

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HYBRIDNÁ MKD-MKP METÓDA
SIMULÁCIE ZEMETRASENÍ
A SEIZMICKÉHO POHYBU

DIZERTAČNÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2007

Mgr. Martin GÁLIS

**Hybridná MKD-MKP metóda
simulácie zemetrasení a seizmického pohybu**

DIZERTAČNÁ PRÁCA

Mgr. Martin Gális

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

11-45-9 Geofyzika

Školiteľ: Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2007

PodĎakovanie

Za odborné vedenie, podporu, rady a diskusie v doktorandskom štúdiu Ďakujem môjmu školiteľovi prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc.

Ďakujem Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD. za užitočné diskusie a pomoc v priebehu celej práce a Mgr. Petrovi Pažákovi za ochotu a pomoc pri riešení technických problémov pri písaní práce. Ďakujem kolegom z Katedry astronómie, fyziky Zeme a meteorológie FMFI UK a z Geofyzikálneho ústavu SAV za užitočné diskusie, vytvorenie tvorivého prostredia, za ich podporu a porozumenie.

Abstrakt

Mgr. Martin Gális

Hybridná MKD-MKP metóda
simulácie zemetrasení a seizmického pohybu

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Školiteľ: Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2007

179 strán

Predkladaná dizertačná práca je venovaná rozpracovaniu metódy konečných prvkov (MKP) a novej hybridnej metóde založenej na kombinácii MKP a metódy konečných diferencií (MKD) na efektívnu simuláciu zemetrasení a seizmického pohybu.

V úvodnej časti je vysvetlená štandardná formulácia MKP s globálnou maticou tuhosti. Táto formulácia má veľké nároky na operačnú pamäť.

Cieľmi dizertačnej práce bolo a) vypracovať MKP algoritmus založený na koncepte vratnej sily, ktorý má v porovnaní so štandardným algoritmom podstatne menšie nároky na operačnú pamäť; b) implementovať realistický útlm do MKP algoritmu založeného na MKP schéme s vektorom vratnej sily; c) implementovať dynamický model seizmického zdroja do MKP algoritmu; d) navrhnúť a implementovať algoritmus hybridnej MKD-MKP metódy na efektívnu simuláciu zemetrasení a seizmického pohybu.

V dizertačnej práci je vysvetlená alternatívna formulácia MKP s vektorom vratnej sily. Vysvetlená je implementácia realistického útlmu založeného na reológii zovšeobecneného Maxwellovho telesa GMB-EK do algoritmu MKP. Presnosť implementácie je demonštrovaná numerickými testami. Do algoritmu MKP bola implementovaná metóda TSN na simuláciu spontánneho šírenia trhliny na seizmickom zlome. Vlastnosti MKP implementácie TSN sú tiež demonštrované pomocou numerických testov. Vylepšený algoritmus MKP (t.j., algoritmus založený na formulácii

MKP s vektorom vratnej sily, s realistickým útlmom a implementovanou TSN metódou) bol použitý v kombinácii s MKD v hybridnej MKD-MKP metóde. V hybridnej metóde je najdôležitejšia komunikácia medzi oboma metódami, ktorá prebieha v tzv. prechodovej zóne. Testy s algoritmicke minimálnou prechodovou zónou ukázali, že takáto prechodová zóna nie je vhodná pre praktické použitie. Preto bola navrhnutá nová, tzv. hladká prechodová zóna. Hybridná MKD-MKP metóda bola aplikovaná na výpočet seizmického pohybu v dôsledku dvoch hypotetických zemetrasení v okolí mesta Grenoble vo Francúzsku. V rámci dizertačnej práce bol vytvorený výpočtový program FESDv2, na 3D simuláciu spontánneho šírenia trhliny na zlome a šírenia seizmických vln, založený na MKP vo formulácii s vektorom vratnej sily. Z výpočtového programu FDFE3D, založeného na navrhovanej hybridnej MKD-MKP metóde boli v rámci dizertačnej práce vypracované časti založené na MKP a časti na komunikáciu medzi MKD a MKP v prechodovej zóne.

Kľúčové slová: metóda konečných prvkov, metóda konečných diferencií, hybridná MKD-MKP metóda, metóda napätia v rozdelených uzloch (TSN), spontánne šírenie trhliny, simulácia seizmického pohybu a zemetrasení

Abstract

Mgr. Martin Gális

Hybrid FD-FE method
for simulation of earthquakes and seismic motion

Comenius University Bratislava
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department of Astronomy, Physics of the Earth, and Meteorology

Supervisor: Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2007

179 pages

The PhD. thesis is devoted to the elaboration of the finite-element method (FEM) and presents a new hybrid method for efficient simulation of earthquakes and seismic motion. The hybrid method is based on a combination of the FEM and finite-difference method (FDM).

The standard formulation of the FEM with the global stiffness matrix is described in the introductory part. This formulation has a large memory (RAM) requirements.

The goals of the PhD thesis were: a) to develop a FEM algorithm based on the concept of restoring-force vector, which has significantly lower memory requirements compared to the standard formulation of FEM; b) to implement realistic attenuation into the FEM algorithm with the restoring-force vector; c) to implement the dynamic model of the earthquake source into the FEM algorithm; d) to develop and implement an algorithm of a hybrid FDM-FEM method for efficient simulation of earthquakes and seismic motion.

In the PhD. thesis we described the alternative formulation of FEM with the restoring force. We explained the implementation of the realistic attenuation based on rheology of the generalized Maxwell body (GMB-EK) into the FEM algorithm. The accuracy of our implementation is demonstrated by numerical tests. We implemented the traction-at-split-nodes method (TSN) for simulation of spontaneous rupture propagation into the FEM algorithm. The numerical properties of our TSN implementation are demonstrated by numerical tests. We used the improved FEM

algorithm (that is, the FEM algorithm based on the concept of restoring-force vector with realistic attenuation and TSN implementation) together with FDM to create a new hybrid FDM-FEM method. In the hybrid method FDM and FEM communicate with each other only in a transition zone. This communication is crucial for the hybrid method. Numerical tests showed that algorithmically minimal transition zone cannot be used for practical applications. Therefore we suggested a new, smooth transition zone. The numerical tests showed that smooth transition zone behaves well. We applied our hybrid FDM-FEM method to simulate the seismic motion in the Grenoble basin in France due to two hypothetical earthquakes, which may occur in the vicinity of Grenoble.

During the work on the PhD. thesis we developed the computational program FESDv2 for 3D simulation of spontaneous rupture propagation and seismic wave propagation based on the FEM formulation with the restoring-force vector. Computational program FDFE3D based on our hybrid FDM-FEM method was partly developed; namely the parts based on FEM and parts for communication between FDM and FEM were developed within the PhD. thesis.

Key words: finite-element method, finite-difference method, hybrid FDM-FEM method, traction-at-split-nodes method (TSN), spontaneous rupture propagation, simulation of seismic motion and earthquakes

Predhovor

Pri tektonických zemetraseniach dochádza často k veľkým materiálnym škodám a najmä k ľudským obetiam. V dôsledku viacerých faktorov, napríklad v dôsledku zvyšovania hustoty obyvateľstva, spôsobujú veľké škody a obeť na ľudských životoch čím ďalej tým menšie zemetrasenia. Jedným z cieľov seizmológie je predpovedať zemetrasenia, t.j., odpovedať na otázku kde, kedy a k ako veľkému zemetraseniu dôjde, s presnosťou postačujúcou napríklad na evakuáciu postihnutej oblasti. Ide o veľmi ambiciózny cieľ a v súčasnosti nie je jednoznačne zodpovedaná ani otázka, či taká predpoveď je teoreticky možná.

Seizmický pohyb, t.j., pohyb povrchu Zeme počas zemetrasenia, na danej lokalite ovplyvňujú tri faktory - procesy v ohnisku zemetrasenia (t.j., spontánne šírenie trhliny, počas ktorého dochádza k vyžarovaniu seizmických vĺn), šírenie seizmických vĺn od zdroja k lokalite a lokálne geologické podmienky. K tzv. lokálnym efektom dochádza vtedy, ak je vplyv lokálnych geologických podmienok dominantný. Často k nim dochádza napr. na povrchoch sedimentárnych bazénov alebo v dôsledku topografických štruktúr. Vplyvom lokálnych efektov tak môže aj relatívne malé zemetrasenie spôsobiť škody, ktoré by inak spôsobilo oveľa väčšie zemetrasenie. Preto bez ohľadu na to, či zemetrasenia predpovedať vieme alebo nie, je veľmi dôležité vedieť predpovedať seizmický pohyb. Predpovedať seizmický pohyb znamená odpovedať na otázku, k akému seizmickému pohybu dôjde na záujmovej lokalite v prípade zemetrasenia so zvolenými parametrami (napr. poloha a orientácia zlomovej plochy a veľkosť zemetrasenia).

Predpovedať seizmický pohyb na skutočných lokalitách väčšinou znamená riešiť veľmi komplikovaný problém, pre ktorý neexistujú analytické metódy. Analytické metódy nie sú použiteľné ani v prípade dynamického modelu seizmického zdroja, t.j., modelu so spontánne sa šíriacou trhlinou na seizmickom zlome. Ak chceme čo najpresnejšie vypočítať seizmický pohyb v realistických modeloch, musíme použiť numerické metódy. V seizmológii sa používa veľa rôznych numerických metód. Je to dané tým, že množina problémov je veľmi rôznorodá z hľadiska konfigurácie vlnového poľa a zložitosti prostredia, pričom žiadna z numerických metód nie je univerzálne najpresnejšia a najefektívnejšia pre všetky možné konfigurácie problému.

mov. Okrem samostatných metód (metóda konečných diferencií, metóda konečných prvkov a pod.), existujú aj tzv. hybridné metódy, ktoré vznikajú kombináciou dvoch alebo viacerých metód tak, aby sa využili výhody jednotlivých metód a potlačili ich nevýhody.

Medzi najčastejšie používané metódy patrí metóda konečných diferencií (MKD), ktorá je veľmi efektívna a aj robustná, t.j., aplikovateľná na zložité modely. Má však principiálne problémy so splnením okrajovej podmienky na voľnom povrchu neprechádzajúcom cez sieťové body (napr. na nerovinnom voľnom povrchu). Metóda konečných prvkov (MKP) je v porovnaní s metódou konečných diferencií menej efektívna pre rovnaký model, avšak nemá problémy so splnením okrajovej podmienky na nerovinnom voľnom povrchu. Kombináciou MKP a MKD, pričom MKP by boli použité iba v častiach výpočtového modelu, kde nie je možné použiť MKD, by vznikla veľmi efektívna metóda, ktorá je aplikovateľná na také modely, ktoré nie je možné riešiť MKD a riešenie MKP by bolo príliš náročné.

Cieľom predkladanej dizertačnej práce bolo a) vypracovať MKP algoritmus a výpočtový program založený na koncepte vratnej sily, ktorý má v porovnaní so štandardným algoritmom MKP podstatne menšie nároky na operačnú pamäť; b) implementovať realistický útlm do MKP algoritmu založeného na MKP schéme s vektorom vratnej sily; c) implementovať dynamický model seizmického zdroja do MKP algoritmu; d) navrhnúť a implementovať algoritmus novej hybridnej MKD-MKP metódy na efektívnu simuláciu zemetrasení a seizmického pohybu.

Obsah

Úvod	1
1 Metóda konečných prvkov v seizmológii - súčasný stav problematiky	3
1.1 Numerické modelovanie v seizmológii	3
1.2 Súčasné metódy numerického modelovania.	4
1.3 Štandardná formulácia metódy konečných prvkov (MKP) pre pohybovú rovnicu elastického kontinua	7
1.3.1 <i>Slabá forma pohybovej rovnice elastického kontinua</i>	<i>7</i>
1.3.2 <i>Bubnov-Galerkinova metóda vážených rezíduí</i>	<i>11</i>
1.3.3 <i>Tvarové funkcie</i>	<i>13</i>
1.3.4 <i>Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre jeden prvok</i>	<i>23</i>
1.3.5 <i>Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre celú výpočtovú oblasť.</i>	<i>30</i>
1.3.6 <i>Excitácia vlnového poľa - kinematický seizmický zdroj</i>	<i>34</i>
1.3.7 <i>Dirichletove okrajové podmienky a neodrážajúce hranice</i>	<i>38</i>
1.3.8 <i>Algoritmus štandardnej formulácie metódy konečných prvkov</i>	<i>40</i>
1.3.9 <i>Výpočtová efektívnosť štandardnej formulácie</i>	<i>46</i>
2 Ciele dizertačnej práce	49
3 Výsledky dizertačnej práce	51
3.1 Alternatívna formulácia MKP s vektorom vratnej sily	51
3.1.1 <i>Lokálny vektor vratnej sily.</i>	<i>51</i>
3.1.2 <i>Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre jeden prvok</i>	<i>53</i>
3.1.3 <i>Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre celú výpočtovú oblasť.</i>	<i>53</i>
3.1.4 <i>Stabilita a sietová disperzia</i>	<i>53</i>
3.1.5 <i>Výpočet vektora vratnej sily - redukovaná integrácia</i>	<i>54</i>

3.1.6	<i>Výpočtová schéma</i>	60
3.1.7	<i>Výpočtová efektívnosť formulácie MKP s vektorom vratnej sily</i>	61
3.1.8	<i>Výpočtový program FESD2</i>	61
3.2	Zahrnutie realistického útlmu v MKP	63
3.2.1	<i>Viskoelastické kontinuum</i>	63
3.2.2	<i>Vzťah napätia a deformácie v 3D viskoelastickom kontinuu</i> .	80
3.2.3	<i>Zahrnutie útlmu vo formulácii MKP s vektorom vratnej sily</i> .	82
3.2.4	<i>Zahrnutie útlmu v štandardnej formulácii MKP s globálnou maticou tuhosti</i>	84
3.2.5	<i>Numerické testy zahrnutia realistického útlmu</i>	86
3.3	Modelovanie šírenia trhliny na seizmoaktívnom zlome	88
3.3.1	<i>Jednoduchý dynamický model seizmického zdroja</i>	89
3.3.2	<i>Metóda napätia v rozdelených uzloch - TSN</i>	98
3.3.3	<i>Implementácia TSN metódy</i>	104
3.3.4	<i>Numerické testy</i>	106
3.4	Hybridná MKD-MKP metóda na simuláciu zemetrasení	114
3.4.1	<i>Konečno-diferenčná a MKP schéma</i>	114
3.4.2	<i>Výpočtová oblasť</i>	116
3.4.3	<i>MKD-MKP prechodová zóna</i>	117
3.4.4	<i>Testy numerického správania algoritmickej minimálnej prechodovej zóny a hladkej prechodovej zóny</i>	127
3.4.5	<i>Numerické simulácie dvoch hypotetických zemetrasení v okolí mesta Grenoble</i>	144
4	Záver	163
	Literatúra	165

Zoznam obrázkov

1.3.1	Oblasť $\bar{\Omega}$ tvorí vnútro oblasti Ω a hranica Γ	9
1.3.2	Príklady tvaru prvkov a rozloženia uzlov pre 2D problém.	16
1.3.3	Príklady tvaru prvkov a rozloženia uzlov pre 3D problém.	17
1.3.4	Transformácia z lokálnych súradníc do globálnych súradníc v 2D probléme.	19
1.3.5	Ukážka 2D transformácie z lokálnych do globálnych súradníc.	20
1.3.6	Transformácia z lokálnych súradníc do globálnych súradníc v 3D probléme.	21
1.3.7	K vysvetleniu transformácie okrajových podmienok z prvku Ω^e na základný prvok Ω^m	24
1.3.8	Číslovanie prvkov a lokálne a globálne číslovanie uzlov - 1D príklad.	31
1.3.9	K vysvetleniu vytvárania globálnych veličín. Symbolické znázornenie krokov vytvorenia globálnej matice hmotnosti.	32
1.3.10	Definícia parametrov určujúcich orientáciu zlomovej plochy a smeru sklzu.	36
1.3.11	Uzly MKP siete použité pri simulácii bodového kinematického zdroja umiestneného v uzle S_0	38
1.3.12	K spojitosti posunutia na kontakte dvoch prvkov - 2D príklady.	42
1.3.13	Tvar prvkov použitých pri analýze sieťovej disperzie, Bystrický et al. (1999).	43
1.3.14	Disperzné krivky pre pravidelnú ($\delta = 0^\circ$) a deformovanú ($\delta = 30^\circ$) sieť prvkov.	43
3.1.1	Poloha prijímačov pre test s bodovým kinematickým dislokačným zdrojom.	56
3.1.2	Časový záznam U-zložky posunutia v prijímačoch podľa Obr. 3.1.1.	57
3.1.3	Časový záznam U-zložky posunutia na profile prijímačov od prijímača #16.	58
3.1.4	K vysvetleniu vzniku falošných módov s nulovou energiou.	59
3.2.1	Hookove teleso (pružina).	64
3.2.2	Vzťah napätia a deformácie pre Hookove teleso.	64

3.2.3	Stokesove teleso (tlmič).	64
3.2.4	Vzťah napätia a rýchlosti deformácie pre Stokesove teleso.	64
3.2.5	Reologické modely viskoelastického kontinua.	67
3.2.6	Útlm v najjednoduchších reologických modeloch viskoelastického kontinua.	71
3.2.7	Generalizované Maxwellove teleso v definícii Emmerich a Korn (1987) - GMB-EK.	73
3.2.8	Generalizované Zenerove teleso.	75
3.2.9	Závislosť útlmu v zovšeobecnenom Maxwellovom telese GMB-EK a zovšeobecnenom Zenerovom telese od bezrozmernej frekvencie ω'	76
3.2.10	Konfigurácia numerického testu na overenie implementácie realistického útlmu vo výpočtovom programe FESD2.	86
3.2.11	Porovnanie MKP riešení získaných použitím 8GK a redukovanej 8LK integrácie s referenčným DWN riešením (Bouchon, 1981; Coutant, 1989).	87
3.3.1	Zlomová plocha a normálový vektor \vec{n}	90
3.3.2	Coulombov zákon trenia.	92
3.3.3	LSW zákon trenia. Šedá plocha indikuje veľkosť energia E^f potrebnej na vytvorenie trhliny v danom bode.	93
3.3.4	Fyzikálne konzistentný zákon trenia navrhnutý Ohnakom a Yamashitom (Ohnaka a Yamashita, 1989).	95
3.3.5	TW zákon trenia.	96
3.3.6	Polpriestory H^- a H^+ , časti $p.n.^-$ a $p.n.^+$ rozdeleného uzla a normálový vektor \vec{n}	98
3.3.7	Časové histórie tangenciálneho napätia (vľavo) a tangenciálnej zložky rýchlosti sklzu (vpravo).	107
3.3.8	Vývoj U-zložky rýchlosti sklzu na ploche zlomu pri použití 8GK a 8LK a v referenčnom riešení.	107
3.3.9	Geometrická konfigurácia Testu č. 3 v rámci SCEC Benchmark iniciatívy (Harris et al., 2004).	109
3.3.10	Grafické znázornenie časov šírenia trhliny na zlomovej ploche.	111
3.3.11	Grafické porovnanie priemerného RMS misfitu času šírenia trhliny pre rôzne metódy simulácie spontánneho šírenia trhliny.	113

3.4.1	Ilustrácia pokrytia výpočtovej oblasti našou hybridnou MKD-MKP metódou.	117
3.4.2	Ilustrácia algoritmicky minimálnej prechodovej zóny pre MKD-MKP komunikáciu v každej časovej hladine.	119
3.4.3	Priestorové konfigurácie, v ktorých je nutná interpolácia.	121
3.4.4	Ilustrácia prechodovej zóny, ktorú používame v našej hybridnej MKD-MKP metóde.	125
3.4.5	Konfigurácie testov numerického správania prechodovej zóny - neohraničené homogénne kontinuum.	128
3.4.6	Konfigurácie testov numerického správania prechodovej zóny - homogénny polpriestor.	129
3.4.7	Pre každú konfiguráciu na Obr. 3.4.5 a Obr. 3.4.6 sme vykonali numerické testy pre štyri rôzne prechodové zóny.	130
3.4.8	Gaborov signál použitý ako časová funkcia zdroja v numerických testoch správania prechodovej zóny.	131
3.4.9	Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny pre konfiguráciu US-12.	132
3.4.10	Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny pre konfiguráciu US-18.	133
3.4.11	Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny pre konfiguráciu FS-12.	134
3.4.12	Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny pre konfiguráciu FS-18.	135
3.4.13	Konfigurácia testu numerického správania prechodovej zóny v prítomnosti materiáloveho rozhrania.	138
3.4.14	Gaborov signál použitý ako časová funkcia zdroja v numerických testoch správania prechodovej zóny s materiálovým rozhraním.	139
3.4.15	Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny pre konfiguráciu s materiálovým rozhraním prechádzajúcim cez prechodovú zónu.	140
3.4.16	Znázornenie polohy zlomovej plochy a MKD-MKP prechodovej zóny.	142
3.4.17	Poloha prijímačov na zlomovej ploche a izočiary čela trhliny.	142
3.4.18	Časové priebehy rýchlosti sklzu v simuláciách s dynamicky sa šíriacou trhlinou.	143

3.4.19	Pohľad na zlomovú plochu a konečné rozloženie sklzu na zlomovej ploche.	145
3.4.20	Materiálové parametre výpočtového modelu sedimentárneho bazénu Grenoble.	146
3.4.21	Poloha sedimentárneho bazénu Grenoble a zlomovej plochy pre prípad zemetrasenia na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble. . .	148
3.4.22	Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad hypotetického zemetrasenia na horizontálnom zlome pod bazénom Grenoble - 1.časť.	149
3.4.23	Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad hypotetického zemetrasenia na horizontálnom zlome pod bazénom Grenoble - 2.časť.	150
3.4.24	Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad hypotetického zemetrasenia na horizontálnom zlome pod bazénom Grenoble - 3.časť.	151
3.4.25	Poloha sedimentárneho bazénu Grenoble a zlomovej plochy v prípade zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble.	152
3.4.26	Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad hypotetického zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 1.časť.	153
3.4.27	Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad hypotetického zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 2.časť.	154
3.4.28	Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad hypotetického zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 3.časť.	155
3.4.29	Ariasova intenzita (AI), špičkové horizontálne zrýchlenie (PHA) a kumulatívna absolútna rýchlosť (CAV) pre obe simulované hypotetické zemetrasenia.	156
3.4.30	Časová funkcia zdroja použitá v numerických simuláciách pre porovnanie dynamického a bodového kinematického modelu seizmického zdroja.	158
3.4.31	Dve uvažované polohy hypocentra v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 'ľavá' a 'pravá' poloha.	159

- 3.4.32 Rozdiely v Ariasovej intenzite a) v dôsledku rôznej polohy dynamických zdrojov, b) v dôsledku rôznej polohy ekvivalentných bodových zdrojov, c) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'ľavej' polohe, d) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'pravej' polohe. 160
- 3.4.33 Rozdiely v špičkovom horizontálnom zrýchlení a) v dôsledku rôznej polohy dynamických zdrojov, b) v dôsledku rôznej polohy ekvivalentných bodových zdrojov, c) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'ľavej' polohe, d) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'pravej' polohe. 160
- 3.4.34 Rozdiely v kumulatívnej absolútnej rýchlosti a) v dôsledku rôznej polohy dynamických zdrojov, b) v dôsledku rôznej polohy ekvivalentných bodových zdrojov, c) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'ľavej' polohe, d) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'pravej' polohe. 161
- 3.4.35 Rozdiely v Ariasovej intenzite, špičkovom horizontálnom zrýchlení a kumulatívnej absolútnej rýchlosti medzi dynamickým a ekvivalentným bodovým zdrojom s hypocentrom na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble. 162

Zoznam tabuliek

1.3.1	Príklady koeficientov neodrážajúcich hraníc.	39
3.2.1	Tabuľka pravidiel pre spájanie HB a SB. Prevzaté a upravené z práce Moczó et al. (2007b).	66
3.3.1	Materiálové parametre a parametre zákona trenia pre konfiguráciu na Obr. 3.3.9.	110
3.3.2	Veľkosti priestorového kroku h a časového kroku Δt použitých pri numerických simuláciách.	110
3.4.1	Parametre bodového kinematického modelu seizmického zdroja a parametre časovej funkcie zdroja použitých v numerických testoch pre konfigurácie US-12, US-18, FS-12 a FS-18.	131
3.4.2	Parametre bodového kinematického modelu seizmického zdroja a parametre časovej funkcie zdroja použitých v numerických testoch s materiálovým rozhraním.	139
3.4.3	Materiálové a výpočtové parametre použité v numerických testoch s dynamickým šírením trhliny.	141
3.4.4	Parametre LSW zákona trenia použité v numerických testoch s dynamickým šírením trhliny.	141

Úvod

Seizmický pohyb je pohyb povrchu Zeme na danej lokalite počas zemetrasenia. Ak chceme určiť seizmický pohyb počas možných budúcich zemetrasení, musíme do úvah/výpočtov, čo najpresnejšie zahrnúť procesy v ohnisku zemetrasenia (t.j., spontánne šírenie trhliny, počas ktorého dochádza k vyžarovaniu seizmických vln), šírenie seizmických vln od zdroja k lokalite a lokálne geologické podmienky.

Spontánne šírenie trhliny na seizmickom zlome je proces, ktorý nie je (v súčasnosti) riešiteľný analyticky ani pre najjednoduchšie konfigurácie. Rovnako ani problém šírenia seizmických vln v 3D nehomogénnych štruktúrach. Analytické metódy sú použiteľné iba pri tých najjednoduchších konfiguráciách prostredia. Preto, ak chceme zohľadniť všetky tri faktory, ktoré ovplyvňujú výsledný seizmický pohyb na lokalite, jedinou možnosťou je použitie numerických metód.

V súčasnosti sa v seizmológii používa viacero rôznych numerických metód (napr. metóda konečných diferencií, metóda konečných prvkov, metóda spektrálnych prvkov, ADER-DG metóda, "discrete particle scheme", metóda konečných objemov, metóda hraničných integrálov, metóda diskretných vlnových čísel, lúčová metóda). Jednotlivé metódy sa navzájom líšia presnosťou, efektívnosťou a v neposlednom rade aj robustnosťou, t.j., aplikovateľnosťou na zložité modely. Žiadna z doteraz používaných metód nie je univerzálne najpresnejšia a najefektívnejšia pre všetky možné konfigurácie prostredia a vlnového poľa. Preto sa často dve alebo viac metód kombinuje tak, aby sa využili výhody jednotlivých metód a potlačili ich nevýhody. Tak vznikajú tzv. hybridné metódy.

Dizertačná práca je venovaná metóde konečných prvkov a hybridnej MKD-MKP metóde simulácie zemetrasení a seizmického pohybu, založenej na kombinácii metódy konečných diferencií (MKD) a metódy konečných prvkov (MKP). Kapitola 1 obsahuje stručný prehľad numerického modelovania v seizmológii a súčasných numerických metód používaných v seizmológii. Vysvetlená je štandardná formulácia metódy konečných prvkov s globálnou maticou tuhosti. V Kapitole 2 sú formulované ciele dizertačnej práce. Kapitola 3 je venovaná výsledkom dizertačnej práce. V podkapitole 3.1 je prezentovaná alternatívna formulácia MKP s vektorom vrat-

nej sily, algoritmus a výpočtový program FESDv2 na 3D simuláciu zemetrasení a seizmického pohybu v jazyku FORTRAN 90/95. Alternatívna formulácia MKP s vektorom vratnej sily má značne redukované nároky na operačnú pamäť počítača. V podkapitole 3.2 je prezentované zahrnutie realistického útlmu založeného na reológii zovšeobecneného Maxwellovho telesa GMB-EK vo formulácii MKP s vektorom vratnej sily i v štandardnej formulácii s globálnou maticou tuhosti. Prezentované sú aj numerické testy zahrnutia realistického útlmu vo výpočtovom programe FESDv2. Podkapitola 3.3 je venovaná modelovaniu spontánneho šírenia trhliny na zlome metódou napätí v rozdelených uzloch (TSN). Prezentovaná je implementácia metódy TSN do algoritmu MKP s vektorom vratnej sily ako aj numerické testy. Podkapitola 3.4 je venovaná hybridnej MKD-MKP metóde simulácie zemetrasení a seizmického pohybu. Ťažiskom podkapitoly je MKD-MKP prechodová zóna. Prezentovaná je algoritmicky minimálna prechodová zóna i nami navrhnutá hladká prechodová zóna. Výrazne lepšie vlastnosti hladkej prechodovej zóny sú demonštrované podrobnými numerickými testami správania MKD-MKP prechodovej zóny. V podkapitole je prezentovaná aj ukážka aplikácie našej hybridnej MKD-MKP metódy na simuláciu dvoch hypotetických zemetrasení v blízkosti mesta Grenoble vo Francúzsku. V rámci dizertačnej práce bol vyvinutý výpočtový program FESDv2 a ďalšie pomocné programy potrebné na prípravu vstupov a na spracovanie výsledkov výpočtov realizovaných programom FESDv2. Na základe algoritmu MKD-MKP hybridnej metódy bol vyvinutý výpočtový program FDFE3D (v rámci dizertačnej práce boli naprogramované časti založené na MKP a časti na komunikáciu medzi MKD a MKP).

1 Metóda konečných prvkov v seizmológii - súčasný stav problematiky

1.1 Numerické modelovanie v seizmológii

Význam numerického modelovania vo vede rastie. Je to dôsledok viacerých aspektov. Dôležité problémy sú často príliš komplikované a preto nie je možné na ich riešenie použiť analytické metódy. Druhým faktorom je nemožnosť priamo pozorovať nejaký fyzikálny jav, alebo priamo merať nejakú fyzikálnu veličinu. Dôležitým aspektom je aj výrazný rozvoj výpočtovej techniky.

K zemetraseniam dochádza v hĺbkach niekoľko kilometrov až niekoľko sto kilometrov. Jednou z najdôležitejších veličín z hľadiska vzniku zemetrasenia je napätie. V súčasnosti však neexistuje technológia, ktorá by umožňovala zmerať napätie na ľubovoľnom seizmickom zlome. Podobne neexistujú ani metódy a technológie na meranie, prípadne určenie ďalších dôležitých fyzikálnych veličín na zlome, napr. koeficientov trenia alebo teploty. Preto je numerické modelovanie jednou z hlavných metód používaných pri skúmaní fyzikálnych procesov na seizmickom zlome.

Iným dôležitým problémom v seizmológii je šírenie seizmických vĺn a seizmický pohyb. Keďže seizmický pohyb na danej lokalite je ovplyvnený tromi faktormi (seizmickým zdrojom, prostredím medzi seizmickým zdrojom a lokalitou a lokálnymi geologickými podmienkami na lokalite) a v mnohých prípadoch je vplyv lokálnych podmienok dominantný, je nutné pri výpočte seizmického pohybu na danej lokalite adekvátne zohľadniť aj lokálne podmienky. Pretože v praxi ide často o komplikované 3D nehomogénne štruktúry, nie je možné použiť analytické metódy.

1.2 Súčasné metódy numerického modelovania

V súčasnosti sa na výpočet seizmického pohybu a na simuláciu spontánneho šírenia trhliny na seizmickom zlome používajú rôzne numerické metódy. Je to dané tým, že rôzne numerické metódy majú rôzne vlastnosti a zatiaľ žiadna z doteraz používaných metód nie je univerzálne najpresnejšia a najefektívnejšia pre všetky možné kombinácie seizmického zdroja a konfigurácie prostredia.

Numerické metódy môžeme rozdeliť na hraničné, doménové a hybridné. Hraničné metódy (napr., metóda diskretných vlnových čísel, Bouchon, 1981) sú vo všeobecnosti veľmi presné, avšak aplikovateľné len na veľmi jednoduché modely. Medzi doménové metódy patria napríklad metóda konečných prvkov (napr., Serón et al., 1989; Bielak et al., 2003; Yoshimura et al., 2003), metóda konečných diferencií (napr., Moczo et al., 2004b, 2007a,b), metóda spektrálnych prvkov (napr., Komatitsch a Tromp, 1999; Chaljub et al., 2007) a ADER-DG metóda (napr., Käser a Dumbser, 2006; Dumbser a Käser, 2006; Käser et al., 2007; De la Puente et al., 2007; Dumbser et al., 2007). Vo všeobecnosti sú doménové metódy menej presné ako hraničné metódy, avšak sú robustnejšie, teda prakticky aplikovateľné aj na zložité, inými slovami realistické, modely. Kombináciou dvoch alebo viacerých metód tak, aby sa eliminovali nevýhody a využili výhody jednotlivých metód, vznikajú tzv. hybridné metódy. Niekedy môže byť vhodné použiť jednu metódu na vyriešenie priestorovej závislosti a inú metódu na vyriešenie časovej závislosti (napr., Alexeev a Mikhailenko, 1980). V iných prípadoch môže byť vhodné použiť rôzne metódy v rôznych častiach výpočtovej oblasti (napr., Ohtsuki a Harumi, 1983; Shtivelman, 1984, 1985; Van den Berg, 1984; Kummer et al., 1987; Stead a Helmberger, 1988; Kawase, 1988; Gaffet a Bouchon, 1989; Emmerich, 1989, 1992; Fäh, 1992; Fäh et al., 1993; Rovelli et al., 1994; Bouchon a Coutant, 1994; Robertsson, 1996; Zahradník a Moczo, 1996; Moczo et al., 1997; Lecomte, 2004; Ma et al., 2004).

Metóda konečných prvkov je veľmi robustná numerická metóda. V MKP nie sú problémy so splnením okrajovej podmienky na nerovinnom voľnom povrchu, je aplikovateľná na neštruktúrované siete a umožňuje kombinovať prvky rôzneho tvaru a rádu aproximácie. Kombinácia prvkov rôzneho tvaru a rádu aproximácie umožňuje efektívnejšie pokryť výpočtovú oblasť. V miestach, kde je vyžadovaná vyššia pres-

nosť, je možné použiť menšie prvky alebo prvky vyššieho rádu, rôzny tvar prvkov umožňuje presnejšie pokryť výpočtovú oblasť zložitého tvaru. Práve kvôli svojej flexibilitě je MKP najčastejšie používanou metódou v technických aplikáciách.

V seizmológii je MKP považovaná za jednu z alternatívnych numerických metód na výpočet spontánneho šírenia trhliny a seizmických vln. MKP na riešenie problémov šírenia seizmických vln aplikovali napr. Lysmer a Drake (1971, 1972); Smith (1974, 1975); Day (1977); Serón et al. (1989); Toshinawa a Ohmachi (1992); Bao (1998); Bao et al. (1998); Aagaard et al. (2001); Bielak et al. (2003); Yoshimura et al. (2003); Ma a Liu (2006). MKP na skúmanie spontánneho šírenia trhliny na seizmic-
kom zlome použili napr. Archuleta (1976); Day (1977); Andrews (1999); Oglesby (1999); Oglesby et al. (1998, 2000). MKP je použitá aj v súčasnosti v najkomplexnejšom paralelnom výpočtovom nástroji Hercules (Tu et al., 2006), ktorý umožňuje paralelizáciu od vytvorenia modelu až po spracovanie výsledkov.

Vo všeobecnosti je MKP v porovnaní napr. s metódou konečných diferencií pre rovnaký model menej efektívna. Avšak metóda konečných diferencií má principiálne problémy so splnením okrajovej podmienky na voľnom povrchu neprechádzajúcim cez sieťové body (napr. na nerovinnom voľnom povrchu). Preto boli jednou z aplikácií MKP v seizmológii aj hybridné metódy založené na MKP (Moczo et al., 1997; Ma et al., 2004).

Moczo et al. (1997) navrhli dvojkrovovú hybridnú metódu pre 2D P-SV problém. Táto metóda je založená na kombinácii troch metód - metódy diskretných vlnových čísel, metódy konečných diferencií a metódy konečných prvkov. V prvom kroku je metóda diskretných vlnových čísel použitá na výpočet vlnového poľa v 1D prostredí, t.j., bez topografie a bez nehomogénnej pripovrchovej štruktúry. Metóda diskretných vlnových čísel je veľmi efektívna a presná pre jednoduché, 1D nehomogénne modely. V druhom kroku je na výpočet vlnového poľa v nehomogénnej pripovrchovej štruktúre a pozdĺž nerovinného voľného povrchu použitý hybridný MKD-MKP algoritmus založený na kombinácii MKD 2. rádu vo formulácii v posunutí na konvenčnej sieti a MKP s prvkami tvaru štvorca (presnosť 2. rádu) a trojuholníka (presnosť 1. rádu). MKP je použitá iba v tých častiach výpočtového modelu, kde nie je možné použiť MKD (napr. v okolí nerovinného voľného povrchu).

Ma et al. (2004) navrhli 2D hybridnú metódu pre P-SV problém založenú na kombinácii MKD 4. rádu vo formulácii v rýchlosti posunutia a napätí na striedavo usporiadanej sieti a MKP s prvkami tvaru štvorca (presnosť 2. rádu) a trojuholníka (presnosť 1. rádu). Aj v tomto prípade bola MKP použitá iba v tých častiach výpočtového modelu, kde nebolo možné použiť MKD.

1.3 Štandardná formulácia metódy konečných prvkov (MKP) pre pohybovú rovnicu elastického kontinua

Pri riešení daného problému, definovaného diferenciálnou rovnicou a počiatocnými a okrajovými podmienkami, metódou konečných prvkov možno v mnohých prípadoch použiť alternatívne prístupy. Je to dané tým, že metóda konečných prvkov v jej súčasnej podobe vznikla spojením viacerých metód, ktoré sa vyvíjali nezávislo (Zienkiewicz a Taylor, 1989). Jednu vetvu predstavuje intuitívny prístup. Najmä v komunite inžinierov bolo bežné, že zložitá oblasť (model súčasti alebo štruktúry) bola zložená z malých častí, prvkov, ktorých správanie bolo známe (napr. existovalo analytické riešenie). Podľa Zienkiewicza a Taylora (Zienkiewicz a Taylor, 1989) práve z tejto analógie vznikol aj názov "konečný prvok", ktorý ako prvý pravdepodobne použil Clough (1974). Druhú vetvu predstavujú prístupy založené na testovacích funkciách, t.j. metódy vážených priemerov a variačné metódy. Tretiu vetvu predstavujú metódy konečných diferencií a z nich odvodené tzv. variačné konečné diferencie (Varga, 1974). Až zdokonaľovanie jednotlivých metód viedlo k jednotnému pohľadu a matematickému opisu metód a k súčasnej podobe metódy konečných prvkov.

V prípade aplikácie metódy konečných prvkov (MKP) na riešenie elastodynamických problémov by sme teda mohli použiť fyzikálne intuitívny prístup založený na tzv. princípe virtuálnych prác (napr. Zienkiewicz a Taylor, 1989), mohli by sme minimalizovať funkcionál kinetickej a potenciálnej energie (napr. Zienkiewicz a Taylor, 1989), alebo by sme mohli použiť Galerkinovu metódu vážených rezíduí (napr. Hughes, 2000). Podrobne sa budeme venovať Galerkinovej metóde vážených rezíduí.

