + \lambda D_J * (u_{yy} + u_{zz}) \\
 \tau_{yy} &= YD_J * u_{yy} + \lambda D_J * (u_{xx} + u_{zz}) \\
 \tau_{zz} &= YD_J * u_{zz} + \lambda D_J * (u_{xx} + u_{yy}) \\
 \tau_{xy} &= \mu D_J * (u_{xy} + u_{yx}) \\
 \tau_{yz} &= \mu D_J * (u_{yz} + u_{zy}) \\
 \tau_{xz} &= \mu D_J * (u_{xz} + u_{zx})
 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 12 \quad \pm \mapsto 11$$

Vypočítame lokálny vektor vratnej sily

$$\begin{aligned}
 r_{1x}^e &= r_{1x}^e + \tau_{xx} * b_{1x} + \tau_{xy} * b_{1y} + \tau_{xz} * b_{1z} \\
 r_{2x}^e &= r_{2x}^e + \tau_{xx} * b_{2x} + \tau_{xy} * b_{2y} + \tau_{xz} * b_{2z} \\
 r_{3x}^e &= r_{3x}^e + \tau_{xx} * b_{3x} + \tau_{xy} * b_{3y} + \tau_{xz} * b_{3z} \\
 r_{4x}^e &= r_{4x}^e + \tau_{xx} * b_{4x} + \tau_{xy} * b_{4y} + \tau_{xz} * b_{4z} \\
 r_{5x}^e &= r_{5x}^e + \tau_{xx} * b_{5x} + \tau_{xy} * b_{5y} + \tau_{xz} * b_{5z} \\
 r_{6x}^e &= r_{6x}^e + \tau_{xx} * b_{6x} + \tau_{xy} * b_{6y} + \tau_{xz} * b_{6z} \\
 r_{7x}^e &= r_{7x}^e + \tau_{xx} * b_{7x} + \tau_{xy} * b_{7y} + \tau_{xz} * b_{7z} \\
 r_{8x}^e &= r_{8x}^e + \tau_{xx} * b_{8x} + \tau_{xy} * b_{8y} + \tau_{xz} * b_{8z} \\
 \\
 r_{1y}^e &= r_{1y}^e + \tau_{xy} * b_{1x} + \tau_{yy} * b_{1y} + \tau_{yz} * b_{1z} \\
 r_{2y}^e &= r_{2y}^e + \tau_{xy} * b_{2x} + \tau_{yy} * b_{2y} + \tau_{yz} * b_{2z} \\
 r_{3y}^e &= r_{3y}^e + \tau_{xy} * b_{3x} + \tau_{yy} * b_{3y} + \tau_{yz} * b_{3z} \\
 r_{4y}^e &= r_{4y}^e + \tau_{xy} * b_{4x} + \tau_{yy} * b_{4y} + \tau_{yz} * b_{4z} \\
 r_{5y}^e &= r_{5y}^e + \tau_{xy} * b_{5x} + \tau_{yy} * b_{5y} + \tau_{yz} * b_{5z} \\
 r_{6y}^e &= r_{6y}^e + \tau_{xy} * b_{6x} + \tau_{yy} * b_{6y} + \tau_{yz} * b_{6z} \\
 r_{7y}^e &= r_{7y}^e + \tau_{xy} * b_{7x} + \tau_{yy} * b_{7y} + \tau_{yz} * b_{7z} \\
 r_{8y}^e &= r_{8y}^e + \tau_{xy} * b_{8x} + \tau_{yy} * b_{8y} + \tau_{yz} * b_{8z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1z}^e &= r_{1z}^e + \tau_{xz} * b_{1x} + \tau_{yz} * b_{1y} + \tau_{zz} * b_{1z} \\
r_{2z}^e &= r_{2z}^e + \tau_{xz} * b_{2x} + \tau_{yz} * b_{2y} + \tau_{zz} * b_{2z} \\
r_{3z}^e &= r_{3z}^e + \tau_{xz} * b_{3x} + \tau_{yz} * b_{3y} + \tau_{zz} * b_{3z} \\
r_{4z}^e &= r_{4z}^e + \tau_{xz} * b_{4x} + \tau_{yz} * b_{4y} + \tau_{zz} * b_{4z} \\
r_{5z}^e &= r_{5z}^e + \tau_{xz} * b_{5x} + \tau_{yz} * b_{5y} + \tau_{zz} * b_{5z} \\
r_{6z}^e &= r_{6z}^e + \tau_{xz} * b_{6x} + \tau_{yz} * b_{6y} + \tau_{zz} * b_{6z} \\
r_{7z}^e &= r_{7z}^e + \tau_{xz} * b_{7x} + \tau_{yz} * b_{7y} + \tau_{zz} * b_{7z} \\
r_{8z}^e &= r_{8z}^e + \tau_{xz} * b_{8x} + \tau_{yz} * b_{8y} + \tau_{zz} * b_{8z}
\end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 72 \quad \pm \mapsto 72$$

Koniec integračného cyklu

3.3.2 e-invarianty

Izoparametrickú formu (3.3.9) a (3.3.8) možno vyjadriť pomocou štandardnej bázy (3.3.5) alebo pomocou novej bázy $\mathbf{b}^{(inv)} = [1, \xi, \eta, \eta\xi, \zeta, \xi\zeta, \eta\zeta, \eta\xi\zeta]^T$. Transformácia starej bázy do novej bázy je

$$\mathbf{b}^{(inv)} = \mathbf{T}\mathbf{b}, \quad (3.3.29)$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (3.3.30)$$

je transformačná matica, pre ktorú platí

$$\frac{1}{8}\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}. \quad (3.3.31)$$

Izoparametrickú formu výpočtu vyjadríme v novej báze pomocou (3.3.29) a (3.3.31),

$$\begin{aligned}
x &= \mathbf{b}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\left(\frac{1}{8}\mathbf{T}^T\mathbf{T}\right)\mathbf{x} \\
&= (\mathbf{b}^T\mathbf{T}^T)\left(\frac{1}{8}\mathbf{T}\mathbf{x}\right) = (\mathbf{T}\mathbf{b})^T\left(\frac{1}{8}\mathbf{T}\mathbf{x}\right) = \mathbf{b}^{(inv)T}\mathbf{x}^{(inv)},
\end{aligned} \quad (3.3.32)$$

kde

$$\mathbf{x}^{(inv)} = \left[x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(12)}, x^{(3)}, x^{(13)}, x^{(23)}, x^{(123)} \right] \quad (3.3.33)$$

sú koeficienty nezávislé od priestorových súradníc ξ, η, ζ . Analogicky s (3.3.32) vyjad-
ríme

$$\begin{aligned} u_x &= \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)}, \\ y &= \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{y}^{(inv)}, \quad u_y = \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{u}_y^{(inv)}, \\ z &= \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{z}^{(inv)}, \quad u_z = \mathbf{b}^{(inv)T} \mathbf{u}_z^{(inv)}. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Prvky Jacobiánu priestorovej transformácie (3.3.16) môžeme vyjadriť v novej báze

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^{(inv)T} \mathbf{x}^{(inv)}, & x_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^{(inv)T} \mathbf{x}^{(inv)}, & x_{,\zeta} &= \mathbf{b}_{,\zeta}^{(inv)T} \mathbf{x}^{(inv)}, \\ y_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^{(inv)T} \mathbf{y}^{(inv)}, & y_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^{(inv)T} \mathbf{y}^{(inv)}, & y_{,\zeta} &= \mathbf{b}_{,\zeta}^{(inv)T} \mathbf{y}^{(inv)}, \\ z_{,\xi} &= \mathbf{b}_{,\xi}^{(inv)T} \mathbf{z}^{(inv)}, & z_{,\eta} &= \mathbf{b}_{,\eta}^{(inv)T} \mathbf{z}^{(inv)}, & z_{,\zeta} &= \mathbf{b}_{,\zeta}^{(inv)T} \mathbf{z}^{(inv)}, \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

kde derivácie bázových funkcií podľa ξ, η, ζ sú

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{,\xi}^{(inv)} &= \left[0, 1, 0, \eta, 0, \zeta, 0, \eta\zeta \right]^T, \\ \mathbf{b}_{,\eta}^{(inv)} &= \left[0, 0, 1, \xi, 0, 0, \zeta, \xi\zeta \right]^T, \\ \mathbf{b}_{,\zeta}^{(inv)} &= \left[0, 0, 0, 0, 1, \xi, \eta, \eta\xi \right]^T, \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

pričom derivácie štandardnej bázy (3.3.17) sú bilinéarne polynómy. Ak rozpíšeme prvky Jacobiánu (3.3.35) vyjadrené v novej báze, ukáže sa, ktoré e-invarianty vo výpočte lokálneho vektora vratnej sily nepotrebujeme:

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= 0x^{(0)} + 1x^{(1)} + 0x^{(2)} + \eta x^{(12)} + 0x^{(3)} + \zeta x^{(13)} + 0x^{(23)} + \eta\zeta x^{(123)}, \\ x_{,\eta} &= 0x^{(0)} + 0x^{(1)} + 1x^{(2)} + \xi x^{(12)} + 0x^{(3)} + 0x^{(13)} + \zeta x^{(23)} + \xi\zeta x^{(123)}, \\ x_{,\zeta} &= 0x^{(0)} + 0x^{(1)} + 0x^{(2)} + 0x^{(12)} + 1x^{(3)} + \xi x^{(13)} + \eta x^{(23)} + \eta\xi x^{(123)}, \\ y_{,\xi} &= 0y^{(0)} + 1y^{(1)} + 0y^{(2)} + \eta y^{(12)} + 0y^{(3)} + \zeta y^{(13)} + 0y^{(23)} + \eta\zeta y^{(123)}, \\ y_{,\eta} &= 0y^{(0)} + 0y^{(1)} + 1y^{(2)} + \xi y^{(12)} + 0y^{(3)} + 0y^{(13)} + \zeta y^{(23)} + \xi\zeta y^{(123)}, \\ y_{,\zeta} &= 0y^{(0)} + 0y^{(1)} + 0y^{(2)} + 0y^{(12)} + 1y^{(3)} + \xi y^{(13)} + \eta y^{(23)} + \eta\xi y^{(123)}, \\ z_{,\xi} &= 0z^{(0)} + 1z^{(1)} + 0z^{(2)} + \eta z^{(12)} + 0z^{(3)} + \zeta z^{(13)} + 0z^{(23)} + \eta\zeta z^{(123)}, \\ z_{,\eta} &= 0z^{(0)} + 0z^{(1)} + 1z^{(2)} + \xi z^{(12)} + 0z^{(3)} + 0z^{(13)} + \zeta z^{(23)} + \xi\zeta z^{(123)}, \\ z_{,\zeta} &= 0z^{(0)} + 0z^{(1)} + 0z^{(2)} + 0z^{(12)} + 1z^{(3)} + \xi z^{(13)} + \eta z^{(23)} + \eta\xi z^{(123)}. \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Ďalšou časťou izoparametrickej reprezentácie je interpolácia posunutí pomocou novej bázy a e-invariantov. Na výpočet lokálneho vektora vratnej sily potrebujeme derivácie posunutia podľa x, y, z ,

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= \mathbf{b}_{,x}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)}, & u_{x,y} &= \mathbf{b}_{,y}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)}, & u_{x,z} &= \mathbf{b}_{,z}^{(inv)T} \mathbf{u}_x^{(inv)}, \\ u_{y,x} &= \mathbf{b}_{,x}^{(inv)T} \mathbf{u}_y^{(inv)}, & u_{y,y} &= \mathbf{b}_{,y}^{(inv)T} \mathbf{u}_y^{(inv)}, & u_{y,z} &= \mathbf{b}_{,z}^{(inv)T} \mathbf{u}_y^{(inv)}, \\ u_{z,x} &= \mathbf{b}_{,x}^{(inv)T} \mathbf{u}_z^{(inv)}, & u_{z,y} &= \mathbf{b}_{,y}^{(inv)T} \mathbf{u}_z^{(inv)}, & u_{z,z} &= \mathbf{b}_{,z}^{(inv)T} \mathbf{u}_z^{(inv)}, \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

kde derivácie nových báзовých funkcií podľa x, y, z sú

$$\mathbf{b}_{,x}^{(inv)} = \begin{bmatrix} b_{,x}^{(0)} \\ b_{,x}^{(1)} \\ b_{,x}^{(2)} \\ b_{,x}^{(12)} \\ b_{,x}^{(3)} \\ b_{,x}^{(13)} \\ b_{,x}^{(23)} \\ b_{,x}^{(123)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{,x} \\ \eta_{,x} \\ \eta_{,x} \xi + \eta \xi_{,x} \\ \zeta_{,x} \\ \xi_{,x} \zeta + \xi \zeta_{,x} \\ \eta_{,x} \zeta + \eta \zeta_{,x} \\ \eta_{,x} \xi \zeta + \eta \xi_{,x} \zeta + \eta \xi \zeta_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.3.39)$$

a derivácie lokálnych súradníc ξ, η, ζ podľa globálnych súradníc x, y, z sú prvkami inverznej matice Jacobiánu (3.3.14).

Ak deformácie (3.3.38) dosadíme do vzťahu pre výpočet napätia (3.3.3), môžeme počítať prvky lokálneho vektora vratnej sily (3.3.11) podľa nasledujúcich vzťahov:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tau_{xx} \mathbf{b}_{,x} + \tau_{xy} \mathbf{b}_{,y} + \tau_{xz} \mathbf{b}_{,z}) \text{DetJ} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\ \mathbf{r}_y^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tau_{yx} \mathbf{b}_{,x} + \tau_{yy} \mathbf{b}_{,y} + \tau_{yz} \mathbf{b}_{,z}) \text{DetJ} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\ \mathbf{r}_z^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tau_{zx} \mathbf{b}_{,x} + \tau_{zy} \mathbf{b}_{,y} + \tau_{zz} \mathbf{b}_{,z}) \text{DetJ} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Vo vzťahu (3.3.40) vyjadríme derivácie štandardných báзовých funkcií podľa x, y, z pomocou derivácií nových báзовých funkcií podľa x, y, z analogicky s postupom v 2D probléme:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{,x} &= (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(inv)})_{,x} = \left(\frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}^{(inv)}\right)_{,x} = \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)}, \\ \mathbf{b}_{,y} &= (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(inv)})_{,y} = \left(\frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}^{(inv)}\right)_{,y} = \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)}, \\ \mathbf{b}_{,z} &= (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}^{(inv)})_{,z} = \left(\frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}^{(inv)}\right)_{,z} = \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,z}^{(inv)}. \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_x^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{xx} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{xy} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{xz} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\
 \mathbf{r}_y^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{yx} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{yy} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{yz} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\
 \mathbf{r}_z^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{zx} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{zy} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{zz} \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.42}$$

Inverznú transformačnú maticu vyberieme pred integrál,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_x^e &= \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{xx} \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{xy} \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{xz} \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\
 \mathbf{r}_y^e &= \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{yx} \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{yy} \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{yz} \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\
 \mathbf{r}_z^e &= \frac{1}{8} \mathbf{T}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{zx} \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{zy} \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{zz} \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,
 \end{aligned}
 \tag{3.3.43}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{,x}^{(inv)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{xx} \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{xy} \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{xz} \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\
 \mathbf{r}_{,y}^{(inv)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{yx} \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{yy} \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{yz} \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \\
 \mathbf{r}_{,z}^{(inv)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tau_{zx} \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} + \tau_{zy} \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} + \tau_{zz} \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} \right) Det\mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta
 \end{aligned}
 \tag{3.3.44}$$

sú e-invarianty lokálnych vratných síl. Získame ich transformáciu

$$\mathbf{r}_{,x}^{(inv)} = \mathbf{Tr}_x^e, \quad \mathbf{r}_{,y}^{(inv)} = \mathbf{Tr}_y^e, \quad \mathbf{r}_{,z}^{(inv)} = \mathbf{Tr}_z^e.
 \tag{3.3.45}$$

3.3.3 Algoritmus s využitím e-invariantov

Uvedieme algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily vyjadreného v novej báze, ktorá umožní vo výpočte využiť e-invarianty. Ku každému algoritmickeému kroku uvedieme počty operácií delenia, násobenia, sčítania/odčítania, pre ktoré použijeme symboly \div , $*$, \pm .

Algoritmus

Vynulujeme premenné pre prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned}
 r_x^{(1)} &= 0 & r_y^{(1)} &= 0 & r_z^{(1)} &= 0 \\
 r_x^{(2)} &= 0 & r_y^{(2)} &= 0 & r_z^{(2)} &= 0 \\
 r_x^{(12)} &= 0 & r_y^{(12)} &= 0 & r_z^{(12)} &= 0 \\
 r_x^{(3)} &= 0 & r_y^{(3)} &= 0 & r_z^{(3)} &= 0 \\
 r_x^{(13)} &= 0 & r_y^{(13)} &= 0 & r_z^{(13)} &= 0 \\
 r_x^{(23)} &= 0 & r_y^{(23)} &= 0 & r_z^{(23)} &= 0 \\
 r_x^{(123)} &= 0 & r_y^{(123)} &= 0 & r_z^{(123)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.3.46}$$

Transformujeme polohy uzlov do e-invariantov

$$\begin{aligned}
 x_{21} &= x_2 - x_1 & x_{43} &= x_4 - x_3 & x_{65} &= x_6 - x_5 & x_{87} &= x_8 - x_7 \\
 x_{12} &= x_1 + x_2 & x_{34} &= x_3 + x_4 & x_{56} &= x_5 + x_6 & x_{78} &= x_7 + x_8 \\
 \\
 x_{4321} &= x_{43} - x_{21} & & & x_{8765} &= x_{87} - x_{65} \\
 x_{2143} &= x_{21} + x_{43} & & & x_{6587} &= x_{65} + x_{87} \\
 x_{3412} &= x_{34} - x_{12} & & & x_{7856} &= x_{78} - x_{56} \\
 \\
 x^{(1)} &= x_{6587} + x_{2143} & x^{(2)} &= x_{7856} + x_{3412} & x^{(12)} &= x_{8765} + x_{4321} \\
 x^{(13)} &= x_{6587} - x_{2143} & x^{(23)} &= x_{7856} - x_{3412} & x^{(123)} &= x_{8765} - x_{4321} \\
 \\
 x^{(3)} &= x_{56} + x_{78} - x_{12} - x_{34}
 \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