1.3.1 Slabá forma pohybovej rovnice elastického kontinua

Silná (diferenciálna) forma pohybovej rovnice kontinua

Pohybová rovnica pre neohraničené kontinuum má tvar

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i, \quad (1.3.1)$$

kde ρ je hustota kontinua, u_i zložky vektora posunutia, f_i zložky hustoty pôsobiacej sily a σ_{ij} sú zložky tenzora napätia. Tensor napätia je pre izotropné elastické kontinuum určený Hookovým zákonom, ktorý môžeme zapísať v tvare

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.3.2)$$

kde λ a μ sú Laméove elastické koeficienty a

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases} \quad (1.3.3)$$

je Kroneckerov delta symbol.

V rovniciach (1.3.1) a (1.3.2) sme použili sumačnú konvenciu pre opakujúce sa indexy a indexy za čiarkou označujú deriváciu podľa priestorovej súradnice, napríklad

$$\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.3.4)$$

Toto značenie budeme naďalej používať. Ak nebude uvedené inak, indexy i a j budú indexmi priestorových súradníc, a preto

$$i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.3.5)$$

Riešme pohybovú rovnicu (1.3.1) s Hookovým zákonom (1.3.2) v oblasti $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, kde Ω je vnútro oblasti a Γ jej hranicou (Obr. 1.3.1). Hranicu Γ môžeme rozdeliť na dve časti Γ_D a Γ_N tak, aby boli splnené podmienky $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ a $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. V bodoch na ploche Γ_D budeme predpokladať predpísaný vektor posunutia, t.j. Dirichletovu okrajovú podmienku,

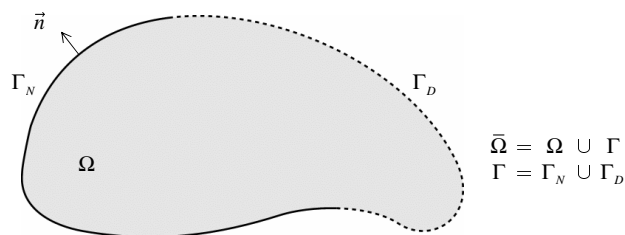
$$u_i = g_i \text{ na } \Gamma_D. \quad (1.3.6)$$

V bodoch na ploche Γ_N budeme predpokladať predpísaný vektor napätia, t.j. Neumannovu okrajovú podmienku,

$$\sigma_{ij} n_j = h_i \text{ na } \Gamma_N, \quad (1.3.7)$$

kde n_j je zložka vonkajšej normály k hranici Γ_N .

Pohybová rovnica (1.3.1), Hookov zákon (1.3.2) a okrajové podmienky (1.3.6) a (1.3.7) tvoria tzv. silnú (diferenciálnu) formu pohybovej rovnice elastického izotropného kontinua pre oblasť $\bar{\Omega}$.



Obr. 1.3.1: Oblasť $\bar{\Omega}$ tvorí vnútro oblasti Ω a hranica Γ . Na časti Γ_D hranice Γ je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka a na časti Γ_N Neumannova okrajová podmienka. \vec{n} je vonkajší normálový vektor k hranici Γ_N .

Slabá (integrálna) forma pohybovej rovnice

V odvodení slabej formy pohybovej rovnice budeme sledovať postup opísaný v mnohých knihách o metóde konečných prvkov, napríklad Hughes (2000), Belytschko et al. (2000), Zienkiewicz a Taylor (1989), Ottosen a Petersson (1992), Reddy (2006).

Uvažujme váhovou funkciu w . Funkcia w je ľubovoľná funkcia, pre ktorú platí

$$\int_{\Omega} (w_{,j})^2 d\Omega < \infty \quad (1.3.8)$$

a

$$w = 0 \text{ na } \Gamma_D. \quad (1.3.9)$$

Funkcií w je teda nekonečne mnoho. Platnosť pohybovej rovnice (1.3.1) a okrajových podmienok (1.3.6) a (1.3.7) nezmeníme, ak ich vynásobíme váhovou funkciou w a integrujeme v oblasti Ω , resp. na hranici Γ :

$$\int_{\Omega} w (\rho \ddot{u}_i - f_i) d\Omega - \int_{\Omega} w \sigma_{ij,j} d\Omega = 0, \quad (1.3.10)$$

$$\int_{\Gamma_D} w (u_i - g_i) d\Gamma = 0, \quad (1.3.11)$$

$$\int_{\Gamma_N} w (\sigma_{ij} n_j - h_i) d\Gamma = 0. \quad (1.3.12)$$

Rovnica (1.3.11) je automaticky splnená kvôli podmienke (1.3.9). Sčítaním rovníc (1.3.10) a (1.3.12) dostaneme

$$\int_{\Omega} w (\rho \ddot{u}_i - f_i) d\Omega - \int_{\Omega} w \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Gamma_N} w (\sigma_{ij} n_j - h_i) d\Gamma = 0. \quad (1.3.13)$$

Upravme druhý člen na ľavej strane. Platí

$$(w \sigma_{ij})_{,j} = w_{,j} \sigma_{ij} + w \sigma_{ij,j} . \quad (1.3.14)$$

Integráciou rovnice (1.3.14) v oblasti Ω dostaneme

$$\int_{\Omega} (w \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} w_{,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} w \sigma_{ij,j} d\Omega . \quad (1.3.15)$$

Využitím Gaussovej vety prevedieme integrál na ľavej strane na plošný integrál

$$\int_{\Omega} (w \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} w \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_N} w \sigma_{ij} n_j d\Gamma_N , \quad (1.3.16)$$

kde sme využili vlastnosť (1.3.9) váhových funkcií w . Použitím vzťahov (1.3.15) a (1.3.16) vyjadríme druhý člen ľavej strany rovnice (1.3.13)

$$\int_{\Omega} w \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} w \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} w_{,j} \sigma_{ij} d\Omega . \quad (1.3.17)$$

V rovnici (1.3.10) musí mať riešenie, t.j., funkcia u_i , integrovateľné druhé derivácie podľa priestorových súradníc a váhové funkcie w musia byť integrovateľné. Úpravou sme presunuli nároky z riešenia, ktoré musí mať integrovateľné prvé derivácie podľa priestorových súradníc, na váhové funkcie, ktoré musia mať integrovateľné prvé derivácie podľa priestorových súradníc.¹ Dosadením výrazu (1.3.17) do rovnice (1.3.13) dostaneme

$$\int_{\Omega} w (\rho \ddot{u}_i - f_i) d\Omega + \int_{\Omega} w_{,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_N} w h_i d\Gamma = 0 . \quad (1.3.18)$$

Táto rovnica spolu s okrajovou podmienkou (1.3.6) sa nazýva slabá forma pohybovej rovnice. "Slabá" kvôli zníženým nárokom na vlastnosti riešenia u_i v porovnaní so silnou formou pohybovej rovnice (1.3.1). Rovnica (1.3.18) musí byť splnená pre všetky prípustné funkcie w , inými slovami, rovnica (1.3.18) je sústavou nekonečne mnoho rovníc pre každú zložku posunutia u_i .

Ekvivalencia slabej a silnej formy pohybovej rovnice

Predpokladajme, že u_i^{SF} je riešením silnej formy pohybovej rovnice kontinua (1.3.1) s okrajovými podmienkami (1.3.6) a (1.3.7). Keďže slabú formu pohybovej rovnice, rovnicu (1.3.18), sme odvodili zo silnej formy pohybovej rovnice, je zrejmé, že u_i^{SF} je riešením aj slabej formy (1.3.18).

¹ Požiadavky na integrovateľnosť váhových funkcií, vzťah (1.3.8), zohľadňovali už túto úpravu.

Predpokladajme teraz, že u_i^{WF} je riešením slabej formy. Po dosadení riešenia u_i^{WF} do rovnice (1.3.18) a po použití vzťahu (1.3.17) dostaneme

$$\int_{\Omega} w (\rho \ddot{u}_i^{WF} - \sigma_{ij,j} - f_i) d\Omega + \int_{\Gamma_N} w (\sigma_{ij} n_j - h_i) d\Gamma = 0. \quad (1.3.19)$$

Aby sme ukázali, že riešenie slabej formy u_i^{WF} je riešením aj silnej formy, musíme dokázať, že rovnica (1.3.19) je splnená vtedy, a len vtedy, ak

$$\rho \ddot{u}_i^{WF} - \sigma_{ij,j} - f_i = 0 \quad \text{v } \Omega \quad (1.3.20)$$

a súčasne

$$\sigma_{ij} n_j - h_i = 0 \quad \text{na } \Gamma_N. \quad (1.3.21)$$

Pretože u_i^{WF} je riešením slabej formy, rovnice (1.3.18) a (1.3.19) sú splnené pre všetky prípustné funkcie w , teda aj pre

$$w = \phi \cdot (\rho \ddot{u}_i^{WF} - \sigma_{ij,j} - f_i), \quad (1.3.22)$$

kde $\phi > 0$ v oblasti Ω a $\phi = 0$ na hranici Γ . Dosadením (1.3.22) do (1.3.19) dostaneme

$$\int_{\Omega} \phi \cdot (\rho \ddot{u}_i^{WF} - \sigma_{ij,j} - f_i)^2 d\Omega = 0. \quad (1.3.23)$$

Táto rovnica je splnená len vtedy, ak je splnená rovnica (1.3.20). Analogicky môžeme zvoliť váhové funkcie v tvare

$$w = \psi \cdot (\sigma_{ij} n_j - h_i), \quad (1.3.24)$$

kde $\psi = 0$ v oblasti Ω a $\psi > 0$ na hranici Γ_N . Dosadením (1.3.24) do (1.3.19) dostaneme

$$\int_{\Gamma_N} \psi \cdot (\sigma_{ij} n_j - h_i)^2 d\Gamma = 0. \quad (1.3.25)$$

Táto rovnica je splnená len vtedy, ak je splnená rovnica (1.3.21).

1.3.2 Bubnov-Galerkinova metóda vážených rezíduí

Riešenie slabej formy (1.3.18) môžeme uvažovať v tvare nekonečného radu

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} s_k, \quad (1.3.26)$$

kde α_{ik} sú koeficienty rozvoja u_i do radu tvarových funkcií s_k . Tvarové funkcie musia v oblasti Ω umožniť splniť okrajovú podmienku (1.3.6).

Pripomeňme, že riešenie slabej formy (1.3.18) je presným riešením vtedy, ak je rovnica (1.3.18) splnená pre všetky prípustné funkcie w , ktorých je nekonečne mnoho. Uvažujme konečnú množinu n váhových funkcií. Pre niektoré špecifické problémy je teoreticky možné použiť inú množinu váhových funkcií pre jednotlivé zložky. Ďalej sa však budeme venovať iba prípadu, keď pre všetky zložky použijeme rovnakú množinu váhových funkcií:

$$w_k \in \{w_1, w_2, \dots, w_n\}. \quad (1.3.27)$$

Analogicky môžeme uvažovať konečnú množinu n tvarových funkcií,

$$s_k \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\}. \quad (1.3.28)$$

Ak nebude uvedené inak, index k budeme používať pre označenie váhových alebo tvarových funkcií, a preto

$$k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3.29)$$

Voľba množiny váhových funkcií w_k je ľubovoľná, významne však ovplyvňuje vlastnosti a presnosť získanej metódy, pretože riešením slabej formy, t.j., rovnice (1.3.18), pre konečnú množinu váhových funkcií w_k alebo tvarových funkcií s_k , môžeme vo všeobecnosti nájsť iba približné riešenie. Podľa voľby váhových funkcií môžeme metódy rozdeliť na:

- Bodové kolokačné metódy

$$w_k = \delta_k, \text{ kde } \delta_k = 1 \text{ pre } x_i = x_{ik} \text{ a } \delta_{ik} = 0 \text{ inde,}$$

- Doménové kolokačné metódy

$$w_k = 1 \text{ v } \Omega_k \text{ a } w_k = 0 \text{ inde,}$$

- Bubnov-Galerkinove metódy

$$w_k = s_k, \text{ t.j., váhové a tvarové funkcie sú totožné,}$$

- Petrov-Galerkinove metódy

$$w_k \neq s_k, \text{ t.j., váhové a tvarové funkcie sú rôzne, pričom však nejde o bodové alebo doménové kolokačné metódy.}$$

Ďalej sa budeme venovať iba Bubnov-Galerkinovmu prístupu. Pripomeňme, že váhové funkcie, a teda aj tvarové funkcie, sú nulové na Dirichletovej hranici Γ_D . Riešenie v tvare rozvoja do tvarových funkcií (1.3.28), t.j.,

$$u_i \doteq \tilde{u}_i = \alpha_{ik} s_k, \quad (1.3.30)$$

je na Dirichletovej hranici Γ_D rovné nule (keďže váhové a tvarové funkcie sú totožné, tvarové funkcie, s_k , spĺňajú podmienky pre váhové funkcie, w_k) a teda nespĺňa Dirichletovu okrajovú podmienku (1.3.6). Riešenie budeme preto hľadať v tvare

$$u_i \doteq \tilde{u}_i = \alpha_{ik} s_k + \tilde{g}_i, \quad (1.3.31)$$

kde

$$\tilde{g}_i = \begin{cases} g_i & \text{na } \Gamma_D, \\ 0 & \text{mimo } \Gamma_D. \end{cases} \quad (1.3.32)$$

Dosadením riešenia (1.3.31) do slabej formy (1.3.18) a použitím $w_k = s_k$ dostaneme sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc pre koeficienty α_{ik} :

$$\int_{\Omega} s_k (\rho \ddot{\alpha}_{il} s_l + \ddot{g}_i - f_i) \, d\Omega + \int_{\Omega} s_{k,j} \sigma_{ij} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} s_k h_i \, d\Gamma = 0; \\ k, l \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3.33)$$

Sústava $3n$ diferenciálnych rovníc (1.3.33) sa nazýva Galerkinova alebo diskretizovaná forma slabej formy pohybovej rovnice kontinua (1.3.18). Galerkinova forma pohybovej rovnice v sebe už zahŕňa Dirichletove okrajové podmienky na hranici Γ_D . Pre úplnosť dodajme, že tenzor napätia je určený Hookovým zákonom (1.3.2).

Keďže Galerkinova forma pohybovej rovnice už nerozlišuje tvarové a váhové funkcie, ďalej budeme používať iba termín tvarová funkcia.

1.3.3 Tvarové funkcie

Od voľby tvarových funkcií závisí napr. presnosť, výpočtová efektívnosť alebo robustnosť výslednej metódy. Tvarové funkcie musia, okrem splnenia podmienok (1.3.8) a (1.3.9), byť lineárne nezávislé a musia umožniť aproximovať presné riešenie s voliteľnou presnosťou.

Globálne definované tvarové funkcie

Ak definujeme množinu tvarových funkcií pre celú oblasť Ω , hovoríme o globálne definovaných tvarových funkciách.

Ako tvarové funkcie môžeme použiť napríklad trigonometrické funkcie, inými slovami, riešenie môžeme aproximovať Fourierovým radom. V takom prípade sú koeficienty α_{ik} Fourierovými koeficientami. Taká množina tvarových funkcií je lineárne nezávislá a použitím dostatočného počtu členov v rade dosiahneme ľubovoľne presnú aproximáciu presného riešenia.

Ako tvarové funkcie môžeme použiť aj Lagrangeove polynómy. Základnou vlastnosťou interpolácie pomocou Lagrangeových polynómov je, že v každom z interpolačných bodov je práve jeden polynóm z množiny rovný jednej a ostatné sú rovné nule. Inými slovami, interpolačná funkcia $f(x)$ prechádza bodovými hodnotami interpolovanej funkcie f_i v interpolačných bodoch x_i , teda

$$f(x_k) = f_k . \quad (1.3.34)$$

Dôsledkom tejto vlastnosti je, ako vidno z rovnice (1.3.31), že aproximované riešenie \tilde{u}_i v interpolačnom bode vnútri oblasti Ω je rovné príslušnému koeficientu rozvoja, t.j.,

$$\tilde{u}_i(x_k, y_k, z_k) = \alpha_{ik} , \quad (1.3.35)$$

kde (x_k, y_k, z_k) je poloha k -tého interpolačného bodu. Koeficienty α_{ik} majú teda význam diskretných posunutí v interpolačných bodoch. Túto vlastnosť Lagrangeových polynómov využijeme aj pri výpočte konkrétnych Lagrangeových polynómov, ktoré použijeme ako tvarové funkcie.

Uvažujme N^n (index n nie je exponent) uzlov, t.j. interpolačných bodov, v oblasti $\bar{\Omega}$. Uvažujme tvarové funkcie v tvare Lagrangeových polynómov. Potom musí platiť

$$s_k(x_l, y_l, z_l) = \delta_{kl} . \quad (1.3.36)$$

Tento zápis predstavuje sústavu N^n algebraických rovníc pre každú tvarovú funkciu. Počet tvarových funkcií musí byť rovnaký ako počet uzlov, t.j., $n = N^n$, aby bola množina tvarových funkcií úplná. Aby bol systém rovníc jednoznačne riešiteľný, musíme použiť tvarové funkcie, t.j. Lagrangeove polynómy, s N^n voľnými parametrami.

V seizmológii môžeme, kvôli dostatočnému vzorkovaniu komplikovaných rozhraní alebo topografie voľného povrchu, uvažovať modely s rádovo $10^6 - 10^8$ uzlami. V prípade použitia globálnych tvarových funkcií by to znamenalo použitie polynómov obrovského rádu. Riešenie $10^6 - 10^8$ sústav s $10^6 - 10^8$ rovnicami je z praktického hľadiska príliš komplikované, najmä, ak si uvedomíme, že tvarové funkcie by sme museli počítat' vždy, keď sa zmení geometrický tvar oblasti Ω , alebo sa zmení poloha uzlov.

Lokálne definované tvarové funkcie

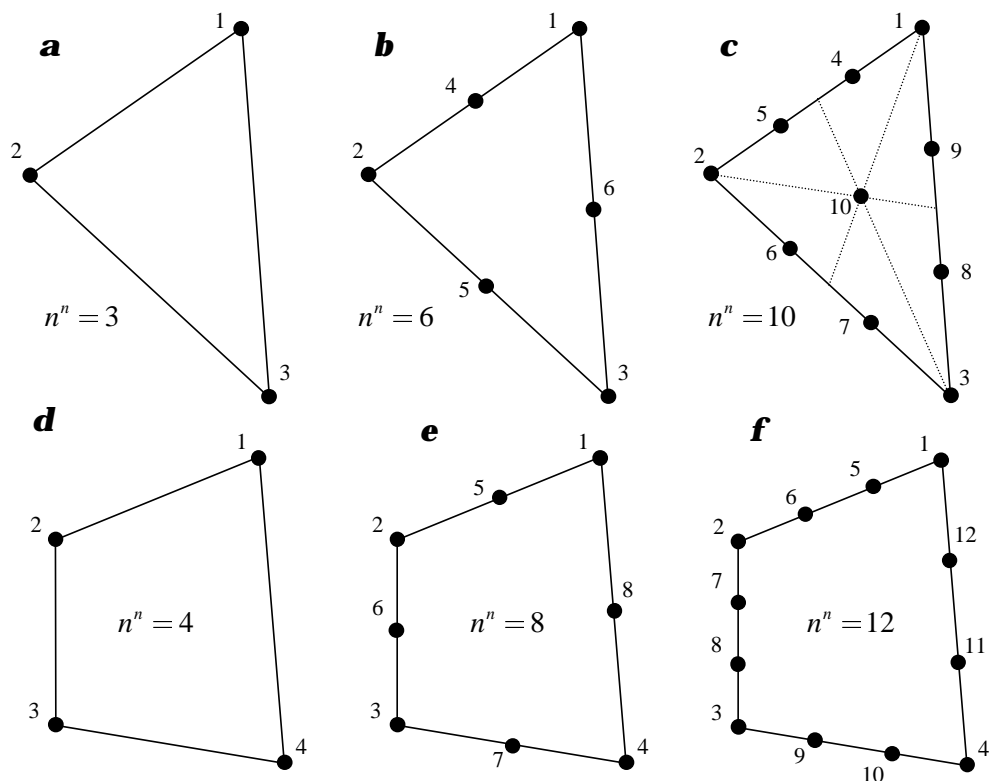
Tvarové funkcie môžeme definovať aj tak, že oblasť Ω rozdelíme na N^e podoblastí Ω^e , tzv. prvky. Prvky môžu mať vo všeobecnosti rôzny tvar a každý prvok môže mať definovaný rôzny počet a polohu uzlov. Prvky sa nesmú prekrývať a oblasť Ω musia pokrývať celú, t.j. bez "medzier" a "dier" medzi prvkami. Musíme zabezpečiť, aby riešenie bolo na hraniciach medzi susediacimi prvkami spojité. Príklady overenia spojitosti posunutia na hranici medzi prvkami rôzneho typu a rádu aproximácie budú uvedené v časti Diskretizácia výpočtovej oblasti – konštrukcia siete v odstavci 1.3.8.

Pre úplnosť dodajme, že existujú aj metódy odvodené z metódy konečných prvkov, ktoré nevyžadujú spojitost' posunutia na hraniciach prvkov. Príkladom sú tzv. diskontinuitné Galerkinové metódy. Metódu tohoto typu v seizmológii aplikovali napr. Käser a Dumbser (2006) a Dumbser a Käser (2006).

Na jeden prvok môžeme aplikovať postup ako na celú oblasť Ω . Uvažujme prvok s n^n (index n nie je exponent) uzlami a tvarové funkcie v tvare Lagrangeových polynómov. Pripomeňme, že poloha uzlov definuje geometrický tvar prvku, že počet tvarových funkcií musí byť rovnaký ako počet uzlov, t.j., $n = n^n$, a že tvarové funkcie musia mať n^n voľných parametrov. Preto je možné povedať, že geometrický tvar prvku určuje rád tvarových funkcií, a naopak, že rád tvarových funkcií určuje geometrický tvar prvku. Ilustrujme to pomocou príkladov. Kvôli jednoduchosti budeme uvažovať 2D problém. Uvažujme, že riešenie potrebujeme aproximovať lineárnou funkciou. V 2D probléme možno lineárnu funkciu zapísať v tvare

$$s_k(x, y) = a_k x + b_k y + c_k . \quad (1.3.37)$$

Pre jednu tvarovú funkciu s_k máme 3 voľné parametre, t.j., a_k , b_k a c_k . Aby bol systém (1.3.36) jednoznačne riešiteľný, musíme uvažovať tri uzly a teda aj tri tvarové



Obr. 1.3.2: Príklady tvaru prvkov a rozloženia uzlov pre 2D problém: **a** - lineárny trojuholník, **b** - kvadratický trojuholník, **c** - kubický trojuholník, **d** - bilineárny štvoruholník, **e** - kvadratický štvoruholník, **f** - kubický štvoruholník. n^n označuje počet uzlov v prvku.

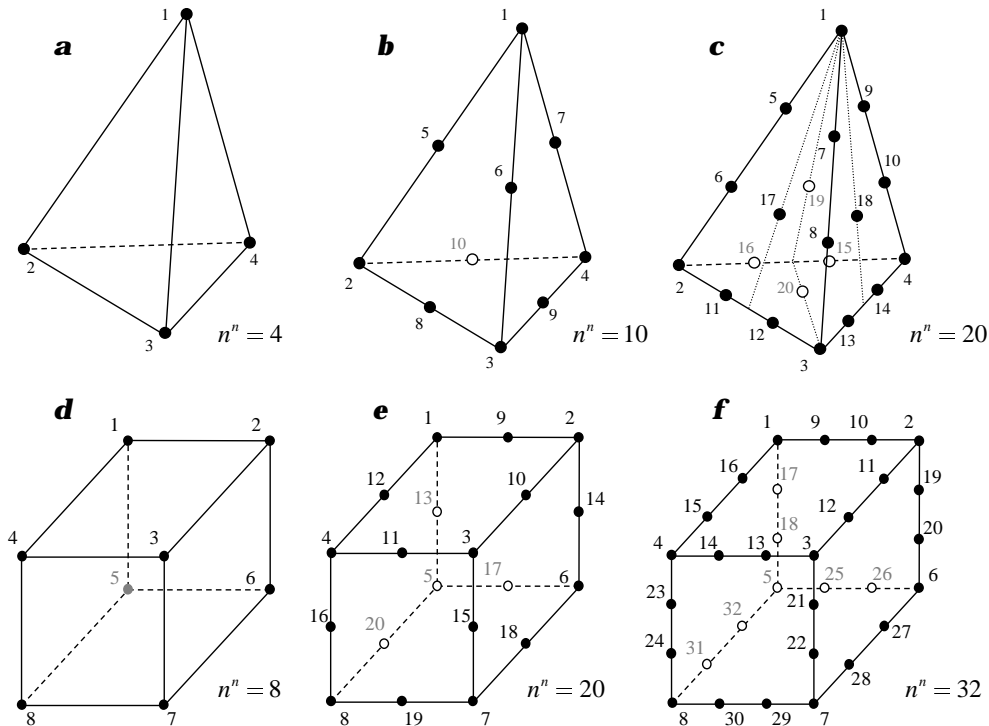
funkcie. Je zrejmé, že prvok bude mať tvar trojuholníka s uzlami umiestnenými v rohoch (Obr. 1.3.2a).

Analogicky môžeme postupovať aj keď potrebujeme vyššie rády aproximácie. Cieľom je mať uzly usporiadané čo najrovnomernejšie. Pre kvadratické tvarové funkcie,

$$s_k(x, y) = a_k x^2 + b_k y^2 + c_k x y + d_k x + e_k y + f_k, \quad (1.3.38)$$

dostaneme prvok tvaru trojuholníka so šiestimi uzlami, z toho tri v rohoch a tri v stredoch strán, pozri Obr. 1.3.2b. Pre kubické tvarové funkcie s desiatimi parametrami dostaneme trojuholník s desiatimi uzlami, z toho tri v rohoch, šesť na stranách a jeden v ťažisku (Obr. 1.3.2c).

Analogicky postupujeme aj v 3D probléme, pričom dostaneme napríklad 4-uzlový lineárny štvorsten (lineárny znamená, že tvarové funkcie sú lineárne), pozri



Obr. 1.3.3: Príklady tvaru prvkov a rozloženia uzlov pre 3D problém: **a** - lineárny štvorsten, **b** - kvadratický štvorsten, **c** - kubický štvorsten, **d** - trilineárny šesťsten, **e** - kvadratický šesťsten, **f** - kubický šesťsten. n^n označuje počet uzlov v prvku.

Obr. 1.3.3a, 10-uzlový kvadratický štvorsten, pozri Obr. 1.3.3b, alebo 20-uzlový kubický štvorsten (Obr. 1.3.3c).

Predpokladajme, že pre riešenie problému je vhodné použiť prvok tvaru štvoruholníka so štyrmi uzlami v rohoch. Budeme potrebovať štyri tvarové funkcie, pričom každá musí mať štyri voľné parametre. Lineárna funkcia v 2D, rovnica (1.3.37), má tri voľné parametre a kvadratická funkcia, rovnica (1.3.38), má až šesť voľných parametrov. Preto použijeme tzv. bilineárnu funkciu

$$s_k(x, y) = a_k x + b_k y + c_k x y + d_k, \quad (1.3.39)$$

pre ktorú je systém (1.3.36) jednoznačne riešiteľný. Názov bilineárna funkcia vyplýva z vlastností funkcie. Pre konštantné x alebo y dostaneme lineárnu funkciu. Inými slovami, bilineárna funkcia je v ľubovoľnom reze v smere osi x aj y lineárna. Prvok s bilineárnymi tvarovými funkciami nazývame (bi)lineárny štvoruholník, pozri Obr. 1.3.2d. Analogicky v 3D použijeme trilineárnu funkciu

$$s_k(x, y, z) = a_k x + b_k y + c_k z + d_k x y + e_k y z + f_k x z + g_k \quad (1.3.40)$$

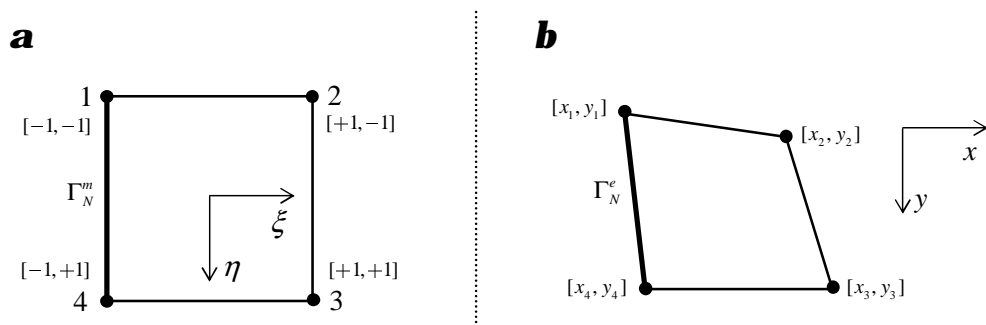
a dostaneme (tri)lineárny šesťsten, pozri Obr. 1.3.3d. Použitie vyšších neúplných polynómov v 2D vedie k štvoruholníkom vyššieho rádu napríklad s 8 alebo 12 uzlami, pozri Obr. 1.3.2e a Obr. 1.3.2f. Použitie vyšších neúplných polynómov v 3D vedie k šesťstenom vyššieho rádu napríklad s 20 alebo 32 uzlami, pozri Obr. 1.3.3e a Obr. 1.3.3f.

Je zrejmé, že s lokálne definovanými tvarovými funkciami sa pracuje jednoduchšie v porovnaní s globálne definovanými tvarovými funkciami. Sú oveľa nižšieho rádu, nakoľko ich rád je určený počtom uzlov v prvku n^n , ktorých je podstatne menej ako uzlov N^n v celej oblasti Ω . Stále však platí, že tvarové funkcie musíme počítať vždy, ak sa zmení tvar oblasti Ω , resp. rozloženie uzlov v oblasti Ω . Nevýhodou ostáva veľké množstvo tvarových funkcií. Každý prvok ma svoju vlastnú množinu n^n tvarových funkcií, to znamená, že v oblasti Ω je spolu $N^e \times n^n$ tvarových funkcií. Pre dostatočne veľké N^n alebo N^e platí $N^n \approx N^e$. (Pozn.: v praktických aplikáciách môžeme vždy uvažovať, že N^e a N^n sú dostatočne veľké.) Je zrejmé, že v prípade lokálne definovaných tvarových funkcií pracujeme dokonca s n^n krát väčším počtom tvarových funkcií ako v prípade globálne definovaných tvarových funkcií. Počet tvarových funkcií, s ktorými pracujeme, je možné znížiť použitím tzv. lokálnych súradníc.

Lokálne definované tvarové funkcie v lokálnych súradniciach

Lokálne definované tvarové funkcie závisia iba na priestorovom rozložení uzlov v prvku, pre ktorý sú definované. Mimo tento prvok sú lokálne definované tvarové funkcie nedefinované. Preto vznikla myšlienka transformovať prvky do tzv. lokálnych súradníc, v ktorých budú mať prvky rovnakého typu rovnaký tvar, rovnakú polohu uzlov a teda aj rovnaké tvarové funkcie. Prvok v lokálnych súradniciach sa nazýva základný/vzorový prvok (z angl. master element). Symbolmi x , y a z budeme označovať globálne súradnice. Symbolmi ξ , η a ζ budeme označovať lokálne súradnice.

Pre prehľadnosť a názornosť uvažujme najskôr 2D problém. Uvažujme základný prvok v lokálnych súradniciach v tvare štvorca, pozri Obr. 1.3.4a. Uzly uvažovaného základného prvku sú v bodoch



Obr. 1.3.4: Transformácia z lokálnych súradníc do globálnych súradníc v 2D probléme:
a - základný prvok v lokálnych súradniciach, **b** - prvok v globálnych súradniciach.

$$\begin{aligned} \xi_k &\in \{-1, 1, 1, -1\}, \\ \eta_k &\in \{-1, -1, 1, 1\}, \\ k &\in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

Pre tvarové funkcie v lokálnych súradniciach platí analogický systém rovníc ako systém rovníc (1.3.36):

$$s_k(\xi_l, \eta_l) = \delta_{kl}. \quad (1.3.42)$$

Tvarové funkcie budeme hľadať v tvare

$$s_k(\xi, \eta) = a_k \xi + b_k \eta + c_k \xi \eta + d_k. \quad (1.3.43)$$

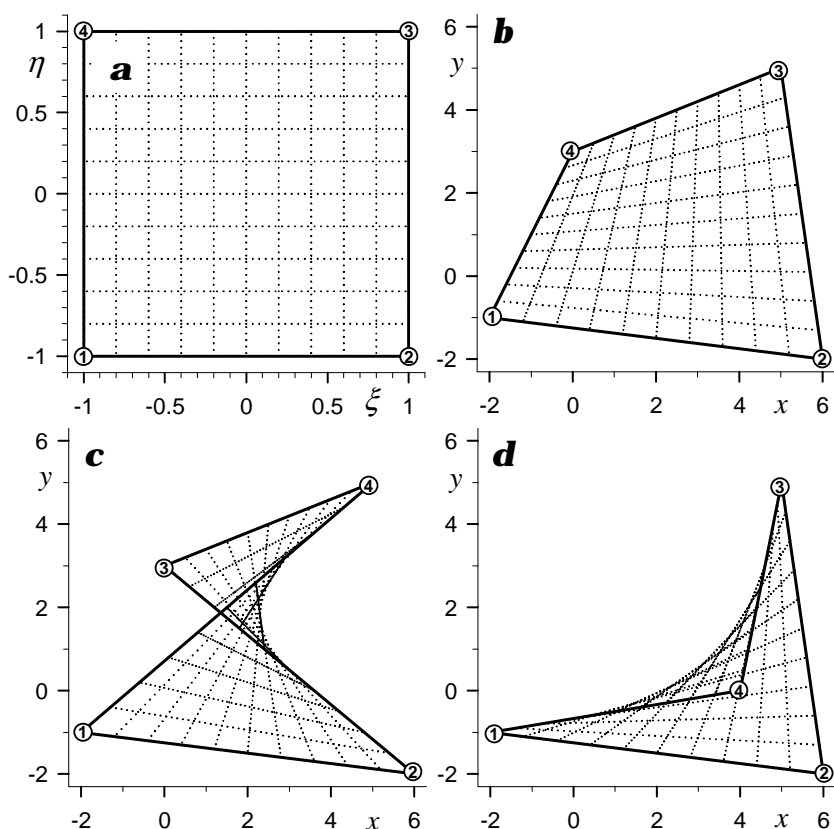
Vyriešením sústavy (1.3.42) pre tvarové funkcie v tvare (1.3.43) dostaneme tvarové funkcie v tvare

$$\begin{aligned} s_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ s_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ s_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \\ s_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta). \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Na základnom prvku môžeme jednoducho vykonať operácie s tvarovými funkciami v tvare (1.3.44). Ako neskôr ukážeme, pre praktické využitie musíme vedieť transformovať (zobraziť, mapovať) základný prvok na prvok v globálnych súradniciach. Uvažujme prvok v globálnych súradniciach - štvoruholník s uzlami v rohoch, pozri Obr. 1.3.4b. Polohy uzlov označme x_k a y_k . Transformáciu z lokálnych súradníc do globálnych súradníc môžeme zapísať pomocou tvarových funkcií

$$\begin{aligned} x &= x_k s_k(\xi, \eta), \\ y &= y_k s_k(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

Ak pre prvok v globálnych súradniciach transformácia (1.3.45) existuje a je jednoznačná, potom môžeme pre daný prvok použiť lokálne definované tvarové funkcie v lokálnych súradniciach ako aj transformáciu samotnú. Aby bola transformácia (1.3.45) jednoznačná, stačí, aby mal prvok v globálnych súradniciach tvar konvexného štvoruholníka a číslovanie uzlov v základnom prvku a v prvku v globálnych súradniciach bolo rovnaké. Uvažujme príklad na Obr. 1.3.5. Na Obr. 1.3.5a je základný prvok - štvorec - v lokálnych súradniciach. Uzly sú číslované proti smeru hodinových ručičiek. Na Obr. 1.3.5b je znázornený konvexný štvoruholník v globálnych súradniciach. Uzly sú číslované proti smeru hodinových ručičiek, teda rovnako ako uzly základného prvku. Bodkovanými čiarami je znázornený výsledok transformácie základného prvku. Z obrázku je zrejmé, že každý bod základného prvku sa zobrazí do jedného bodu prvku v globálnych súradniciach. Transformá-



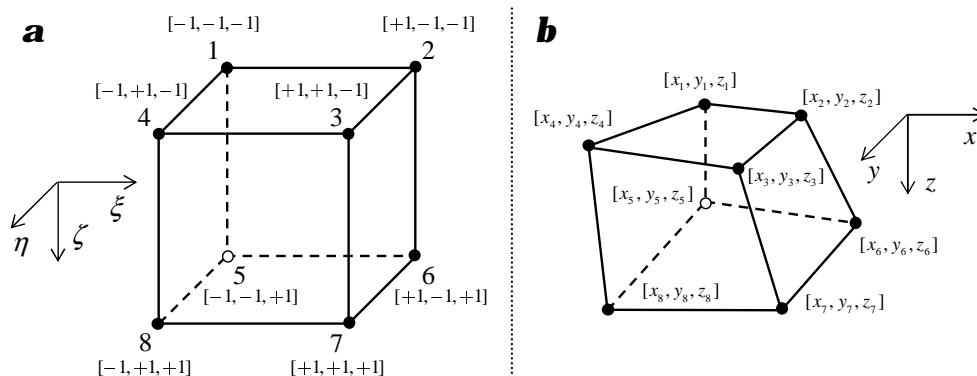
Obr. 1.3.5: Ukážka 2D transformácie z lokálnych súradníc do globálnych súradníc: **a** základný prvok v lokálnych súradniciach, **b** transformácia na prvok v tvare konvexného štvoruholníka (jednoznačná transformácia), **c** transformácia na prvok so zlým číslovaním uzlov (nejednoznačná transformácia), **d** transformácia na prvok v tvare konkávneho štvoruholníka (nejednoznačná transformácia).

cia je teda jednoznačná. Pre prvok na Obr. 1.3.5b môžeme použiť tvarové funkcie v lokálnych súradniciach. Prvok na Obr. 1.3.5c má rovnakú polohu uzlov ako prvok na Obr. 1.3.5b, rozdielne je však ich číslovanie, čím dostaneme iný tvar prvku. Z obrázka je zrejmé, že transformácia základného prvku na prvok c nie je jednoznačná. Iný príklad prvku, kedy nemôžeme použiť tvarové funkcie v lokálnych súradniciach, je na Obr. 1.3.5d. V tomto prípade je číslovanie uzlov v poriadku, avšak transformácia základného prvku na prvok je nejednoznačná. Je to spôsobené geometrickým tvarom prvku. Aby bola transformácia (1.3.45) jednoznačná, prvok musí mať tvar konvexného štvoruholníka, t.j. všetky vnútorné uhly musia byť ostré.