÷ ↦ 0 * ↦ 0 ± ↦ 23

$$\begin{aligned}
 y_{21} &= y_2 - y_1 & y_{43} &= y_4 - y_3 & y_{65} &= y_6 - y_5 & y_{87} &= y_8 - x_7 \\
 y_{12} &= y_1 + y_2 & y_{34} &= y_3 + y_4 & y_{56} &= y_5 + y_6 & y_{78} &= y_7 + x_8 \\
 \\
 y_{4321} &= y_{43} - y_{21} & & & y_{8765} &= y_{87} - y_{65} \\
 y_{2143} &= y_{21} + y_{43} & & & y_{6587} &= y_{65} + y_{87} \\
 y_{3412} &= y_{34} - y_{12} & & & y_{7856} &= y_{78} - y_{56} \\
 \\
 y^{(1)} &= y_{6587} + y_{2143} & y^{(2)} &= y_{7856} + y_{3412} & y^{(12)} &= y_{8765} + y_{4321} \\
 y^{(13)} &= y_{6587} - y_{2143} & y^{(23)} &= y_{7856} - y_{3412} & y^{(123)} &= y_{8765} - y_{4321} \\
 \\
 y^{(3)} &= y_{56} + y_{78} - y_{12} - y_{34}
 \end{aligned} \tag{3.3.48}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 23$$

$$\begin{aligned}
 z_{21} &= z_2 - z_1 & z_{43} &= z_4 - z_3 & z_{65} &= z_6 - z_5 & z_{87} &= z_8 - z_7 \\
 z_{12} &= z_1 + z_2 & z_{34} &= z_3 + z_4 & z_{56} &= z_5 + z_6 & z_{78} &= z_7 + z_8 \\
 z_{4321} &= z_{43} - z_{21} & z_{8765} &= z_{87} - z_{65} \\
 z_{2143} &= z_{21} + z_{43} & z_{6587} &= z_{65} + z_{87} \\
 z_{3412} &= z_{34} - z_{12} & z_{7856} &= z_{78} - z_{56} \\
 z^{(1)} &= z_{6587} + z_{2143} & z^{(2)} &= z_{7856} + z_{3412} & z^{(12)} &= z_{8765} + z_{4321} \\
 z^{(13)} &= z_{6587} - z_{2143} & z^{(23)} &= z_{7856} - z_{3412} & z^{(123)} &= z_{8765} - z_{4321} \\
 z^{(3)} &= z_{56} + z_{78} - z_{12} - z_{34}
 \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 23$$

Transformujeme posunutia do e-invariantov

$$\begin{aligned}
 u_{x21} &= u_{x2} - u_{x1} & u_{x43} &= u_{x4} - u_{x3} & u_{x65} &= u_{x6} - u_{x5} & u_{x87} &= u_{x8} - u_{x7} \\
 u_{x12} &= u_{x1} + u_{x2} & u_{x34} &= u_{x3} + u_{x4} & u_{x56} &= u_{x5} + u_{x6} & u_{x78} &= u_{x7} + u_{x8} \\
 u_{x4321} &= u_{x43} - u_{x21} & u_{x8765} &= u_{x87} - u_{x65} \\
 u_{x2143} &= u_{x21} + u_{x43} & u_{x6587} &= u_{x65} + u_{x87} \\
 u_{x3412} &= u_{x34} - u_{x12} & u_{x7856} &= u_{x78} - u_{x56} \\
 u_x^{(1)} &= u_{x6587} + u_{x2143} & u_x^{(2)} &= u_{x7856} + u_{x3412} & u_x^{(12)} &= u_{x8765} + u_{x4321} \\
 u_x^{(13)} &= u_{x6587} - u_{x2143} & u_x^{(23)} &= u_{x7856} - u_{x3412} & u_x^{(123)} &= u_{x8765} - u_{x4321} \\
 u_x^{(3)} &= u_{x56} + u_{x78} - u_{x12} - u_{x34}
 \end{aligned} \tag{3.3.50}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 23$$

$$\begin{aligned}
 u_{y21} &= u_{y2} - u_{y1} & u_{y43} &= u_{y4} - u_{y3} & u_{y65} &= u_{y6} - u_{y5} & u_{y87} &= u_{y8} - u_{y7} \\
 u_{y12} &= u_{y1} + u_{y2} & u_{y34} &= u_{y3} + u_{y4} & u_{y56} &= u_{y5} + u_{y6} & u_{y78} &= u_{y7} + u_{y8} \\
 \\
 u_{y4321} &= u_{y43} - u_{y21} & & & u_{y8765} &= u_{y87} - u_{y65} & & \\
 u_{y2143} &= u_{y21} + u_{y43} & & & u_{y6587} &= u_{y65} + u_{y87} & & \\
 u_{y3412} &= u_{y34} - u_{y12} & & & u_{y7856} &= u_{y78} - u_{y56} & & \\
 \\
 u_y^{(1)} &= u_{y6587} + u_{y2143} & u_y^{(2)} &= u_{y7856} + u_{y3412} & u_y^{(12)} &= u_{y8765} + u_{y4321} \\
 u_y^{(13)} &= u_{y6587} - u_{y2143} & u_y^{(23)} &= u_{y7856} - u_{y3412} & u_y^{(123)} &= u_{y8765} - u_{y4321} \\
 \\
 u_y^{(3)} &= u_{y56} + u_{y78} - u_{y12} - u_{y34}
 \end{aligned} \tag{3.3.51}$$

÷ ↦ 0 * ↦ 0 ± ↦ 23

$$\begin{aligned}
 u_{z21} &= u_{z2} - u_{z1} & u_{z43} &= u_{z4} - u_{z3} & u_{z65} &= u_{z6} - u_{z5} & u_{z87} &= u_{z8} - u_{z7} \\
 u_{z12} &= u_{z1} + u_{z2} & u_{z34} &= u_{z3} + u_{z4} & u_{z56} &= u_{z5} + u_{z6} & u_{z78} &= u_{z7} + u_{z8} \\
 \\
 u_{z4321} &= u_{z43} - u_{z21} & & & u_{z8765} &= u_{z87} - u_{z65} & & \\
 u_{z2143} &= u_{z21} + u_{z43} & & & u_{z6587} &= u_{z65} + u_{z87} & & \\
 u_{z3412} &= u_{z34} - u_{z12} & & & u_{z7856} &= u_{z78} - u_{z56} & & \\
 \\
 u_z^{(1)} &= u_{z6587} + u_{z2143} & u_z^{(2)} &= u_{z7856} + u_{z3412} & u_z^{(12)} &= u_{z8765} + u_{z4321} \\
 u_z^{(13)} &= u_{z6587} - u_{z2143} & u_z^{(23)} &= u_{z7856} - u_{z3412} & u_z^{(123)} &= u_{z8765} - u_{z4321} \\
 \\
 u_z^{(3)} &= u_{z56} + u_{z78} - u_{z12} - u_{z34}
 \end{aligned} \tag{3.3.52}$$

÷ ↦ 0 * ↦ 0 ± ↦ 23

Začiatok integračného cyklu

Vypočítame funkčné hodnoty $x_\xi = \delta x_{,\xi}$, $y_\xi = \delta y_{,\xi}$, $z_\xi = \delta z_{,\xi}$, $x_\eta = \delta x_{,\eta}$, $y_\eta = \delta y_{,\eta}$, $z_\eta = \delta z_{,\eta}$, $x_\zeta = \delta x_{,\zeta}$, $y_\zeta = \delta y_{,\zeta}$, $z_\zeta = \delta z_{,\zeta}$
 v integračných bodoch použitím vzťahu

$$\xi\eta = \xi * \eta \quad \xi\zeta = \xi * \zeta \quad \eta\zeta = \eta * \zeta$$

$$x_\xi = x^{(1)} + \eta * x^{(12)} + \zeta * x^{(13)} + \eta\zeta * x^{(123)}$$

$$x_\eta = x^{(2)} + \xi * x^{(12)} + \zeta * x^{(23)} + \xi\zeta * x^{(123)}$$

$$x_\zeta = x^{(3)} + \xi * x^{(13)} + \eta * x^{(23)} + \eta\xi * x^{(123)}$$

$$y_\xi = y^{(1)} + \eta * y^{(12)} + \zeta * y^{(13)} + \eta\zeta * y^{(123)}$$

$$y_\eta = y^{(2)} + \xi * y^{(12)} + \zeta * y^{(23)} + \xi\zeta * y^{(123)}$$

$$y_\zeta = y^{(3)} + \xi * y^{(13)} + \eta * y^{(23)} + \eta\xi * y^{(123)}$$

$$z_\xi = z^{(1)} + \eta * z^{(12)} + \zeta * z^{(13)} + \eta\zeta * z^{(123)}$$

$$z_\eta = z^{(2)} + \xi * z^{(12)} + \zeta * z^{(23)} + \xi\zeta * z^{(123)}$$

$$z_\zeta = z^{(3)} + \xi * z^{(13)} + \eta * z^{(23)} + \eta\xi * z^{(123)}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 30 \quad \pm \mapsto 27$$

Vypočítame funkčné hodnoty $D_J = 1/\text{Det}\mathbf{J}$ v integračných bodoch

$$d_1 = y_\eta * z_\zeta - y_\zeta * z_\eta$$

$$d_2 = y_\zeta * z_\xi - y_\xi * z_\zeta \tag{3.3.53}$$

$$d_3 = y_\xi * z_\eta - y_\eta * z_\xi$$

$$D_J = \frac{0.001953125}{x_\xi * d_1 + x_\eta * d_2 + x_\zeta * d_3}$$

$$\div \mapsto 1 \quad * \mapsto 9 \quad \pm \mapsto 5$$

Vypočítame funkčné hodnoty derivácií lokálnych súradníc podľa globálnych súradníc, ktoré sú násobené determinantom Jacobiánu v integračných bodoch

$$\xi_x = d_1$$

$$\eta_x = d_2$$

$$\zeta_x = d_3$$

$$\xi_y = x_\zeta * z_\eta - x_\eta * z_\zeta$$

$$\eta_y = x_\xi * z_\zeta - x_\zeta * z_\xi$$

$$\zeta_y = x_\eta * y_\xi - x_\xi * z_\eta$$

$$\xi_z = x_\eta * y_\zeta - x_\zeta * y_\eta$$

$$\eta_z = x_\zeta * y_\xi - x_\xi * y_\zeta$$

$$\zeta_z = x_\xi * y_\eta - x_\eta * y_\xi$$

$$\tag{3.3.54}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 12 \quad \pm \mapsto 6$$

Vypočítame funkčné hodnoty

$$\begin{aligned}
b_x^{(1)} &= \xi_x & b_y^{(1)} &= \xi_y \\
b_x^{(2)} &= \eta_x & b_y^{(2)} &= \eta_y \\
b_x^{(12)} &= \eta_x * \xi + \eta * \xi_x & b_y^{(12)} &= \eta_y * \xi + \eta * \xi_y \\
b_x^{(3)} &= \zeta_x & b_y^{(3)} &= \zeta_y \\
b_x^{(13)} &= \xi_x * \zeta + \xi * \zeta_x & b_y^{(13)} &= \xi_y * \zeta + \xi * \zeta_y \\
b_x^{(23)} &= \eta_x * \zeta + \eta * \zeta_x & b_y^{(23)} &= \eta_y * \zeta + \eta * \zeta_y \\
b_x^{(123)} &= \xi\zeta * \eta_x + \eta\zeta * \xi_x + \eta\xi * \zeta_x & b_y^{(123)} &= \xi\zeta * \eta_y + \eta\zeta * \xi_y + \eta\xi * \zeta_y
\end{aligned}
\tag{3.3.55}$$

$$\begin{aligned}
b_z^{(1)} &= \xi_z \\
b_z^{(2)} &= \eta_z \\
b_z^{(12)} &= \eta_z * \xi + \eta * \xi_z \\
b_z^{(3)} &= \zeta_z \\
b_z^{(13)} &= \xi_z * \zeta + \xi * \zeta_z \\
b_z^{(23)} &= \eta_z * \zeta + \eta * \zeta_z \\
b_z^{(123)} &= \xi\zeta * \eta_z + \eta\zeta * \xi_z + \eta\xi * \zeta_z
\end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 27 \quad \pm \mapsto 15$$

Vypočítame derivácie posunutí podľa x, y, z

$$u_{xx} =$$

$$u_x^{(1)} * b_x^{(1)} + u_x^{(2)} * b_x^{(2)} + u_x^{(12)} * b_x^{(12)} + u_x^{(3)} * b_x^{(3)} + u_x^{(13)} * b_x^{(13)} + u_x^{(23)} * b_x^{(23)} + u_x^{(123)} * b_x^{(123)}$$

$$u_{xy} =$$

$$u_x^{(1)} * b_y^{(1)} + u_x^{(2)} * b_y^{(2)} + u_x^{(12)} * b_y^{(12)} + u_x^{(3)} * b_y^{(3)} + u_x^{(13)} * b_y^{(13)} + u_x^{(23)} * b_y^{(23)} + u_x^{(123)} * b_y^{(123)}$$

$$u_{xz} =$$

$$u_x^{(1)} * b_z^{(1)} + u_x^{(2)} * b_z^{(2)} + u_x^{(12)} * b_z^{(12)} + u_x^{(3)} * b_z^{(3)} + u_x^{(13)} * b_z^{(13)} + u_x^{(23)} * b_z^{(23)} + u_x^{(123)} * b_z^{(123)}$$

$$u_{yx} =$$

$$u_y^{(1)} * b_x^{(1)} + u_y^{(2)} * b_x^{(2)} + u_y^{(12)} * b_x^{(12)} + u_y^{(3)} * b_x^{(3)} + u_y^{(13)} * b_x^{(13)} + u_y^{(23)} * b_x^{(23)} + u_y^{(123)} * b_x^{(123)}$$

$$u_{yy} =$$

$$u_y^{(1)} * b_y^{(1)} + u_y^{(2)} * b_y^{(2)} + u_y^{(12)} * b_y^{(12)} + u_y^{(3)} * b_y^{(3)} + u_y^{(13)} * b_y^{(13)} + u_y^{(23)} * b_y^{(23)} + u_y^{(123)} * b_y^{(123)}$$

$$u_{yz} =$$

$$u_y^{(1)} * b_z^{(1)} + u_y^{(2)} * b_z^{(2)} + u_y^{(12)} * b_z^{(12)} + u_y^{(3)} * b_z^{(3)} + u_y^{(13)} * b_z^{(13)} + u_y^{(23)} * b_z^{(23)} + u_y^{(123)} * b_z^{(123)}$$

$$u_{zx} =$$

$$u_z^{(1)} * b_x^{(1)} + u_z^{(2)} * b_x^{(2)} + u_z^{(12)} * b_x^{(12)} + u_z^{(3)} * b_x^{(3)} + u_z^{(13)} * b_x^{(13)} + u_z^{(23)} * b_x^{(23)} + u_z^{(123)} * b_x^{(123)}$$

$$u_{zy} =$$

$$u_z^{(1)} * b_y^{(1)} + u_z^{(2)} * b_y^{(2)} + u_z^{(12)} * b_y^{(12)} + u_z^{(3)} * b_y^{(3)} + u_z^{(13)} * b_y^{(13)} + u_z^{(23)} * b_y^{(23)} + u_z^{(123)} * b_y^{(123)}$$

$$u_{zz} =$$

$$u_z^{(1)} * b_z^{(1)} + u_z^{(2)} * b_z^{(2)} + u_z^{(12)} * b_z^{(12)} + u_z^{(3)} * b_z^{(3)} + u_z^{(13)} * b_z^{(13)} + u_z^{(23)} * b_z^{(23)} + u_z^{(123)} * b_z^{(123)}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 63 \quad \pm \mapsto 54$$

Vypočítame napätia

$$YD_J = D_J * (\lambda + \mu + \mu)$$

$$\lambda D_J = D_J * \lambda$$

$$\mu D_J = D_J * \mu$$

$$\tau_{xx} = YD_J * u_{xx} + \lambda D_J * (u_{yy} + u_{zz})$$

$$\tau_{yy} = YD_J * u_{yy} + \lambda D_J * (u_{xx} + u_{zz})$$

$$\tau_{zz} = YD_J * u_{zz} + \lambda D_J * (u_{xx} + u_{yy})$$

$$\tau_{xy} = \mu D_J * (u_{xy} + u_{yx})$$

$$\tau_{yz} = \mu D_J * (u_{yz} + u_{zy})$$

$$\tau_{xz} = \mu D_J * (u_{xz} + u_{zx})$$

(3.3.56)

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 12 \quad \pm \mapsto 11$$

Vypočítame e-invarianty lokálneho vektora vratnej sily

$$\begin{aligned}
 r_x^{(1)} &= r_x^{(1)} + \tau_{xx} * b_x^{(1)} + \tau_{xy} * b_y^{(1)} + \tau_{xz} * b_z^{(1)} \\
 r_x^{(2)} &= r_x^{(2)} + \tau_{xx} * b_x^{(2)} + \tau_{xy} * b_y^{(2)} + \tau_{xz} * b_z^{(2)} \\
 r_x^{(12)} &= r_x^{(12)} + \tau_{xx} * b_x^{(12)} + \tau_{xy} * b_y^{(12)} + \tau_{xz} * b_z^{(12)} \\
 r_x^{(3)} &= r_x^{(3)} + \tau_{xx} * b_x^{(3)} + \tau_{xy} * b_y^{(3)} + \tau_{xz} * b_z^{(3)} \\
 r_x^{(13)} &= r_x^{(13)} + \tau_{xx} * b_x^{(13)} + \tau_{xy} * b_y^{(13)} + \tau_{xz} * b_z^{(13)} \\
 r_x^{(23)} &= r_x^{(23)} + \tau_{xx} * b_x^{(23)} + \tau_{xy} * b_y^{(23)} + \tau_{xz} * b_z^{(23)} \\
 r_x^{(123)} &= r_x^{(123)} + \tau_{xx} * b_x^{(123)} + \tau_{xy} * b_y^{(123)} + \tau_{xz} * b_z^{(123)} \\
 \\
 r_y^{(1)} &= r_y^{(1)} + \tau_{yx} * b_x^{(1)} + \tau_{yy} * b_y^{(1)} + \tau_{yz} * b_z^{(1)} \\
 r_y^{(2)} &= r_y^{(2)} + \tau_{yx} * b_x^{(2)} + \tau_{yy} * b_y^{(2)} + \tau_{yz} * b_z^{(2)} \\
 r_y^{(12)} &= r_y^{(12)} + \tau_{yx} * b_x^{(12)} + \tau_{yy} * b_y^{(12)} + \tau_{yz} * b_z^{(12)} \\
 r_y^{(3)} &= r_y^{(3)} + \tau_{yx} * b_x^{(3)} + \tau_{yy} * b_y^{(3)} + \tau_{yz} * b_z^{(3)} \\
 r_y^{(13)} &= r_y^{(13)} + \tau_{yx} * b_x^{(13)} + \tau_{yy} * b_y^{(13)} + \tau_{yz} * b_z^{(13)} \\
 r_y^{(23)} &= r_y^{(23)} + \tau_{yx} * b_x^{(23)} + \tau_{yy} * b_y^{(23)} + \tau_{yz} * b_z^{(23)} \\
 r_y^{(123)} &= r_y^{(123)} + \tau_{yx} * b_x^{(123)} + \tau_{yy} * b_y^{(123)} + \tau_{yz} * b_z^{(123)} \\
 \\
 r_z^{(1)} &= r_z^{(1)} + \tau_{zx} * b_x^{(1)} + \tau_{zy} * b_y^{(1)} + \tau_{zz} * b_z^{(1)} \\
 r_z^{(2)} &= r_z^{(2)} + \tau_{zx} * b_x^{(2)} + \tau_{zy} * b_y^{(2)} + \tau_{zz} * b_z^{(2)} \\
 r_z^{(12)} &= r_z^{(12)} + \tau_{zx} * b_x^{(12)} + \tau_{zy} * b_y^{(12)} + \tau_{zz} * b_z^{(12)} \\
 r_z^{(3)} &= r_z^{(3)} + \tau_{zx} * b_x^{(3)} + \tau_{zy} * b_y^{(3)} + \tau_{zz} * b_z^{(3)} \\
 r_z^{(13)} &= r_z^{(13)} + \tau_{zx} * b_x^{(13)} + \tau_{zy} * b_y^{(13)} + \tau_{zz} * b_z^{(13)} \\
 r_z^{(23)} &= r_z^{(23)} + \tau_{zx} * b_x^{(23)} + \tau_{zy} * b_y^{(23)} + \tau_{zz} * b_z^{(23)} \\
 r_z^{(123)} &= r_z^{(123)} + \tau_{zx} * b_x^{(123)} + \tau_{zy} * b_y^{(123)} + \tau_{zz} * b_z^{(123)}
 \end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 63 \quad \pm \mapsto 63$$