Ľubovoľný prvok, na ktorý je možné transformáciou (1.3.45) jednoznačne transformovať základný prvok tvaru štvorca s uzlami vo vrcholoch, Obr. 1.3.5a, budeme označovať QUAD4 (QUAD je z anglického quadrilateral - štvoruholník a 4 značí počet uzlov). Pre prvok QUAD4 budeme používať bilinéarne tvarové funkcie (1.3.44).

Analogicky môžeme postupovať aj v 3D probléme. Uvažujme základný prvok v lokálnych súradniciach v tvare kocky, pozri Obr. 1.3.6a. Uzly uvažovaného základného prvku sú v bodoch

$$\begin{aligned} \xi_k &\in \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\}, \\ \eta_k &\in \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\}, \\ \zeta_k &\in \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}, \\ k &\in \{1, 2, \dots, 8\}. \end{aligned} \tag{1.3.46}$$



Obr. 1.3.6: Transformácia z lokálnych súradníc do globálnych súradníc v 3D probléme: **a** - základný prvok v lokálnych súradniciach, **b** - prvok v globálnych súradniciach.

Pre tvarové funkcie v lokálnych súradniciach platí analogický systém rovníc ako systém (1.3.42), t.j.,

$$s_k(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) = \delta_{kl}, \quad (1.3.47)$$

a tvarové funkcie budeme hľadať v tvare

$$s_k(\xi, \eta, \zeta) = a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta + d_k \xi \eta + e_k \eta \zeta + f_k \xi \zeta + g_k. \quad (1.3.48)$$

Vyriešením sústavy (1.3.47) dostaneme tvarové funkcie v tvare

$$\begin{aligned} s_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta), \\ s_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta), \\ s_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta), \\ s_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta), \\ s_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta), \\ s_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta), \\ s_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta), \\ s_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta). \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

Uvažujme prvok v globálnych súradniciach - šesťsten s uzlami v rohoch, pozri Obr. 1.3.6b. Transformáciu z lokálnych súradníc do globálnych súradníc môžeme zapísať pomocou tvarových funkcií

$$\begin{aligned} x &= x_k s_k(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= y_k s_k(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= z_k s_k(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

Rovnako ako v 2D, aj v 3D môžeme tvarové funkcie v lokálnych súradniciach použiť len vtedy, ak transformácia základného prvku na prvok v globálnych súradniciach existuje a je jednoznačná. Analogicky k 2D platí aj v 3D probléme, že prvok musí mať tvar konvexného šesťstena a uzly musia byť v základnom aj globálnom prvku číslované rovnako.

Ľubovoľný prvok, na ktorý je možné transformáciou (1.3.50) jednoznačne transformovať základný prvok tvaru kocky s uzlami vo vrcholoch, Obr. 1.3.6a, budeme označovať HEX8 (HEX je z anglického hexahedron - šesťsten a 8 značí počet uzlov). Pre prvok HEX8 budeme používať trilineárne tvarové funkcie (1.3.49).

Pri použití lokálne definovaných tvarových funkcií v lokálnych súradniciach pracujeme iba s relatívne malým počtom tvarových funkcií (ich skutočný počet závisí iba od toho, koľko rôznych typov prvkov kombinujeme v sieti a od toho, koľko majú tieto prvky uzlov). Tvarové funkcie navyše nie je potrebné počítat' znovu pre novú úlohu/problém, lebo sú vypočítané/definované pre zvolený základný prvok. Transformácia z globálnych súradníc na základný prvok existuje, ak má prvok vhodný tvar. Transformácia zo základného prvku do globálnych súradníc je jednoduchá a dá sa vyjadriť pomocou tvarových funkcií. Práca s lokálne definovanými tvarovými funkciami v lokálnych súradniciach je veľmi jednoduchá a preto sú veľmi často využívané aj v praxi.

Pripomeňme, že v prípade použitia lokálne definovaných tvarových funkcií je nutné zabezpečiť spojitosť riešenia na hraniciach medzi susediacimi prvkami; pozri časť Diskretizácia výpočtovej oblasti – konštrukcia siete v odstavci 1.3.8.

1.3.4 Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre jeden prvok

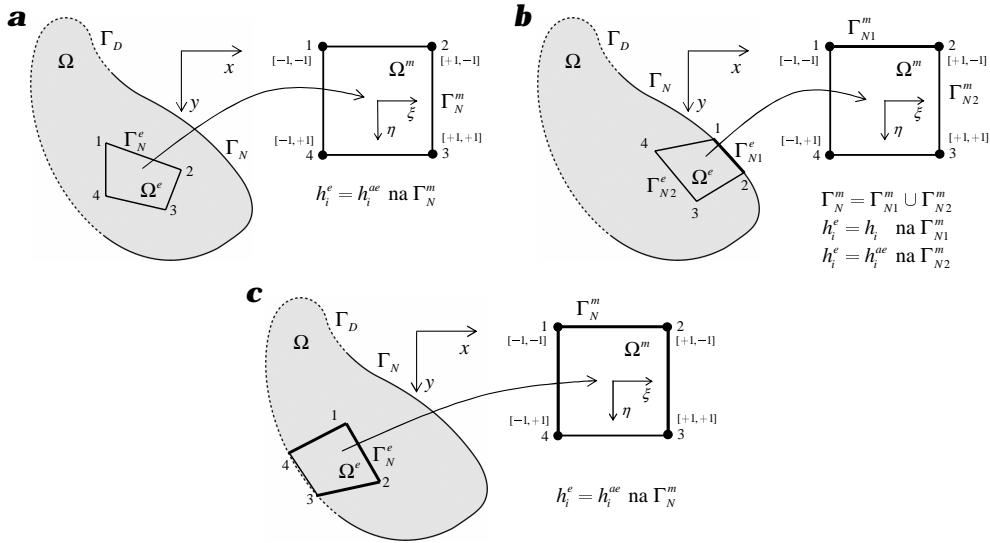
Ďalej budeme používať lokálne definované tvarové funkcie v lokálnych súradniciach. Galerkinovu formu pohybovej rovnice, sústavu rovníc (1.3.33), preto zapíšeme pre jeden prvok Ω^e :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^m} s_k \rho s_l \det \mathbf{J} d\Omega \ddot{a}_{il} + \int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} d\Omega - \int_{\Omega^m} s_k f_i \det \mathbf{J} d\Omega \\ + \int_{\Omega^m} s_k \ddot{g}_i \det \mathbf{J} d\Omega - \int_{\Gamma_N^m} s_k h_i^e \det \mathbf{J} d\Gamma = 0 ; \\ k, l \in \{1, 2, \dots, n^n\} . \end{aligned} \quad (1.3.51)$$

Keďže integrujeme v základnom prvku Ω^m , \mathbf{J} je Jacobián transformácie (1.3.50), t.j., transformácie zo základného prvku na prvok v globálnych súradniciach,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} & x_{,\zeta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} & y_{,\zeta} \\ z_{,\xi} & z_{,\eta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} . \quad (1.3.52)$$

Hranica Γ_N^m je teda obrazom hranice Γ_N^e s predpísaným vektorom napätia h_i^e .



Obr. 1.3.7: K vysvetleniu transformácie okrajových podmienok z prvku Ω^e na základný prvok Ω^m .

Pripomeňme, že na hranici Γ_N oblasti Ω predpokladáme predpísaný vektor napätia h_i a na hranici Γ_D predpokladáme predpísaný vektor posunutia g_i . Uvažujme prvok Ω^e s predpísaným vektorom napätia h_i^e na hranici Γ_N^e . Pri integrácii (1.3.51) formálne transformujeme prvok Ω^e na základný prvok Ω^m a hranicu Γ_N^e transformujeme na hranicu Γ_N^m . Vektor napätia h_i^e i tvar hranice Γ_N^m závisia od polohy prvku v oblasti Ω .

Uvažujme prvok Ω^e ležiaci vo vnútri oblasti Ω , pozri Obr. 1.3.7a. Na celej hranici Γ_N^e prvku Ω^e musíme uvažovať vektor napätia $h_i^e = h_i^{ae}$, kde h_i^{ae} vyjadruje silové pôsobenie okolitých prvkov. Keďže Γ_N^e je celou hranicou prvku Ω^e , je zrejmé, že po transformácii na základný prvok bude Γ_N^m celou hranicou prvku Ω^m .

Uvažujme prvok Ω^e ležiaci časťou na hranici Γ_N , pozri Obr. 1.3.7b. Časť hranice prvku Ω^e ležiacu na Γ_N označíme Γ_{N1}^e a zvyšok hranice, ležiaci vnútri oblasti Ω , označíme Γ_{N2}^e . Na hranici Γ_{N1}^e teda predpokladáme $h_i^e = h_i$, t.j., predpísaný vektor napätia, a na hranici Γ_{N2}^e predpokladáme $h_i^e = h_i^{ae}$, teda silové pôsobenie okolitých prvkov. Po transformácii na základný prvok sa hranica Γ_{N1}^e transformuje na Γ_{N1}^m , t.j., spojnicu uzlov 1 a 2. Hranica Γ_{N2}^e sa transformuje na Γ_{N2}^m , t.j., spojnicu uzlov 2-3-4-1.

Uvažujme prvok Ω^e ležiaci časťou na hranici Γ_D , pozri Obr. 1.3.7c. Časť hranice prvku Ω^e ležiacu na Γ_D nemusíme špeciálne uvažovať, lebo na tejto hranici nie je

predpísané napätie, ale vektor posunutia g_i . Na hranici ležiacej vnútri oblasti Ω , Γ_N^e , budeme predpokladať vektor napätia kvôli silovému pôsobeniu okolitých prvkov, t.j., $h_i^e = h_i^{ae}$. Po transformácii na základný prvok sa hranica Γ_N^e transformuje na Γ_N^m , t.j., spojnicu uzlov 4-1-2-3.

Sústavu rovníc (1.3.51) môžeme zapísať v prehľadnejšom maticovom tvare. Najprv upravíme jednotlivé členy rovnice. Keďže funkcie \tilde{g}_i sú nenulové iba na hranici Γ_D , je zrejmé, že

$$\int_{\Omega^m} s_k \ddot{g}_i \det \mathbf{J} \, d\Omega = 0. \quad (1.3.53)$$

Definujme vektor tvarových funkcií \mathbf{s} ,

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n^n} \end{bmatrix}. \quad (1.3.54)$$

Lokálny vektor pôsobiacej sily

Pomocou vektora tvarových funkcií \mathbf{s} môžeme zapísať člen pôsobiacej sily, t.j., súbor tretích členov sústavy rovníc (1.3.51), v tvare

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega^m} \mathbf{s} f_i \det \mathbf{J} \, d\Omega. \quad (1.3.55)$$

Vektor \mathbf{f}^e ,

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_z \end{bmatrix}, \quad (1.3.56)$$

je lokálny² vektor pôsobiacej sily. Zložka \mathbf{f}_{ik} predstavuje i -tú zložku sily pôsobiacej v k -tom uzle v dôsledku silového pôsobenia f_i na prvok. Vektory \mathbf{f}_i majú n^n prvkov, vektor \mathbf{f}^e má $3n^n$ prvkov.

Lokálny vektor okrajovej podmienky

Pomocou vektora tvarových funkcií \mathbf{s} zapíšeme aj okrajový člen, t.j., súbor piatich členov sústavy rovníc (1.3.51),

² Hovoríme o lokálnom vektore pôsobiacej sily, lebo je vyjadrený pre jeden prvok Ω^e ; nejde teda o súvislosť s lokálnymi súradnicami.

$$\mathbf{bc}_i = \int_{\Gamma_N^m} \mathbf{s} h_i^e \det \mathbf{J} d\Gamma . \quad (1.3.57)$$

Vektor \mathbf{bc}^e ,

$$\mathbf{bc}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{bc}_x \\ \mathbf{bc}_y \\ \mathbf{bc}_z \end{bmatrix} , \quad (1.3.58)$$

je lokálny vektor okrajovej podmienky. Zložka \mathbf{bc}_{ik} predstavuje i -tú zložku sily pôsobiacej v k -tom uzle v dôsledku napätia h_i^e pôsobiaceho na hranici Γ_N^e prvku.

Vektory \mathbf{bc}_i majú n^n prvkov, vektor \mathbf{bc}^e má $3n^n$ prvkov.

Lokálna matica hmotnosti

Zotrvačný člen, t.j., súbor prvých členov sústavy rovníc (1.3.51), môžeme zapísať v maticovom tvare,

$$\int_{\Omega^m} s_k \rho s_l \det \mathbf{J} d\Omega \ddot{a}_{il} \rightarrow \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}} , \quad (1.3.59)$$

kde \mathbf{M}^e je lokálna matica hmotnosti a \mathbf{u} je lokálny vektor diskretných posunutí.

Lokálna matica hmotnosti \mathbf{M}^e má tvar

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} , \quad (1.3.60)$$

kde pre matice \mathbf{M} platí

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega^m} \rho \mathbf{s} \mathbf{s}^T \det \mathbf{J} d\Omega . \quad (1.3.61)$$

Matice \mathbf{M} majú $n^n \times n^n$ prvkov, lokálna matica hmotnosti, \mathbf{M}^e , má $3n^n \times 3n^n$ prvkov. Lokálny vektor diskretných posunutí \mathbf{u} má tvar

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} , \quad (1.3.62)$$

kde

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{in^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in^n} \end{bmatrix} . \quad (1.3.63)$$

Zložka vektora \mathbf{u}_i , t.j., u_{ik} , je i -tá zložka posunutia v k -tom uzle prvku. Vektory \mathbf{u}_i majú n^n prvkov a lokálny vektor diskretných posunutí, \mathbf{u} , má $3n^n$ prvkov.

Vo vektorovom tvare môžeme zapísať aj aproximáciu riešenia (1.3.31),

$$\tilde{u}_i = \mathbf{s}^T \mathbf{u}_i + \tilde{g}_i . \quad (1.3.64)$$

Analogicky môžeme zapísať aj transformáciu súradníc (1.3.50),

$$x_i = \mathbf{s}^T \mathbf{x}_i , \quad (1.3.65)$$

kde \mathbf{x}_i sú vektory obsahujúce polohy uzlov prvku v globálnych súradniciach,

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in^n} \end{bmatrix} . \quad (1.3.66)$$

Lokálna matica tuhosti

Hookov zákon (1.3.2) zapíšeme v maticovom tvare

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} , \quad (1.3.67)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ sú vektory napätia a deformácie vo Voigtovom značení a \mathbf{D} je matica pružnosti. V 3D možno definovať vektor napätia $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} , \quad (1.3.68)$$

a vektor deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \varepsilon_{12} \\ 2 \varepsilon_{23} \\ 2 \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{xy} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} . \quad (1.3.69)$$

Matica pružnosti \mathbf{D} má v 3D tvar

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (1.3.70)$$

Dosadením približného riešenia (1.3.64) do vektora deformácie (1.3.69) dostaneme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{x,x} \\ \tilde{u}_{y,y} \\ \tilde{u}_{z,z} \\ \tilde{u}_{x,y} + \tilde{u}_{y,x} \\ \tilde{u}_{y,z} + \tilde{u}_{z,y} \\ \tilde{u}_{x,z} + \tilde{u}_{z,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_x + \tilde{g}_{x,x} \\ \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_y + \tilde{g}_{y,y} \\ \mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_z + \tilde{g}_{z,z} \\ \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_x + \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_y + \tilde{g}_{x,y} + \tilde{g}_{y,x} \\ \mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_y + \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_z + \tilde{g}_{y,z} + \tilde{g}_{z,y} \\ \mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_x + \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_z + \tilde{g}_{x,z} + \tilde{g}_{z,x} \end{bmatrix}. \quad (1.3.71)$$

Pre derivácie tvarových funkcií podľa globálnych súradníc platí

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{,x} &= \mathbf{s}_{,\xi} \xi_{,x} + \mathbf{s}_{,\eta} \eta_{,x} + \mathbf{s}_{,\zeta} \zeta_{,x} , \\ \mathbf{s}_{,y} &= \mathbf{s}_{,\xi} \xi_{,y} + \mathbf{s}_{,\eta} \eta_{,y} + \mathbf{s}_{,\zeta} \zeta_{,y} , \\ \mathbf{s}_{,z} &= \mathbf{s}_{,\xi} \xi_{,z} + \mathbf{s}_{,\eta} \eta_{,z} + \mathbf{s}_{,\zeta} \zeta_{,z} . \end{aligned} \quad (1.3.72)$$

Inverzný Jacobián transformácie (1.3.50) má tvar

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} & \xi_{,z} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} & \eta_{,z} \\ \zeta_{,x} & \zeta_{,y} & \zeta_{,z} \end{bmatrix}. \quad (1.3.73)$$

Zo vzťahov (1.3.72) a (1.3.73) je zrejmé, že derivácie lokálnych súradníc podľa globálnych súradníc vyjadríme pomocou inverzného Jacobiána transformácie súradníc.

Integrovanú funkciu v člene vratnej (elastickej) sily, t.j., v druhom člene ľavej strany rovnice (1.3.51), môžeme pre $i = x$ zapísať v tvare

$$s_{k,j} \sigma_{ij} \xrightarrow{i=x} s_{k,x} \sigma_{xx} + s_{k,y} \sigma_{xy} + s_{k,z} \sigma_{xz} . \quad (1.3.74)$$

Dosadením vektora deformácie (1.3.71) do Hookovho zákona (1.3.67) a potom dosadením do (1.3.74) dostaneme

$$\begin{aligned}
 s_{k,j} \sigma_{ij} \xrightarrow{i=x} & [(\lambda + 2\mu) s_{k,x} \mathbf{s}_{,x}^T + \mu s_{k,y} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu s_{k,z} \mathbf{s}_{,z}^T] \mathbf{u}_x \\
 & + [\lambda s_{k,x} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu s_{k,y} \mathbf{s}_{,x}^T] \mathbf{u}_y \\
 & + [\lambda s_{k,x} \mathbf{s}_{,z}^T + \mu s_{k,z} \mathbf{s}_{,x}^T] \mathbf{u}_z .
 \end{aligned} \tag{1.3.75}$$

Vynásobením (1.3.75) det \mathbf{J} , integrovaním cez Ω^m a použitím vektorového zápisu pre $s_{k,x}$, $s_{k,y}$ a $s_{k,z}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \xrightarrow{i=x} & \\
 \xrightarrow{i=x} \int_{\Omega^m} [(\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,x}^T + \mu \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,z}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega \mathbf{u}_x & \\
 + \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,x}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega \mathbf{u}_y & \\
 + \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,z}^T + \mu \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,x}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega \mathbf{u}_z . &
 \end{aligned} \tag{1.3.76}$$

Výraz (1.3.76) môžeme zapísať aj v maticovom tvare

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \xrightarrow{i=x} \mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_x + \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_y + \mathbf{K}_{13} \mathbf{u}_z , \tag{1.3.77}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11} &= \int_{\Omega^m} [(\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,x}^T + \mu \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,z}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega , \\
 \mathbf{K}_{12} &= \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,x}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega , \\
 \mathbf{K}_{13} &= \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,z}^T + \mu \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,x}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega .
 \end{aligned} \tag{1.3.78}$$

Analogicky pre $i = y$ a $i = z$ dostaneme

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \xrightarrow{i=y} \mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_x + \mathbf{K}_{22} \mathbf{u}_y + \mathbf{K}_{23} \mathbf{u}_z \tag{1.3.79}$$

s

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{21} &= \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,x}^T + \mu \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,y}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega , \\
 \mathbf{K}_{22} &= \int_{\Omega^m} [\mu \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,x}^T + (\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,z}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega , \\
 \mathbf{K}_{23} &= \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,z}^T + \mu \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,y}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega ,
 \end{aligned} \tag{1.3.80}$$

a

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \xrightarrow{i=z} \mathbf{K}_{31} \mathbf{u}_x + \mathbf{K}_{32} \mathbf{u}_y + \mathbf{K}_{33} \mathbf{u}_z \tag{1.3.81}$$

s

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{31} &= \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,x}^T + \mu \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,z}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega, \\ \mathbf{K}_{32} &= \int_{\Omega^m} [\lambda \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,y}^T + \mu \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,z}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega, \\ \mathbf{K}_{33} &= \int_{\Omega^m} [\mu \mathbf{s}_{,x} \mathbf{s}_{,x}^T + \mu \mathbf{s}_{,y} \mathbf{s}_{,y}^T + (\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,z} \mathbf{s}_{,z}^T] \det \mathbf{J} \, d\Omega.\end{aligned}\quad (1.3.82)$$

Pomocou vzťahov (1.3.77), (1.3.79) a (1.3.81) môžeme súbor druhých členov sústavy rovníc (1.3.51) zapísať v maticovom tvare,

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{u}, \quad (1.3.83)$$

kde matica \mathbf{K}^e je lokálna matica tuhosti. Pri úpravách sme využili vlastnosť matice \mathbf{K}_{ij}

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{21} &= \mathbf{K}_{12}^T, \\ \mathbf{K}_{31} &= \mathbf{K}_{13}^T, \\ \mathbf{K}_{32} &= \mathbf{K}_{23}^T.\end{aligned}\quad (1.3.84)$$

Matice \mathbf{K}_{ij} majú $n^n \times n^n$ prvkov, lokálna matica tuhosti \mathbf{K}^e má $3n^n \times 3n^n$ prvkov.

Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre jeden prvok

Pomocou lokálneho vektora pôsobiacej sily \mathbf{f}^e , rovnica (1.3.55), lokálneho vektora okrajovej podmienky \mathbf{bc}^e , rovnica (1.3.57), lokálnej matice hmotnosti \mathbf{M}^e , rovnica (1.3.59), lokálnej matice tuhosti \mathbf{K}^e , rovnica (1.3.83), a rovnice (1.3.53) zapíšeme sústavu rovníc (1.3.51) v maticovom tvare

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^e \mathbf{u} = \mathbf{f}^e + \mathbf{bc}^e. \quad (1.3.85)$$

1.3.5 Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre celú výpočtovú oblasť

Za predpokladu, že by sme poznali okrajové podmienky v sústave rovníc (1.3.85), t.j., člen \mathbf{bc}^e , mohli by sme sústavu vyriešiť postupne pre všetky prvky v oblasti

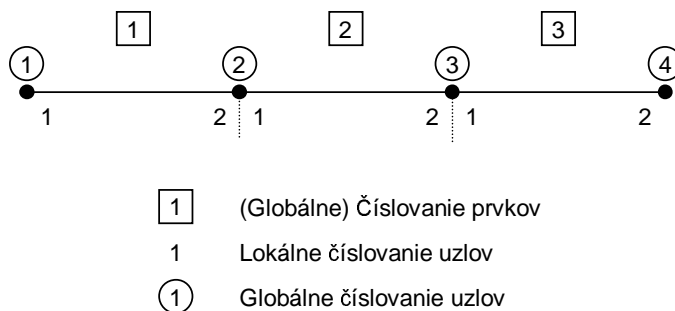
Ω . Avšak práve okrajové podmienky nepoznáme, lebo závisia od riešenia v okolitých prvkoch. Preto musíme hľadať riešenie vo všetkých prvkoch naraz. Vytvoríme tzv. globálny systém rovníc. Pri vytváraní globálneho systému rovníc využijeme dva fakty. Prvým je to, že v uzloch, ktoré patria viac ako jednému prvku, je celková sila súčtom silových príspevkov z prvkov, ktoré daný uzol zdieľajú. Druhým je to, že z požiadavky spojitosti posunutia na hraniciach prvkov vyplýva, že posunutie v uzloch na hraniciach medzi prvkami je pre všetky prvky zdieľajúce danú hranicu rovnaké.

Lokálne a globálne číslovanie

Pri výpočte lokálnych veličín, napr. lokálnej matice hmotnosti, používame tzv. lokálne číslovanie uzlov. V tomto číslovaní má každý uzol prvku pridelené jednoznačné číslo od 1 do n^n . Toto číslovanie teda nie je jednoznačné pre celú sieť uzlov a nie je teda vhodné pre prácu s globálnymi veličinami. Uzly aj prvky preto označíme globálnym číslovaním. V globálnom číslovaní má každý uzol v sieti pridelené jedno číslo od 1 do N^n . Podobne každý prvok má pridelené jedno číslo od 1 do N^e . Globálne číslovanie je preto jednoznačné pre celú sieť prvkov/uzlov. Na Obr. 1.3.8 je 1D príklad lokálneho aj globálneho číslovania v sieti. Globálne číslovanie prvkov je znázornené číslami vo štvorčekoch, globálne číslovanie uzlov v krúžkoch. Lokálne číslovanie uzlov je znázornené samostatnými číslami.

Globálna matica hmotnosti, globálna matica tuhosti a globálny vektor pôsobiacej sily

Kvôli jednoduchosti a názornosti uvažujme 1D sieť prvkov a uzlov z Obr. 1.3.8. Globálna matica hmotnosti bude mať rozmer 4×4 , lebo v sieti sú 4 uzly a riešenie

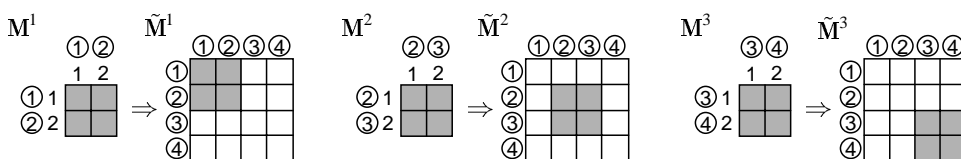


Obr. 1.3.8: Číslovanie prvkov a lokálne a globálne číslovanie uzlov - 1D príklad.

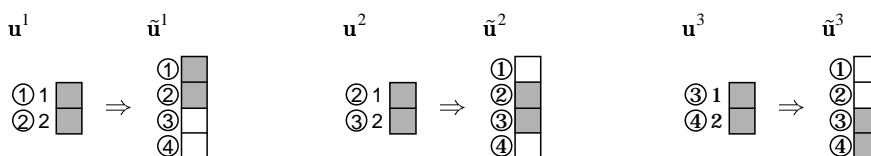
má iba jednu zložku, t.j., riešenie je skalárna veličina. Lokálne matice hmotnosti budú mať rozmer 2×2 , keďže v jednom prvku sú dva uzly. Prvým, formálnym, krokom je priradenie hodnôt z lokálnych veličín na správne pozície v globálnych veličinách. Na Obr. 1.3.9a je tento krok znázornený graficky pre maticu hmotnosti. Každý stĺpec a riadok lokálnej matice hmotnosti súvisí s jedným uzlom. Lokálne číslo uzla je znázornené číslom, globálne číslo je znázornené číslom v krúžku. Pozícia v lokálnej matici hmotnosti, napr. v matici M^1 , je daná lokálnym číslovaním uzlov. Pozícia v globálnej matici hmotnosti je daná globálnym číslovaním uzlov. Matica \tilde{M}^1 je matica M^1 doplnená o nulové riadky a stĺpce tak, aby rozmery a pozícia riadkov a stĺpcov zodpovedali globálnej matici hmotnosti.

Podobne môžeme lokálne vektory diskretných posunutí, napr. u^1 , doplniť o nulové riadky tak, aby sme dostali rozmer globálneho vektora diskretných posunutí. Pretože v sieti máme štyri uzly, globálny vektor diskretných posunutí bude mať štyri

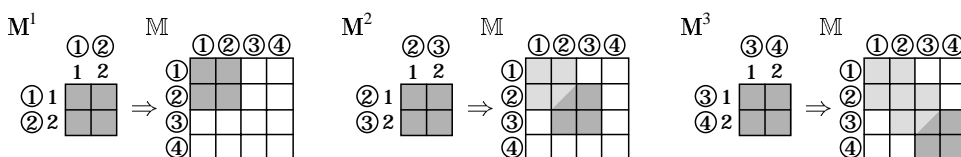
a



b



c



- ① Globálne číslo uzla
- 1 Lokálne číslo uzla
- Hodnota lokálnej veličiny
- Nenulová hodnota už pred pridaním lokálnej veličiny
- = 0
- = □ + ■

Obr. 1.3.9: K vysvetleniu vytvárania globálnych veličín. Symbolické znázornenie krokov vytvorenia globálnej matice hmotnosti.

riadky. Prvky lokálneho vektora diskretných posunutí sú usporiadané podľa lokálneho číslovania uzlov a prvky globálneho vektora diskretných posunutí sú usporiadané podľa globálneho číslovania. Tento krok je graficky znázornený na Obr. 1.3.9b. Pretože vyžadujeme, aby riešenie, t.j., posunutie, bolo spojité na hraniciach medzi prvkami, znamená to, že hodnoty na rovnakých riadkoch vo vektoroch $\tilde{\mathbf{u}}^1$, $\tilde{\mathbf{u}}^2$ a $\tilde{\mathbf{u}}^3$ musia byť rovnaké.

Celkové sily v uzloch sú súčtom síl z jednotlivých prvkov. Pre globálny vektor zotrvačnej sily \mathbf{f}^I preto môžeme písať

$$\mathbf{f}^I = \tilde{\mathbf{M}}^1 \cdot \ddot{\mathbf{u}}^1 + \tilde{\mathbf{M}}^2 \cdot \ddot{\mathbf{u}}^2 + \tilde{\mathbf{M}}^3 \cdot \ddot{\mathbf{u}}^3 . \quad (1.3.86)$$

Pretože matice $\tilde{\mathbf{M}}^1$, $\tilde{\mathbf{M}}^2$ a $\tilde{\mathbf{M}}^3$ sú nenulové iba na pozíciách označených šedou farbou na Obr. 1.3.9a a pretože posunutie je v uzloch spojité, môžeme vektory $\tilde{\mathbf{u}}^1$, $\tilde{\mathbf{u}}^2$ a $\tilde{\mathbf{u}}^3$ nahradiť globálnym vektorom diskretných posunutí \mathbf{u} :

$$\mathbf{f}^I = \tilde{\mathbf{M}}^1 \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{M}}^2 \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{M}}^3 \cdot \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} , \quad (1.3.87)$$

kde \mathbf{M} je globálna matica hmotnosti

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}^1 + \tilde{\mathbf{M}}^2 + \tilde{\mathbf{M}}^3 . \quad (1.3.88)$$

V praxi nie je potrebné vytvárať matice $\tilde{\mathbf{M}}^e$ a tie potom sčítavať, ale môžeme priamo použiť schému na Obr. 1.3.9c ako schému na priame vytváranie globálnej matice hmotnosti. Hodnoty z lokálnych matíc hmotnosti budeme pripočítavať na správne pozície globálnej matice hmotnosti.

Podobný postup môžeme aplikovať aj na maticu tuhosti a vektor pôsobiacej sily, pričom dostaneme globálnu maticu tuhosti \mathbb{K} a globálny vektor pôsobiacej sily \mathbf{f} .

Globálny vektor okrajovej podmienky

V podstate rovnakým spôsobom, akým vytvárame globálnu maticu hmotnosti, postupujeme aj v prípade lokálneho vektora okrajovej podmienky \mathbf{bc}^e . V tomto prípade navyše využijeme fakt, že napätie je spojité. Napríklad sila v uzle 2 v dôsledku silového pôsobenia prvku 2 na prvok 1 bude mať rovnakú veľkosť ale opačný smer ako sila v uzle 2 v dôsledku silového pôsobenia prvku 1 na prvok 2. Tieto sily sa navzájom eliminujú. Takto sa eliminujú všetky sily na vnútorných hraniciach medzi

prvkami a v globálnom vektore okrajovej podmienky \mathbb{b}_C ostanú iba sily v dôsledku silového pôsobenia vektora napätia h_i na hranici Γ_N .

V 2D alebo 3D prípade postupujeme pri vytváraní globálnych matic a vektorov analogicky. Navyše však musíme zohľadniť to, že v 2D s jedným uzlom súvisia 2 stĺpce a 2 riadky, každý z nich však len s jednou zložkou riešenia. Analogicky, v 3D súvisia s jedným uzlom 3 riadky a 3 stĺpce. Prvky lokálnych matic a vektorov preto nebudeme sčítavať do globálnych matic a vektorov iba podľa príslušnosti k uzlu, ale aj podľa príslušnosti k tej istej zložke riešenia.

Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre celú výpočtovú oblasť $\bar{\Omega}$

Z lokálnych systémov (1.3.85) pre jednotlivé prvky sme zostavili globálny systém rovníc

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbb{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbb{b}_C. \quad (1.3.89)$$

Sústava rovníc (1.3.89) predstavuje štandardnú formuláciu metódy konečných prvkov, tzv. formuláciu s globálnou maticou tuhosti. Vlastnosti tejto formulácie z hľadiska presnosti a výpočtovej efektívnosti sú uvedené v kapitole 1.3.9.

1.3.6 Excitácia vlnového poľa - kinematický seizmický zdroj

Ak chceme numericky simulovať seizmický pohyb na záujmovej lokalite, musíme v numerickom modeli vybudovať seizmické vlny. V skutočnosti dochádza k vyžiareniu seizmických vln počas vzniku a šírenia trhliny na seizmickom zlome. Tento proces ovplyvňuje mnoho faktorov. V súčasnosti sa značná časť seizmológov zameriava práve na pochopenie a opis fyzikálnych procesov, ku ktorým dochádza pri vzniku a šírení trhliny na seizmickom zlome.

Ak nás zaujíma vlnové pole v dostatočnej vzdialenosti od hypocentra³, je možné miesto realistického, ale komplikovaného, dynamického modelu použiť tzv. bodový kinematický model seizmického zdroja. Ak sme relatívne blízko k zdroju, musíme uvažovať konečný rozmer porušenej časti zlomu. Šírenie trhliny môžeme modelovať fyzikálne nekauzálne pomocou kinematického modelu alebo dynamicky.

³ Dostatočná vzdialenosť v tomto zmysle je taká vzdialenosť, keď veľkosť porušenej časti zlomu je malá vzhľadom na uvažované vlnové dĺžky a v porovnaní so vzdialenosťou, v ktorej vlnové pole pozorujeme.

Princíp bodového kinematického zdroja je vysvetlený v mnohých seizmologických knihách, napr. Aki a Richards (1980, 2002), Kostrov a Das (1988), Gubbins (1990), Kennett (2001), Pujol (2003). Tu vysvetlíme iba základy potrebné pre zahrnutie bodového kinematického zdroja do algoritmov MKP. Použijeme najmä výklad v prácach Moczo (1998) a Moczo et al. (2007b).

Posunutie v bode \vec{x} a čase t v dôsledku trhliny šíriacej sa na ploche Σ je možné pomocou reprezentačného teorému zapísať v tvare

$$u_n(\vec{x}, t) = \int_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma, \quad (1.3.90)$$

kde $*$ označuje konvolučný integrál. Pre tenzor hustoty momentu m_{pq} platí

$$m_{pq} = c_{pqrs}(\vec{\xi}) Du_r(\vec{\xi}, t) n_s(\vec{\xi}), \quad (1.3.91)$$

kde $\vec{\xi}$ je poloha na zlomovej ploche Σ , c_{pqrs} je tenzor elastických koeficientov, $D\vec{u}(\vec{\xi}, t)$ je vektor sklzu a \vec{n} je normálový vektor. $G_{np,q}$ je derivácia Greenovho tenzora. Konvolúcia $m_{pq} * G_{np,q}$ fyzikálne predstavuje posunutie v bode \vec{x} v dôsledku silového pôsobenia dvojice síl s ramenom v smere q a silami pôsobiacimi v smere p v bode $\vec{\xi}$ na zlomovej ploche Σ .

Ak uvažujeme bodovú aproximáciu, potom môžeme vzťah (1.3.90) zapísať v tvare

$$u_n(\vec{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q}, \quad (1.3.92)$$

kde tenzor momentu M_{pq} je

$$M_{pq} = \int_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma \quad (1.3.93)$$

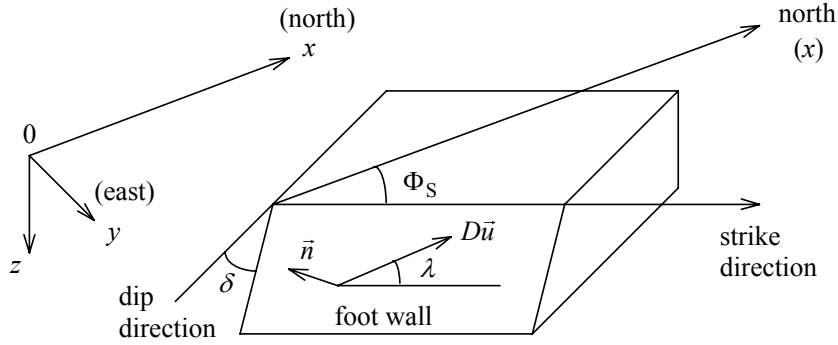
a fyzikálne predstavuje moment výslednej dvojice síl (p, q) .

Ak uvažujeme iba sklz v rovine zlomovej plochy, pozri Obr. 1.3.10, potom pre izotropné kontinuum platí

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0; \quad D\vec{u} = Du \cdot \vec{v} \quad (1.3.94)$$

a tenzor momentu môžeme zapísať v tvare

$$M_{pq} = \int_{\Sigma} \mu Du (n_p \nu_q + n_q \nu_p) d\Sigma. \quad (1.3.95)$$



Obr. 1.3.10: Definícia parametrov určujúcich orientáciu zlomovej plochy a smeru sklzu: Φ_S strike, δ dip, λ rake, \vec{n} normálový vektor k zlomovej ploche, $D\vec{u} = Du \cdot \vec{v}$. Sklz $D\vec{u}$ je uvažovaný ako relatívny pohyb bloku, do ktorého smeruje normálový vektor \vec{n} vzhľadom k bloku, z ktorého smeruje normálový vektor \vec{n} .