Koniec integračného cyklu

e-invarianty lokálneho vektora vratnej sily transformujeme na vratnú silu

$$\begin{aligned}
 r_{x6587} &= r_x^{(1)} + r_x^{(13)} & r_{x7856} &= r_x^{(2)} + r_x^{(23)} & r_{x8765} &= r_x^{(12)} + r_x^{(123)} \\
 r_{x2143} &= r_x^{(1)} - r_x^{(13)} & r_{x3412} &= r_x^{(2)} - r_x^{(23)} & r_{x4321} &= r_x^{(12)} - r_x^{(123)}
 \end{aligned} \tag{3.3.57}$$

$$\begin{aligned}
 r_{x87} &= r_{x8765} + r_{x6587} & r_{x65} &= r_{x6587} - r_{x8765} \\
 r_{x43} &= r_{x4321} + r_{x2143} & r_{x21} &= r_{x2143} - r_{x4321} \\
 r_{x34} &= r_{x3412} - r_x^{(3)} & r_{x12} &= -r_{x3412} - r_x^{(3)} \\
 r_{x78} &= r_{x7856} + r_x^{(3)} & r_{x56} &= r_x^{(3)} - r_{x7856} \\
 \\
 r_{x1} &= r_{x12} - r_{x21} & r_{x2} &= r_{x12} + r_{x21} \\
 r_{x3} &= r_{x34} - r_{x43} & r_{x4} &= r_{x34} + r_{x43} \\
 r_{x5} &= r_{x56} - r_{x65} & r_{x6} &= r_{x56} + r_{x65} \\
 r_{x7} &= r_{x78} - r_{x87} & r_{x8} &= r_{x78} + r_{x87}
 \end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 23$$

$$\begin{aligned}
 r_{y6587} &= r_y^{(1)} + r_y^{(13)} & r_{y7856} &= r_y^{(2)} + r_y^{(23)} & r_{y8765} &= r_y^{(12)} + r_y^{(123)} \\
 r_{y2143} &= r_y^{(1)} - r_y^{(13)} & r_{y3412} &= r_y^{(2)} - r_y^{(23)} & r_{y4321} &= r_y^{(12)} - r_y^{(123)}
 \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

$$\begin{aligned}
 r_{y87} &= r_{y8765} + r_{y6587} & r_{y65} &= r_{y6587} - r_{y8765} \\
 r_{y43} &= r_{y4321} + r_{y2143} & r_{y21} &= r_{y2143} - r_{y4321} \\
 r_{y34} &= r_{y3412} - r_y^{(3)} & r_{y12} &= -r_{y3412} - r_y^{(3)} \\
 r_{y78} &= r_{y7856} + r_y^{(3)} & r_{y56} &= r_y^{(3)} - r_{y7856} \\
 \\
 r_{y1} &= r_{y12} - r_{y21} & r_{y2} &= r_{y12} + r_{y21} \\
 r_{y3} &= r_{y34} - r_{y43} & r_{y4} &= r_{y34} + r_{y43} \\
 r_{y5} &= r_{y56} - r_{y65} & r_{y6} &= r_{y56} + r_{y65} \\
 r_{y7} &= r_{y78} - r_{y87} & r_{y8} &= r_{y78} + r_{y87}
 \end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 23$$

$$\begin{aligned}
 r_{z6587} &= r_z^{(1)} + r_z^{(13)} & r_{z7856} &= r_z^{(2)} + r_z^{(23)} & r_{z8765} &= r_z^{(12)} + r_z^{(123)} \\
 r_{z2143} &= r_z^{(1)} - r_z^{(13)} & r_{z3412} &= r_z^{(2)} - r_z^{(23)} & r_{z4321} &= r_z^{(12)} - r_z^{(123)}
 \end{aligned} \tag{3.3.59}$$

$$\begin{aligned}
 r_{z87} &= r_{z8765} + r_{z6587} & r_{z65} &= r_{z6587} - r_{z8765} \\
 r_{z43} &= r_{z4321} + r_{z2143} & r_{z21} &= r_{z2143} - r_{z4321} \\
 r_{z34} &= r_{z3412} - r_z^{(3)} & r_{z12} &= -r_{z3412} - r_z^{(3)} \\
 r_{z78} &= r_{z7856} + r_z^{(3)} & r_{z56} &= r_z^{(3)} - r_{z7856}
 \end{aligned}$$

$$r_{z1} = r_{z12} - r_{z21} \quad r_{z2} = r_{z12} + r_{z21}$$

$$r_{z3} = r_{z34} - r_{z43} \quad r_{z4} = r_{z34} + r_{z43}$$

$$r_{z5} = r_{z56} - r_{z65} \quad r_{z6} = r_{z56} + r_{z65}$$

$$r_{z7} = r_{z78} - r_{z87} \quad r_{z8} = r_{z78} + r_{z87}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 23$$

3.4 Prípád elementu v tvare kocky

Budeme uvažovať elementy v tvare kociek, ktoré majú rovnakú veľkosť a orientáciu ako referenčný element. V tomto prípade sa priestorová transformácia medzi lokálnymi a globálnymi súradnicami redukuje na posunutie

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \xi = x^{(0)} + \xi, \\ y &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + x_5 + y_6 + y_7 + y_8) + \eta = y^{(0)} + \eta, \\ z &= \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + x_5 + z_6 + z_7 + z_8) + \zeta = z^{(0)} + \zeta, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

v konečnoelementnej sieti. Inverzná transformácia je potom posunutie v opačnom smere:

$$\begin{aligned} \xi &= x^{(0)} - x, \\ \eta &= y^{(0)} - y, \\ \zeta &= z^{(0)} - z. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Zo vzťahov (3.4.1) a (3.4.2) vyplýva, že Jacobián transformácie, i Jacobián inverznej transformácie je jednotková matica

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} & x_{,\zeta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} & y_{,\zeta} \\ z_{,\xi} & z_{,\eta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

a determinant Jacobiánu

$$Det\mathbf{J} = 1. \quad (3.4.4)$$

V takomto prípade pre derivácie nových bázových funkcií $\mathbf{b}^{(inv)}$ podľa x, y a z dostaneme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{,x}^{(inv)} &= \left[0, 1, 0, \eta, 0, \zeta, 0, \eta\zeta \right]^T, \\
 \mathbf{b}_{,y}^{(inv)} &= \left[0, 0, 1, \xi, 0, 0, \zeta, \xi\zeta \right]^T, \\
 \mathbf{b}_{,z}^{(inv)} &= \left[0, 0, 0, 0, 1, \xi, \eta, \eta\xi \right]^T.
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Tieto derivácie bázy použijeme na výpočet derivácií posunutí

$$\begin{aligned}
 u_{x,x} &= u_x^{(1)} + u_x^{(12)}\eta + u_x^{(13)}\zeta + u_x^{(123)}\eta\zeta, \\
 u_{x,y} &= u_x^{(2)} + u_x^{(12)}\xi + u_x^{(23)}\zeta + u_x^{(123)}\xi\zeta, \\
 u_{x,z} &= u_x^{(3)} + u_x^{(13)}\xi + u_x^{(23)}\eta + u_x^{(123)}\xi\eta, \\
 u_{y,x} &= u_y^{(1)} + u_y^{(12)}\eta + u_y^{(13)}\zeta + u_y^{(123)}\eta\zeta, \\
 u_{y,y} &= u_y^{(2)} + u_y^{(12)}\xi + u_y^{(23)}\zeta + u_y^{(123)}\xi\zeta, \\
 u_{y,z} &= u_y^{(3)} + u_y^{(13)}\xi + u_y^{(23)}\eta + u_y^{(123)}\xi\eta, \\
 u_{z,x} &= u_z^{(1)} + u_z^{(12)}\eta + u_z^{(13)}\zeta + u_z^{(123)}\eta\zeta, \\
 u_{z,y} &= u_z^{(2)} + u_z^{(12)}\xi + u_z^{(23)}\zeta + u_z^{(123)}\xi\zeta, \\
 u_{z,z} &= u_z^{(3)} + u_z^{(13)}\xi + u_z^{(23)}\eta + u_z^{(123)}\xi\eta.
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Derivácie posunutí použijeme na výpočet napätí. Napätia dosadíme do vzťahu (3.3.44) pre výpočet e-invariantov vratnej sily. Bázové funkcie a ich derivácie sú na referenčnom elemente navzájom ortogonálne. Je teda vhodné počítať integrály vo vzťahu (3.3.44) analyticky. Dostaneme