Normálový vektor na zlomovú plochu, \vec{n} , ako aj vektor smeru sklzu, \vec{v} , sú na uvažovanej zlomovej ploche konštantné. Ak uvažujeme homogénne prostredie v mieste zlomovej plochy alebo priemernú hodnotu modulu pružnosti v šmyku, μ , môžeme tenzor momentu prepísať v tvare

$$M_{pq} = \mu (n_p \nu_q + n_q \nu_p) \int_{\Sigma} Du \, d\Sigma . \quad (1.3.96)$$

Integrál môžeme aproximovať:

$$\int_{\Sigma} Du \, d\Sigma \doteq \overline{Du}(t) \int_{\Sigma} d\Sigma = \overline{Du}(t) A = \overline{Du} s(t) A , \quad (1.3.97)$$

kde

$$s(t) = \frac{\overline{Du}(t)}{\overline{Du}} \quad \text{a} \quad \overline{Du} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{Du}(t) . \quad (1.3.98)$$

Po dosadení vyjadrenia (1.3.98) do tenzora momentu (1.3.96) a po preusporiadaní členov dostaneme jednoduchý tvar

$$M_{pq} = M_0 (n_p \nu_q + n_q \nu_p) s(t) , \quad (1.3.99)$$

kde

$$M_0 = \mu A \overline{Du} \quad (1.3.100)$$

je skalárny seizmický moment. Zložky vektorov \vec{n} a \vec{v} môžeme vyjadriť pomocou uhlov určujúcich orientáciu zlomovej plochy a orientáciu smeru sklzu, pozri Obr. 1.3.10:

$$\begin{aligned}
 \nu_x &= \cos \lambda \cos \Phi_S + \cos \delta \sin \lambda \sin \Phi_S , \\
 \nu_y &= \cos \lambda \sin \Phi_S - \cos \delta \sin \lambda \cos \Phi_S , \\
 \nu_z &= - \sin \lambda \sin \delta ,
 \end{aligned}
 \tag{1.3.101}$$

a

$$\begin{aligned}
 n_x &= - \sin \delta \sin \Phi_S , \\
 n_y &= \sin \delta \cos \Phi_S , \\
 n_z &= - \cos \delta .
 \end{aligned}
 \tag{1.3.102}$$

Z rovníc (1.3.99) – (1.3.102) potom dostaneme

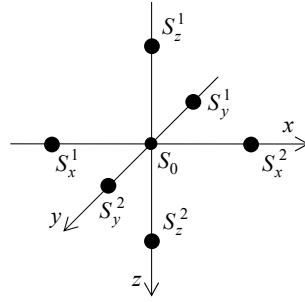
$$\begin{aligned}
 M_{xy}(t) &= M_0 \left(\sin \delta \cos \lambda \cos 2\Phi_S + \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin \lambda \sin 2\Phi_S \right) s(t) , \\
 M_{yz}(t) &= - M_0 \left(\cos \delta \cos \lambda \sin \Phi_S - \cos 2\delta \sin \lambda \cos \Phi_S \right) s(t) , \\
 M_{zx}(t) &= - M_0 \left(\cos \delta \cos \lambda \cos \Phi_S + \cos 2\delta \sin \lambda \sin \Phi_S \right) s(t) , \\
 M_{xx}(t) &= - M_0 \left(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\Phi_S + \sin 2\delta \sin \lambda \sin^2 \Phi_S \right) s(t) , \\
 M_{yy}(t) &= M_0 \left(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\Phi_S - \sin 2\delta \sin \lambda \cos^2 \Phi_S \right) s(t) , \\
 M_{zz}(t) &= M_0 \sin 2\delta \sin \lambda s(t) .
 \end{aligned}
 \tag{1.3.103}$$

Tenzor momentu je symetrický, t.j.,

$$M_{xy} = M_{yx} , M_{yz} = M_{zy} , M_{zx} = M_{xz} .
 \tag{1.3.104}$$

Ak chceme implementovať bodový zdroj do numerickej schémy, musíme simulovať systém dvojíc síl (p, q) s momentmi M_{pq} podľa rovnice (1.3.103) pôsobiacich v jednom sieťovom bode. Frankel (1993) navrhol a použil postup, ako implementovať takéto dvojice síl pomocou člena objemovej sily v pohybovej rovnici kontinua do algoritmu metódy konečných diferencií vo formulácii v posunutí na konvenčnej sieti. Analogicky možno postupovať aj v metóde konečných prvkov. Implementáciu v 2D algoritme je možné nájsť napr. v Bystrický (1995), implementáciu v 3D algoritme je možné nájsť napr. v Gális (2002) alebo v Moczo et al. (2007b).

Uvažujme, že zdroj je umiestnený v uzle S_0 , pozri Obr. 1.3.11. Nech h je vzdialenosť dvoch susedných uzlov. Bodový kinematický zdroj môže byť simulovaný pomocou týchto uzlových síl (t.j., diskrétnych aproximácií objemových síl pôsobiacich v uzloch):



Obr. 1.3.11: Uzly MKP siete použité pri simulácii bodového kinematického zdroja umiestneného v uzle S_0 .

$$\begin{aligned} F_x(S_x^1, t) &= -F_x(S_x^2, t) = \frac{1}{2h} M_{xx}(t) , \\ F_y(S_x^1, t) &= -F_y(S_x^2, t) = \frac{1}{2h} M_{xy}(t) , \\ F_z(S_x^1, t) &= -F_z(S_x^2, t) = \frac{1}{2h} M_{xz}(t) , \end{aligned} \quad (1.3.105)$$

$$\begin{aligned} F_x(S_y^1, t) &= -F_x(S_y^2, t) = \frac{1}{2h} M_{xy}(t) , \\ F_y(S_y^1, t) &= -F_y(S_y^2, t) = \frac{1}{2h} M_{yy}(t) , \\ F_z(S_y^1, t) &= -F_z(S_y^2, t) = \frac{1}{2h} M_{yz}(t) , \end{aligned} \quad (1.3.106)$$

$$\begin{aligned} F_x(S_z^1, t) &= -F_x(S_z^2, t) = \frac{1}{2h} M_{xz}(t) , \\ F_y(S_z^1, t) &= -F_y(S_z^2, t) = \frac{1}{2h} M_{yz}(t) , \\ F_z(S_z^1, t) &= -F_z(S_z^2, t) = \frac{1}{2h} M_{zz}(t) , \end{aligned} \quad (1.3.107)$$

kde $F_i(S_j^k, t)$; $i, j \in \{x, y, z\}$, $k \in \{1, 2\}$ označuje silu pôsobiacu v smere osi i v uzle S_j^k .

1.3.7 Dirichletove okrajové podmienky a neodrážajúce hranice

Pripomeňme, že riešenie sme hľadali v tvare (1.3.31). Dôsledkom nulových tvarových funkcií na hranici Γ_D a vlastnosti (1.3.32) funkcie \tilde{g}_i je, že posunutie v uzle mimo Dirichletovej hranice Γ_D je dané ako lineárna kombinácia tvarových funkcií a posunutie v uzloch na Dirichletovej hranici Γ_D je rovné funkcii \tilde{g}_i , t.j., je priamo predpísané. Preto posunutia v uzloch na Dirichletovej hranici neaktualizujeme riešením sústavy (1.3.89), ale priamo ich predpíšeme podľa požiadaviek. Nemôžeme

Tabuľka 1.3.1: Príklady koeficientov neodrážajúcich hraníc (c je rýchlosť seizmických P- alebo S-vln, Δt je časový krok a h je veľkosť sieťového kroku pri hranici).

	A_{00}	A_{01}	A_{02}	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{20}	A_{21}	A_{22}
Clayton a Enquist (1977)	0	0	0	$1 - \frac{c \Delta t}{h}$	$\frac{c \Delta t}{h}$	0	0	0	0
Reynolds (1978)	0	0	0	$1 - \frac{c \Delta t}{h}$	$1 + \frac{c \Delta t}{h}$	0	0	$-1 - \frac{c \Delta t}{h}$	$\frac{c \Delta t}{h}$

však vynechať príslušné riadky z vektorov diskrétnych posunutí, nakoľko posunutie v uzloch na Dirichletovej hranici má vplyv na deformáciu prvku.

Pri výpočte seizmického pohybu musíme zabezpečiť, aby seizmický pohyb v záujmovej oblasti nebol ovplyvnený odrazmi od hraníc modelu/siete. Použiť dostatočne veľkú sieť je prakticky nemožné, lebo takáto sieť by musela byť príliš veľká z hľadiska nárokov na požadovanú pamäť a čas. Preto sa v praxi používajú hraničné podmienky minimalizujúce množstvo energie odrazenej späť do modelu, tzv. neodrážajúce hranice.

Existuje množstvo prístupov, ako aproximovať neodrážajúce hranice. Ani jeden však nie je dostatočne univerzálny pre použitie v ľubovoľnom modeli/sieti. Väčšina prístupov využíva časovo premennú Dirichletovu okrajovú podmienku závislú od vlnového poľa vnútri modelu. Stručne sa budeme venovať jednej skupine aproximácií neodrážajúcich hraníc. Uvažujme uzol s globálnym číslom K na neodrážajúcej hranici. Potom i -ta zložka vektora posunutia v tomto uzle, \tilde{g}_{iK} , bude určená vzťahom (napr. Moczo, 1998):

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{iK} = & A_{01} u_{iK_1}^{m+1} + A_{02} u_{iK_2}^{m+1} \\ & + A_{10} u_{iK}^m + A_{11} u_{iK_1}^m + A_{12} u_{iK_2}^m \\ & + A_{20} u_{iK}^{m-1} + A_{21} u_{iK_1}^{m-1} + A_{22} u_{iK_2}^{m-1}, \end{aligned} \quad (1.3.108)$$

kde K_1 je globálne číslo prvého uzla "pred" hranicou a K_2 je globálne číslo druhého uzla "pred" hranicou. Koeficienty A sú rôzne pre rôzne typy neodrážajúcich hraníc. Výhodou takéhoto zápisu je možnosť relatívne ľahko implementovať do programu rôzne typy neodrážajúcich hraníc. Príklady koeficientov neodrážajúcich hraníc sú v Tab. 1.3.1. Ak sú všetky koeficienty rovné nule, neodrážajúca hranica sa správa ako pevná hranica.

1.3.8 Algoritmus štandardnej formulácie metódy konečných prvkov

Diskretizácia v čase – časová integrácia

Sústava (1.3.89) je sústavou obyčajných diferenciálnych rovníc v čase. Na jej riešenie môžeme použiť napríklad metódu konečných diferencií. Druhú časovú deriváciu posunutia aproximujeme centrovaným diferenčným vzorcom druhého rádu presnosti a dostaneme

$$\ddot{u}(t) \doteq \frac{u(t - \Delta t) - 2u(t) + u(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2}, \quad (1.3.109)$$

kde Δt je časový krok. Dosadením výrazu (1.3.109) do (1.3.89) dostaneme explicitnú schému

$$u^{(m+1)} \doteq (\Delta t)^2 M^{-1} [f^m + b c^m] + [2 - (\Delta t)^2 M^{-1} K] u^m - u^{(m-1)}, \quad (1.3.110)$$

kde index m predstavuje časovú hladinu; časová hladina m zodpovedá času $t^m = t + m \Delta t$. Podľa schémy (1.3.110) vieme zo známych hodnôt veličín v časových hladinách m a $m - 1$, t.j., v čase $t + m\Delta t$ a $t + (m - 1)\Delta t$, vypočítať hodnotu posunutia v časovej hladine $m + 1$, t.j., v čase $t + (m + 1) \Delta t$. Aby sme schému mohli použiť, potrebujeme počiatočné podmienky - posunutie v časových hladinách $m = 0$ a $m = -1$, t.j., v čase $t = 0$ a $t = -\Delta t$. Pre numerické simulácie šírenia seizmických vĺn predpokladáme, že kontinuum je v čase pred vznikom zemetrasenia v pokoji. Preto môžeme uvažovať počiatočné podmienky v tvare

$$\begin{aligned} u^0 &= 0, \\ u^{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.111)$$

Schéma (1.3.110) je podmiennečne stabilná. Podmienka stability schémy (1.3.110) pre prvok QUAD4 tvaru štvorca s hranou h v 2D a pre prvok HEX8 tvaru kocky s hranou h v 3D je (napr. Serón et al., 1989)

$$\Delta t \leq \frac{h}{\alpha_{max}}, \quad (1.3.112)$$

kde α_{max} je maximálna rýchlosť P-vĺn v prostredí.

Diskretizácia výpočtovej oblasti – konštrukcia siete

Sieť a tvar prvkov volíme tak, aby čo najlepšie vyhovovali charakteru problému, ktorý budeme riešiť. Výpočtová oblasť musí byť pokrytá prvkami bez prekryvov a dier. Tvar prvkov musí, v rámci zvolenej úrovne presnosti, kopírovať tvar voľného povrchu a/alebo vnútorných rozhraní⁴.

Pripomeňme, že z vlastností Lagrangeových polynómov, ktoré používame ako tvarové funkcie, vyplýva, že počet uzlov v prvku súvisí so stupňom aproximácie pre tento prvok.

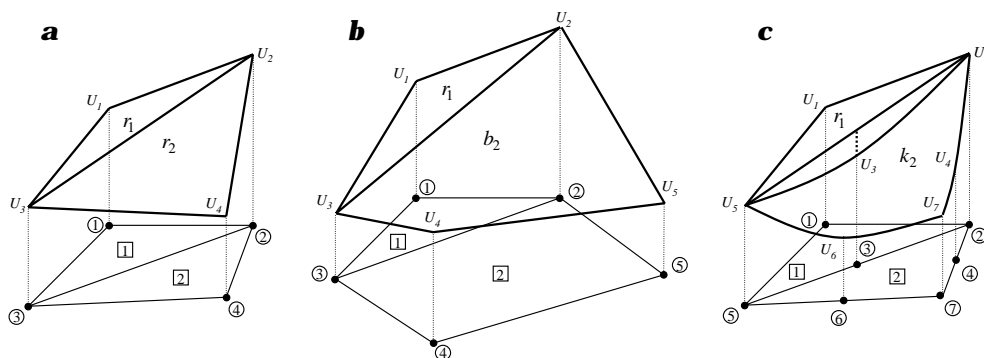
V najjednoduchšom prípade pokryjeme výpočtovú oblasť prvkami rovnakého tvaru a veľkosti (napríklad kockami s hranou h). Niekedy môže byť výhodnejšie, ak zostavíme sieť z prvkov rôznych tvarov a veľkostí.

Vo výslednej sieti musí byť splnená podmienka spojitosti posunutí na všetkých kontaktoch prvkov. Počas procesu vytvárania globálneho systému rovníc pre oblasť $\bar{\Omega}$ vyžadujeme spojitost' posunutí iba v uzloch. V 1D je táto podmienka vždy totožná s podmienkou spojitosti posunutí na celom kontakte dvoch prvkov, avšak v 2D a 3D je kontakt dvoch prvkov často čiara (úsečka) alebo plocha. V takých prípadoch musíme overiť, že posunutie bude spojité na všetkých kontaktoch prvkov v sieti, najmä na kontaktoch prvkov rôzneho tvaru alebo rádu aproximácie.

Kvôli jednoduchosti a prehľadnosti uvažujme 2D príklady. Na Obr. 1.3.12a sú dva lineárne trojuholníkové prvky. Proces vytvárania globálneho systému zabezpečí, že posunutia v uzloch zdieľaných prvkami 1 a 2 budú rovnaké pre oba prvky. Uvažujme iba jednu zložku riešenia. Riešenie v oboch prvkoch má tvar rovín r_1 a r_2 . Priesečník rovín na hranici medzi uzlami 2 a 3 je úsečka. Pretože úsečka je jednoznačne definovaná dvomi bodmi, je riešenie na tomto kontakte spojité.

Uvažujme teraz príklad na Obr. 1.3.12b. Prvok 2 je bilineárny štvoruholník (QUAD4). Riešenie v prvku 1 je rovina r_1 . Riešenie v prvku 2 je bilineárna funkcia b_2 . Pripomeňme, že bilineárna funkcia má na hraniciach prvku tvar úsečky. Rovnako ako v predošlom príklade, posunutia v uzloch zdieľaných prvkami 1 a 2 budú rovnaké pre oba prvky a budú teda jednoznačne určovať priesečník funkcií r_1 a b_2 , t.j. úsečku.

⁴ Plochu v oblasti Ω , na ktorej sa materiálové parametre menia skokom, nespojito, nazývame vnútorným rozhraním.



Obr. 1.3.12: K spojitosti posunutia na kontakte dvoch prvkov - 2D príklady: **a** kontakt dvoch lineárnych trojuholníkov – posunutie je spojité, **b** kontakt lineárneho trojuholníka a bilineárneho štvoruholníka (QUAD4) – posunutie je spojité, **c** kontakt lineárneho a kvadratického trojuholníka – posunutie je nespojité. (Čísla v krúžkoch predstavujú globálne čísla uzlov, čísla v štvorčekoch predstavujú globálne čísla prvkov.)

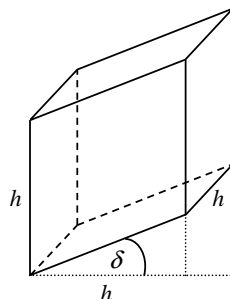
Na Obr. 1.3.12c vidíme kontakt lineárneho trojuholníka s kvadratickým trojuholníkom. Riešenie v prvku 1 je rovina r_1 . Riešenie v prvku 2 je kvadratická funkcia k_2 . Riešenie na kontakte prvkov medzi uzlami 2 a 3 je zo strany prvku 1 úsečka a zo strany prvku 2 parabola. Je preto zrejmé, že na tomto kontakte je riešenie nespojité. Takýto kontakt prvkov je neprípustný.

Analogicky môžeme postupovať aj s inými kontaktmi prvkov v 2D a v 3D.

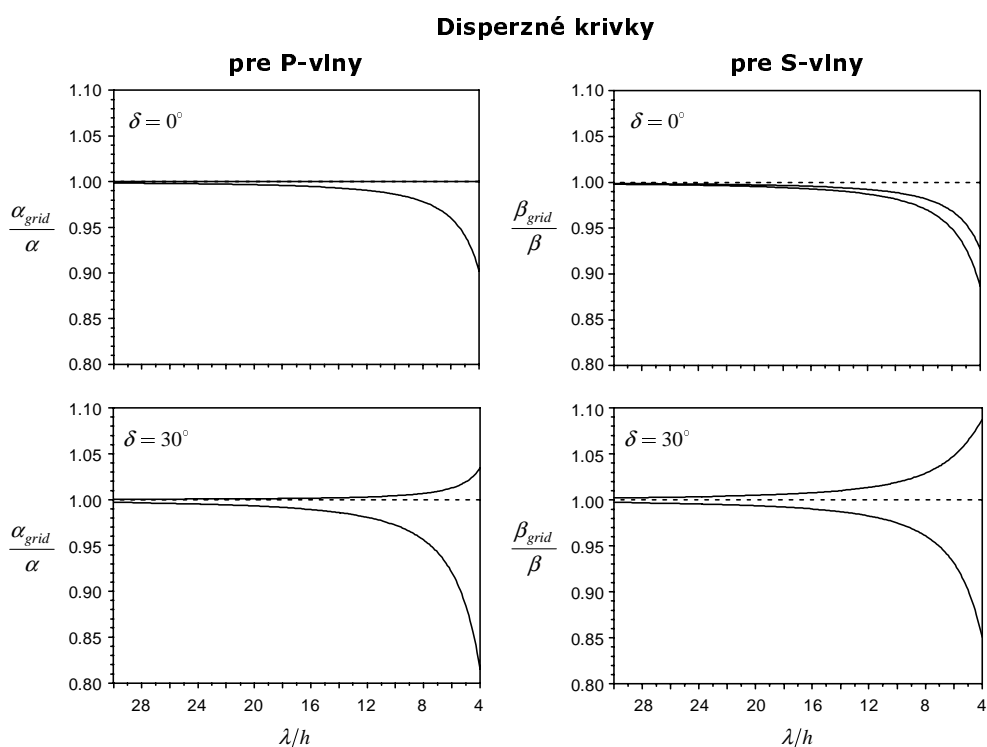
Dôsledkom približnosti diskrétného modelu je sieťová disperzia, t.j., závislosť fázovej a grupovej rýchlosti šírenia vln od frekvencie. Sieťovú disperziu v 2D sieti tvorenej prvkami tvaru obdĺžnika skúmali Belytschko a Mullen (1978) a Marfurt (1984).

Prístup navrhnutý Marfurtom použili Bystrický et al. (1999) pre vyšetrenie sieťovej disperzie v 3D sieti tvorenej deformovanými prvkami, pozri Obr. 1.3.13. Parameter δ určuje deformáciu kocky; $\delta = 0^\circ$ zodpovedá kocke s hranou h .

Na Obr. 1.3.14 sú disperzné krivky pre P a S-vlny s pomerom rýchlostí $\alpha/\beta = 1.74$ v pravidelnej sieti ($\delta = 0^\circ$) a v deformovanej sieti ($\delta = 30^\circ$). Analýza sieťovej disperzie bola urobená pre maximálny možný časový krok Δt , t.j., $\Delta t \cdot \alpha/h = 1$. Rôznym smerom šírenia vln cez prvok zodpovedajú rôzne disperzné krivky. Na Obr. 1.3.14 sú len hraničné krivky, všetky ostatné disperzné krivky by ležali medzi nimi. Vzorkovací pomer, λ/h , vyjadruje počet vzoriek na jednu vlnovú dĺžku. Za predpokladu konštantnej vlnovej dĺžky λ platí: čím väčší vzorkovací pomer,



Obr. 1.3.13: Tvar prvkov použitých pri analýze sieťovej disperzie, Bystrický et al. (1999).



Obr. 1.3.14: Disperzné krivky pre pravidelnú ($\delta = 0^\circ$) a deformovanú ($\delta = 30^\circ$) sieť prvkov. Porovnávaná je predpísaná rýchlosť P- a S- vln, α a β , s rýchlosťou v sieti, α_{grid} a β_{grid} . Ukázané sú len hraničné krivky zo súboru kriviek pre všetky možné smery šírenia. (Bystrický et al., 1999)

tým menší priestorový krok h . Z Obr. 1.3.14 je zrejmé, že čím väčší priestorový krok h použijeme, tým väčší je rozdiel medzi skutočnou a sieťovou rýchlosťou. Disperzné krivky tiež indikujú, že rozdiel je väčší pre viac deformované prvky (rastúce δ). Zvoliť podmienky pre vzorkovanie znamená zvoliť kompromis medzi sieťovou disperziou a efektívnosťou výpočtu. Pri určení priestorového vzorkovania treba zvážiť aj vzdialenosť, do akej sa budú vlny šíriť. Efekt sieťovej disperzie je

kumulatívny, t.j., čím je väčšia dráha šírenia, tým je efekt sieťovej disperzie výraznejší. Bežné simulácie nie sú monofrekvenčné, inými slovami v diskretnom modeli sa šíria vlny s rôznymi vlnovými dĺžkami. Podmienky na vzorkovanie musíme odvodiť pre najhoršie vzorkovanú, t.j., najkratšiu, vlnovú dĺžku λ_{min} , ktorej šírenie chceme dostatočne presne simulovať. Pre typický interval vzdialeností pri simulácii seizmického pohybu pri zemetrasení môžeme za rozumný kompromis považovať interval

$$h \in \langle \lambda_{min}/12, \lambda_{min}/8 \rangle . \quad (1.3.113)$$

Sústredená matica hmotnosti (Lumped mass matrix)

Zo schémy (1.3.110) vyplýva, že na vypočítanie posunutia v časovej hladine $m + 1$ potrebujeme vypočítať maticu \mathbb{M}^{-1} , t.j., inverznú maticu ku globálnej matici hmotnosti \mathbb{M} . Matica \mathbb{M} je riedka matica. Napríklad v 3D sieti prvkov HEX8 obsahuje matica \mathbb{M} $3N^n \times 3N^n$ prvkov. Z toho nenulových je len približne $27 \times 3N^n$. Inverzná matica riedkej matice však už nie je riedka. Na uloženie inverznej globálnej matice hmotnosti už aj pre relatívne malú sieť s 10^6 uzlami, t.j., $N^n = 10^6$, by sme potrebovali až 36 TB operačnej pamäte (odhad nárokov na operačnú pamäť je podrobnejšie diskutovaný v kapitole 1.3.9). Situácia je oveľa jednoduchšia, ak je globálna matica hmotnosti diagonálna. V takom prípade nám na uloženie globálnej matice hmotnosti stačí iba N^n čísiel, ak uvážime, že hmotnosť uzla bude rovnaká pre všetky smery, t.j., v smere x , y a prípadne z . Keďže inverznou maticou diagonálnej matice je diagonálna matica, nie sú ani problémy s výpočtom a uložením inverznej matice hmotnosti. Preto sa často globálna matica hmotnosti aproximuje diagonálnou, tzv. sústredenou maticou hmotnosti (z angl. lumped mass matrix). Sústredenú maticu hmotnosti $\tilde{\mathbb{M}}$ získame z matice \mathbb{M} takto:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{M}}_{ii} &= \sum_j \mathbb{M}_{ij}, \\ \tilde{\mathbb{M}}_{ij} &= 0 \quad \text{pre } i \neq j. \end{aligned} \quad (1.3.114)$$

Inými slovami, nenulové sú iba diagonálne prvky sústredenej matice hmotnosti, ktoré sú dané súčtom všetkých prvkov v príslušnom riadku globálnej matice hmotnosti.

Výpočtová schéma

1. Konštrukcia siete

2. Inicializácia

- Výpočet lokálnych matíc hmotnosti \mathbf{M}^e pre všetky prvky v sieti, podľa (1.3.60) a (1.3.61)
- Výpočet lokálnych matíc tuhosti \mathbf{K}^e pre všetky prvky v sieti, podľa (1.3.78) až (1.3.84)
- Vytvorenie globálnej matice hmotnosti \mathbb{M} z lokálnych matíc hmotnosti \mathbf{M}^e
- Aproximovanie globálnej matice hmotnosti \mathbb{M} sústredenou maticou hmotnosti $\tilde{\mathbb{M}}$, podľa (1.3.114)
- Vytvorenie globálnej matice tuhosti \mathbb{K} z lokálnych matíc tuhosti \mathbf{K}^e
- Inicializácia počiatočných podmienok, podľa (1.3.111)
- Inicializácia posunutí na Dirichletovej hranici
- $m = 1$

3. Časová slučka

- Výpočet lokálneho vektora pôsobiacej sily \mathbf{f}^e pre všetky prvky, podľa (1.3.55) a (1.3.56)
- Výpočet lokálneho vektora okrajovej podmienky \mathbf{bc}^e pre všetky prvky, podľa (1.3.57) a (1.3.58)
- Vytvorenie globálneho vektora pôsobiacej sily \mathbf{f}
- Vytvorenie globálneho vektora okrajovej podmienky \mathbf{bc}
- Aktualizácia posunutí vo vnútorných uzloch, podľa (1.3.110)
- Aktualizácia posunutí v uzloch na Dirichletovej hranici, napr. podľa (1.3.108)
- $m = m + 1$
- Návrat na začiatok časovej slučky

1.3.9 Výpočtová efektívnosť štandardnej formulácie

Z hľadiska výpočtovej efektívnosti je najväčším problémom formulácie s globálnou maticou tuhosti, t.j., štandardnej formulácie MKP, práve práca s globálnou maticou tuhosti. Globálna matica tuhosti má $3N^n \times 3N^n$ prvkov. V praktických aplikáciách môžeme uvažovať siete obsahujúce rádovo $10^6 - 10^8$ uzlov. Uvažujme napríklad malú sieť z 10^6 prvkov. Na uloženie celej matice tuhosti v jednoduchej presnosti⁵ by sme potrebovali 36 TB operačnej pamäte⁶. Jeden prvok globálnej matice tuhosti vyjadruje elasticnú väzbu medzi dvoma uzlami, prislúchajúcimi k riadku a stĺpcu daného prvku matice tuhosti. Pretože akákoľvek interakcia medzi uzlami je možná iba v rámci prvku, je zrejmé, že ľubovoľný uzol bude mať väzby iba na uzly v najbližšom okolí. Presný počet uzlov závisí od typu prvkov a tvaru siete. V prípade rovnomernej siete HEX8 prvkov bude mať ľubovoľný vnútorný⁷ uzol väzbu na 26 okolitých uzlov. V jednom riadku globálnej matice tuhosti bude preto 3×27 nenulových prvkov, kde sme zohľadnili 3 rozmery a aj interakciu uzla so sebou samým. Uzly na okraji siete budú mať väzbu na menej uzlov, to však pri odhade môžeme, vzhľadom na podstatne menší počet uzlov na okrajoch siete voči uzlom vnútri siete, zanedbať. Celkovo tak globálna matica tuhosti bude mať približne $3 \times 27 \times 3N^n$ nenulových prvkov, čo je oveľa menej, ako rozmer celej matice. Preto na uloženie globálnej matice tuhosti môžeme využiť rôzne algoritmy na prácu s riedkymi maticami. Odhadnúť pamäťové nároky takýchto algoritmov vo všeobecnosti je zložité, nakoľko existuje viacero algoritmov, pričom efektívnosť niektorých závisí od číslovania prvkov a uzlov v sieti. Minimálne pamäťové nároky pre 10^6 uzlov budú 972 MB, pričom do odhadu sme zarátali iba nenulové prvky globálnej matice tuhosti. Algoritmy na prácu s riedkymi maticami vyžadujú pomocné polia, pričom pamäťové nároky na uloženie týchto polí sa líšia v závislosti od konkrétneho algoritmu. Za istých okolností však môžu byť pamäťové nároky pomocných polí väčšie

⁵ Jednoduchá presnosť (z angl. single precision) znamená, že na uloženie jedného čísla v operačnej pamäti sa použijú 4 B, t.j., bajty.

⁶ Bežné PC v dnešnej dobe má 1-2 GB operačnej pamäte, stredne veľké výpočtové systémy, či klastre majú k dispozícii rádovo 10-ky GB operačnej pamäte. Najlepšie však pamäťové nároky ilustruje fakt, že v súčasnosti najväčší superpočítač na svete, BlueGene/L, podľa www.top500.org (2006), má inštalovaných 32 TB operačnej pamäte.

⁷ V tomto prípade máme na mysli uzol, ktorý neleží na okraji siete.

než nároky na uloženie nenulových prvkov matice tuhosti. Vždy však budú nároky podstatne menšie ako pamäťové nároky na uloženie celej globálnej matice tuhosti. Pamäťové nároky matice tuhosti (aj pri využití jej riedkosti) sú stále príliš veľké pre mnohé realistické modely.

Výhodou formulácie s globálnou maticou tuhosti je, že lokálne matice tuhosti závisia len od elastických parametrov prostredia a tvarových funkcií. Tvarové funkcie sú konštantné v čase. Ak sa materiálové parametre nemenia s časom, tak aj matica tuhosti je nezávislá od času. Stačí ju teda vypočítať iba raz pre zvolenú konfiguráciu prvkov a elastických parametrov. V inom prípade by sme museli matice tuhosti počítať pre každú časovú hladinu.

2 Ciele dizertačnej práce

1. Vypracovať MKP algoritmus založený na koncepte vratnej sily.
2. Implementovať realistický útlm do MKP algoritmu založeného na MKP schéme s vektorom vratnej sily.
3. Implementovať dynamický model seizmického zdroja do MKP algoritmu.
4. Navrhnúť a implementovať algoritmus hybridnej MKD-MKP metódy na efektívnu simuláciu seizmického pohybu.

Ciele dizertačnej práce

3 Výsledky dizertačnej práce

3.1 Alternatívna formulácia MKP s vektorom vratnej sily

V kapitole 1.3 bola vysvetlená štandardná formulácia MKP, t.j., formulácia MKP s globálnou maticou tuhosti. Nevýhodou štandardnej formulácie MKP sú príliš veľké pamäťové nároky, kvôli ktorým nie je možné použiť túto formuláciu na riešenie mnohých dôležitých problémov. Formulácia MKP s vektorom vratnej sily značne redukuje pamäťové nároky. Naša formulácia a implementácia je založená na postupe, ktorý naznačil Ralph Archuleta (Archuleta, 1976, a osobná komunikácia), ktorý sa odvoláva na prácu Frazier a Petersen (1974).

3.1.1 Lokálny vektor vratnej sily

Formuláciu MKP s vektorom vratnej sily odvodíme priamo z Galerkinovej formy pohybovej rovnice pre jeden prvok (1.3.51),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^m} s_k \rho s_l \det \mathbf{J} d\Omega \ddot{a}_{il} + \int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} d\Omega - \int_{\Omega^m} s_k f_i \det \mathbf{J} d\Omega \\ + \int_{\Omega^m} s_k \ddot{g}_i \det \mathbf{J} d\Omega - \int_{\Gamma_N^m} s_k h_i^e \det \mathbf{J} d\Gamma = 0 ; \\ k, l \in \{1, 2, \dots, n^n\} . \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Pri úprave prvého, tretieho a piateho člena ľavej strany postupujeme rovnako ako v prípade štandardnej formulácie, pričom dostaneme lokálnu maticu hmotnosti \mathbf{M}^e , lokálny vektor pôsobiacej sily \mathbf{f}^e a lokálny vektor okrajovej podmienky \mathbf{bc}^e . Člen s Dirichletovou okrajovou podmienkou, t.j., štvrtý člen ľavej strany, je kvôli vlastnostiam funkcie \tilde{g}_i rovný nule.

Upravme druhý člen ľavej strany rovnice (3.1.1), t.j.,

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} d\Omega . \quad (3.1.2)$$

Pre $i = x$ môžeme integrál prepísať v tvare

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} d\Omega \xrightarrow{i=x} \int_{\Omega^m} [s_{k,x} \sigma_{xx} + s_{k,y} \sigma_{xy} + s_{k,z} \sigma_{xz}] \det \mathbf{J} d\Omega . \quad (3.1.3)$$

Pomocou vektora tvarových funkcií \mathbf{s} potom môžeme definovať lokálny vektor x -zložiek vratnej sily

$$\mathbf{r}_x = - \int_{\Omega^m} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xx} + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{xy} + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{xz}) \det \mathbf{J} \, d\Omega . \quad (3.1.4)$$

Analogicky postupujeme aj pre $i = y$, pričom dostaneme

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \xrightarrow{i=y} \int_{\Omega^m} [s_{k,x} \sigma_{xy} + s_{k,y} \sigma_{yy} + s_{k,z} \sigma_{yz}] \det \mathbf{J} \, d\Omega \quad (3.1.5)$$

a

$$\mathbf{r}_y = - \int_{\Omega^m} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xy} + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{yy} + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{yz}) \det \mathbf{J} \, d\Omega . \quad (3.1.6)$$

Pre $i = z$ dostaneme

$$\int_{\Omega^m} s_{k,j} \sigma_{ij} \det \mathbf{J} \, d\Omega \xrightarrow{i=z} \int_{\Omega^m} [s_{k,x} \sigma_{xz} + s_{k,y} \sigma_{yz} + s_{k,z} \sigma_{zz}] \det \mathbf{J} \, d\Omega \quad (3.1.7)$$

a

$$\mathbf{r}_z = - \int_{\Omega^m} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xz} + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{yz} + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{zz}) \det \mathbf{J} \, d\Omega . \quad (3.1.8)$$

Vektor \mathbf{r}^e ,

$$\mathbf{r}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_z \end{bmatrix} , \quad (3.1.9)$$

je lokálny vektor vratnej sily. Zložka vektora, t.j., \mathbf{r}_{ik}^e , predstavuje i -tu zložku sily pôsobiacej v uzle k v dôsledku elastických síl pôsobiacich v prvku. Tieto elastické sily sú iba reakciou na aktuálnu deformáciu prvku a pôsobia tak, aby sa prvok dostal späť do stavu rovnováhy. Z toho aj názov vratná sila.

Zložky tenzora napätia σ_{ij} vypočítame z Hookovho zákona, napríklad vzorca (1.3.67). Pre 3D problém tak dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_x + \lambda \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_y + \lambda \mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_z , \\ \sigma_{yy} &= \lambda \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_x + (\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_y + \lambda \mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_z , \\ \sigma_{zz} &= \lambda \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_x + \lambda \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_y + (\lambda + 2\mu) \mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_z , \\ \sigma_{xy} &= \mu (\mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_x + \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_y) , \\ \sigma_{xz} &= \mu (\mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_x + \mathbf{s}_{,x}^T \mathbf{u}_z) , \\ \sigma_{yz} &= \mu (\mathbf{s}_{,z}^T \mathbf{u}_y + \mathbf{s}_{,y}^T \mathbf{u}_z) . \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

3.1.2 Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre jeden prvok

Pomocou lokálnej matice hmotnosti M^e , lokálneho vektora pôsobiacej sily f^e , lokálneho vektora okrajovej podmienky bc^e a lokálneho vektora vratnej sily r^e môžeme zapísať Galerkinovu formu pohybovej rovnice, t.j., diskretizovanú slabú formu pohybovej rovnice, v maticovom tvare:

$$M^e \ddot{u}^e = r^e + f^e + bc^e. \quad (3.1.11)$$

3.1.3 Maticová forma diskretizovanej slabej formy pohybovej rovnice pre celú výpočtovú oblasť

Rovnako ako v štandardnej formulácii MKP aj teraz vytvoríme z lokálnych systémov pre všetky prvky jeden globálny systém

$$M\ddot{u} = r + f + bc, \quad (3.1.12)$$

kde r je globálny vektor vratnej sily.

Diferenciálnu rovnicu (3.1.12) riešime metódou konečných diferencií. Dosadením aproximácie (1.3.109) za druhú časovú deriváciu vektora posunutia dostaneme explicitnú schému pre aktualizovanie posunutia v časovej hladine $m + 1$

$$u^{(m+1)} = (\Delta t)^2 M^{-1} [r^m + f^m + bc^m] + 2u^m - u^{(m-1)}. \quad (3.1.13)$$

3.1.4 Stabilita a sieťová disperzia

Porovnaním rovníc (1.3.85) a (3.1.11) zistíme, že

$$r^e = -K^e \cdot u^e, \quad (3.1.14)$$

inými slovami, že vektor vratnej sily je počítaný aj vo formulácii MKP s globálnou maticou tuhosti. Na základe tohoto porovnania môžeme povedať, že formulácia MKP s vektorom vratnej sily sa od štandardnej formulácie MKP líši iba v spôsobe výpočtu vratnej sily. Preto stabilita a sieťová disperzia formulácie MKP s vratnou silou zostávajú nezmenené v porovnaní so štandardnou formuláciou MKP s globálnou maticou tuhosti.

3.1.5 Výpočet vektora vratnej sily - redukovaná integrácia

Pripomeňme, že na výpočet lokálneho vektora vratnej sily, vzťahy (3.1.4), (3.1.6) a (3.1.8), a lokálnej matice hmotnosti, vzťah (1.3.61), používame vo všeobecnosti numerickú kvadratúru¹. Na výpočet môžeme použiť akúkoľvek kvadratúru, avšak kvadratura by mala byť dostatočne presná a, najmä, v prípade použitia formulácie MKP s vratnou silou, aj výpočtovo efektívna. Pre numerickú integráciu polynomiálnych funkcií je, ako je všeobecne známe, Gaussova kvadratura najpresnejšou kvadraturou pre zvolený počet integračných bodov. Inými slovami, pre zvolenú presnosť je Gaussova kvadratura výpočtovo najefektívnejšou, nakoľko používa najmenej integračných bodov. Preto je práve Gaussova kvadratura v MKP veľmi často používaná.

Požadovaný rád presnosti môžeme určiť zo vzťahov na výpočet vektora vratnej sily a zložiek tenzora napätia. Kvôli jednoduchosti uvažujme, že prvok bude vyjadrený priamo v lokálnych súradniciach. V takom prípade nemusíme uvažovať transformáciu z lokálnych do globálnych súradníc. Požadovaný rád presnosti je určený tou kombináciou derivácií tvarových funkcií, ktoré vyžadujú najvyšší rád presnosti integrácie. Aplikácia numerickej kvadratury rovnakého alebo vyššieho rádu, ako je požadovaný, vedie k presnej integrácii (presná tu znamená, že chyba bude spôsobená iba diskretnou reprezentáciou čísel v počítači).

V prípade deformovaných prvkov už treba uvažovať aj transformáciu súradníc. Vo všeobecnosti platí, že čím viac deformovaný prvok uvažujeme a použijeme vyššie uvedený odhad rádu presnosti numerickej kvadratury založený na nedeformovanom prvku, tým väčšia chyba pri integrácii vznikne.

Avšak existujú také problémy, pre ktoré aplikácia dostatočne presnej kvadratury nevedie k správnym výsledkom (napr. Belytschko et al., 2000). V niektorých prípadoch sa prvok s dostatočne presnou kvadraturou správa príliš tuho, v dôsledku čoho sa zablokuje. Výsledky v takom prípade môžu mať amplitúdu až o rád menšiu ako správne riešenie. Aplikácia kvadratury s nižším rádom presnosti, tzv. redukovaná integrácia, môže v takýchto prípadoch viesť k lepšiemu správaniu prvku, dôsledkom čoho môžu byť presnejšie výsledky. Redukovaná integrácia vedie niekedy k vzniku

¹Niekedy sa pojem kvadratura používa iba pre označenie 2D numerickej integračnej schémy. V 3D sa potom používa označenie kubatura. My budeme pojmom kvadratura označovať 1D, 2D aj 3D numerické schémy.

oscilácií (falošné módy s nulovou energiou, hour-glass modes, spurious zero-energy modes, zero-energy modes). Ak riešenie získané pomocou redukovanej integrácie nie je porušené osciláciami, je možné ho považovať za korektné riešenie (napr. Zienkiewicz a Taylor, 1989; Ottosen a Petersson, 1992).

Štandardne sa prvok HEX8 používa s 8-bodovou (t.j., dva body v jednom smere) Gaussovou kvadrátúrou (8GK). Táto kvadrátúra je presná pre kubické polynómy a pre nedeformovaný prvok HEX8 predstavuje presnú kvadrátúru. Na základe numerických testov, ktoré ukázali, že Gaussova kvadrátúra, resp. presná integrácia, nevedie k správnym výsledkom vo výpočtoch s dynamickým seizmickým zdrojom (pozri kapitolu 3.3.4), sme sa rozhodli použiť redukovanú integráciu. Prvou testovanou redukovanou kvadrátúrou bola 1-bodová Gaussova kvadrátúra (1GK), ktorej jediný integračný bod je presne v strede prvku. Táto kvadrátúra je presná pre lineárne funkcie. Pretože v numerických testoch (pozri nižšie) sa ukázalo, že výsledky získané s touto kvadrátúrou sú príliš ovplyvnené osciláciami, vyskúšali sme aj druhú redukovanú kvadrátúru. 8-bodová Lobattova kvadrátúra (8LK) využíva 8 integračných bodov v rohoch prvku, teda v uzloch. Je presná pre lineárne funkcie. Táto kvadrátúra mala vo vykonaných numerických testoch veľmi dobré vlastnosti.

Zmenou integračnej schémy sa môže zmeniť aj stabilita výslednej MKP schémy. Analýza stability prvku s redukovanou integráciou je uvedená v práci Hughes (2000), ktorá sa ďalej odvoláva na prácu Flanagan a Belytschko (1981). V 2D je podmienka stability pre nedeformovaný prvok QUAD4

$$\Delta t \leq \frac{1}{\alpha_{max} \left[\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.1.15)$$

kde h_x je priestorový krok v smere osi x a h_y priestorový krok v smere osi y .

Pre prvok tvaru štvorca, t.j., ak $h_x = h_y = h$, dostaneme

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{\alpha_{max}}. \quad (3.1.16)$$

Analogicky pre 3D je podmienka stability pre nedeformovaný prvok HEX8

$$\Delta t \leq \frac{1}{\alpha_{max} \left[\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.1.17)$$

kde h_z je priestorový krok v smere osi z . Pre prvok tvaru kocky, t.j., ak $h_x = h_y = h_z = h$, dostaneme

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{h}{\alpha_{max}}. \quad (3.1.18)$$

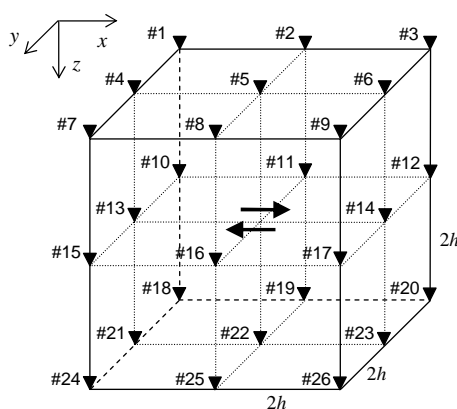
Porovnaním podmienok pre stabilitu s redukovanou integráciou, t.j. vzťahov (3.1.16) a (3.1.18), s podmienkou pre presnú integráciu, (1.3.112), zistíme, že časový krok pre schému s redukovanou integráciou je menší ako pre presnú integráciu.

Numerické testy

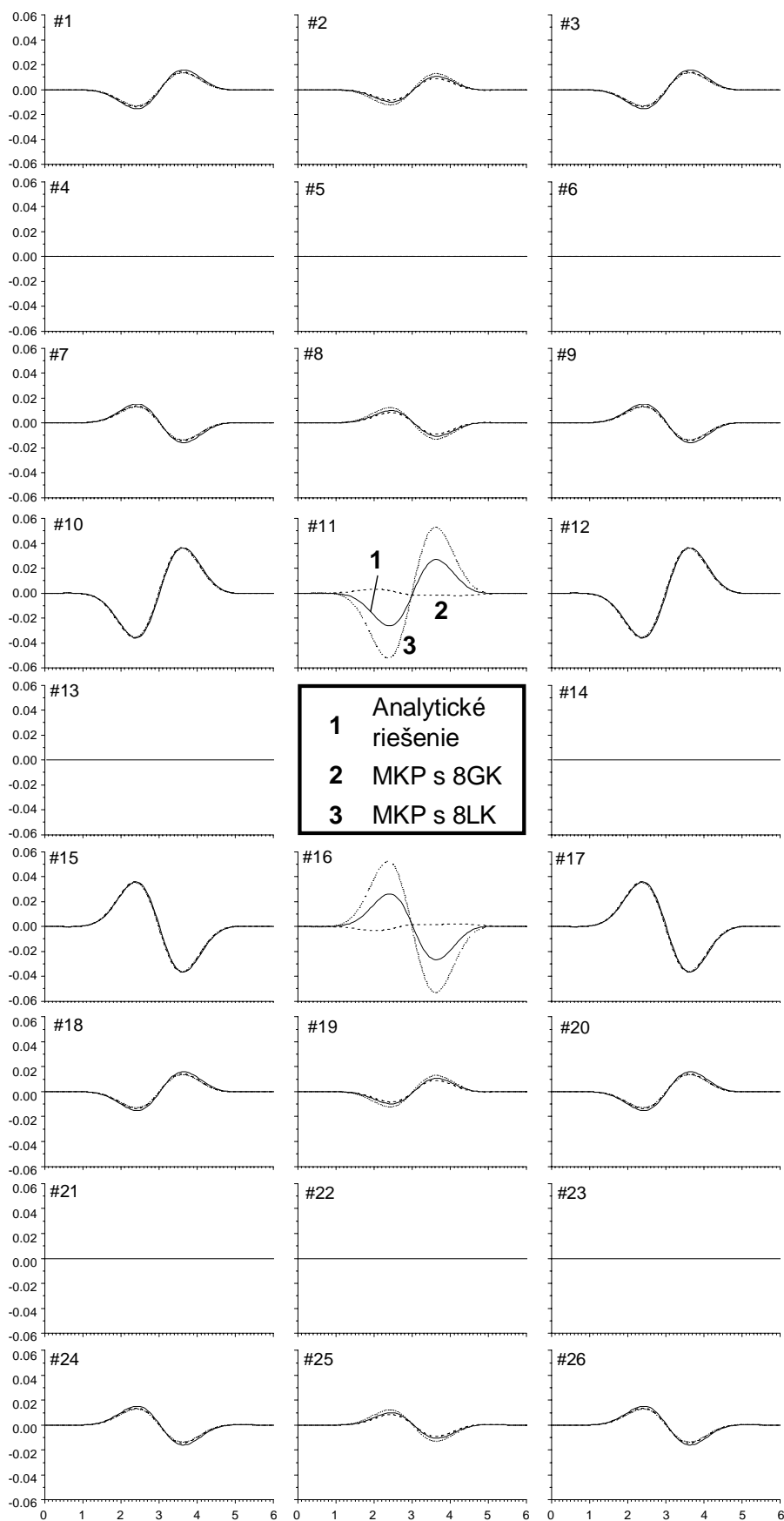
Cieľom prvej série numerických testov bolo porovnať numerické správanie MKP schém s redukovanými kvadrátúrami (1GK a 8LK) a MKP schémy s použitím Gaussovej (presnej) integrácie (8GK) s analytickým riešením. Uvažovali sme model neohraničeného homogénneho elastického prostredia s hustotou 2700 kg.m^{-3} , rýchlosťou P-vĺn 5196 km.s^{-1} a rýchlosťou S-vĺn 3000 km.s^{-1} . V teste boli použité iba prvky HEX8 tvaru kocky s hranou 250 m . Výpočtový model mal veľkosť $35 \times 35 \times 35 \text{ km}^3$ (t.j., $140 \times 140 \times 140$ prvkov). Bodový kinematický dislokačný zdroj bol umiestnený v strede modelu. Parametre bodového zdroja boli $\Phi_S = 0^\circ$, $\delta = 90^\circ$, $\lambda = 0^\circ$ a seizmický moment $M_0 = 10^{16} \text{ N.m}$. Ako časová funkcia bol zvolený Gaborov signál v tvare

$$f(t) = \cos(\omega \cdot (t - T_S) + \psi) \cdot \exp\left\{-\left[\frac{\omega \cdot (t - T_S)}{\gamma}\right]^2\right\}, \quad (3.1.19)$$

kde $\omega = 0.45 \pi \text{ Hz}$, $\Psi = \pi/2$, $\gamma = 1.5$ a $T_S = 3 \text{ s}$. Vo výpočtoch s 8GK bol použitý časový krok 0.048 s a pre výpočty s redukovanou kvadrátúrou, t.j., 1GK a 8LK, časový krok 0.024 s .

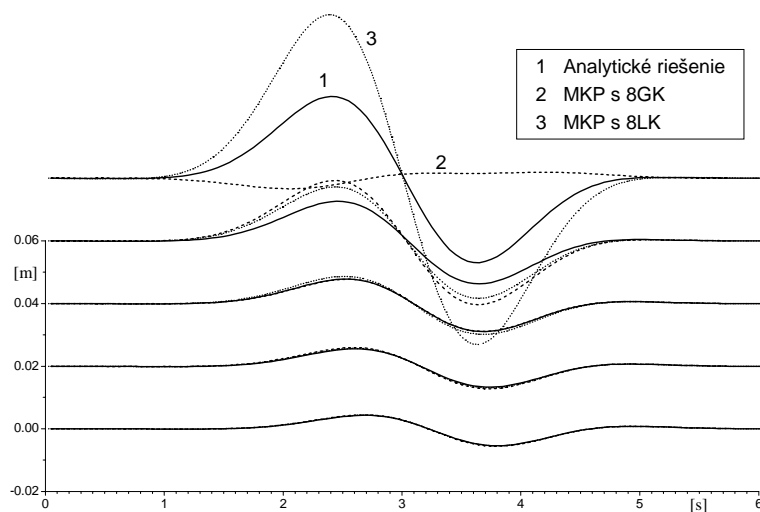


Obr. 3.1.1: Poloha prijímačov pre test s bodovým kinematickým dislokačným zdrojom (h je veľkosť jedného prvku).

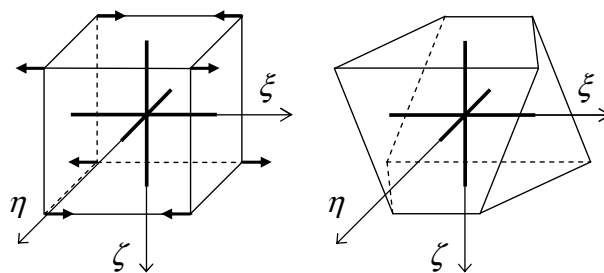


Obr. 3.1.2: Časový záznam U-zložky posunutia v prijímačoch podľa Obr. 3.1.1.

Vlnové pole bolo zaznamenávané v prijímačoch v blízkosti zdroja, pozri Obr. 3.1.1. Druhá skupina prijímačov bola rozložená v tej istej konfigurácii, ale vo vzdialenosti 10-krát väčšej. Časový vývoj U-zložky posunutia je na Obr. 3.1.2. Porovnané sú iba výsledky získané MKP schémou s 8GK a 8LK s analytickým riešením (Aki a Richards, 1980). Riešenie získané pomocou 1GK nevykresľujeme, nakoľko bolo príliš porušené osciláciami. Preto MKP schému s 1GK považujeme za nepoužiteľnú. Z porovnania riešení na Obr. 3.1.2 vidíme, že zhoda medzi približnými riešeniami a analytickým riešením je veľmi dobrá vo väčšine prijímačov. Výnimkou sú prijímače #11 a #16 v rovine zdroja. Vidieť, že riešenie s 8LK má priebeh podobný s referenčným riešením, ale má väčšie amplitúdy. Riešenie s 8GK je takmer nulové a dokonca má opačné znamienko. Aby sme overili, ako sa vyvíja chyba v prijímači #11 a #16, pridali sme do testu profil prijímačov začínajúci v prijímači #16 a smerujúci od zdroja. Na Obr. 3.1.3 je vykreslený časový vývoj U-zložky posunutia na tomto profile prijímačov. Vidíme, že chyba má skutočne lokálny charakter a vo vzdialenosti 5 prvkov ju už nie je možné pozorovať. Dodajme, že pozorované rozdiely medzi analytickým a numerickými riešeniami sú ovplyvnené aj veľmi malou vzdialenosťou medzi zdrojom a prijímačmi. V referenčnom analytickom riešení je zdroj skutočne bodový, zatiaľ čo v numerických riešeniach je zdroj simulovaný pomocou síl pôsobiacich v šiestich uzloch. Takýto zdroj nemá vo vzdialenosti prijímačov charakter bodového zdroja. Tento efekt je vidieť najmä na Obr. 3.1.3, kde vidíme, že zo vzdialenosťou klesá chyba pre 8LK aj pre 8GK.



Obr. 3.1.3: Časový záznam U-zložky posunutia na profile prijímačov od prijímača #16.



Obr. 3.1.4: K vysvetleniu vzniku falošných módov s nulovou energiou. Vľavo: nedeformovaný prvok, šípky v uzloch naznačujú posunutia uzlov. Vpravo: deformovaný tvar prvku. V bodoch na hrubom kríži vnútri prvkov sa neprejaví zmena deformácie.

Pre úplnosť ešte vysvetlíme dôvod, prečo 8LK vedie k použiteľným výsledkom, kým 1GK vedie k výsledkom silne porušeným osciláciami, pričom obe majú rovnaký rád presnosti. Príčinou rozdielneho správania 1GK a 8LK je najmä iné rozloženie integračných bodov. 8LK potrebuje 8 integračných bodov, ktoré sú umiestnené v rohoch prvku, t.j., v uzloch. Pretože stav deformácie prvku je jednoznačne určený posunutiami v uzloch, neexistuje taký stav deformácie, ktorý by 8LK 'necítila'. Avšak 1GK používa iba jeden integračný bod v strede prvku. Celé pole deformácie v prvku je preto pri použití 1GK reprezentované stavom deformácie v strede prvku. Ak je prvok deformovaný tak, že sa nezmení deformácia v strede prvku, t.j., v integračnom bode, vratná sila nebude vôbec pôsobiť proti takejto deformácii prvku a takýto mód deformácie sa v sieti šíri bez akéhokoľvek odporu. Preto sa takéto oscilácie nazývajú falošné módy s nulovou energiou. Na Obr. 3.1.4 je príklad deformácie prvku, ktorá sa neprejaví zmenou deformácie v strede prvku.

Cieľom druhej série testov bolo porovnať numerické správanie 8LK a 8GK pre prípad s dynamicky sa šíriacou trhlinou na zlome. Tieto testy sú uvedené a analyzované v kapitole 3.3.4. Tieto testy nás viedli k záveru, že 8GK, resp. presná integrácia, nie je vhodná na použitie s dynamickým zdrojom. Redukovaná 8LK však viedla k riešeniam v dobrej zhode s referenčným riešením.

Vysvetlíme dôvod, prečo v prípade kinematického zdroja boli riešenia s 8GK vo vzdialených prijímačoch v dobrej zhode s referenčným riešením a v prípade s dynamicky sa šíriacou trhlinou boli riešenia s 8GK nesprávne. Keďže je kinematický zdroj dopredu predpísaný, ďalšiu časovú hladinu v zdroji predpisujeme "správne" bez ohľadu na chybu v blízkosti zdroja v predošlej hladine. V dynamic-

kom modelovaní šírenia trhliny chyba v danej časovej hladine ovplyvňuje ďalšie hladiny, keďže trhlina interaguje s vlnovým poľom. Preto sa chyba v okolí zlomu prejaví na šírení trhliny a teda aj na vyžiarenom vlnovom poli. Chyba preto nie je v prípade dynamického modelu lokalizovaná v okolí zdroja.

3.1.6 Výpočtová schéma

1. Konštrukcia siete

2. Inicializácia

- Výpočet lokálnych matíc hmotnosti M^e pre všetky prvky v sieti, podľa (1.3.60) a (1.3.61)
- Vytvorenie globálnej matice hmotnosti M z lokálnych matíc hmotnosti M^e
- Aproximovanie globálnej matice hmotnosti M sústredenou maticou hmotnosti \tilde{M} , podľa (1.3.114)
- Inicializácia počiatkových podmienok, podľa (1.3.111)
- Inicializácia posunutí na Dirichletovej hranici
- $m = 1$

3. Časová slučka

- Výpočet derivácií posunutí podľa priestorových súradníc, podľa (1.3.71) a (1.3.72)
- Výpočet zložiek tenzora napätia, podľa (3.1.10)
- Výpočet lokálneho vektora vratnej sily r^e , podľa (3.1.5), (3.1.7), (3.1.9) a (3.1.10)
- Vytvorenie globálneho vektora vratnej sily r
- Výpočet lokálneho vektora pôsobiacej sily f^e pre všetky prvky, podľa (1.3.55) a (1.3.56)
- Výpočet lokálneho vektora okrajovej podmienky bc^e pre všetky prvky, podľa (1.3.57) a (1.3.58)
- Vytvorenie globálneho vektora pôsobiacej sily f
- Vytvorenie globálneho vektora okrajovej podmienky bc
- Aktualizácia posunutí vo vnútorných uzloch, podľa (1.3.110)
- Aktualizácia posunutí v uzloch na Dirichletovej hranici, napr. podľa (1.3.108)
- $m = m + 1$
- Návrat na začiatok časovej slučky

3.1.7 Výpočtová efektívnosť formulácie MKP s vektorom vratnej sily

Globálny vektor vratnej sily \mathbf{r} obsahuje $3N^n$ prvkov/hodnôt. Je to teda 81 krát menej ako počet nenulových prvkov v globálnej matici tuhosti. Na uchovanie globálneho vektora vratnej sily pre sieť 10^6 uzlov potrebujeme iba 12 MB operačnej pamäte. Pripomeňme, že na uloženie celej globálnej matice tuhosti pre takú istú sieť by sme potrebovali 36 TB operačnej pamäte a v prípade využitia algoritmov pre prácu s riedkymi maticami by sme potrebovali minimálne 972 MB, t.j., takmer 1 GB, operačnej pamäte. Z tohoto porovnania je zrejmé, že formulácia MKP s vratnou silou značne redukuje pamäťové nároky.

Zároveň však musíme povedať, že matica tuhosti bola, v prípade uvažovania materiálových parametrov nezávislých od času, konštantná, a stačilo ju vypočítať raz počas inicializácie výpočtu. Vektor vratnej sily závisí od napätia, ktoré je, samozrejme, závislé od času. Preto treba vektor vratnej sily počítať pre každú časovú hladinu, ako je to aj zrejmé z výpočtovej schémy. Zjednodušene možno povedať, že koncept vratnej sily značne redukuje pamäťové nároky, avšak zvyšuje nároky na výpočtový čas.

V prípade uvažovania časovo závislých materiálových parametrov je aj maticu tuhosti nutné počítať pre každú časovú hladinu. Matica tuhosti tak v takomto prípade stratí výhodu nižších výpočtových nárokov.

3.1.8 Výpočtový program FESD2

Na základe vyššie uvedeného algoritmu MKP s vektorom vratnej sily bol vypracovaný výpočtový program FESD2 v jazyku Fortran 90/95. Výpočtový program je možné aplikovať na siete prvkov zložené z prvkov typu HEX8, t.j., vo všeobecnosti, deformovaných šesťstenov s uzlami v rohoch. Na excitáciu vlnového poľa je možné použiť bodový dislokačný kinematický zdroj, ľubovoľne polarizovanú dopadajúcu rovinnú vlnu alebo dva spôsoby simulácie explózie - pomocou formalizmu bodového dislokačného zdroja, t.j., pomocou pôsobenia bodových síl v uzloch alebo pomocou objemovej sily v tvare, ako navrhol Serón et al. (1989). Hranice výpočtovej oblasti môžu byť voľné povrchy, neodrážajúce hranice, roviny symetrie alebo pevné hranice. V programe je implementovaných sedem typov neodrážajú-

cich hraníc: Peng a Toksöz (1994, 1995), Emerman a Stephen (1983), Reynolds (1978), Higdon (1991), Clayton a Enquist (1977) a Kristek (2001), ktorý sa odvoláva na Liu a Archuleta (2000). Program podporuje dve rôzne parametrizácie prostredia. Pre modely s parametrami meniacimi sa skokom na vnútorných rozhraniach je vhodné, ak je prostredie v jednom prvku homogénne. Pre prostredia so spojité sa meniacimi parametrami je vhodnejšia parametrizácia pomocou hodnôt parametrov v uzloch. Program podporuje Gaussovu osem-bodovú kvadratúru a redukovanú osem-bodovú Lobattovu kvadratúru. Vlnové pole je možné registrovať v prijímačoch umiestnených v ľubovoľnom bode vnútri výpočtového modelu, t.j., aj na voľnom povrchu. Druhou možnosťou registrácie vlnového poľa sú tzv. snapshoty. Snapshoty je možné uchovávať na rovinných rezoch výpočtovou oblasťou. Pre úplnosť dodajme, že v snapshote sú uložené iba hodnoty posunutia v uzloch ležiacich na zvolenom reze.

Okrem výpočtového programu FESD2 boli vytvorené aj podporné programy: program Mesh na vytvorenie siete, program MeshTest na kontrolu siete, program SnapSurf na prípravu rezov pre ukladanie snapshotov, program Graph na spracovanie zaznamenaných seizmogramov a program SnapView na spracovanie snapshotov na BMP obrázky.

3.2 Zahrnutie realistikého útlmu v MKP

3.2.1 Viskoelastické kontinuum

Pretože existujú rôzne typy materiálov, ktoré sa správajú rôzne pri aplikácii rovnakého napätia v rovnakých podmienkach, potrebujeme na úplný opis pohybu všeobecného kontinua okrem (všeobecne platnej) pohybovej rovnice ešte aj vzťah medzi napätím a deformáciou. Reakcia daného materiálu sa vo všeobecnosti môže líšiť aj v závislosti od veľkosti pôsobiaceho napätia, doby pôsobenia napätia, či podmienok v akých napätie pôsobí (napr. tlak, teplota). Na opis rôzneho správania sa rôznych typov materiálov sa používajú tzv. reologické modely. V tejto kapitole použijeme najmä podrobné pojednanie o viskoelastícite v monografii Moczo et al. (2007b).

Najjednoduchšie reologické modely

Hookove elastické teleso. Hookove elastické teleso reprezentuje správanie dokonale elastického kontinua. Môžeme si ho predstaviť ako pružinku, pozri Obr. 3.2.1. Napätie je priamo úmerné deformácii,

$$\sigma(t) = M \cdot \varepsilon(t), \quad (3.2.1)$$

kde M predstavuje elastický modul. Pri aplikácii napätia je deformácia okamžitá a úplne vratná. Inými slovami môžeme povedať, že Hookovo teleso nemá žiadnu pamäť, nakoľko jeho momentálny stav závisí iba od práve pôsobiaceho napätia. Príklad časového vývoja deformácie pri pôsobení konštantného napätia je znázornený na Obr. 3.2.2.

Označme Fourierovu transformáciu symbolom \mathcal{F} a inverznú Fourierovu transformáciu symbolom \mathcal{F}^{-1} :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(i\omega t) dt, \quad (3.2.2)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.2.3)$$

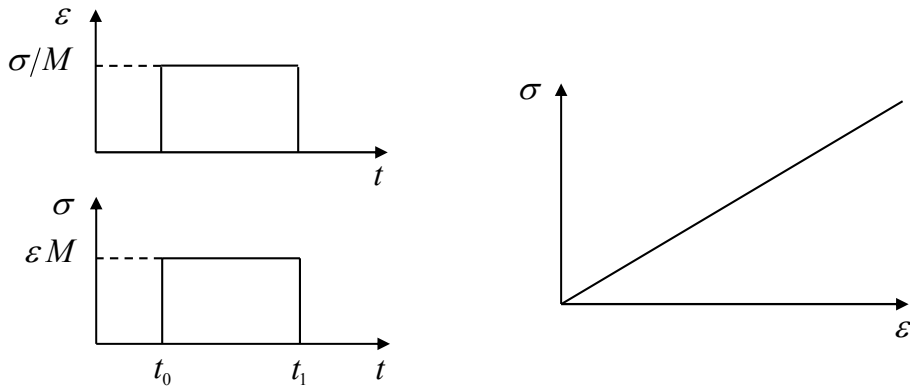
Aplikáciou Fourierovej transformácie na rovnicu (3.2.1) dostaneme závislosť napätia od deformácie vo frekvenčnej oblasti

$$\sigma(\omega) = M \cdot \varepsilon(\omega). \quad (3.2.4)$$

Hookove teleso

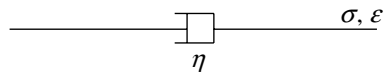


Obr. 3.2.1: Hookove teleso (pružina).

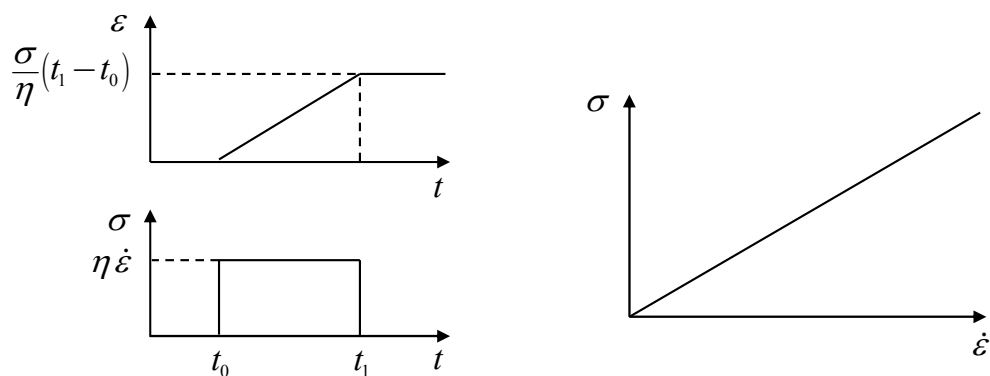


Obr. 3.2.2: Vzťah napätia a deformácie pre Hookove teleso (vpravo), časová závislosť deformácie (vľavo hore), ak aplikujeme konštantné napätie v čase t_0 a odstránime ho v čase t_1 (vľavo dole).

Stokesove teleso



Obr. 3.2.3: Stokesove teleso (tmič).



Obr. 3.2.4: Vzťah napätia a rýchlosti deformácie pre Stokesove teleso (vpravo), časová závislosť deformácie (vľavo hore), ak aplikujeme konštantné napätie v čase t_0 a odstránime ho v čase t_1 (vľavo dole).

Stokesove viskózne teleso. Stokesove viskózne teleso (niekedy nazývané aj Newtonove teleso) reprezentuje správanie viskózne kvapaliny. Môžeme si ho predstaviť ako tlmič, pozri Obr. 3.2.3. Napätie je úmerné rýchlosti deformácie,

$$\sigma(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t), \quad (3.2.5)$$

kde η je viskozita. Pri aplikácii napätia je deformácia postupná, t.j. nepozorujeme žiadnu okamžitú deformáciu, a po odstránení napätia je úplne nevratná. Inými slovami, Stokesove teleso má absolútnu pamäť. Jeho súčasný stav závisí od aplikovaného napätia na teleso v minulosti. Príklad časového vývoja deformácie pri pôsobení konštantného napätia je znázornený na Obr. 3.2.4.

Aplikáciou Fourierovej transformácie na rovnicu (3.2.5) dostaneme závislosť napätia od deformácie vo frekvenčnej oblasti pre Stokesove teleso

$$\sigma(\omega) = i\omega\eta \cdot \varepsilon(\omega). \quad (3.2.6)$$

Zložené reologické modely

Hookove aj Stokesove teleso predstavujú extrémne správanie materiálov. Je zrejmé, že reálne materiály sa nesprávajú ani dokonale elasticky, ani ako dokonalá viskózna kvapalina. Zložitejšie modely, ktoré lepšie opisujú správanie reálnych materiálov, je možné vytvoriť rôznym zapojením Hookových a Stokesových telies. Keďže ide o kombináciu správania elastického prostredia a viskózne kvapaliny, hovoríme vo všeobecnosti o viskoelastických reologických modeloch, resp. o viskoelastickom kontinuu.

Napr. sériovým zapojením Hookovho a Stokesovho telesa vznikne tzv. Maxwelllove teleso, paralelným zapojením Hookovho a Stokesovho telesa vznikne tzv. Kelvin-Voigtovo teleso. Podrobnejšie sa Maxwellovým ani Kelvin-Voigtovým telesom nebudeme zaoberať. Podrobný opis vlastností je možné nájsť napr. v monografii Moczo et al. (2007b). Základnú analýzu reologických vlastností vnútra Zeme ako aj reologických modelov, ktorými sa aproximujú, je možné nájsť napr. v Ranalli (1995).

Pre napätie a deformáciu v lineárnych zložených reologických modeloch platia jednoduché pravidlá, pozri Tab. 3.2.1. Je výhodné uvedomiť si tieto pravidlá vo frekvenčnej i časovej oblasti.

Tabuľka 3.2.1: Tabuľka pravidiel pre spájanie HB a SB. Prevzaté a upravené z práce Moczo et al. (2007b).

Teleso	Vzťah napätia a deformácie	
Časová oblasť		
Hookove teleso (pružina)	$\sigma(t) = M \cdot \varepsilon(t)$, M - modul pružnosti	
Stokesove teleso (tlmič)	$\sigma(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t)$, η - viskozita	
Frekvenčná oblasť		
Hookove teleso (pružina)	$\sigma(\omega) = M \cdot \varepsilon(\omega)$, M - modul pružnosti	
Stokesove teleso (tlmič)	$\sigma(\omega) = i\omega\eta \cdot \varepsilon(\omega)$, η - viskozita	

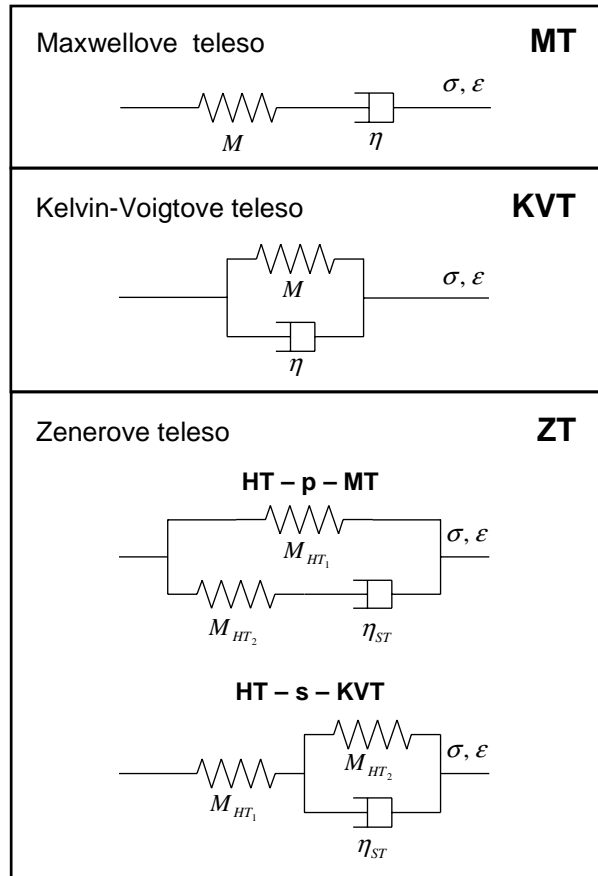
Zapojenie	σ	ε
Sériové	Rovnaké	Sčítajú sa
Paralelné	Sčítajú sa	Rovnaké

Zenerove teleso. Zenerove teleso je zložené z dvoch Hookových telies, HT_1 a HT_2 , a jedného Stokesovho telesa, ST . Existujú dve ekvivalentné definície Zenerovho telesa, znázornené na Obr. 3.2.5. Paralelným zapojením Hookovho telesa a Maxwellovho telesa dostaneme Zenerove teleso v definícii HT-p-MT. Sériovým zapojením Hookovho telesa a Kelvin-Voigtovho telesa dostaneme Zenerove teleso v definícii HT-s-KVT. Budeme používať zapojenie HT-p-MT, pre ktoré je zrejماً fyzikálna interpretácia modulov pružnosti. Ako neskôr ukážeme, modul pružnosti Hookovho telesa HT_1 zodpovedá relaxovanému modulu pružnosti Zenerovho telesa, M_R , a súčet modulov pružnosti zodpovedá nerelaxovanému modulu pružnosti M_U . Keďže platí

$$M_U = M_R + \delta M, \quad (3.2.7)$$

modul pružnosti druhého Hookovho telesa, HT_2 , zodpovedá δM , t.j., defektu modulu pružnosti. Napätia na jednotlivých telesách sú:

$$\begin{aligned} \sigma_{HT_1}(\omega) &= M_R \varepsilon_{HT_1}(\omega), \\ \sigma_{HT_2}(\omega) &= \delta M \varepsilon_{HT_2}(\omega), \\ \sigma_{ST}(\omega) &= i\omega\eta \varepsilon_{ST}(\omega). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$



Obr. 3.2.5: Reologické modely viskoelastického kontinua. HT označuje Hookove teleso, p označuje paralelné a s sériové zapojenie. Prevzaté z práce Moczo et al. (2007b).

Z rovníc (3.2.8) je zrejmé, že deformácie na jednotlivých telesách sú

$$\begin{aligned}\varepsilon_{HT_1}(\omega) &= \frac{\sigma_{HT_1}(\omega)}{M_R}, \\ \varepsilon_{HT_2}(\omega) &= \frac{\sigma_{HT_2}(\omega)}{\delta M}, \\ \varepsilon_{ST}(\omega) &= \frac{\sigma_{ST}(\omega)}{i\omega\eta}.\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

Pomocou Tab. 3.2.1 nájdeme vzťah medzi napätím a deformáciou v Zenerovom telese. Pre napätie na telesách HT_2 a ST zapojených sériovo platí

$$\sigma'(\omega) = \sigma_{HT_2}(\omega) = \sigma_{ST}(\omega)\tag{3.2.10}$$

a pre deformáciu

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_{HT_2}(\omega) + \varepsilon_{ST}(\omega) = \frac{\sigma'(\omega)}{\delta M} + \frac{\sigma'(\omega)}{i\omega\eta} = \left[\frac{1}{\delta M} + \frac{1}{i\omega\eta} \right] \sigma'(\omega).\tag{3.2.11}$$

Z rovnice (1.3.10) vyplýva pre napätie $\sigma'(\omega)$

$$\sigma'(\omega) = \left[\frac{i\omega\eta \delta M}{\delta M + i\omega\eta} \right] \varepsilon'(\omega) . \quad (3.2.12)$$

Celkové napätie $\sigma(\omega)$ Zenerovho telesa je potom

$$\sigma(\omega) = \sigma_{HT_1}(\omega) + \sigma'(\omega) = \left[M_R + \frac{i\omega\eta \delta M}{\delta M + i\omega\eta} \right] \varepsilon(\omega) = M(\omega)\varepsilon(\omega) , \quad (3.2.13)$$

keďže deformácia je v oboch vetvách rovnaká,

$$\varepsilon = \varepsilon_{HT_1} = \varepsilon' . \quad (3.2.14)$$

Upravme vyjadrenie pre $M(\omega)$:

$$M(\omega) = M_R + \frac{i\omega\eta M_R}{\delta M + i\omega\eta} = M_R \frac{1 + i\omega \frac{\eta}{\delta M} \frac{M_R + \delta M}{M_R}}{1 + i\omega \frac{\eta}{\delta M}} . \quad (3.2.15)$$

Pomocou relaxačného času deformácie τ_ε a napätia τ_σ , t.j.,

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon &= \frac{\eta}{\delta M} \frac{M_R + \delta M}{M_R} = \frac{\eta}{\delta M} \frac{M_U}{M_R} , \\ \tau_\sigma &= \frac{\eta}{\delta M} , \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

môžeme výraz (3.2.15) zapísať v tvare

$$M(\omega) = M_R \frac{1 + i\omega\tau_\varepsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} . \quad (3.2.17)$$

Keď poznáme vyjadrenie $M(\omega)$, môžeme ukázať fyzikálny význam modulov pružnosti Hookových telies. Pripomeňme, že nerelaxovaný modul pružnosti je modulom pružnosti pri okamžitej reakcii deformácie na pôsobiace napätie pre $\omega \rightarrow \infty$ a relaxovaný modul pružnosti je modulom pružnosti pre $\omega \rightarrow 0$. Z rovníc (3.2.16) a (3.2.17) vyplýva

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) &= M_R , \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) &= M_R + \delta M = M_U . \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Okamžitá deformácia Zenerovho telesa je určená nerelaxovaným modulom pružnosti M_U . Z definície (3.2.18) je zřejmé, že nerelaxovaný modul je súčtom modulov pružnosti oboch Hookových telies. Inými slovami teda môžeme povedať, že okamžitou odozvou deformácie na pôsobiace napätie sa Zenerove teleso správa rovnako

ako dve paralelne zapojené Hookove telesá HT_1 a HT_2 . To preto, že okamžitá deformácia tlmiča ST je nulová. Ak však napätie pôsobí dlhšie, začne rásť deformácia tlmiča. Tým bude postupne odstraňovať napätie z Hookovho telesa HT_2 . V limitnom prípade tlmič odstráni napätie z telesa HT_2 úplne, inými slovami, relaxáciou sa odstráni napätie na HT_2 . Modul pružnosti a teda aj napätie v relaxovanom Zenerovom telese je určené iba relaxovaným modulom pružnosti M_R . Z definície (3.2.18) je zrejmé, že relaxovaný modul pružnosti zodpovedá modulu pružnosti Hookovho telesa HT_1 .