$$\begin{aligned}
 r_x^{(1)} &= \lambda(u_x^{(1)} + u_y^{(2)} + u_z^{(3)}) + 2\mu u_x^{(1)}, \\
 r_x^{(2)} &= \mu(u_x^{(2)} + u_y^{(1)}), \\
 r_x^{(12)} &= \mu u_x^{(12)} + \lambda(u_x^{(12)} + u_z^{(23)})/3, \\
 r_x^{(3)} &= \mu(u_z^{(1)} + u_x^{(3)}), \\
 r_x^{(13)} &= \mu u_x^{(13)} + \lambda(u_x^{(13)} + u_y^{(23)})/3, \\
 r_x^{(23)} &= \mu(u_z^{(12)} + u_y^{(13)} + u_x^{(23)} + u_x^{(23)})/3, \\
 r_x^{(123)} &= (\lambda + 4\mu)u_y^{(123)}/9,
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

$$\begin{aligned}
r_y^{(1)} &= \mu(u_y^{(1)} + u_x^{(2)}), \\
r_y^{(2)} &= \lambda(u_x^{(1)} + u_y^{(2)} + u_z^{(3)}) + 2\mu u_y^{(2)}, \\
r_y^{(12)} &= \mu u_y^{(12)} + \lambda(u_y^{(12)} + u_z^{(13)})/3, \\
r_y^{(3)} &= \mu(u_y^{(3)} + u_z^{(2)}), \\
r_y^{(13)} &= \mu(u_z^{(12)} + u_x^{(23)} + u_y^{(13)} + u_y^{(13)})/3, \\
r_y^{(23)} &= \mu u_y^{(23)} + \lambda(u_x^{(13)} + u_y^{(23)})/3, \\
r_y^{(123)} &= (\lambda + 4\mu)u_y^{(123)}/9, \\
r_z^{(1)} &= \mu(u_x^{(3)} + u_z^{(1)}), \\
r_z^{(2)} &= \mu(u_y^{(3)} + u_z^{(2)}), \\
r_z^{(12)} &= \mu(u_y^{(13)} + u_x^{(23)} + u_z^{(12)} + u_z^{(12)})/3, \\
r_z^{(3)} &= \lambda(u_x^{(1)} + u_y^{(2)} + u_z^{(3)}) + 2\mu u_z^{(3)}, \\
r_z^{(13)} &= \mu u_z^{(13)} + \lambda(u_y^{(12)} + u_z^{(13)})/3, \\
r_z^{(23)} &= \mu u_z^{(23)} + \lambda(u_x^{(12)} + u_z^{(23)})/3, \\
r_z^{(123)} &= (\lambda + 4\mu)u_z^{(123)}/9.
\end{aligned}$$

Z e-invariantov dostaneme použitím inverznej transformácie prvky lokálneho vektora vratnej sily

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_x^{(inv)}, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_y^{(inv)}, \quad \mathbf{r}_z = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_z^{(inv)}. \quad (3.4.8)$$

3.4.1 Algoritmus s využitím e-invariantov

Uvedieme algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily vyjadreného pre prípad elementu v tvare kociek. Ku každému algoritmickému kroku uvedieme počty operácií delenia, násobenia, sčítania/odčítania, pre ktoré použijeme symboly \div , $*$, \pm .

Algoritmus

Transformujeme posunutia do e-invariantov podľa vzťahov (3.3.50) – (3.3.52)

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 69$$

Vypočítame e-invarianty lokálneho vektora vratnej sily

$$m_2 = 2 * \mu$$

$$m_{03} = 0.333\bar{3} * \mu$$

$$l_{03} = 0.333\bar{3} * \lambda$$

$$l_m = 0.111\bar{1} * (\lambda + 4 * \mu)$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 5 \quad \pm \mapsto 1$$

$$l_{123} = \lambda * (u_x^{(1)} + u_y^{(2)} + u_z^{(3)})$$

$$l_{xz} = l_{03} * (u_x^{(12)} + u_z^{(23)})$$

$$l_{xy} = l_{03} * (u_x^{(13)} + u_y^{(23)})$$

$$l_{yz} = l_{03} * (u_y^{(12)} + u_z^{(13)})$$

$$u_{zyx} = u_z^{(12)} + u_y^{(13)} + u_x^{(23)}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 4 \quad \pm \mapsto 7$$

$$r_x^{(1)} = l_{123} + m_2 * u_x^{(1)}$$

$$r_x^{(2)} = \mu * (u_x^{(2)} + u_y^{(1)})$$

$$r_x^{(12)} = \mu * u_x^{(12)} + l_{xz}$$

$$r_x^{(3)} = \mu * (u_z^{(1)} + u_x^{(3)})$$

$$r_x^{(13)} = \mu * u_x^{(13)} + l_{xy}$$

$$r_x^{(23)} = m_{03} * (u_{zyx} + u_x^{(23)})$$

$$r_x^{(123)} = l_m * u_x^{(123)}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 7 \quad \pm \mapsto 6$$

$$\begin{aligned}
 r_y^{(1)} &= r_x^{(2)}, \\
 r_y^{(2)} &= l_{123} + m_2 * u_y^{(2)} \\
 r_y^{(12)} &= \mu * u_y^{(12)} + l_{yz}, \\
 r_y^{(3)} &= \mu * (u_y^{(3)} + u_z^{(2)}) \\
 r_y^{(13)} &= m_{03} * (u_{zyx} + u_y^{(13)}) \\
 r_y^{(23)} &= \mu * u_y^{(23)} + l_{xy} \\
 r_y^{(123)} &= l_m * u_y^{(123)}
 \end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 6 \quad \pm \mapsto 5$$

$$\begin{aligned}
 r_z^{(1)} &= r_x^{(3)} \\
 r_z^{(2)} &= r_y^{(3)} \\
 r_z^{(12)} &= m_{03} * (u_{zyx} + u_z^{(12)}) \\
 r_z^{(3)} &= l_{123} + m_2 * u_z^{(3)} \\
 r_z^{(13)} &= \mu * u_z^{(13)} + l_{yz} \\
 r_z^{(23)} &= \mu * u_z^{(23)} + l_{xz} \\
 r_z^{(123)} &= l_m * u_z^{(123)}
 \end{aligned}$$

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 5 \quad \pm \mapsto 4$$

e-invarianty lokálneho vektora vratnej sily transformujeme na vratnú silu podľa vzťahov (3.3.57) – (3.3.59)

$$\div \mapsto 0 \quad * \mapsto 0 \quad \pm \mapsto 69$$

3.5 Porovnanie výpočtových algoritmov

Vytvorili sme algoritmus pre 2D a 3D problém výpočtu lokálneho vektora vratnej sily pomocou novej bázy s využitím e-invariantov. Pri výpočte sme použili Gaussovú numerickú integráciu. V 2D probléme štvorbodovú a v 3D probléme osembodovú.

Pre porovnanie počtu aritmetických operácií sme vytvorili alternatívne 2D a 3D algoritmy pomocou štandardnej bázy. Výsledné počty aritmetických operácií uvádzame v Tab. 1 a 2.

typ algoritmu	počet delení	počet násobení	počet sčítaní/odčítaní
bez využitia e-invariantov	4	232	216
s využitím e-invariantov	4	168	178

Tabuľka 3.5.1. Porovnanie počtov aritmetických operácií v 2D algoritmoch.

typ algoritmu	počet delení	počet násobení	počet sčítaní/odčítaní
bez využitia e-invariantov	8	2016	2092
s využitím e-invariantov	8	1728	1655

Tabuľka 3.5.2. Porovnanie počtov aritmetických operácií v 3D algoritmoch.