Vzťah medzi napätím a deformáciou vo viskoelastických reologických modeloch v časovej oblasti je zložitejší. Dôvodom je prítomnosť tlmiča, t.j. Stokesovho telesa. Napätie na tlmiči je lineárne závislé od rýchlosti deformácie, nie od deformácie samotnej. Všeobecne pre viskoelastické prostredie platí, že

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (3.2.19)$$

kde $\psi(t)$ je relaxačná funkcia napätia, t.j., reakcia napätia na Heavisideov jednotkový schod v deformácii. Napätie v čase t je určené celou históriou deformácie až po čas t . Integrál v (3.2.19) je konvolučný integrál a môžeme ho zapísať v tvare

$$\sigma(t) = \psi(t) * \dot{\varepsilon}(t). \quad (3.2.20)$$

Z vlastností konvolúcie vyplýva, že

$$\sigma(t) = \psi(t) * \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\psi}(t) * \varepsilon(t) = M(t) * \varepsilon(t), \quad (3.2.21)$$

kde $M(t)$ je reakciou napätia na Diracovu δ -funkciu pre deformáciu. Aplikáciou Fourierovej transformácie na rovnicu (3.2.21) dostaneme

$$\sigma(\omega) = M(\omega) \cdot \varepsilon(\omega), \quad (3.2.22)$$

kde

$$M(\omega) = \mathcal{F} \{M(t)\} = \mathcal{F} \{\dot{\psi}(t)\}. \quad (3.2.23)$$

Aplikáciou inverznej Fourierovej transformácie na rovnicu (3.2.23) dostaneme

$$\dot{\psi}(t) = M(t) = \mathcal{F}^{-1} \{M(\omega)\}. \quad (3.2.24)$$

Z vlastností Fourierovej transformácie vyplýva, že

$$\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{M(\omega)}{i\omega} \right\}. \quad (3.2.25)$$

Pomocou rovnice (3.2.25) dostaneme

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ M_R \left[-\frac{i}{\omega} + \frac{i\tau_\varepsilon}{i - \tau_\sigma\omega} - \frac{i\tau_\sigma}{i - \tau_\sigma\omega} \right] \right\} \\ &= M_R \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_\sigma} \right) \right] H(t). \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Deriváciou $\psi(t)$ z rovnice (3.2.26) dostaneme $\dot{\psi}(t)$, t.j., časovo závislý modul pružnosti $M(t)$, ktorý potrebujeme v konvolučnom integráli pre vzťah medzi napätím a deformáciou vo viskoelastickom kontinuu, rovnica (3.2.19). Inými slovami, pri tomto postupe využijeme relatívne jednoduché vzťahy pre zložené reologické modely z Tab. 3.2.1 vo frekvenčnej oblasti, nájdeme frekvenčne závislý komplexný modul pružnosti $M(\omega)$ a pomocou inverznej Fourierovej transformácie a časovej derivácie potom nájdeme časovo závislý modul pružnosti $M(t)$.

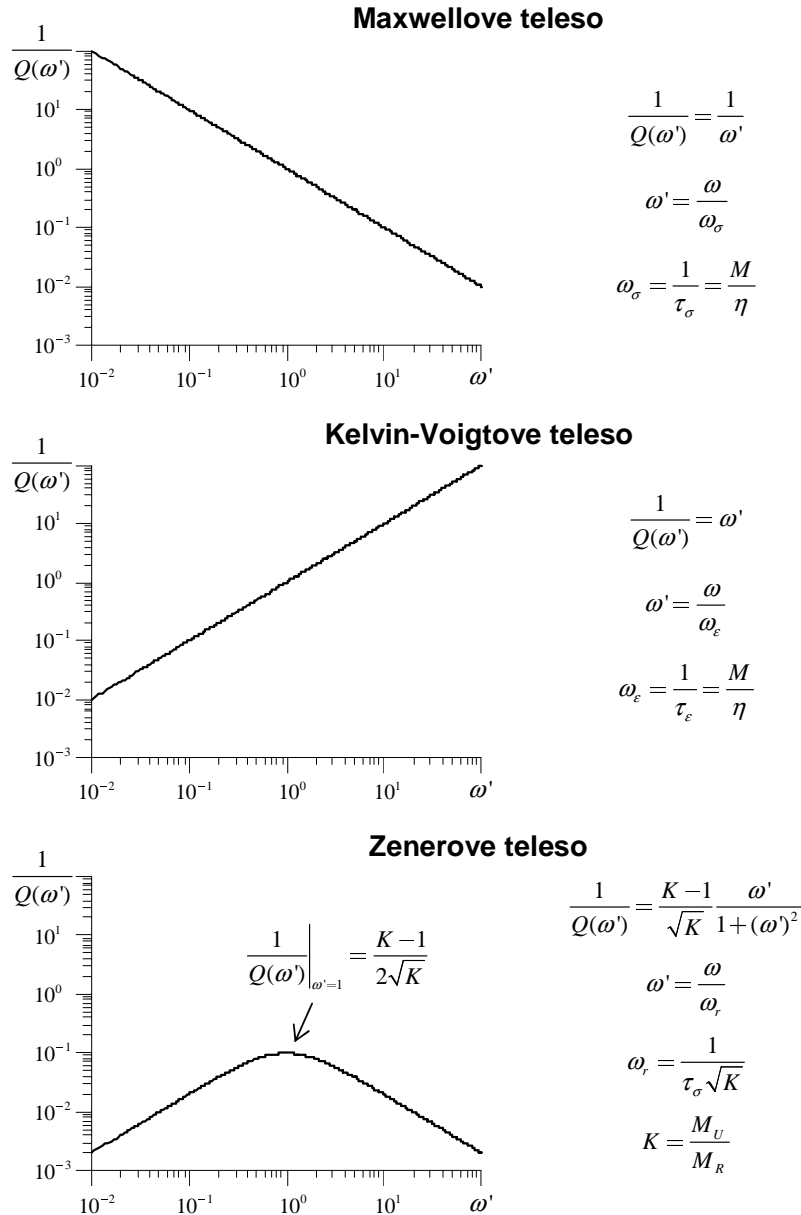
Útlm v reologických modeloch. Faktor kvality prostredia $Q(\omega)$ je definovaný ako pomer reálnej a imaginárnej zložky frekvenčne závislého modulu pružnosti $M(\omega)$,

$$Q(\omega) = \frac{\operatorname{Re} M(\omega)}{\operatorname{Im} M(\omega)}. \quad (3.2.27)$$

Prevrátená hodnota faktora kvality, t.j., $1/Q(\omega)$, je mierou vnútorného trenia vo viskoelastickom prostredí. Preto prostredie s nižšou hodnotou faktora kvality $Q(\omega)$ má väčšie vnútorné trenie a teda aj väčší útlm.

Pozorovania skutočného útlmu seizmických vln v Zemi, napr. McDonal et al. (1958); Liu et al. (1976); Spencer (1981); Murphy (1982), ukazujú, že pre vlny s periódami od 0.01 s do 1 hodiny, t.j., vo frekvenčnom rozsahu seizmických vln, je útlm v Zemi takmer konštantný.

Na Obr. 3.2.6 je znázornený útlm, resp. vnútorné trenie, v Maxwellovom, Kelvin-Voigtovom a Zenerovom telese. Vykreslená je závislosť útlmu na bezrozmernej frekvencii ω' . Pre Maxwellove teleso sme ako referenčnú frekvenciu použili relaxačnú frekvenciu napätia $\omega_\sigma = 1/\tau_\sigma$, kde τ_σ je relaxačný čas napätia. Pre Kelvin-Voigtovo teleso sme použili relaxačnú frekvenciu deformácie $\omega_\varepsilon = 1/\tau_\varepsilon$, kde τ_ε je relaxačný čas deformácie. Pre Zenerove teleso sme ako referenčnú frekvenciu



Obr. 3.2.6: Útlm v najjednoduchších reologických modeloch viskoelastického kontinua. Zobrazené sú závislosti $1/Q(\omega')$, kde ω' je bezrozmerná frekvencia.

zvolili frekvenciu, pre ktorú je $1/Q(\omega)$ maximálne, t.j., $\omega = \omega_\sigma/\sqrt{K}$, kde ω_σ je relaxačná frekvencia napätia a K je pomer nerelaxovaného a relaxovaného modulu pružnosti, t.j., $K = M_U/M_R$. Z Obr. 3.2.6 je zrejmé, že žiadny z uvažovaných reologických modelov nemá útlm, ktorý by bolo možné považovať za dostatočne presnú aproximáciu reálneho útlmu pozorovaného v Zemi. Maxwellove aj Kelvin-Voigtovo teleso majú monotónny priebeh útlmu s rastúcou frekvenciou. Útlm v Zenerovom telese dosahuje maximum pre frekvenciu $\omega = \omega_\sigma/\sqrt{K}$, pričom pokles

útlmu je v logaritmickej škále frekvencie ω' symetrický. Navyše pre maximálnu hodnotu útlmu platí

$$\left. \frac{1}{Q(\omega')} \right|_{\omega'=1} = \frac{K-1}{2\sqrt{K}}. \quad (3.2.28)$$

Inými slovami, jednoducho môžeme kontrolovať veľkosť útlmu Zenerovho telesa. Tieto vlastnosti Zenerovho telesa indikujú, že vhodným zapojením niekoľkých vhodne zvolených Zenerových telies môžeme dostať reologické teleso, ktoré by dostatočne presne aproximovalo pozorovaný takmer konštantný útlm v Zemi. Na základe takejto úvahy navrhli Liu et al. (1976) na dosiahnutie realistického útlmu pre simulácie šírenia seizmických vln použiť tzv. zovšeobecnené Zenerove teleso.

Generalizované Maxwelllove (GMB-EK) a generalizované Zenerove teleso

Generalizované Maxwelllove teleso (GMB-EK). Na základe tvaru relaxačnej funkcie definovali Emmerich a Korn (1987) tzv. generalizované Maxwelllove teleso. Generalizované Maxwelllove teleso tak, ako ho definovali Emmerich a Korn (1987) je n Maxwellových telies zapojených paralelne s Hookovým elementom, pozri Obr. 3.2.7. V reologickej literatúre je však pojmom zovšeobecnené Maxwelllove teleso označené reologické teleso zložené iba z n Maxwellových telies zapojených paralelne, t.j., bez aditívneho Hookovho elementu. Kvôli jednoznačnosti použijeme pre zovšeobecnené Maxwelllove teleso, ktoré definovali Emmerich a Korn (1987), skratku GMB-EK, ktorú zaviedli Moczo et al. (2004b) a Moczo a Kristek (2005).

Jedno Maxwelllove teleso tvoria sériovo zapojené Hookove a Stokesove teleso, pozri Obr. 3.2.5 hore. Pomocou vzťahov z Tab. 3.2.1 nájdeme frekvenčne závislý modul pružnosti v tvare

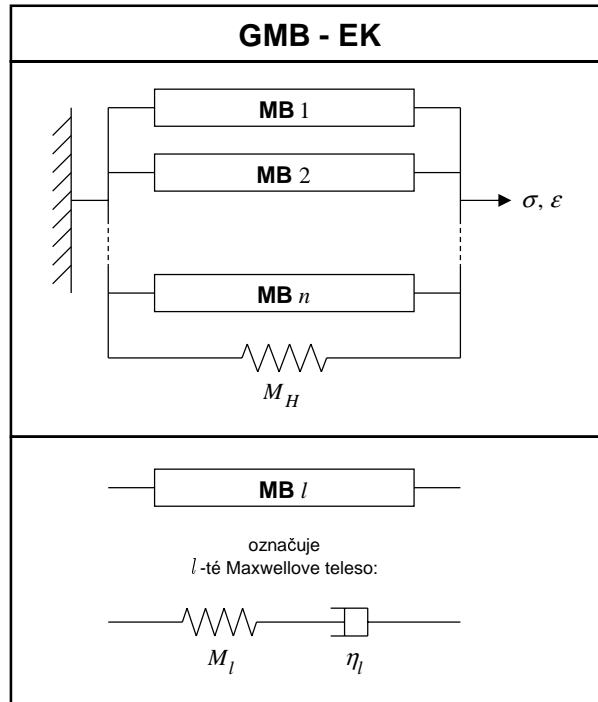
$$M_l(\omega) = \frac{i\omega M_l}{\omega_l + i\omega}, \quad (3.2.29)$$

kde

$$\omega_l = \frac{M_l}{\eta_l}. \quad (3.2.30)$$

Frekvenčne závislý modul pružnosti pre GMB-EK získame pomocou vzťahov z Tab. 3.2.1 a frekvenčne závislého modulu pružnosti pre jedno Maxwelllove teleso, vzťah (3.2.29). Dostaneme

$$M(\omega) = M_H + \sum_{l=1}^n \frac{i\omega M_l}{\omega_l + i\omega}. \quad (3.2.31)$$



Obr. 3.2.7: Generalizované Maxwelllove teleso v definícii Emmerich a Korn (1987) - GMB-EK.

Relaxovaný a nerelaxovaný modul pružnosti sú:

$$M_R = \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) = M_H ,$$

$$M_U = \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = M_R + \sum_{l=1}^n M_l = M_R + \delta M . \quad (3.2.32)$$

Z rovnice (3.2.32) pre M_U vyplýva, že $M_l = \delta M_l$. Vo všeobecnosti možno uvažovať

$$\delta M_l = a_l \delta M; \quad \sum_{l=1}^n a_l = 1 . \quad (3.2.33)$$

$M(\omega)$ potom možno zapísať v tvare

$$M(\omega) = M_R + \delta M \sum_{l=1}^n \frac{i\omega a_l}{\omega_l + i\omega} . \quad (3.2.34)$$

Aplikáciou inverznej Fourierovej transformácie dostaneme relaxačnú funkciu v tvare

$$\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{M(\omega)}{i\omega} \right\} = \left[M_R + \delta M \sum_{l=1}^n a_l e^{-\omega_l t} \right] H(t) . \quad (3.2.35)$$

Substitúciou $M_R = M_U - \delta M$ v rovnici (3.2.34) a využitím výtahu $1 = \sum_{l=1}^n a_l$ môžeme $M(\omega)$ prepísať v tvare

$$M(\omega) = M_U - \delta M \sum_{l=1}^n \frac{a_l \omega_l}{\omega_l + i\omega} . \quad (3.2.36)$$

Podobne $\psi(t)$, t.j., rovnicu (3.2.35), prepíšeme v tvare

$$\psi(t) = \left[M_U - \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - e^{-\omega_l t}) \right] H(t) . \quad (3.2.37)$$

Generalizované Zenerove teleso. Pre aproximáciu realistického útlmu seizmických vln uvažovali Carcione et al. (1988a,b), na základe práce Liu et al. (1976), zovšeobecnené Zenerove teleso, t.j., n Zenerových telies zapojených paralelne, pozri Obr. 3.2.8. Frekvenčne závislý modul pružnosti pre zovšeobecnené Zenerove teleso nájdeme relatívne ľahko. Použijeme frekvenčne závislý modul pružnosti pre jedno Zenerove teleso v tvare (3.2.17) a vzťahy z Tab. 3.2.1 pre napätie pri paralelne zapojených reologických modeloch a dostaneme

$$M(\omega) = \sum_{l=1}^n M_{Rl} \frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} , \quad (3.2.38)$$

kde relaxačné časy $\tau_{\varepsilon l}$ a $\tau_{\sigma l}$ majú tvar

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon l} &= \frac{\eta_l}{\delta M_l} \frac{M_{Ul}}{M_{Rl}} , \\ \tau_{\sigma l} &= \frac{\eta_l}{\delta M_l} . \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Nerelaxovaný modul pružnosti l -tého telesa je daný súčtom relaxovaného modulu pružnosti a defektu modulu pružnosti l -tého telesa, t.j.,

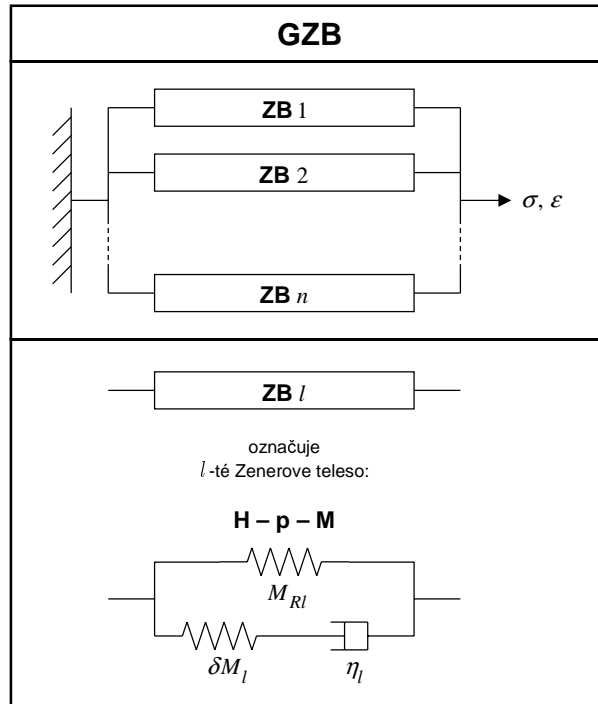
$$M_{Ul} = M_{Rl} + \delta M_l . \quad (3.2.40)$$

Ak nebude uvedené inak, indexy l sa budú vzťahovať na počet reologických telies a bude teda

$$l = \{1, \dots, n\} . \quad (3.2.41)$$

Zo vzťahov (3.2.38), (3.2.39) a (3.2.40) vypočítame relaxovaný a nerelaxovaný modul pružnosti

$$\begin{aligned} M_R &= \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) = \sum_{l=1}^n M_{Rl} , \\ M_U &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = \sum_{l=1}^n M_{Rl} \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} = \sum_{l=1}^n M_{Ul} = M_R + \sum_{l=1}^n \delta M_l . \end{aligned} \quad (3.2.42)$$



Obr. 3.2.8: Generalizované Zenerove teleso.

Analogicky so vzťahom (3.2.26) vypočítame aj relaxačnú funkciu napätia pre generalizované Zenerove teleso

$$\psi(t) = \left\{ \sum_{l=1}^n M_{Rl} \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_{\epsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_{\sigma l}} \right) \right] \right\} H(t). \quad (3.2.43)$$

Ekvivalencia generalizovaného Maxwellovho telesa GMB-EK a generalizovaného Zenerovho telesa. Ako sme už spomenuli, Emmerich a Korn (1987) na základe vhodnej relaxačnej funkcie definovali a použili reologické teleso, ktoré nazvali generalizované Maxwelllovo teleso. V reologickej literatúre sa týmto pojmom označuje iné reologické teleso, zložené iba z Maxwellových telies. Preto zrejme vznikli v seizmológii dva prúdy. Jeden prúd požíval na aproximáciu realistického útlmu generalizované Maxwelllovo teleso GMB-EK a druhý prúd používal generalizované Zenerove teleso. Až Moczo a Kristek (2005) ukázali, že obe tieto reologické telesá majú rovnaké reologické vlastnosti a sú teda reologicky ekvivalentné.

Porovnaním vzťahov pre frekvenčne závislý modul pružnosti a relaxačnú funkciu pre generalizované Zenerove teleso, vzťahy (3.2.38) a (3.2.43), so vzťahmi pre generalizované Maxwelllovo teleso GMB-EK, vzťahy (3.2.34) a (3.2.35), zis-

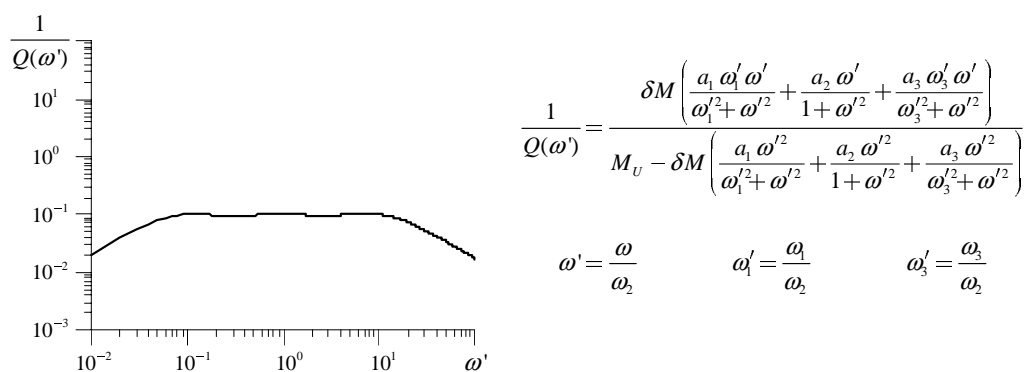
tíme, že vzťahy pre teleso GMB-EK sú jednoduchšie a používajú iba jeden druh relaxačnej frekvencie. Preto budeme ďalej používať reologické teleso GMB-EK.

Útlm generalizovaného Maxwellovho telesa GMB-EK a generalizovaného Zenerovho telesa. Útlm v generalizovanom Maxwellovom telese GMB-EK určíme zo vzťahov (3.2.27) a (3.2.36). Pre vnútorné trenie dostaneme

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{\delta M \sum_{l=1}^n \frac{a_l \omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2}}{M_U - \delta M \sum_{l=1}^n \frac{a_l \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2}}. \quad (3.2.44)$$

Útlm je znázornený na Obr. 3.2.9. Vykreslená je závislosť vnútorného trenia, t.j., závislosť $1/Q(\omega)$, od bezrozmernej frekvencie ω' pre prípad generalizovaného telesa zloženého z troch Zenerových telies, resp. troch Maxwellových a Hookovho telesa. Na definíciu bezrozmernej frekvencie bola použitá relaxačná frekvencia druhého telesa, t.j. ω_2 . Boli použité bezrozmerné relaxačné frekvencie $\omega'_1 = 0.1$, $\omega'_2 = 1$ a $\omega'_3 = 10$. Moduly pružnosti M_U , δM a a_l boli zvolené tak, aby priebeh $1/Q(\omega')$ čo najlepšie fitoval hodnotu 0.1 na intervale $\omega' \in \langle 0.1, 10 \rangle$. Z obrázku je zrejmé, že pomocou generalizovaného Zenerovho/generalizovaného Maxwellovho telesa GMB-EK, je možné aproximovať realistický útlm seizmických vln.

Útlm generalizovaného Maxwellovho telesa GMB-EK /
generalizovaného Zenerovho telesa



Obr. 3.2.9: Závislosť útlmu v zovšeobecnenom Maxwellovom telese GMB-EK a zovšeobecnenom Zenerovom telese od bezrozmernej frekvencie ω' .

Prevod konvolučného integrálu na diferenciálnu formu - anelastické funkcie

Porovnaním vzťahov napätia a deformácie vo frekvenčnej oblasti pre elastické kontinuum, vzťah (3.2.4), a pre viskoelastické kontinuum, napr. vzťah (3.2.12), zistíme, že sú veľmi podobné. Pre viskoelastické kontinuum stačí nahradiť reálny modul pružnosti M komplexným frekvenčne závislým modulom pružnosti $M(\omega)$. Pretože však metóda konečných prvkov pracuje v časovej oblasti, musíme použiť aj vzťah medzi napätím a deformáciou v časovej oblasti. V časovej oblasti je vzťah medzi napätím a deformáciou určený konvolučným integrálom, pozri vzťah (3.2.21). Implementovať výpočet konvolučného integrálu v takejto forme do numerických schém v časovej oblasti by bolo veľmi neefektívne. Preto je potrebné previesť konvolučný integrál na diferenciálnu formu, implementovateľnú do numerických schém.

Ako prví transformovali konvolučný integrál na diferenciálnu formu pomocou tzv. anelastických funkcií Day a Minster (1984). Neskôr ich postup použili aj Emmerich a Korn (1987), Carcione et al. (1988a,b), Emmerich (1992), Fähr (1992), Moczo a Bard (1993) a ďalší. Moczo et al. (1997) aplikovali podobný postup v hybridnej metóde, ktorá bola kombináciou metódy konečných diferencíí, metódy konečných prvkov a metódy diskretných vlnových čísel, na výpočet P-SV seizmického pohybu v nehomogénnych viskoelastických topografických štruktúrach.

Pretože implementácia realistického útlmu značne zvyšuje nároky metód na operačnú pamäť, zaviedol Day (1998) tzv. riedke priestorové vzorkovanie anelastických funkcií v metóde konečných diferencíí, ktoré neskôr Graves a Day (2003) vylepšili pre prostredia s veľkým útlmom. Kristek a Moczo (2003) zaviedli anelastické funkcie nezávislé od materiálových parametrov a navrhli riedke vzorkovanie anelastických funkcií, ktoré je aplikovateľné aj v prostredí s materiálovými rozhraniami.

Budeme sledovať prehľadný výklad v práci Moczo et al. (2007b).

Časovou deriváciou relaxačnej funkcie ψ , vzťah (3.2.37), dostaneme

$$\begin{aligned} M(t) &= \dot{\psi}(t) \\ &= -\delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l e^{-\omega_l t} \cdot H(t) \\ &\quad + \left[M_U - \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - e^{-\omega_l t}) \right] \delta(t). \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Dosadením (3.2.45) do (3.2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & - \int_{-\infty}^t \delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l e^{-\omega_l(t-\tau)} \cdot H(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \, d\tau \\ & + \int_{-\infty}^t M_U \cdot \delta(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \, d\tau \\ & - \int_{-\infty}^t \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - e^{-\omega_l(t-\tau)}) \cdot \delta(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \, d\tau . \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Po úpravách dostaneme

$$\sigma(t) = M_U \cdot \varepsilon(t) - \delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \cdot e^{-\omega_l(t-\tau)} \, d\tau . \quad (3.2.47)$$

Kristek a Moczo (2003) definovali anelastické funkcie v tvare

$$\zeta_l(t) = \omega_l \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \cdot e^{-\omega_l(t-\tau)} \, d\tau . \quad (3.2.48)$$

Časovou deriváciou definičného vzťahu anelastických funkcií, (3.2.48), dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_l(t) &= \omega_l \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \cdot e^{-\omega_l(t-\tau)} \, d\tau \\ &= \omega_l \left[-\omega_l \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \cdot e^{-\omega_l(t-\tau)} \, d\tau + \varepsilon(t) \right] \\ &= \omega_l [-\zeta_l(t) + \varepsilon(t)] . \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

Anelastické funkcie sú teda riešením diferenciálnej rovnice

$$\dot{\zeta}_l(t) + \omega_l \zeta_l(t) = \omega_l \varepsilon(t) . \quad (3.2.50)$$

Dosadením anelastických funkcií (3.2.48) do vzťahu (3.2.47) dostaneme

$$\sigma(t) = M_U \cdot \varepsilon(t) - \sum_{l=1}^n M_U Y_l \zeta_l(t) , \quad (3.2.51)$$

kde sme použili anelastické koeficienty Y_l ,

$$Y_l = a_l \frac{\delta M}{M_U} . \quad (3.2.52)$$

Vzťahy (3.2.50) a (3.2.51) predstavujú vzťah napätia a deformácie vo viskoelastickom prostredí v časovej oblasti.

Pomocou anelastických koeficientov Y_l môžeme upraviť aj vyjadrenie útlmu v zovšeobecnenom Maxwellovom telese GMB-EK, vzťah (3.2.44),

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{\sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2}}{1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2}}. \quad (3.2.53)$$

Vzťah (3.2.53) môžeme upraviť na tvar

$$Q^{-1}(\omega) = \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega + \omega_l^2 Q^{-1}(\omega)}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l. \quad (3.2.54)$$

Rovnicu (3.2.54) použijeme na určenie anelastických koeficientov Y_l . Rovnica však nie je jednoznačne riešiteľná, nakoľko z jednej rovnice potrebujeme určiť n neznámych. Ak poznáme $Q(\omega)$ na frekvenciách $\tilde{\omega}_k$; $k = 1, \dots, 2n - 1$, môžeme na určenie anelastických koeficientov Y_l použiť napr. metódu najmenších štvorcov. Emmerich a Korn (1987) uvažovali relaxačné frekvencie, ktoré pokrývali zvolený frekvenčný interval rovnomerne v logaritmickej škále. Ukázali, že na dostatočne presnú aproximáciu približne konštantného $Q(\omega)$ na frekvenčnom intervale s rádovým rozsahom 2-3 rády stačí uvažovať 3 relaxačné frekvencie, t.j. $n = 3$. Potom aj frekvencie $\tilde{\omega}_k$ je vhodné zvoliť tak, aby rovnomerne pokrývali zvolený frekvenčný interval, a aby platilo $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$ a $\tilde{\omega}_{2n-1} = \omega_n$. Podrobne je voľba frekvenčného intervalu ako aj voľba frekvencií $\tilde{\omega}_k$ diskutovaná v práci Graves a Day (2003). Pre úplnosť dodajme, že vzťah (3.2.54) je možné použiť na aproximáciu ľubovoľného priebehu $Q(\omega)$, teda nie len takmer konštantného $Q(\omega)$.

Aby sme mohli použiť vzťah (3.2.51) v praxi, potrebujeme vypočítať nerelaxovaný modul pružnosti M_U . V praxi poznáme z geofyzikálnych experimentov rýchlosť seizmických vln na frekvencii ω_r . Pre fázovú rýchlosť platí

$$c(\omega) = \text{Re} \left\{ \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}} \right\}. \quad (3.2.55)$$

Modul pružnosti vyjadríme pomocou anelastických koeficientov. Z rovníc (3.2.36) a (3.2.52) dostaneme

$$M(\omega) = M_U \left[1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right]. \quad (3.2.56)$$

Dosadením $M(\omega)$ v tvare (3.2.56) do vzťahu (3.2.55) a po úprave dostaneme vzťah pre výpočet M_U (Moczo et al., 1997)

$$M_U = \rho c^2(\omega_r) \frac{R + \Theta_1}{2R^2}, \quad (3.2.57)$$

kde

$$R = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2}, \quad (3.2.58)$$

$$\Theta_1 = 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{1}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2}, \quad \Theta_2 = \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_r/\omega_l}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2}.$$

Zo vzťahov (3.2.57) a (3.2.58) tak môžeme vypočítať nerelaxovaný modul pružnosti M_U z anelastických koeficientov Y_l a rýchlosti na referenčnej frekvencii ω_r .

3.2.2 Vzťah napätia a deformácie v 3D viskoelastickom kontinuu

Kvôli jednoduchosti a názornosti boli vzťahy pre viskoelastické kontinuum v predchádzajúcich kapitolách prezentované iba pre 1D viskoelastické prostredie. 2D alebo 3D viskoelastické kontinuum môžeme opísať pomocou dvoch generalizovaných Maxwellových telies GMB-EK. Jedno teleso použijeme pre časovo závislý objemový modul pružnosti $\kappa(t)$, resp. komplexný frekvenčne závislý objemový modul pružnosti $\kappa(\omega)$. Druhé teleso použijeme pre časovo závislý modul pružnosti v šmyku $\mu(t)$, resp. komplexný frekvenčne závislý modul pružnosti v šmyku $\mu(\omega)$.

Analogicky s 1D môžeme vzťah napätia a deformácie zapísať v tvare

$$\sigma_{ij} = \kappa \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \sum_{l=1}^n \left[\kappa Y_l^\kappa \zeta_l^{kk} \delta_{ij} + 2 \mu Y_l^\mu \left(\zeta_l^{ij} - \frac{1}{3} \zeta_l^{kk} \delta_{ij} \right) \right] \quad (3.2.59)$$

a

$$\dot{\zeta}_l^{ij} + \omega_l \zeta_l^{ij} = \omega_l \varepsilon_{ij}. \quad (3.2.60)$$

Pripomeňme, že indexy i, j a k sa vzťahujú na priestorové súradnice, a preto $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Index l sa vzťahuje na relaxačné frekvencie, a preto $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sumačnú konvenciu uvažujeme iba pre priestorové indexy, teda nie pre index l .

κ je nerelaxovaný objemový modul pružnosti a μ je nerelaxovaný modul pružnosti v šmyku. Y_l^κ a Y_l^μ sú príslušné anelastické koeficienty. Z meraní je možné určiť hodnoty faktora kvality P a S-vln, t.j. $Q_\alpha(\omega)$ a $Q_\beta(\omega)$. Z rovnice (3.2.54) pre hodnoty $Q_\alpha(\omega)$ a $Q_\beta(\omega)$ vypočítame hodnoty anelastických koeficientov Y_l^α a Y_l^β . Anelastické koeficienty Y_l^κ a Y_l^μ vypočítame zo vzťahov

$$Y_l^\kappa = \left(\alpha^2 Y_l^\alpha - \frac{4}{3} \beta^2 Y_l^\beta \right) / \left(\alpha^2 - \frac{4}{3} \beta^2 \right) ; \quad l = 1, \dots, n \quad (3.2.61)$$

a

$$Y_l^\mu = Y_l^\beta ; \quad l = 1, \dots, n , \quad (3.2.62)$$

kde

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3} \mu}{\rho}} , \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.2.63)$$

sú nerelaxované (t.j., vypočítané z nerelaxovaných modulov pružnosti) rýchlosti seizmických P a S-vln.

Vzťah napätia a deformácie, vzťah (3.2.59), môžeme prepísať na tvar vhodnejší pre implementáciu do algoritmov metódy konečných prvkov:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E - \sum_{l=1}^n \sigma_{ij}^{A l} . \quad (3.2.64)$$

Inými slovami, napätie sme rozdelili na elastickú časť σ_{ij}^E , určenú Hookovým zákonom (1.3.67), a anelastické časti $\sigma_{ij}^{A l}$, pre ktoré platí:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{A l} \\ \sigma_{yy}^{A l} \\ \sigma_{zz}^{A l} \\ \sigma_{xy}^{A l} \\ \sigma_{yz}^{A l} \\ \sigma_{xz}^{A l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^+ & Y^- & Y^- & 0 & 0 & 0 \\ Y^- & Y^+ & Y^- & 0 & 0 & 0 \\ Y^- & Y^- & Y^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu Y_l^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu Y_l^\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu Y_l^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ 2\zeta_l^{xy} \\ 2\zeta_l^{yz} \\ 2\zeta_l^{xz} \end{bmatrix} , \quad (3.2.65)$$

kde

$$Y^+ = \kappa Y_l^\kappa + \frac{4}{3} \mu Y_l^\mu \quad \text{a} \quad Y^- = \kappa Y_l^\kappa - \frac{2}{3} \mu Y_l^\mu . \quad (3.2.66)$$

Na riešenie rovnice (3.2.60) použijeme postup navrhnutý v práci Kristek a Moczo (2003). Pretože zložky tenzora napätia poznáme v časovej hladine m , aj anelastické funkcie musíme vypočítať pre časovú hladinu m . Preto aj rovnica (3.2.60) musí byť vyjadrená pre časovú hladinu m

$$\dot{\zeta}_l^{ij}(m) + \omega_l \zeta_l^{ij}(m) = \omega_l \varepsilon_{ij}(m) . \quad (3.2.67)$$

Ak časovú deriváciu aproximujeme centrálnym diferenčným vzorcom a $\zeta_l^{ij}(m)$ aproximujeme aritmetickým priemerom

$$\zeta_l^{ij}(m) = \frac{\zeta_l^{ij}(m - \frac{1}{2}) + \zeta_l^{ij}(m + \frac{1}{2})}{2}, \quad (3.2.68)$$

dostaneme rekurentný vzorec pre $\zeta_l^{ij}(m + \frac{1}{2})$:

$$\zeta_l^{ij}(m + \frac{1}{2}) = \frac{2 \omega_l \Delta t \varepsilon_{ij}(m) + (2 - \omega_l \Delta t) \zeta_l^{ij}(m - \frac{1}{2})}{2 + \omega_l \Delta t}. \quad (3.2.69)$$

Dosadením vyjadrenia (3.2.69) do (3.2.68) dostaneme potrebnú hodnotu $\zeta_l^{ij}(m)$.

3.2.3 Zahrnutie útlmu vo formulácii MKP s vektorom vratnej sily

Pripomeňme, že lokálny vektor vratnej sily \mathbf{r}^e pre prvok e sa skladá z vektorov \mathbf{r}_x , \mathbf{r}_y a \mathbf{r}_z definovaných vzťahmi (3.1.4), (3.1.6) a (3.1.8). V prípade uvažovania viskoelastického kontinua musíme zložky tenzora napätia vypočítať podľa vzťahu (3.2.64). Pre vektory \mathbf{r}_x , \mathbf{r}_y a \mathbf{r}_z tak dostaneme

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^E - \sum_{l=1}^n \mathbf{r}_i^{Al}; \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (3.2.70)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x^E &= - \int_{\Omega^M} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xx}^E + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{xy}^E + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{xz}^E) \det \mathbf{J} \, d\Omega, \\ \mathbf{r}_y^E &= - \int_{\Omega^M} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xy}^E + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{yy}^E + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{yz}^E) \det \mathbf{J} \, d\Omega, \\ \mathbf{r}_z^E &= - \int_{\Omega^M} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xz}^E + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{yz}^E + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{zz}^E) \det \mathbf{J} \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x^{Al} &= - \int_{\Omega^M} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xx}^{Al} + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{xy}^{Al} + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{xz}^{Al}) \det \mathbf{J} \, d\Omega, \\ \mathbf{r}_y^{Al} &= - \int_{\Omega^M} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{yx}^{Al} + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{yy}^{Al} + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{yz}^{Al}) \det \mathbf{J} \, d\Omega, \\ \mathbf{r}_z^{Al} &= - \int_{\Omega^M} (\mathbf{s}_{,x} \sigma_{xz}^{Al} + \mathbf{s}_{,y} \sigma_{yz}^{Al} + \mathbf{s}_{,z} \sigma_{zz}^{Al}) \det \mathbf{J} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

Elastická časť tenzora napätia, σ_{ij}^E , je určená Hookovým zákonom, napr. (1.3.67). Anelastické časti tenzora napätia, σ_{ij}^{Al} , sú určené vzťahom (3.2.65). Anelastické funkcie aktualizujeme pre časovú hladinu m pomocou vzorcov (3.2.68) a (3.2.69). Zvyšok postupu je totožný s postupom pre elastické kontinuum.

Vo všeobecnosti na výpočet vektora vratnej sily používame numerickú integráciu. Numerické integračné schémy vyžadujú funkčné hodnoty integrovanej funkcie

v integračných bodoch. Preto aj anelastické funkcie musíme mať definované vo všetkých integračných bodoch. Pripomeňme, že na aktualizáciu anelastických funkcií na časovú hladinu m potrebujeme poznať anelastické funkcie v časovej hladine $m - \frac{1}{2}$. Preto musia byť anelastické funkcie uložené v operačnej pamäti. Počet integračných bodov závisí od rádu presnosti integrácie ako aj od zvolenej integračnej schémy. Štandardné integračné schémy pre prvok HEX8 používajú 8 integračných bodov. Ľahko môžeme odhadnúť nároky na operačnú pamäť v dôsledku uloženia anelastických funkcií. Uvažujme 8 integračných bodov, 6 zložiek anelastických funkcií a 4 relaxačné frekvencie. Potom počet hodnôt, ktoré musíme uložiť v operačnej pamäti je $8 \times 6 \times 4 \times N^e = 192N^e$, kde N^e je celkový počet prvkov v sieti. Pripomeňme, že globálny vektor vratnej sily má iba $3N^n$ hodnôt, kde N^n je celkový počet uzlov v sieti. Celkový počet uzlov v sieti N^n a celkový počet prvkov v sieti N^e môžeme považovať pre dostatočne veľké modely za rovnaké. Z porovnania nárokov vektora vratnej sily a anelastických funkcií na operačnú pamäť je zrejmé, že výpočty pre viskoelastické prostredie by v takejto implementácii neboli možné pre mnoho dôležitých konfigurácií.