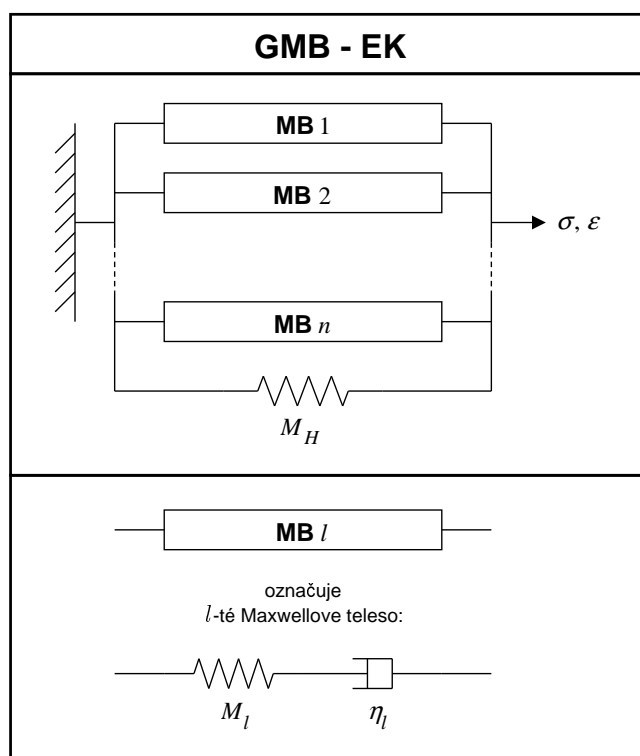
3D algoritmus s využitím e-invariantov sme implementovali do MKE výpočtového programu FESD2 a vykonali numerické testy pre porovnanie rýchlostí s pôvodnou verziou programu. Jeden výpočet bol vykonaný pre sieť elementov v tvare šesťstenov a bez využitia e-invariantov. Druhý výpočet bol vykonaný pre rovnakú sieť, avšak s využitím e-invariantov. Tretí výpočet bol vykonaný pre sieť elementov v tvare kocky a s využitím e-invariantov. Vo všetkých troch prípadoch mala sieť 8 miliónov elementov. Použili sme dvojprocesorový počítač s frekvenciou 2×2.5 GHz a operačnou pamäťou 2×2 GB. Výpočtové časy pre 10 časových hladín sú uvedené v Tab. 3.

výpočet	bez využitia e-invariantov	s využitím e-invariantov	kocky s využitím e-invariantov
výpočtový čas	474 s	157 s	30 s

Tabuľka 3.5.3. Porovnanie výpočtových časov.

3.6 Zahrnutie realistického útlmu

Doteraz sme sa venovali iba elasticému kontinuu. Aproximovať materiál v Zemi elastickým kontinuom môžeme iba v niekoľkých aplikáciách. Pre mnohé dôležité aplikácie je však nutné zohľadniť realistický útlm seizmických vln. Z pozorovaní útlmu seizmických vln v Zemi (napr. McDonal et al., 1958; Liu et al., 1976; Spencer, 1981; Murphy, 1982) vyplýva, že útlm je takmer konštantný v celom frekvenčnom intervale seizmických vln, t.j. pre vlny s periódami od 0.01 s až do 1 hodiny. Takéto správanie môžeme simulovať použitím tzv. generalizovaného Maxwellovho telesa (GMB-EK) v definícii Emmerich a Korn (1987). Veľmi stručne vysvetlíme základné princípy zahrnutia realistického útlmu do výpočtov založených na metóde konečných prvkov s vratnou silou. Podrobné vysvetlenie reológie GMB-EK možno nájsť v Moczo et al. (2007a) a podrobné vysvetlenie implementácie do MKE algoritmu možno nájsť v práci Gális (2007). GMB-EK je zložené z n paralelne zapojených Maxwellových telies a paralelne zapojeného Hookovho telesa.



Obr. 3.6.1. Reologický model generalizovaného Maxwellovho telesa v definícii Emmerich a Korn (1987) – GMB-EK. Pružina predstavuje Hookove elastické teleso a tmič predstavuje Stokesove viskózne teleso.

Vzťah medzi napätím a deformáciou v časovej oblasti v elastickom kontinuu je určený Hookovým zákonom. Vo viskoelastickom prostredí je určený konvolučným integrálom. Implementovať výpočet tohoto konvolučného integrálu do numerickej schémy je veľmi neefektívne. Preto Day a Minster (1984) navrhli transformovať konvolučný integrál na diferenciálnu formu pomocou tzv. anelastických funkcií. My použijeme anelastické funkcie nezávislé na materiálových parametroch, ktoré zaviedli Kristek a Moczo (2003). Pomocou materiálovo nezávislých anelastických funkcií môžeme zapísať vzťah medzi napätím a deformáciou v 1D v tvare

$$\tau(t) = M_U \cdot \varepsilon(t) - \sum_{l=1}^n M_U Y_l \zeta_l(t) , \quad (3.6.1)$$

kde M_U je elastický modul pružnosti, $\varepsilon(t)$ je deformácia, Y_l sú anelastické koeficienty, ζ_l su materiálovo nezávislé anelastické funkcie a index l označuje l -tú relaxačnú frekvenciu. Anelastické funkcie sú riešením diferenciálnej rovnice

$$\dot{\zeta}_l(t) + \omega_l \zeta_l(t) = \omega_l \varepsilon(t) , \quad (3.6.2)$$

kde ω_l sú relaxačné frekvencie.

2D alebo 3D viskoelastické kontinuum aproximujeme pomocou dvoch GMB-EK - jedno použijeme pre modul pružnosti v šmyku, μ , a druhé teleso použijeme pre objemový modul pružnosti, κ . Vzťah napätia a deformácie v 3D potom môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \kappa \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \\ & - \sum_{l=1}^n \left[\kappa Y_l^\kappa \zeta_l^{kk} \delta_{ij} + 2 \mu Y_l^\mu \left(\zeta_l^{ij} - \frac{1}{3} \zeta_l^{kk} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

a

$$\dot{\zeta}_l^{ij} + \omega_l \zeta_l^{ij} = \omega_l \varepsilon_{ij} , \quad (3.6.4)$$

kde indexy i, j a k sa vzťahujú na priestorové súradnice, t.j. $i, j, k \in \{x, y, z\}$ a index l sa vzťahuje na relaxačné frekvencie, t.j. $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sumačnú konvenciu neuvažujeme pre index l . κ je elastický objemový modul pružnosti, μ je elastický modul pružnosti v šmyku, Y_l^κ a Y_l^μ su príslušné anelastické koeficienty. Prvá časť rovnice (3.6.3), t.j.

$$\tau_{ij} = \kappa \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (3.6.5)$$

predstavuje Hookov elastický zákon. Preto môžeme rovnicu (3.6.3) zapísať v tvare:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^E - \tau_{ij}^A. \quad (3.6.6)$$

Inými slovami, napätie sme rozdelili na elastickú časť τ_{ij}^E a anelastickú časť τ_{ij}^A . Dosađením (3.6.6) do rovnice (3.3.11) dostaneme vyjadrenie pre vektor vratnej sily v tvare

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^E - \mathbf{r}_i^A; \quad i \in \{x, y, z\}. \quad (3.6.7)$$

Vektor vratnej sily sme rozdelili na elastickú časť \mathbf{r}^E a anelastickú časť \mathbf{r}^A .

Algoritmy uvedené v kapitolách 3.1.3, 3.2.5 a 3.3.3, založené na e-invariantoch, je možné aplikovať na výpočet elastickej časti vektora vratnej sily \mathbf{r}^E . Použitím e-invariantov je preto možné výrazne zvýšiť efektívnosť výpočtov aj so zahrnutím realistického útlmu.

Vzhľadom na podobnú štruktúru elastickej časti napätia, τ_{ij}^E , a anelastickej časti, τ_{ij}^A , v budúcnosti navrhne algoritmy založené na e-invariantoch aj na výpočet anelastickej časti vektora vratnej sily \mathbf{r}^A .

4 Záver

Výsledky dizertačnej práce sú príspevkom k vývoju numerických metód riešenia pohybovej rovnice kontinua. Cieľom bolo vytvoriť nový algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily v metóde konečných elementov, ktorý je efektívny z hľadiska nárokov na výpočtový čas a pamäť.

Analyzovali sme dve formulácie MKE:

1. formuláciu s maticou tuhosti, ktorá má vysoké nároky na operačnú pamäť počítača,
2. formuláciu s vektorom vratnej sily, ktorá má nižšie nároky na operačnú pamäť počítača za cenu zvýšenia nárokov na výpočtový čas.

Zistili sme, že formuláciu s vektorom vratnej sily je možné zefektívniť, pričom sme si stanovili nasledovné ciele:

1. Vytvoriť nový algoritmus výpočtu lokálneho vektora vratnej sily, ktorý bude efektívny z hľadiska nárokov na výpočtový čas a pamäť. Nový algoritmus by nemal zvýšiť pamäťové nároky štandardného algoritmu výpočtu vratnej sily, avšak mal by podstatne znížiť nároky na výpočtový čas.
2. Vykonať numerické testy na porovnanie rýchlostí výpočtov so štandardným a novým algoritmom.

Výsledky dizertačnej práce môžeme zhrnúť takto:

1. Vyvinuli sme novú metódu výpočtu vektora vratnej sily, ktorá výrazne redukuje nároky na výpočtový čas pri zachovaní nárokov na operačnú pamäť počítača. Myšlienka urýchlenia výpočtu spočíva v použití nových ortogonálnych bázových funkcií, ktoré umožňujú využiť vo výpočte nové efektívne parametre, ktoré sme nazvali e-invariantmi. Použitie e-invariantov eliminuje nadbytočnú informáciu vo výpočte. e-invarianty zároveň umožňujú špecifikovať vzťah elementov k diferenciám pre štruktúrované siete.
2. Vytvorili sme dva algoritmy na výpočet lokálneho vektora vratnej sily pre 2D aj 3D problém. V prvom algoritme používame štandardné bázové funkcie, v druhom nové bázové funkcie. Porovnali sme počty aritmetických operácií v oboch algoritmoch v prípade výpočtu štvorbodovou Gaussovou integráciou.

3. 3D algoritmus s využitím e-invariantov sme implementovali do MKE výpočtového programu FESD2 a vykonali numerické testy pre porovnanie rýchlostí s pôvodnou verziou programu. Jeden výpočet bol vykonaný pre sieť elementov v tvare šesťstenov a bez využitia e-invariantov. Druhý výpočet bol vykonaný pre rovnakú sieť, avšak s využitím e-invariantov. Tretí výpočet bol vykonaný pre sieť elementov v tvare kocky a s využitím e-invariantov. Numerické výpočty potvrdili efektívnosť algoritmu, ktorý využíva e-invarianty.

Nová metóda je použiteľná aj pre elementy vyššieho rádu aproximácie a elementy iných tvarov. Metódu možno aplikovať aj v riešení iných typov parciálnych diferenciálnych rovníc s časovou závislosťou.

Literatúra

- Aagaard, B. T., J. F. Hall a T. Heaton, 2001.** Characterization of nearsource ground motions with earthquake simulations. *Earthquake Spectra* 17, 177 - 207.
- Alekseev, A. S. a B. G. Mikhailenko, 1980.** The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods. *J. Geophys.* 48, 161 - 172.
- Andrews, D. J., 1999.** Test of two methods for faulting in finite-difference calculations. *Bull. Seism. Soc. Am.* 89, 931 - 937.
- Archuleta, R. J., 1976.** Experimental and numerical three-dimensional simulations of strike-slip earthquakes. PhD. Thesis. *University of California, San Diego.*
- Balazovjeh, M. a L. Halada, 2007.** Effective computation of restoring force vector in FEM. *Kybernetika* 43, 767 - 776.
- Bao, H., 1998.** Finite element simulation of earthquake ground motion in realistic basins. PhD. Thesis. *Carnegie Mellon University, Pittsburgh.*
- Bao, H., J. Bielak, O. Ghattas, L. F. Kallivokas, D. R. O'Hallaron, J. R. Shewchuk a J. Xu, 1998.** Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 152, 85 - 102.
- Belytschko, T., W. K. Liu a B. Moran, 2000.** Nonlinear finite elements for continua and structures. *John Wiley & Sons, New York.*
- Bielak J., K. Loukakis, Y. Hisada a Ch. Yoshimura, 2003.** Domain Reduction Method for Three-Dimensional Earthquake Modeling in Localized Regions, Part I:

Theory *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 817 - 824.

Bouchon, M., 1981. A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. *Bull. Seism. Soc. Am.* 71, 959 - 971.

Bouchon, M. a O. Coutant, 1994. Calculation of synthetic seismograms in a laterally-varying medium by the boundary element - discrete wavenumber method. *Bull. Seism. Soc. Am.* 84, 1869 - 1881.

Courant, R. 1943. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bull. Amer. Math. Soc.* 49, 1-23.

Day, S. M., 1977. Finite element analysis of seismic scattering problems. PhD. Thesis. *University of California, San Diego.*

Day, S. M. a J. B. Minster, 1984. Numerical simulation of wavefields using a Padé approximant method. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.* 78, 105 - 118.

Dumbser, M. a M. Käser, 2006. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case. *Geophys. J. Int.* 167, 319 - 336.

Dumbser, M., M. Käser a E. Toro, 2007. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes V. Local time stepping and p-adaptivity. *Geophys. J. Int.* 171, 695 - 717.

Emmerich, H., 1989. 2-D wave propagation by a hybrid method. *Geophys. J. Int.* 99, 307 - 319.

Emmerich, H., 1992. PSV-wave propagation in a medium with local heterogeneities: a hybrid formulation and its application. *Geophys. J. Int.* 109, 54 - 64.

- Emmerich, H. a M. Korn, 1987.** Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields. *Geophysics* 52, 1252 - 1264.
- Frazier, G. A. a C. M. Petersen, 1974.** 3-D stress wave code for the Illiac IV. Systems. *Systems, Science and Software Report SSS-R-74-2103*.
- Gaffet, S. a M. Bouchon, 1989.** Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases. *J. Acoust. Soc. Am.* 85, 2277 - 2283.
- Gális, M., 2007.** Hybridná MKD-MKP metóda simulácie zemetrasení a seizmického pohybu. PhD. Thesis. *Comenius University, Bratislava*.
- Hughes, T. J. R., 2000.** The finite element method. Linear static and dynamic finite element method analysis. *Prentice Hall*.
- Chaljub, E., D. Komatitsch, J. P. Vilotte, Y. Capdeville, B. Valette a G. Festa, 2007.** Spectral-element analysis in seismology. In *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Earth*, 365 - 419, R.-S. Wu and V. Maupin, eds., *Advances in Geophysics* Vol. 48, R. Dmowska, ed. *Elsevier - Academic Press*.
- Käser, M. a M. Dumbser, 2006.** An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. *Geophys. J. Int.* 166, 855 - 877.
- Käser, M., M. Dumbser, J. de la Puente a H. Igel, 2007.** An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - III. Viscoelastic attenuation. *Geophys. J. Int.* 168, 224 - 242.
- Komatitsch, D. a J. Tromp, 1999.** Introduction to the spectral-element method for 3D seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.* 139, 806 - 822.

- Kristek, J. a P. Moczo, 2003.** Seismic wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities – a 3D 4th-order staggered-grid finite-difference modeling. *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 2273 - 2280.
- Liu, H.-P., D. L. Anderson a H. Kanamori, 1976.** Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 47, 41 - 58.
- Lysmer, J. a L. A. Drake, 1971.** The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 61, 1233 - 1252.
- Lysmer, J. a L. A. Drake, 1972.** A finite element method for seismology. In *Methods in Computational Physics*, Vol. 11, B. Alder, S. Fernbach, and B. A. Bolt, eds., Academic Press, New York.
- Ma, S. a P. Liu, 2006.** Modeling of the Perfectly Matched Layer Absorbing Boundaries and Intrinsic Attenuation in Explicit Finite-Element Methods *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, 1779 - 1794.
- McDonal, F. J., F. A. Angona, L. R. Mills, R. L. Sengbush, R. G. van Nostrand a J. E. White, 1958.** Attenuation of shear and compressional waves in Pierre shale. *Geophysics* 23, 421 - 439.
- Michlin, S. G., 1974.** Variačné metódy v matematickej fyzike. *Nauka*, Moskva.
- Moczo, P. a J. Kristek 2004.** Numerické modelovanie seizmického pohybu. *Čs. čas. fyz.* 54, 182 - 184.
- Moczo, P., E. Bystrický, J. Kristek, J. M. Carcione a M. Bouchon, 1997.** Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 87, 1305 - 1323.

- Moczo, P., J. Kristek a L. Halada 2004.** The Finite-Difference Method for Seismologists. An Introduction. *Comenius University, Bratislava*.
- Moczo, P., J. Kristek, M. Galis, P. Pazak, a M. Balazovjeh 2007a.** The Finite-difference and Finitte-element Modeling of Seismic Wave Propagation and Earthquake Motion. *Acta Physica Slovaca*, 57(2), 177 -406
- Moczo, P., J. O. A. Robertsson a L. Eisner, 2007b.** The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation. In *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Earth*, 421 - 516, R.-S. Wu and V. Maupin, eds., *Advances in Geophysics* Vol. 48, R. Dmowska, ed. *Elsevier - Academic Press*.
- Murphy, W. F. III, 1982.** Effects of partial saturation on attenuation in Massilon sandstone and Vycor porous glass. *J. Acoust. Soc. Am.* 71, 1458 - 1468.
- Oglesby, D. D., 1999.** Earthquake dynamics on dip-slip faults. PhD. Thesis. *University of California, Santa Barbara*.
- Oglesby, D. D., R. J. Archuleta a S. B. Nielsen, 1998.** Earthquakes on dipping faults: the effects of broken symmetry. *Science* 280, 1055 - 1059.
- Oglesby, D. D., R. J. Archuleta a S. B. Nielsen, 2000.** The three-dimensional dynamics of dipping faults. *Bull. Seism. Soc. Am.* 90, 616 - 628.
- de la Puente, J., M. Käser, M. Dumbser a H. Igel, 2007.** An arbitrary high order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes IV: Anisotropy. *Geophys. J. Int.* 169, 1210 - 1228.
- Reddy, J. N., 2006.** An introduction to the finite element method. *McGraw-Hill*, New York.

- Robertsson, J. O. A., 1996.** A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics* 61, 1921 - 1934.
- Serón, F. J., F. J. Sanz a M. Kindelán, 1989.** Elastic wave propagation with the finite element method. *IBM, European center for science and engineering computing*, ICE-0028.
- Smith, W. D., 1974.** A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems. *J. Comp. Phys.* 15, 492 - 503.
- Smith, W. D., 1975.** The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophys. J.* 42, 747 - 768.
- Spencer, J. W. Jr., 1981.** Stress relaxation at low frequencies in fluid-saturated rocks. *J. Geophys. Res.* 86, 1803 - 1812.
- Strang, G. a G. J. Fix, 1988.** An Analysis of the Finite Element Method. *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs.
- Toshinawa, T. a T. Ohmachi, 1992.** Love wave propagation in a three-dimensional sedimentary basin. *Bull. Seism. Soc. Am.* 82, 1661 - 1667.
- Yoshimura Ch., J. Bielak, Y. Hisada a A. Fernández, 2003.** Domain Reduction Method for Three-Dimensional Earthquake Modeling in Localized Regions, Part II: Verification and Applications *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 825 - 840.
- Zahradník, J. a P. Moczo, 1996.** Hybrid seismic modeling based on discrete-wavenumber and finite-difference methods. *PAGEOPH* 148, 21 - 38.
- Zienkiewicz, O. C. a R. L. Taylor, 1989.** The finite element method. 4th edition, vol. 1. *McGraw-Hill*, New York.