Znížiť obrovské nároky na operačnú pamäť je možné implementáciou tzv. riedkeho priestorového vzorkovania anelastických funkcií, ktorý navrhol Day (1998), a neskôr ho zdokonalili Graves a Day (2003) a Kristek a Moczo (2003). Algoritmy prezentované v uvedených prácach sú však navrhnuté pre pravidelné siete (typické napr. pre metódu konečných diferencií), a preto nie sú aplikovateľné na metódu konečných prvkov, ktorá sa väčšinou používa na neštruktúrovaných sieťach. Aby sme znížili nároky na operačnú pamäť aj v neštruktúrovaných sieťach, navrhli sme anelastické funkcie definované v strede prvku, t.j., v jednom bode na prvku. Inými slovami, na výpočet anelastických funkcií podľa vzťahu (3.2.69) uvažujeme konštantnú deformáciu v prvku, pričom jej hodnota je rovná deformácii v strede prvku. Takýmto spôsobom sa nám podarilo zredukovať nároky na operačnú pamäť na jednu osminu, t.j., na uloženie anelastických funkcií potrebujeme $24N^e$ hodnôt. Pre úplnosť dodajme, že pri odhadoch nárokov na operačnú pamäť sme neuvažovali nároky spojené s uložením hodnôt anelastických koeficientov Y_l^κ a Y_l^μ .

3.2.4 Zahrnutie útlmu v štandardnej formulácii MKP s globálnou maticou tuhosti

Budeme vychádzať z rovnice (3.2.70), t.j.,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^E - \sum_{l=1}^n \mathbf{r}_i^{A l}; \quad i \in \{x, y, z\}. \quad (3.2.73)$$

Elastickú časť lokálneho vektora vratnej sily, \mathbf{r}_i^E v rovnici (3.2.73), môžeme na základe vzťahov (3.2.71) a (3.1.14) a faktu, že elastická časť tenzora napätia σ_{ij}^E je určená Hookovým zákonom, vyjadriť pomocou lokálnej matice tuhosti \mathbf{K}^e ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_x^E \\ \mathbf{r}_y^E \\ \mathbf{r}_z^E \end{bmatrix} = -\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e. \quad (3.2.74)$$

Dosadením vyjadrenia (3.2.74) do vzťahu (3.2.73) dostaneme

$$\mathbf{r}_i = -\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \sum_{l=1}^n \mathbf{r}_i^{A l}. \quad (3.2.75)$$

Takto upravený vzťah dosadíme do MKP schémy s vratnou silou pre jeden prvok, t.j. do rovnice (3.1.11), a dostaneme

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{r}_A^e = \mathbf{bc}^e + \mathbf{f}^e, \quad (3.2.76)$$

kde

$$\mathbf{r}_A^e = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n \mathbf{r}_x^{A l} \\ \sum_{l=1}^n \mathbf{r}_y^{A l} \\ \sum_{l=1}^n \mathbf{r}_z^{A l} \end{bmatrix} \quad (3.2.77)$$

je lokálny vektor anelastického člena.

Analogickým spôsobom ako v elastickom prípade vytvoríme z lokálnych systémov rovníc globálny systém

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{r}_A = \mathbf{bc} + \mathbf{f}, \quad (3.2.78)$$

kde \mathbf{r}_A je globálny vektor anelastického člena. Analogicky s elastickým prípadom nájdeme aj rekurentný vzorec pre aktualizáciu posunutí:

$$\mathbf{u}^{m+1} = \Delta^2 t \mathbb{M}^{-1}(-\mathbb{K} \mathbf{u}^m + \mathbb{r}_A^m + \mathbb{b}c^m + \mathbb{f}^m) + 2 \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}. \quad (3.2.79)$$

Z rovnice (3.2.79) vidíme, že globálny vektor anelastického člena \mathbb{r}_A^m je závislý od času a preto musí byť vypočítaný pre každú časovú hladinu. Pre úplnosť dodajme, že anelastické funkcie sú aktualizované pomocou vzorcov (3.2.68) a (3.2.69).

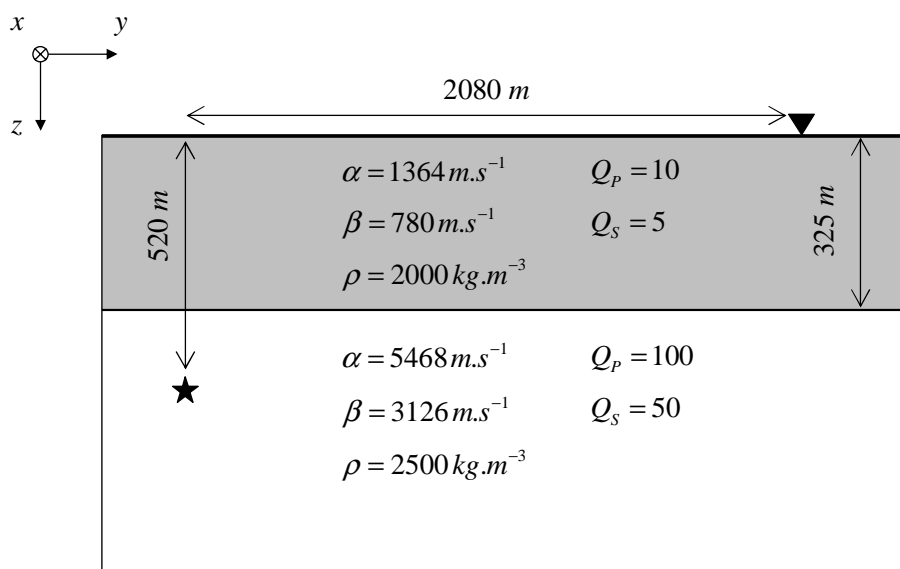
Ako už bolo spomenuté, kvôli implementácii realistického útlmu sme zaviedli novú globálnu veličinu, globálny vektor anelastického člena, \mathbb{r}_A , ktorý obsahuje $3N^n$ hodnôt. Vo všeobecnosti na výpočet lokálnych vektorov anelastického člena používame numerickú integračnú schému, preto musia byť anelastické funkcie definované vo všetkých integračných bodoch. Pre prvok HEX8 to, rovnako ako v prípade implementácie realistického útlmu do MKP formulácie s vratnou silou, znamená zvýšené nároky na operačnú pamäť. Pripomeňme, že na uloženie anelastických funkcií vo všetkých integračných bodoch by sme potrebovali $192N^e$ hodnôt. Samotná globálna matica tuhosti obsahuje približne $243N^n$ nenulových hodnôt. Môžeme teda povedať, že elastická časť, t.j. globálna matica tuhosti, a anelastická časť, t.j. globálny vektor anelastického člena a anelastické funkcie, majú porovnateľné nároky na operačnú pamäť. Z tohoto relatívneho pohľadu nie je nutné v tomto prípade aplikovať špeciálny postup na redukciu nárokov na operačnú pamäť. Zároveň však treba opäť zdôrazniť, že nároky na operačnú pamäť samotnej globálnej matice tuhosti sú obrovské. Aj v prípade formulácie MKP s globálnou maticou tuhosti je možné aplikovať riedke vzorkovanie anelastických funkcií navrhnuté pre MKP formuláciu s vektorom vratnej sily a znížiť tak celkové nároky na operačnú pamäť.

Pre úplnosť dodajme, že implementáciu realistického útlmu do štandardného MKP algoritmu s globálnou maticou tuhosti navrhli už Moczo et al. (1997). Ich implementácia bola založená na anelastických funkciách závislých od materiálových parametrov. Dôsledkom použitia materiálovo závislých anelastických funkcií sú modifikované matice tuhosti. Pre každú relaxačnú frekvenciu potrebujeme použiť jednu modifikovanú maticu tuhosti. Rozmer a počet nenulových prvkov modifikovanej matice tuhosti sú rovnaké ako pre globálnu maticu tuhosti, a teda aj nároky modifikovanej matice tuhosti na operačnú pamäť sú totožné s nárokmi globálnej matice tuhosti. Je teda zrejmé, že pri aproximovaní viskoelastického kontinua pomocou troch relaxačných frekvencií vzrastú nároky na operačnú pamäť štvornásobne

v porovnaní s elastickým prípadom. Nami navrhovaná implementácia založená na materiálovo nezávislých anelastických funkciách vedie k aditívnym nárokom na operačnú pamäť porovnateľným s nárokmi globálnej matice tuhosti. Podobne, ako pri porovnaní výpočtovej efektívnosti vektora vratnej sily a globálnej matice tuhosti, aj teraz sú nároky na výpočtový čas vyššie. Použitie anelastických funkcií definovaných v strede prvku však vedie aj k zníženiu výpočtových nárokov, nakoľko anelastické napätia nie je potrebné počítat vo všetkých integračných bodoch, ale iba v jednom.

3.2.5 Numerické testy zahrnutia realistického útlmu

Realistický útlm sme implementovali do výpočtového programu FESD2. Správnosť implementácie bola overená pomocou numerických testov. Numerické testy boli vykonané pre konfiguráciu homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore, pozri Obr. 3.2.10. Uvažovali sme vrstvu hrúbky 325 m . Rýchlostný kontrast vrstvy vzhľadom k polpriestoru je $1 : 4$, to znamená, že rýchlosti seizmických vln v polpriestore sú štyrikrát väčšie ako rýchlosti seizmických vln vo vrstve. Uvažovaný výpočtový model mal $13\text{ km} \times 13\text{ km} \times 13\text{ km}$ a bol pokrytý 8 miliónmi prvkov typu HEX8 tvaru kocky so stranou $h = 65\text{ m}$. Vlnové pole bolo generované budo-

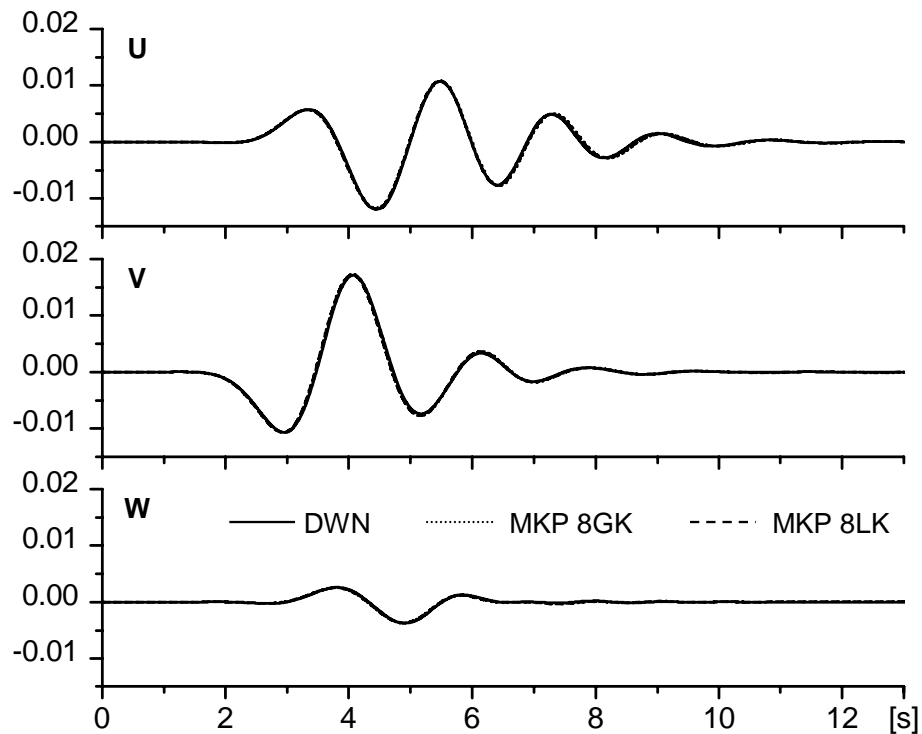


Obr. 3.2.10: Konfigurácia numerického testu na overenie implementácie realistického útlmu vo výpočtovom programe FESD2; naznačená je poloha zdroja (hviezdička) a poloha prijímača (trojuholník). (Obrázok je len schematický.)

vým dislokačným kinematickým zdrojom (s parametrami $\Phi_S = 45^\circ$, $\delta = 45^\circ$, $\lambda = 90^\circ$ a $M_0 = 10^{16} Nm$) umiestneným v hĺbke 520 m. Použili sme časovú funkciu zdroja v tvare Gaborovho signálu (3.1.19).

Uvažované parametre časovej funkcie: $f_p = 0.225 Hz$, $\gamma = 1.5$, $\Theta = \pi/2$ a $T_s = 3 s$. Vo výpočtoch boli použité 4 relaxačné frekvencie, t.j., uvažované generalizované Maxwellové telesá (GMB-EK) boli zložené zo 4 Maxwellových telies a jedného Hookovho telesa (pružiny).

Naše riešenia sme porovnali s referenčným riešením, ktoré bolo získané programom AXITRA (Coutant, 1989) založenom na metóde diskretných vlnových čísel - DWN (Bouchon, 1981). Na Obr. 3.2.11 sú porovnané riešenia v prijímači na voľnom povrchu (pozri Obr. 3.2.10). Porovnanie MKP riešenia získaného použitím 8-bodovej Gaussovej kvadratúry (8GK) a MKP riešenia získaného použitím redukovanej 8-bodovej Lobattovej kvadratúry (8LK) s referenčným DWN riešením ukazuje veľmi dobrú zhodu.



Obr. 3.2.11: Porovnanie MKP riešení získaných použitím 8GK a redukovanej 8LK integrácie s referenčným DWN riešením (Bouchon, 1981; Coutant, 1989).

3.3 Modelovanie šírenia trhliny na seizmoaktívnom zlome

Ako sme už spomenuli v odstavci 1.3.6, tzv. bodový kinematický model seizmického zdroja môžeme uvažovať v prípadoch, keď rozmery porušenej časti zlomu môžeme zanedbať vzhľadom na vzdialenosť, v ktorej chceme seizmický pohyb sledovať. Avšak už aj pri stredne silnom zemetrasení dochádza k porušeniu plochy rádovo niekoľko kilometrov krát niekoľko kilometrov. Takúto plochu nie je možné zanedbať ani vo vzdialenosti niekoľkých desiatok kilometrov. Jednou z možností, ako uvažovať konečnú zlomovú plochu, je tzv. konečný kinematický zdroj. Spravidla je zložený z niekoľkých desiatok až stoviek kinematických bodových zdrojov, ktoré rovnomerne pokrývajú zlomovú plochu. Pripomeňme, že jeden kinematický bodový zdroj je definovaný orientáciou zlomovej plochy, uhlami strike ϕ a dip δ , orientáciou vektora sklzu na zlomovej ploche, uhlom rake λ , pozri Obr. 1.3.10, a časovou funkciou zdroja, $s(t)$, vzťah (1.3.98). Pretože parametre každého bodového kinematického zdroja sú určené dopredu, ani konečný kinematický zdroj neinteraguje s vlnovým poľom vyžiareným počas šírenia trhliny a je preto nekauzálny. Problém s nefyzikálnym/nekauzálnym šírením trhliny nemajú tzv. dynamické modely, ktoré sú založené na spontánnom šírení trhliny na zlome, pričom sa vyhodnocuje skutočný stav napätia na zlome. Tým je zabezpečená aj interakcia s vyžiareným vlnovým poľom. Preto dynamické modely vždy vedú k fyzikálne kauzálnym výsledkom šírenia trhliny.

Existuje viacero metód, ktoré umožňujú zahrnúť dynamický model seizmického zdroja do numerických metód. Metódu napätí v rozdelených uzloch (TSN - z angl. Traction at Split Nodes) nezávisle na sebe navrhli Andrews (Andrews, 1973, 1976a, 1999) a Day (Day, 1977, 1982; Day et al., 2005). Madariaga et al. (1998) navrhol thick-fault-zone metódu. Neskôr Andrews (1999) navrhol stress-glut metódu. Ďalšie prístupy možno nájsť v prácach Ionescu a Campillo (1999), Nielsen et al. (2000), Nielsen a Carlson (2000), Cruz-Atienza a Virieux (2004). Stručný prehľad metód je možné nájsť v Moczo et al. (2007a). Viacero metód je špecificky navrhnutých pre konečno-diferenčné schémy na striedavo-usporiadaných alebo čiastočne striedavo-usporiadaných sieťach.

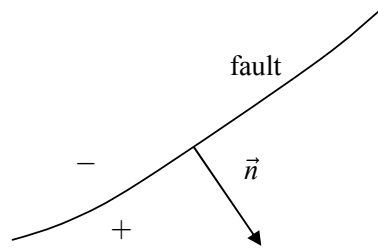
Aj v MKP existuje viacero implementácií dynamických modelov. Jeden z prvých modelov implementovali Archuleta (1976) a Archuleta a Frazier (1978). Použili MKP vo formulácii s vratnou silou. Keďže ich model mal predpísanú rýchlosť šírenia trhliny, nešlo o model so spontánnym šírením trhliny. Avšak vývoj napätia po vzniku trhliny v danom bode už nebol predpísaný a závisel od vývoja napätia v okolí. Day (1977) implementoval svoju verziu TSN do štandardného MKP algoritmu. Andrews (1999) implementoval svoju verziu TSN do MKD algoritmu, ktorý mal priestorové diferencovanie ekvivalentné s MKP. Andrewsov program však podporoval iba homogénne prostredie a sieť zloženú z prvkov tvaru kocky, prípadne kvádra. Oglesby (1999) implementoval algoritmus na spontánne šírenie trhliny do programov Dyna2D (Whirley et. al, 1992) a Dyna3D (Whirley a Engelman, 1993). Vzhľadom na povahu programov Dyna2D/3D implementoval Oglesby dynamický model na základe úvah o elastických a silách trenia. Ako sa neskôr ukázalo, išlo o Andrewsovu verziu TSN. Implementáciu dynamického modelu v metóde spektrálnych prvkov, ktorá je príbuzná s metódou konečných prvkov, možno nájsť v práci Festa (2004).

Day et al. (2005) a Dalguer a Day (2006, 2007) podrobne porovnali metódu hraničných integrálnych rovníc, TSN metódu implementovanú v konečno-diferenčnej schéme na čiastočne striedavo-usporiadanej sieti, TSN metódu v konečno-diferenčnej schéme na striedavo-usporiadanej sieti, stress-glut metódu, thick-fault metódu a ukázali, že pre konfiguráciu, ktorú použili pre numerické testy, je TSN najpresnejšia.

V tejto kapitole vysvetlíme základné princípy dynamického modelu seizmického zdroja, vysvetlíme TSN metódu a ukážeme, ako implementovať TSN metódu do algoritmov MKP. Tieto časti sú spracované na základe práce Moczo et al. (2007b).

3.3.1 Jednoduchý dynamický model seizmického zdroja

K tektonickým zemetraseniam dochádza na kontakte dvoch litosférických dosiek. Kontakt litosférických dosiek je niekedy skutočne takmer kontakt dvoch neporušených blokov, inokedy je to zóna konečnej hrúbky (niekoľko desiatok centimetrov až metrov) vyplnená porušenou horninou. Vzhľadom na vlnové dĺžky registrovaných seizmických vln a vzhľadom k dĺžke a šírke porušenej časti zlomovej plochy



Obr. 3.3.1: Zlomová plocha a normálový vektor \vec{n} .

(rádovo niekoľko kilometrov) je možné hrúbku zlomovej zóny zanedbať. Zlomovú zónu môžeme uvažovať ako zlomovú plochu.

Litosférické dosky sú vo vzájomnom neustálom pohybe. Na niektorých častiach kontaktu trenie bráni vzájomnému posunu dosiek pozdĺž kontaktnej plochy. V takýchto miestach potom narastá deformácia a napätie. Keď napätie v niektorom bode prekročí medzu pevnosti kontaktu, vznikne trhlina, inými slovami, dva body, ktoré spolu susedili, odskočia a vznikne nenulový sklz, t.j., diskontinuita v posunutí na zlomovej ploche. Pohyb bodov spôsobí nárast napätia v okolitých bodoch. Tento nárast napätia môže spôsobiť, že aj v týchto bodoch bude prekročená medza pevnosti kontaktu a dôjde k spontánnemu šíreniu trhliny na zlome. Rýchlosť šírenia trhliny, priebeh sklzu v danom bode a veľkosť plochy, na ktorú sa trhlina rozšíri, závisia od konkrétnych podmienok na zlome a v jeho okolí.

Zlomovú zónu môžeme aproximovať zlomovou plochou, inými slovami, kontaktom dvoch polpriestorov + a -, pozri Obr. 3.3.1. Uvažujme normálový vektor orientovaný tak, že smeruje z polpriestoru - do polpriestoru +. Sklз $D\vec{u}$ potom môžeme definovať ako relatívny pohyb polpriestoru + voči polpriestoru -, t.j.,

$$D\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}^+(\vec{x}, t) - \vec{u}^-(\vec{x}, t) . \quad (3.3.1)$$

Vektor $\vec{u}^+(\vec{x}, t)$ je vektor posunutia v bode \vec{x} na zlomovej ploche, ak sa blížíme k zlomovej ploche z polpriestoru + proti smeru normálového vektora \vec{n} a vektor $\vec{u}^-(\vec{x}, t)$ je vektor posunutia v bode \vec{x} na zlomovej ploche, ak sa blížíme k zlomovej ploche z polpriestoru - v smere normálového vektora \vec{n} , t.j.,

$$\begin{aligned} \vec{u}^+(\vec{x}, t) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^+} \vec{u}(\vec{x}, t) , \\ \vec{u}^-(\vec{x}, t) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^-} \vec{u}(\vec{x}, t) . \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Analogicky môžeme definovať aj rýchlosť sklzu $D\vec{v}$ (diskontinuitu v rýchlosti posunutia), t.j.,

$$D\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}^+(\vec{x}, t) - \vec{v}^-(\vec{x}, t), \quad (3.3.3)$$

kde

$$\begin{aligned} \vec{v}^+(\vec{x}, t) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^+} \vec{v}(\vec{x}, t), \\ \vec{v}^-(\vec{x}, t) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^-} \vec{v}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Jedinú interakciu medzi polpriestormi sprostredkuje vektor napätia $\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}, t)$. Vektor napätia môžeme rozdeliť na dve časti,

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}, t) = \vec{T}^0(\vec{x}, \vec{n}) + \Delta\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}, t), \quad (3.3.5)$$

kde $\vec{T}^0(\vec{x}, \vec{n})$ je počiatkové napätie a $\Delta\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}, t)$ napät'ová variácia. Počiatkové napätie $\vec{T}^0(\vec{x}, \vec{n})$ predstavuje tektonické napätie na zlome v okamihu, keď v prvom bode na zlome vznikne trhlina. Vzhľadom k tomu, že tektonický vývoj je veľmi pomalý (odohráva sa v časových škálach niekoľko desiatok až stoviek rokov), môžeme počas procesu šírenia trhliny, ktorý trvá niekoľko sekúnd až desiatok sekúnd, zanedbať zmeny počiatkového napätia, a môžeme ho považovať za konštantné v čase. Aj tektonické pohyby sú veľmi pomalé (maximálne rádovo niekoľko cm/rok). Preto môžeme počas šírenia trhliny zanedbať aj pohyb vyvolaný počiatkovým napätím, inými slovami, budeme uvažovať, že počiatkové napätie nespôsobuje pohyb. Počiatkové napätie $\vec{T}^0(\vec{x}, \vec{n})$ teda môžeme považovať za napätie rovnovážneho stavu. Odchýlky od rovnovážneho stavu môžu byť spôsobené seizmickými vlnami vyžiarenými z inej časti zlomovej plochy alebo z iného zlomu. Napät'ová variácia $\Delta\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}, t)$ vyjadruje odchýlky od rovnovážneho stavu.

Zákon(-y) trenia

Veľkosť celkového napätia $\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}, t)$ v danom bode na zlome je vždy určená aktuálnou pevnosťou kontaktu (ekvivalentne budeme hovoriť aj o pevnosti zlomu) $S(\vec{x}, t)$ v danom bode. Ďalej budeme uvažovať iba tangenciálnu trhlinu, t.j., vektor sklzu bude ležať v rovine zlomu. Inými slovami, nebudeme uvažovať otváranie trhliny, ani prienik materiálov z jedného polpriestoru do druhého, teda

$$D\vec{v}_n = 0, \quad (3.3.6)$$

kde $D\vec{v}_n$ je normálová zložka rýchlosti sklzu, t.j. zložka kolmá k zlomovej ploche. Keďže jedinou interakciou medzi polpriestormi je trenie, je pevnosť zlomu určená trením. Pre pevnosť zlomu platí

$$S(\vec{x}, t) = \mu^f(\vec{x}, t) \sigma^n(\vec{x}, t), \quad (3.3.7)$$

kde

$$\sigma^n(\vec{x}, t) = \max \left(0, |\vec{T}_n(\vec{x}, t)| \right) \quad (3.3.8)$$

je veľkosť tlaku na zlom a $\mu^f(\vec{x}, t)$ je koeficient trenia určený zákonom trenia.

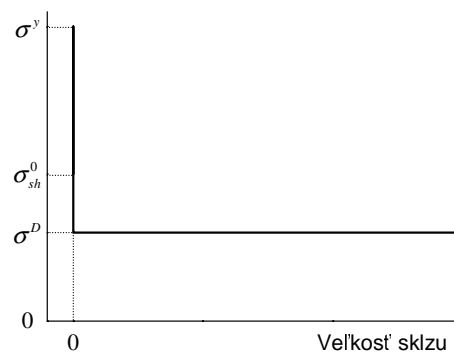
Coulombov zákon trenia. Najjednoduchším zákonom trenia je Coulombov zákon trenia. Uvažujme dva body na zlomovej ploche, jeden z polpriestoru + a druhý z polpriestoru -. Predpokladajme, že sa vzhľadom k sebe nepohybujú, t.j., $D\vec{u} = 0$ a $D\vec{v} = 0$. Tieto body ostanú spojené dovtedy, kým napätie medzi nimi nedosiahne medzu pevnosti kontaktu σ^y určenú statickým koeficientom trenia μ^S a tlakom na zlom σ^n ,

$$\sigma^y(\vec{x}, t) = \mu^S(\vec{x}) \sigma^n(\vec{x}, t). \quad (3.3.9)$$

Ak napätie na zlome dosiahne medzu pevnosti σ^y , body sa začnú vzhľadom k sebe pohybovať. Koeficient trenia klesne okamžite zo statickej hodnoty μ^S na dynamickú hodnotu μ^D . Z rovnice (3.3.7) vyplýva, že okamžite klesne aj pevnosť kontaktu, a teda trenie na zlome, na hodnotu

$$\sigma^D(\vec{x}, t) = \mu^D(\vec{x}) \sigma^n(\vec{x}, t). \quad (3.3.10)$$

Statický aj dynamický koeficient trenia sú parametre materiálu. Závislosť napätia na sklze pre konštantné normálové napätie σ^n je na Obr. 3.3.2.



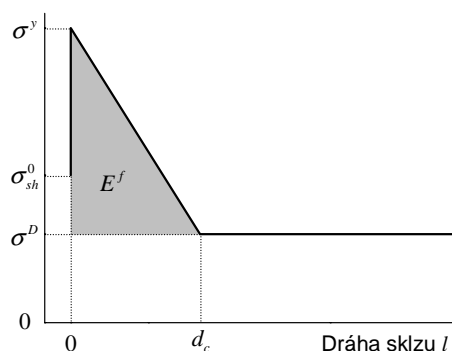
Obr. 3.3.2: Coulombov zákon trenia.

Zatiaľčo v skutočnosti je na vytvorenie trhliny potrebná energia, pri Coulombovom zákone trenia sa na vytvorenie trhliny nespotrebuje žiadna energia. Dôsledkom tejto nefyzikálnej vlastnosti Coulombovho zákona trenia je vznik singularity v napätí na hrane trhliny (crack tip)². Takáto singularita je samozrejme nefyzikálna, a preto Coulombov zákon trenia nie je vhodný pre dynamický model seizmického zdroja.

Linear slip-weakening (LSW) zákon trenia. Singularita v napätí na hrane trhliny nevznikne, ak uvažujeme, že pevnosť zlomu za hranou trhliny klesá postupne. Tým vznikne tzv. konečná zóna poklesu napätia, v ktorej pevnosť (trenie) klesá z maximálnej hodnoty na hrane trhliny na dynamickú hodnotu. Ako prvý navrhol koncept konečnej zóny poklesu napätia (cohesive zone) pre normálovú trhlínu k zlomovej ploche Barenblatt (1959). Ida (1972) a Palmer a Rice (1973) aplikovali koncept konečnej zóny poklesu napätia (breakdown zone) na tangenciálnu trhlínu k zlomovej ploche. Mnohé laboratórne experimenty (Okubo a Dieterich, 1981, 1984; Ohnaka a Yamamoto, 1984; Ohnaka et al., 1986, 1987a,b) potvrdzujú, že pevnosť kontaktu neklesne okamžite po dosiahnutí medze pevnosti, ale skutočne postupne klesá s rastúcim sklzom. Skutočné správanie viacerí autori aproximovali jednoduchým lineárnym poklesom napätia, tzv. LSW zákonom trenia (napr. Andrews, 1976a,b; Rice, 1980, 1983; Rudnicki, 1980).

LSW zákon trenia je teda rozšírením Coulombovho zákona trenia. Potom, ako v danom bode vznikne trhlina, pevnosť (trenie) neklesne na dynamickú úroveň

²Pre jednoduchosť uvažujme 2D problém. Nech sa trhlina šíri zľava do prava. Prvý bod zprava, v ktorom je nenulový sklz sa nazýva hrana trhliny. V 2D je hrana trhliny bod, v 3D krivka.



Obr. 3.3.3: LSW zákon trenia. Šedá plocha indikuje veľkosť energia E^f potrebnej na vytvorenie trhliny v danom bode.

okamžite, ale začne klesať lineárne z hodnoty σ^S na dynamickú hodnotu σ^D . Dynamickú úroveň dosiahne až vtedy, keď sklz dosiahne hodnotu d_c . Keď pevnosť dosiahne dynamickú úroveň, ďalej už ostane konštantná. Zákon trenia môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \sigma^f(\vec{x}, t) &= \sigma^S(\vec{x}) - \frac{\sigma^S(\vec{x}) + \sigma^D(\vec{x})}{d_c(\vec{x})} l(\vec{x}, t) ; & l < d_c , \\ \sigma^f(\vec{x}, t) &= \sigma^D(\vec{x}) ; & l \geq d_c , \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

kde l je dĺžka dráhy sklzu

$$l = \int_0^t |D\vec{v}(t')| dt' . \quad (3.3.12)$$

Keďže uvažujeme konštantné normálové napätie σ^n , môžeme LSW zákon trenia zapísať aj v tvare

$$\begin{aligned} \mu^f(\vec{x}, t) &= \mu^S(\vec{x}) - \frac{\mu^S(\vec{x}) + \mu^D(\vec{x})}{d_c(\vec{x})} l(\vec{x}, t) ; & l < d_c , \\ \mu^f(\vec{x}, t) &= \mu^D(\vec{x}) ; & l \geq d_c . \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

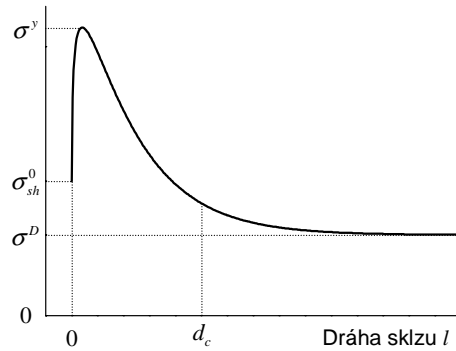
Závislosť napätia na sklze pre LSW zákon trenia je na Obr. 3.3.3.

Fyzikálne konzistentný zákon trenia závislý na sklze. LSW zákon trenia odstraňuje najväčší problém Coulombovho zákona trenia - singularitu v napätí na hrane trhliny. Avšak ako ukázal Ida (1973), diferenciálne zrýchlenie (zrýchlenie sklzu) na hrane trhliny, inými slovami v čase vzniku trhliny, je nekonečné. To je samozrejme tiež nefyzikálne. Ida (1973) navrhol funkciu pre závislosť pevnosti na sklze, ktorá neviedla k nekonečnému diferenciálnemu zrýchleniu. Výsledky získané s touto funkciou však neboli v zhode s experimentmi.

Ohnaka et al. (1987a) a Ohnaka a Yamashita (1989) navrhli na základe laboratórnych experimentov analytickú funkciu, ktorá aproximovala pozorovaný vývoj pevnosti s narastajúcim sklzom. Takto získaný zákon trenia môžeme zapísať v tvare

$$\sigma^f = (\sigma_{sh}^0 - \sigma^D) \left[1 + \alpha \ln \left(1 + \frac{l}{\beta} \right) \right] \exp \left(- \frac{l}{d_c} \right) + \sigma^D , \quad (3.3.14)$$

kde $\alpha(\vec{x})$ a $\beta(\vec{x})$ sú parametre zákona trenia. Kvôli väčšej prehľadnosti sme neuvádzali explicitnú závislosť na polohe a čase pre ostatné veličiny. Za predpokladu konštantného normálového napätia σ^n , môžeme zákon trenia zapísať aj v tvare



Obr. 3.3.4: Fyzikálne konzistentný zákon trenia navrhnutý Ohnakom a Yamashitom (Ohnaka a Yamashita, 1989).

$$\mu^f = \left(\frac{\sigma_{sh}^0}{\sigma^n} - \mu^D \right) \left[1 + \alpha \ln \left(1 + \frac{l}{\beta} \right) \right] \exp \left(- \frac{l}{d_c} \right) + \mu^D . \quad (3.3.15)$$

Závislosť napätia σ^f od dráhy sklzu l je na Obr. 3.3.4. Takýto priebeh sklzu nespôsobuje ani singularitu v napätí ani nekonečné diferenciálne zrýchlenie na hrane trhliny.

Pre tento zákon trenia nie je priamo definovaná hodnota napätia, pri ktorej vznikne trhlina, nakoľko sklz, a teda aj dráha sklzu l , narastá už od začiatku. Ako je zrejmé z obrázka, priebeh napätia môžeme rozdeliť do dvoch fáz. V prvej fáze, tzv. slip-hardening fáze, napätie narastá so sklzom. Keď napätie dosiahne maximum, dosiahne medzi pevnosti σ^y , začína druhá fáza, tzv. slip-weakening fáza, počas ktorej napätie exponenciálne klesá s narastajúcim sklzom. Pre úplnosť dodajme, že medzi pevnosti σ^y nie je explicitne definovaná a závisí iba od voľby parametrov α , β a d_c . Hodnota dynamického trenia σ^D je explicitne predpísaná.

Zákon trenia závislý od rýchlosti sklzu a stavovej veličiny - R&S zákon trenia.

Aj keď pomocou zákonov trenia závislých od sklzu je možné simulovať rôzne komplikovaný/realistický priebeh napätia so sklzom, vždy je tento priebeh dopredu predpísaný len na základe vývoja sklzu. Na základe rôznych laboratórnych experimentov, pri ktorých bola pozorovaná závislosť pevnosti od rýchlosti sklzu, navrhli napr. Dieterich (1979, 1986); Ruina (1980, 1983); Okubo a Dieterich (1984); Okubo (1989); Beeler et al. (1994) rôzne formy zákonov trenia závislých od rýchlosti sklzu a stavovej veličiny. V prípade týchto zákonov trenia je aktuálna pevnosť kontaktu len dôsledkom vývoja rýchlosti sklzu a stavovej veličiny. Stručne opíšeme iba R&S zákon trenia, ako ho sformuloval Dieterich (1986).

Koeficient trenia pre R&S zákon trenia možno zapísať v tvare

$$\mu^f = \mu_r - a \ln \frac{v_r}{|D\vec{v}_{sh}|} + b \ln \frac{\Psi v_r}{L}, \quad (3.3.16)$$

kde $a(\vec{x})$, $b(\vec{x})$ a $L(\vec{x})$ sú parametre zákona trenia a $\sigma_r(\vec{x})$ a $v_r(\vec{x})$ sú referenčné hodnoty. Vývoj stavovej veličiny $\Psi(\vec{x}, t)$ je určený rovnicou

$$\frac{d\Psi}{dt} = 1 - \frac{\Psi |D\vec{v}_{sh}|}{L}. \quad (3.3.17)$$

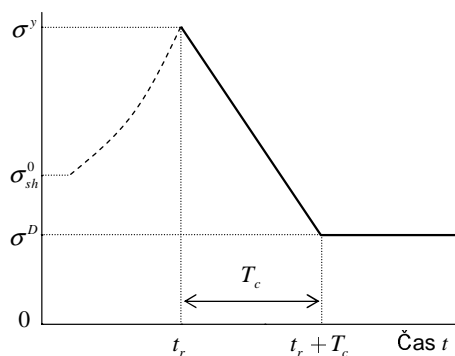
Pre R&S zákony trenia nie je explicitne definovaná ani medza pevnosti ani dynamické trenie. Obe sú závislé od voľby parametrov $a(\vec{x})$, $b(\vec{x})$ a $L(\vec{x})$ a najmä od vývoja stavovej veličiny $\Psi(\vec{x}, t)$.

Time-weakening (TW) zákon trenia. TW zákon trenia použili napr. Bizzarri et al. (2001) a Andrews (2004). Charakteristické pre TW zákon trenia je predpísaný postupný (lineárny) pokles napätia s časom. Zákon môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} \mu^f &= \mu^S - (\mu^S - \mu^D) \frac{t - t_r}{T_c}; & t_r \leq t \leq t_r + T_c, \\ \mu^f &= \mu^D \sigma^n; & t_r + T_c < t, \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

kde t_r je čas vzniku trhliny v danom bode, T_c je doba, za ktorú napätie klesne zo statickej úrovne na dynamickú úroveň a t je čas. Vývoj napätia v čase je zobrazený na Obr. 3.3.5.

Podľa spôsobu výpočtu času vzniku trhliny t_r dostaneme dve verzie TW zákona trenia. Ak je čas t_r určený ako čas, kedy napätie na zlome prvý krát dosiahne medzu pevnosti σ^S , ide o spontánne šírenie trhliny. Čas vzniku trhliny však môžeme aj



Obr. 3.3.5: TW zákon trenia. Vývoj napätia je predpísaný až od času vzniku trhliny, t_r . Čiarkovanou čiarou je naznačený možný vývoj napätia, ak je čas t_r určený ako čas dosiahnutia medze pevnosti v danom bode.

dopredu predpísať. V takom prípade ide o nútené šírenie trhliny. Aj keď je šírenie trhliny predpísanou rýchlosťou v rozpore so základným princípom dynamických modelov seizmického zdroja (pretože trhlina sa šíri bez ohľadu na to, či v danom mieste vznikli podmienky na vznik trhliny alebo nie), ide o dôležitý zákon z hľadiska testovania a najmä z hľadiska inicializácie spontánneho šírenia trhliny.

Pre úplnosť dodajme, že pre $T_c = 0$ je TW zákon trenia ekvivalentný s Coulombovým zákonom trenia.

Realistický zákon trenia. Laboratórne experimenty sú samozrejme zjednodušené v porovnaní s reálnou situáciou na seizmickom zlome. Všeobecný zákon trenia môžeme zapísať v tvare (Bizzarri a Cocco, 2005)

$$\sigma^f = \mu^f(D\vec{u}, D\vec{v}, \Psi_1, \dots, \Psi_N, T, H, \lambda_c, h, g, C_e) \sigma_{eff}^n(\sigma^n, p_f). \quad (3.3.19)$$

Takýto všeobecný zápis vyjadruje, že koeficient trenia μ^f na zlome závisí aj od vektora sklzu $D\vec{u}$ aj vektora rýchlosti sklzu $D\vec{v}$. Stavové veličiny Ψ_1, \dots, Ψ_N umožňujú uvažovať predchádzajúci vývoj na zlome (napr. Ruina, 1983). Teplota T umožňuje uvažovať duktilitu, natavenie a plastické správanie materiálu, prípadne vyparovanie, ktoré závisí aj od vlhkosti H (Dieterich a Conrad, 1984). Charakteristická dĺžka povrchu kontaktu na zlomovej ploche λ_c umožňuje uvažovať drsnosť a/alebo topografiu povrchu zlomovej plochy (Ohnaka a Shen, 1999; Ohnaka, 2003) a v konečnom dôsledku aj mechanickú lubrikáciu kontaktu (Brodsky a Kanamori, 2001). Ako sme už spomenuli, v skutočnosti je zlomová plocha skôr zlomovou zónou. Uvažovať miesto zlomovej zóny plochu je možné vzhľadom na diskrétnu sieť, avšak hrúbka zlomovej zóny bude mať veľký vplyv na napätie na zlome. Vplyv konečnej hrúbky zlomovej zóny, ktorú vyplní tzv. gouge (tektonický íl), môžeme vyjadriť pomocou parametra g (napr. Marone et al., 1990; Marone a Kilgore, 1993; Mair a Marone, 1999; Mair et al., 2002). Na procesy na zlome má samozrejme vplyv aj pevnosť materiálu h a jeho chemické zloženie C_e . Efektívne normálové napätie σ_{eff}^n je určené z normálového napätia na zlome a z tlaku kvapaliny v póroch p_f (napr. Andrews, 2002; Bizzarri a Cocco, 2004, 2006a,b), ktorý znižuje celkový tlak na zlomovú plochu, a tým znižuje aj veľkosť trenia na zlome.

Aj keď je zrejmé, že všetky vyššie spomenuté parametre majú, resp. mali by mať, vplyv na vznik a šírenie trhliny, ich presný vplyv a vzájomný vzťah je zatiaľ

predmetom veľmi intenzívneho výskumu a nie je v súčasnosti známy. Zákon trenia v tvare (3.3.19) nie je preto na praktické použitie vhodný.

3.3.2 Metóda napätia v rozdelených uzloch - TSN

Metódu napätia v rozdelených uzloch, TSN (z angl. Traction at Split Nodes), nezávislo navrhli a použili Andrews (1973, 1976a,b, 1999) a Day (1977, 1982). Ich verzie sú mierne odlišné. Verzia, ktorú navrhol Day, má vo všeobecnosti lepšie vlastnosti, preto teraz vysvetlíme iba túto verziu.

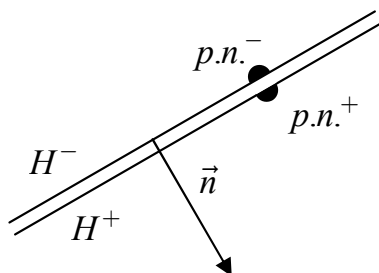
V metóde TSN je zlomová plocha reprezentovaná sieťovou plochou pokrytou tzv. rozdelenými uzlami. Rozdelený uzol má dve časti, časť $p.n.^+$, ktorá patrí polpriestoru H^+ a časť $p.n.^-$, ktorá patrí polpriestoru H^- , pozri Obr. 3.3.6.

Časti $p.n.^+$ a $p.n.^-$ rozdeleného uzla majú rôzne 'polpriestorové' veličiny (napr. hmotnosť, posunutie, rýchlosť posunutia, pôsobiace sily, materiálové parametre), ale zdieľajú rovnaké 'zlomové' veličiny (napr. sklz, rýchlosť sklzu, zákon trenia, parametre zákona trenia).

Časti $p.n.^+$ a $p.n.^-$ rozdeleného uzla sa vzhľadom k sebe môžu pohybovať, t.j., môže vzniknúť diskontinuita v posunutí - sklz. Diskontinuitu v posunutí medzi dvoma časťami $p.n.^+$ a $p.n.^-$ rozdeleného uzla môžeme považovať za sklz len za predpokladu

$$|D\vec{u}| \ll h, \quad (3.3.20)$$

teda ak je veľkosť sklzu oveľa menšia ako veľkosť prvku. Inými slovami, ak v dôsledku vzájomného pohybu častí rozdeleného uzla nemusíme uvažovať zmenu konfigurácie siete prvkov. Uvažujme normálový vektor \vec{n} smerujúci z polpriestoru H^- do polpriestoru H^+ , pozri Obr. 3.3.6.



Obr. 3.3.6: Polpriestory H^- a H^+ , časti $p.n.^-$ a $p.n.^+$ rozdeleného uzla a normálový vektor \vec{n} .

Časť $p.n.^-$ rozdeleného uzla má hmotnosť M^- a pôsobí naň sila \vec{F}^- , ktorá je iba dôsledkom deformácie v polpriestore H^- , prípadne dôsledkom sily pôsobiacej v polpriestore H^- . Zrýchlenie časti rozdeleného uzla $p.n.^-$ je

$$\vec{a}^- = \frac{\vec{F}^-}{M^-}. \quad (3.3.21)$$

Analogicky zrýchlenie časti rozdeleného uzla $p.n.^+$ je

$$\vec{a}^+ = \frac{\vec{F}^+}{M^+}. \quad (3.3.22)$$

Pretože na zrýchlenie častí rozdeleného uzla majú vplyv iba sily pôsobiace v polpriestoroch, vzťahy (3.3.21) a (3.3.22) opisujú pohyb častí uzlov, ako keby boli na voľnom povrchu polpriestorov.

Jediná interakcia medzi polpriestormi je sprostredkovaná vektorom celkového napätia. Keďže ide o väzbu medzi dvomi polpriestormi, hovoríme o napätí väzby (constraint traction) $\vec{T}^c(\vec{n})$. Pomocou napätia väzby $\vec{T}^c(\vec{n})$ môžeme simulovať rôzne stavy na zlome, t.j., stav bez trhliny alebo stav s trhlinou. Vektor $\vec{T}^c(\vec{n})$ vyjadruje silové pôsobenie polpriestoru H^+ na polpriestor H^- . Označme A veľkosť plochy kontaktu, ktorá prislúcha jednému rozdelenému uzlu. Potom môžeme silu väzby (constraint force) pôsobiacu v časti $p.n.^-$ rozdeleného uzla zapísať v tvare

$$\vec{F}^{c,-} = \vec{F}^c = A \cdot \vec{T}^c(\vec{n}). \quad (3.3.23)$$

Zrýchlenie časti $p.n.^-$ rozdeleného uzla s uvážením väzby bude potom

$$\vec{a}^- = \frac{1}{M^-} \left(\vec{F}^- + \vec{F}^{c,-} \right) = \frac{1}{M^-} \left(\vec{F}^- + A \cdot \vec{T}^c \right). \quad (3.3.24)$$

Analogicky, sila väzby v časti $p.n.^+$ rozdeleného uzla je

$$\vec{F}^{c,+} = -\vec{F}^c = -A \cdot \vec{T}^c(\vec{n}) \quad (3.3.25)$$

a zrýchlenie

$$\vec{a}^+ = \frac{1}{M^+} \left(\vec{F}^+ + \vec{F}^{c,+} \right) = \frac{1}{M^+} \left(\vec{F}^+ - A \cdot \vec{T}^c \right). \quad (3.3.26)$$

Pripomeňme, že počiatkové napätie zodpovedá rovnovážnemu stavu a pohyb je iba dôsledkom napätňovej variácie. K zrýchleniu v častiach rozdeleného uzla teda

prispieva iba napätiová variácia $\Delta\vec{T} = \vec{T}^c - \vec{T}^0$ a zrýchlenie môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}\vec{a}^\pm(t) &= \frac{1}{M^\pm} \left\{ \vec{F}^{\pm}(t) \mp A \cdot \Delta\vec{T} \right\} \\ &= \frac{1}{M^\pm} \left\{ \vec{F}^{\pm}(t) \mp A \cdot \left[\vec{T}^c(t) - \vec{T}^0 \right] \right\} .\end{aligned}\quad (3.3.27)$$

Aproximáciou časovej derivácie centrálnym diferenčným vzorcom 2. rádu dostaneme vzťah pre výpočet rýchlosti posunutia častí rozdeleného uzla v tvare

$$\begin{aligned}\vec{v}^\pm \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) &= \vec{v}^\pm \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{M^\pm} \left\{ \vec{F}^{\pm}(t) \mp A \cdot \left[\vec{T}^c(t) - \vec{T}^0 \right] \right\} .\end{aligned}\quad (3.3.28)$$

Dosadením rýchlostí posunutia v tvare (3.3.28) do rovnice (3.3.3) dostaneme vyjadrenie pre rýchlosť sklzu v tvare

$$\begin{aligned}D\vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) &\doteq D\vec{v} \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ &+ \Delta t B \left\{ \frac{M^- \vec{F}^+(t) - M^+ \vec{F}^-(t)}{A \cdot (M^- + M^+)} - \left[\vec{T}^c(t) + \vec{T}^0 \right] \right\} ,\end{aligned}\quad (3.3.29)$$

kde

$$B = A \frac{M^- + M^+}{M^- M^+} .\quad (3.3.30)$$

Ako sme už povedali, pomocou napätia väzby \vec{T}^c môžeme simulovať rôzne stavy na zlome. Teraz nájdeme testovacie/porovnávacie napätie (trial traction), $\vec{T}^c = \vec{T}^{ct}$, ktoré zaručí, že rýchlosť sklzu bude nulová. Inými slovami, ak v danom rozdelenom uzle ešte nevznikla trhlina, aplikáciou napätia \vec{T}^{ct} zaručíme, že kontakt sa aj naďalej bude správať ako spojité prostredie. Ak v danom rozdelenom uzle trhlina už vznikla, potom aplikácia napätia \vec{T}^{ct} spôsobí, že sklz prestane v danom rozdelenom uzle rásť, t.j., že v danom bode prestane proces sklzu.

Napätie je definované v čase t , zatiaľ čo rýchlosť sklzu je definovaná v čase $t + \frac{\Delta t}{2}$. Podmienku, že testovacie napätie zaručí nulovú rýchlosť sklzu teda môžeme formulovať dvomi spôsobmi. Alebo ju definujeme v tom istom čase, v čase t ,

$$\vec{T}^c(t) = \vec{T}^{ct}(t) \Rightarrow D\vec{v}(t) = 0 ,\quad (3.3.31)$$

alebo je čas pre rýchlosť sklzu o Δt posunutý:

$$\vec{T}^c(t) = \vec{T}^{ct}(t) \Rightarrow D\vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = 0. \quad (3.3.32)$$

Pretože napätie určené z podmienok (3.3.31) alebo (3.3.32) je aplikované v schéme diskkrétnej v čase, predpísané napätie pôsobí od času $t - \frac{\Delta t}{2}$ do času $t + \frac{\Delta t}{2}$. Preto pri použití podmienky (3.3.31) môže nastať tzv. spätný sklz. Pri spätnom sklze trenie nebráni pohybu, ale naopak, podporuje/vyvoláva ho, a tak je porušený zákon zachovania energie. Je teda zrejmé, že spätný sklz je nefyzikálny. Vzniku spätného sklzu nedochádza pri použití podmienky (3.3.32) (Day, 2005, osobná komunikácia).

Z rovnice (3.3.29) a podmienky (3.3.32) dostaneme testovacie napätie v tvare

$$\vec{T}^{ct}(t) \doteq \vec{T}^0 + \frac{\frac{1}{\Delta t} M^- M^+ D\vec{v} \left(t - \frac{dt}{2} \right) + M^- \vec{F}^+(t) - M^+ \vec{F}^-(t)}{A \cdot (M^- + M^+)}. \quad (3.3.33)$$

Napätie \vec{T}^{ct} úplne kompenzuje momentálne namáhanie kontaktu v dôsledku deformácie polpriestorov + a -, aj v dôsledku vzájomného pohybu častí rozdeleného uzla. Veľkosť napätia \vec{T}^{ct} je teda rovnaká ako veľkosť namáhania kontaktu. Ak je namáhanie kontaktu menšie alebo rovnaké ako momentálna pevnosť zlomu S určená zákonom trenia, potom skutočné napätie v danom bode na zlome bude rovné testovaciemu napätiu, v dôsledku čoho nevznikne v danom bode trhlina, t.j.,

$$\begin{aligned} |\vec{T}^{ct}(t)| \leq S(t) &\Rightarrow \vec{T}^c(t) = \vec{T}^{ct}(t), \\ D\vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Ak je namáhanie kontaktu väčšie ako pevnosť zlomu, kontakt nevydrží záťaž a roztrhne sa. Na kontakte/zlome bude pôsobiť iba napätie trenia, ktoré však nevykompenzuje celú záťaž kontaktu. Zvyšok namáhania spôsobí vzájomný pohyb častí rozdeleného uzla, t.j.,

$$\begin{aligned} |\vec{T}^{ct}(t)| > S(t) &\Rightarrow \vec{T}^c(t) = \vec{T}^f(t), \\ D\vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Práve kvôli tomu, že napätie \vec{T}^{ct} je nutné porovnávať s pevnosťou zlomu, vznikol názov testovacie/porovnávacie napätie. Tento názov je však zjavne zavádzajúci.

Ako sme už uviedli v rovnici (3.3.6), na zlome predpokladáme iba tangenciálny pohyb, preto normálová zložka napätia \vec{T}^f , zo vzťahu (3.3.35), bude určená testovacím napätím,

$$\vec{T}_n^f(t) = \vec{T}_n^{ct}(t), \quad (3.3.36)$$

ktorého dôsledkom bude normálová zložka diferenciálnej rýchlosti nulová, pozri vzťah (3.3.29). Dosadením tangenciálnej zložky napätia \vec{T}^f do rovnice (3.3.29) môžeme tangenciálnu zložku rýchlosti sklzu vyjadriť v tvare

$$D\vec{v}_{sh} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \doteq \Delta t B \left[\vec{T}_{sh}^{ct}(t) - \vec{T}_{sh}^f(t) \right]. \quad (3.3.37)$$

Veľkosť tangenciálnej zložky napätia \vec{T}^f bude určená pevnosťou zlomu S , t.j. zákonom trenia, a smer vektora \vec{T}^f bude určený vektorom $\vec{\gamma}$,

$$\vec{T}_{sh}^f(f) = S(t) \cdot \vec{\gamma}(t), \quad (3.3.38)$$

Vektor $\vec{\gamma}$ je jednotkový vektor a je určený z podmienky, že trenie pôsobí proti pohybu.

Rýchlosť sklzu $D\vec{v}_{sh}$ vyjadruje relatívny pohyb polpriestoru H^+ vzhľadom na polpriestor H^- . Napätie \vec{T}_{sh}^f však, vzhľadom na definovanú orientáciu normálového vektora \vec{n} (pozri Obr. 3.3.6), vyjadruje silové pôsobenie polpriestoru H^+ na polpriestor H^- . Podmienku, že trecie napätie pôsobí proti pohybu, tak môžeme zapísať v tvare

$$\frac{\vec{T}_{sh}^f(t)}{S(t)} = \frac{D\vec{v}_{sh}(t)}{|D\vec{v}_{sh}(t)|}. \quad (3.3.39)$$

Rýchlosť sklzu je definovaná pre čas $t - \frac{\Delta t}{2}$ a $t + \frac{\Delta t}{2}$, preto $D\vec{v}_{sh}(t)$ môžeme aproximovať vzťahom

$$D\vec{v}_{sh}(t) \doteq \frac{1}{2} \left[D\vec{v}_{sh} \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + D\vec{v}_{sh} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]. \quad (3.3.40)$$

Dosadením vzťahu (3.3.37) do (3.3.40) a potom do (3.3.39) dostaneme

$$\left[|D\vec{v}_{sh}(t)| + S(t) \frac{\Delta t}{2} B \right] \vec{T}_{sh}^f(t) \doteq S(t) \vec{\gamma}, \quad (3.3.41)$$

kde

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{2} \left[D\vec{v}_{sh} \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + dt B \vec{T}_{sh}^{ct}(t) \right]. \quad (3.3.42)$$

Z rovnice (3.3.41) vyplýva, že vektor $\vec{T}_{sh}^f(t)$ má smer vektora $\vec{\gamma}$ a teda, že

$$\vec{\Upsilon} = \frac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}. \quad (3.3.43)$$

Vzťah (3.3.35) tak môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} |\vec{T}^{ct}(t)| > S(t) &\Rightarrow \vec{T}_n^c(t) = \vec{T}_n^{ct}(t), \\ \vec{T}_{sh}^c(t) &= S(t) \vec{\Upsilon}(t), \\ D\vec{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

kde vektor $\vec{\Upsilon}$ je vypočítaný podľa vzťahov (3.3.42) a (3.3.43).

Podľa Daya (Day, 2005, osobná komunikácia) tento prístup, t.j. určenie testovacieho napätia tak, aby $D\vec{v}(t + \Delta t/2) = 0$ a určenie smeru napätia trenia zo smeru $D\vec{v}(t)$, môže niekedy viesť k vzniku veľkých oscilácií v smere rýchlosti sklzu. Podľa Daya je možné týmto osciláciám predísť, ak je smer napätia trenia určený zo smeru $D\vec{v}(t + \Delta t/2)$, t.j., ak podmienku (3.3.39) nahradíme podmienkou

$$\frac{\vec{T}_{sh}^f(t)}{S(t)} = \frac{D\vec{v}_{sh}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left|D\vec{v}_{sh}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right|}. \quad (3.3.45)$$

Dosadením vzťahu (3.3.37) do (3.3.45) dostaneme

$$\left[S(t) + |\vec{T}_{sh}^{ct}(t) - \vec{T}_{sh}^f(t)| \right] \vec{T}_{sh}^f(t) \doteq S(t) \vec{T}_{sh}^{ct}(t). \quad (3.3.46)$$

Z rovnice (3.3.46) je zrejmé, že napätie \vec{T}_{sh}^f má rovnaký smer ako testovacie napätie \vec{T}_{sh}^{ct} a teda

$$\vec{\Upsilon} = \frac{\vec{T}_{sh}^{ct}}{|\vec{T}_{sh}^{ct}|}. \quad (3.3.47)$$

Modifikovaná verzia sa správa vždy korektne (Day, 2005, osobná komunikácia).

Pre úplnosť dodajme, že podmienkou použitia metódy TSN je predpoklad malých posunutí, t.j.,

$$h \gg |D\vec{u}_{sh}|, \quad (3.3.48)$$

kde h je sieťový krok. Inými slovami, narastajúci sklz nesmie zmeniť konfiguráciu dvojíc rozdelených uzlov. Ďalšími nutnými podmienkami pre použitie metódy TSN je, aby metóda, do ktorej bude TSN implementovaná, bola explicitná v čase, a aby sila aplikovaná v jednom uzle urýchlila počas jednej časovej hladiny iba jeden uzol.

3.3.3 Implementácia TSN metódy

Ako sme už spomenuli, metódu TSN navrhli a implementovali na sebe nezávislo Andrews (1973, 1999) a Day (1977, 1982). Andrews implementoval svoju formuláciu TSN do metódy konečných diferencií, s priestorovým diferencovaním ekvivalentným s metódou konečných prvkov. Day implementoval svoju formuláciu TSN do algoritmu metódy konečných diferencií na čiastočne striedavo usporiadanej sieti. Festa (2004) implementoval metódu TSN do metódy spektrálnych prvkov. Na implementáciu TSN použil Neumannovu okrajovú podmienku s predpísaným vektorom napätia na hranici spektrálneho prvku. Aj keď je metóda spektrálnych prvkov veľmi blízka MKP, takýto prístup by v prípade MKP znamenal porušenie jednej zo základných podmienok pre aplikáciu metódy. Sila aplikovaná v jednom bode na hranici prvku by počas jedného časového kroku urýchlila nie jeden uzol, ako požaduje TSN, ale dva uzly, ktoré ležia na danej hranici.

Ďalej vysvetlíme našu implementáciu TSN do algoritmu MKP s vratnou silou. MKP schéma (3.1.13) je explicitná, čím je splnená jedna z podmienok pre implementáciu TSN. Druhou podmienkou je, aby sila pôsobiaca v jednom uzle urýchlila počas jednej časovej hladiny iba tento uzol. Pre schému (3.1.13) táto podmienka znamená, že globálna matica hmotnosti \mathbb{M} musí byť diagonálna. Ak globálna matica hmotnosti nie je diagonálna, je nutné použiť tzv. sústredenú maticu hmotnosti $\tilde{\mathbb{M}}$, vzťah (1.3.114).

Zlomová plocha je vo výpočtovom modeli pokrytá rozdelenými uzlami, zvyšok výpočtovej oblasti je pokrytý obyčajnými uzlami. Pripomeňme, že rozdelený uzol má dve časti, $p.n.^+$ a $p.n.^-$. Časť $p.n.^+$ patrí iba polpriestoru H^+ a časť $p.n.^-$ patrí iba polpriestoru H^- . Časti jedného rozdeleného uzla majú rovnakú polohu a zdieľajú spoločné veličiny pre trenie/kontakt (napr. sklz, rýchlosť sklzu, trenie, koeficienty trenia), ale majú každý svoje vlastné veličiny pre polpriestor (napr. hmotnosť, posunutie, rýchlosť posunutia, materiálové parametre). Toto kladie ďalšie podmienky na proces skladania lokálnych systémov rovníc do globálneho. Počas procesu vytvárania globálnych veličín (globálna matica hmotnosti, globálny vektor vratnej sily) z lokálnych veličín (lokálna matica hmotnosti a lokálny vektor vratnej sily) musíme zabezpečiť, aby vratná sila v uzle $p.n.^+$ bola iba v dôsledku deformácie

v polpriestore H^+ a naopak, aby vratná sila v uzle $p.n.^-$ bola iba v dôsledku deformácie v polpriestore H^- . Analogicky musíme zabezpečiť, aby hmotnosť v uzle $p.n.^+$ bola iba dôsledkom rozloženia hustoty v polpriestore H^+ a hmotnosť uzla $p.n.^-$ iba dôsledkom rozloženia hustoty v polpriestore H^- . Inými slovami, ak by sme neuvažovali žiadnu interakciu medzi časťami rozdeleného uzla $p.n.^+$ a $p.n.^-$, tak by sa povrchy polpriestorov správali ako voľné povrchy.

Ako sme už naznačili v predchádzajúcej kapitole, prvým krokom TSN algoritmu je výpočet testovacieho napätia \vec{T}^{ct} podľa vzťahu (3.3.33). Sily $\vec{F}^+(m)$ a $\vec{F}^-(m)$ (m predstavuje časovú hladinu v čase $t = m \cdot \Delta t$) sú priamo zložkami globálneho vektora vratnej sily v častiach rozdeleného uzla.

Vektor testovacieho napätia \vec{T}^{ct} môžeme rozložiť na normálovú a tangenciálnu zložku pomocou týchto vzťahov:

$$\begin{aligned}\vec{T}_n^{ct}(m) &= \left[\vec{T}^{ct}(m) \cdot \vec{n} \right] \vec{n}, \\ \vec{T}_{sh}^{ct}(m) &= \vec{T}^{ct}(m) - \vec{T}_n^{ct}(m).\end{aligned}\quad (3.3.49)$$

Dráha sklzu l , definovaná rovnicou (3.3.12), môže byť aproximovaná vzťahom

$$l(m) = l(m-1) + \Delta t \left| D\vec{v}\left(m - \frac{1}{2}\right) \right|. \quad (3.3.50)$$

Dráha sklzu l je použitá na výpočet pevnosti zlomu $S(m)$, ak je použitý LSW zákon trenia, rovnica (3.3.11), resp. (3.3.13), alebo fyzikálne konzistentný Ohnakov zákon trenia závislý od sklzu, rovnica (3.3.14), resp. (3.3.15).

Na základe vyhodnotenia okrajových podmienok na kontakte vypočítame napätie väzby podľa vzťahov (3.3.34), (3.3.44) a (3.3.47). Rýchlosť sklzu na zlome v stave s trhlinou vypočítame zo vzťahu (3.3.37).

Keďže používame schému vo formulácii s posunutím, musí byť výsledkom implementácie TSN do MKP algoritmu posunutie v častiach rozdeleného uzla. Pohyb ťažiska oboch častí rozdeleného uzla vypočítame podľa

$$\vec{v}_{cent}\left(m + \frac{1}{2}\right) = \vec{v}_{cent}\left(m - \frac{1}{2}\right) + \Delta t \frac{\vec{F}^+(m) + \vec{F}^-(m)}{M^+ + M^-}. \quad (3.3.51)$$

Rýchlosť sklzu, t.j., diferenciálna rýchlosť medzi časťami rozdeleného uzla, je potom rozložená medzi časti rozdeleného uzla na základe ich hmotnosti:

$$\vec{v}^\mp\left(m + \frac{1}{2}\right) = \vec{v}_{cent}\left(m + \frac{1}{2}\right) \mp \Delta t \frac{M^\pm}{M^+ + M^-} D\vec{v}\left(m + \frac{1}{2}\right). \quad (3.3.52)$$

Posunutie v častiach rozdeleného uzla je potom

$$\vec{u}^\mp(m+1) = \vec{u}^\mp(m-1) + \Delta t \vec{v}^\mp\left(m + \frac{1}{2}\right). \quad (3.3.53)$$

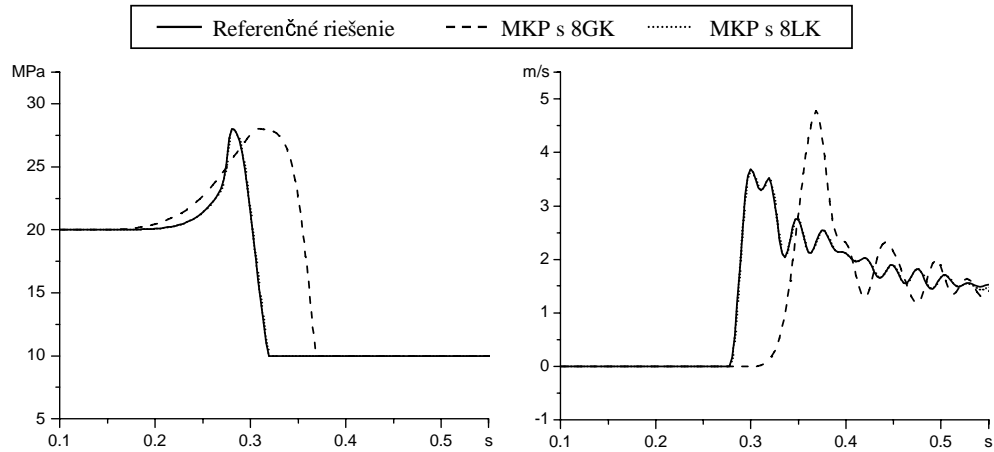
3.3.4 Numerické testy

Numerické testy s 8GK a redukovanou 8LK

Ako sme už v kapitole 3.1.5 uviedli, numerické testy s dynamickým zdrojom nás viedli k záveru, že 8-bodová Gaussova kvadratura, resp. presná integrácia, nevedú k správny výsledkom. V tejto časti stručne charakterizujeme vykonané numerické testy s 8LK a 8GK pre spontánne sa šíriacu trhlinu na zlome. Výsledky numerických testov s kinematickým bodovým zdrojom s redukovanou 1GK ukázali, že táto kvadratura nie je kvôli veľkým osciláciám v praxi použiteľná. Preto sme ju v týchto testoch už neuvažovali.

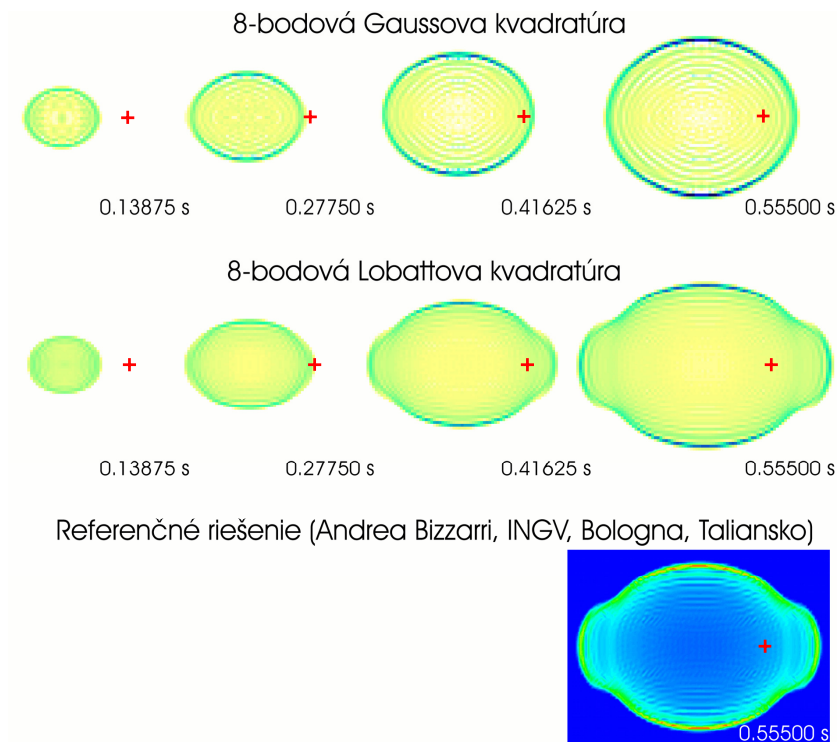
Pre spontánne šírenie trhliny na zlome neexistuje analytické riešenie. Preto sme ako referenčné riešenie zvolili riešenie Andreu Bizzarriho z INGV v Bologni v Taliansku (Bizzarri, 2004), ktorý používa výpočtový program Joe Andrewsa. Program Joe Andrewsa používajú viacerí seizmológovia na svete a je preto možné predpokladať, že výsledky získané s týmto programom môžeme použiť ako referenčné riešenie.

V teste sme uvažovali zlom umiestnený v homogénnom neohraničenom elasticom prostredí s hustotou 2700 kg.m^{-3} , rýchlosťou P-vln 5196 km.s^{-1} a rýchlosťou S-vln 3000 km.s^{-1} . Boli použité prvky HEX8 tvaru kocky s hranou 50 m . Z hľadiska sieťovej disperzie bol výpočet presný do približne 5 Hz . Z dôvodu lepšieho rozlíšenia času vzniku trhliny v danom bode bol vo výpočte použitý časový krok dvakrát menší ako ten, ktorý vyplýva z podmienky stability (3.1.18). Navyše kvôli nepreskúmanému vplyvu veľkosti časového kroku na riešenie sme zvolili časový krok rovnaký vo všetkých troch výpočtoch a to $\Delta t = 0.002775 \text{ s}$. Počiatočné tangenciálne napätie na zlome bolo 20 MPa a normálové -30 MPa (používame konvenciu, že záporné znamienko označuje tlak). Použitý bol LSW zákon trenia s parametrami: $\mu^S = 0.93333$, $\mu^D = 0.33333$ a $d_c = 0.1 \text{ m}$. Vznik trhliny bol inicializovaný v kruhovej oblasti s polomerom 400 m zvýšením tangenciálneho napätia na hodnotu 27.999 MPa , t.j. o 10% nad medzu pevnosti. Pre porovnanie



Obr. 3.3.7: Časové histórie tangenciálneho napätia (vľavo) a tangenciálnej zložky rýchlosti sklzu (vpravo). Riešenie získané MKP s 8LK sa zhoduje s referenčným riešením.

riešení boli zvolené snapshoty rýchlosti sklzu v rovine zlomu a časový priebeh napätia a rýchlosti sklzu v niekoľkých prijímačoch na ploche zlomu. Na Obr. 3.3.7



Obr. 3.3.8: Vývoj U-zložky rýchlosti sklzu na ploche zlomu pri použití 8GK a 8LK a v referenčnom riešení. Farby predstavujú veľkosť rýchlosti sklzu. Iná farebná škála pri referenčnom riešení je dôsledkom odlišného spracovania výsledkov. Červené krížiky indikujú polohu prijímača, v ktorom boli zaznamenávané napätie a rýchlosť sklzu zobrazené na Obr. 3.3.7.

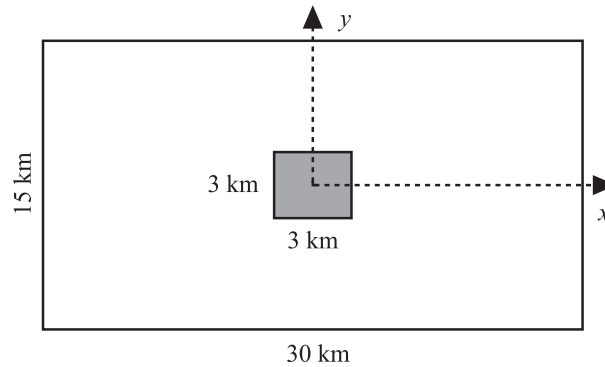
vidieť porovnanie časových histórií napätia a rýchlosti sklzu v jednom zvolenom bode na ploche zlomu. Približná poloha bodu je indikovaná krížikom na Obr. 3.3.8.

Z porovnania riešení na Obr. 3.3.7 je zrejmé, že pri použití 8GK je nárast napätia v sledovanom bode pomalší, čoho dôsledkom je neskorší vznik trhliny. Riešenie získané s 8LK je vo veľmi dobrej zhode s referenčným riešením. Na Obr. 3.3.8 je vidieť časový vývoj trhliny pri použití 8GK a 8LK. V prípade referenčného riešenia je k dispozícii iba stav trhliny na konci výpočtu. Už od začiatku sú relatívne veľké rozdiely v riešeniach 8GK a 8LK. Riešenie 8GK je zjavne viac rozkmitané. Spočiatku sa samotný tvar trhliny veľmi nelíši. V čase $t = 0.27750$ s vidieť pri použití 8LK vznik tzv. bifurkácie, ktorá sa ďalej zväčšuje. V prípade použitia 8GK však vznik bifurkácie nepozorujeme.

Vykonané numerické testy nás viedli k záveru, že pre problémy s dynamickým seizmickým zdrojom nie je možné použiť presnú integráciu, t.j., 8GK, nakoľko výsledky sa nezhodovali s referenčným riešením. Použitím redukovanej 8LK sme dostali riešenia vo veľmi dobrej zhode s referenčným riešením. Pre problémy s dynamickým zdrojom nie je problémom ani menší časový krok pre schémy s redukovanou integráciou v porovnaní so schémami s presnou integráciou, nakoľko kvôli lepšiemu časovému rozlíšeniu času vzniku trhliny sa bežne používajú časové kroky výrazne menšie ako maximálny časový krok, ktorý je možné použiť podľa podmienky stability.

Porovnanie relatívnej rýchlosti konvergencie

Ako už bolo skôr uvedené, pre problém spontánneho šírenia trhliny neexistuje analytické riešenie. Preto je veľmi dôležité porovnať aspoň rôzne numerické riešenia navzájom pre rovnakú konfiguráciu. Steve Day a kolegovia (Day et al., 2005; Dalguer a Day, 2006, 2007) postupne porovnali pre tú istú konfiguráciu numerické správanie metódy hraničných integrálov, implementácie Dayovej formulácie TSN do konečno-diferenčnej schémy na čiastočne striedavo usporiadanej sieti (DFM), 'thick-fault' metódy Raula Madariaga (Madariaga et al., 1998), 'stress-glut' metódy Joe Andrewsa (Andrews, 1999) a implementácie 1. a 2. rádu Dayovej formulácie TSN do konečno-diferenčnej schémy na striedavo usporiadanej sieti.



Obr. 3.3.9: Geometrická konfigurácia Testu č. 3 v rámci SCEC Benchmark iniciatívy (Harris et al., 2004). Zlom je umiestnený v homogénnom neohraničenom elastickom kontinuu. Trhlina sa môže šíriť iba v oblasti $30 \text{ km} \times 15 \text{ km}$. Mimo tejto oblasti je pevnosť kontaktu nekonečná. Spontánne šírenie trhliny je inicializované vo štvorcovej inicializačnej zóne (šedá plocha) v strede zlomovej plochy.

Práca Daya a kolegov je prvou (a zatiaľ jedinou) prácou, kedy boli rôzne metódy používané na riešenie spontánneho šírenia trhliny na zlome systematicky porovnané pre tú istú konfiguráciu. Preto sme sa rozhodli porovnať numerické správanie našej implementácie TSN do algoritmu MKP podľa postupu uvedeného v prácach Daya a kolegov. Ďalší text tejto časti vychádza z práce Moczo et al. (2007b). Pre úplnosť dodajme, že v tejto práci sú publikované aj porovnania troch rôznych implementácií TSN do konečno-diferenčnej schémy na striedavo usporiadanej sieti. Od implementácie Dalguer a Day (2007), ako aj navzájom, sa líšia rádom aproximácie.

Day a kolegovia zvolili ako základ pre ich testy Test č. 3 v rámci SCEC Benchmark iniciatívy (Harris et al., 2004). Rovinný zlom je umiestnený v homogénnom neohraničenom elastickom kontinuu. Geometrická konfigurácia zlomovej plochy je na Obr. 3.3.9. Pri testoch bol použitý LSW zákon trenia. Materiálové parametre a parametre zákona trenia sú uvedené v Tab. 3.3.1. Spontánne šírenie trhliny bolo inicializované v štvorcovej inicializačnej zóne, kde bolo počiatočné napätie o 0.4% väčšie ako medza pevnosti, čoho dôsledkom je okamžitý sklz v inicializačnej zóne. Sklз bol povolený len v oblasti $30 \text{ km} \times 15 \text{ km}$. Mimo tejto oblasti bola medza pevnosti kontaktu nekonečná, takže nikdy nemohlo dôjsť k porušeniu kontaktu.

Numerické výpočty pre rôzne veľkosti prvku h a pre rôzne časové kroky Δt sú sumarizované v Tab. 3.3.2. Cieľom testov bolo sledovať vplyv veľkosti prvku na presnosť riešenia. Ako referenčné riešenie bolo použité riešenie DFM0.05 Day

Tabuľka 3.3.1: Materiálové parametre a parametre zákona trenia pre konfiguráciu na Obr. 3.3.9.

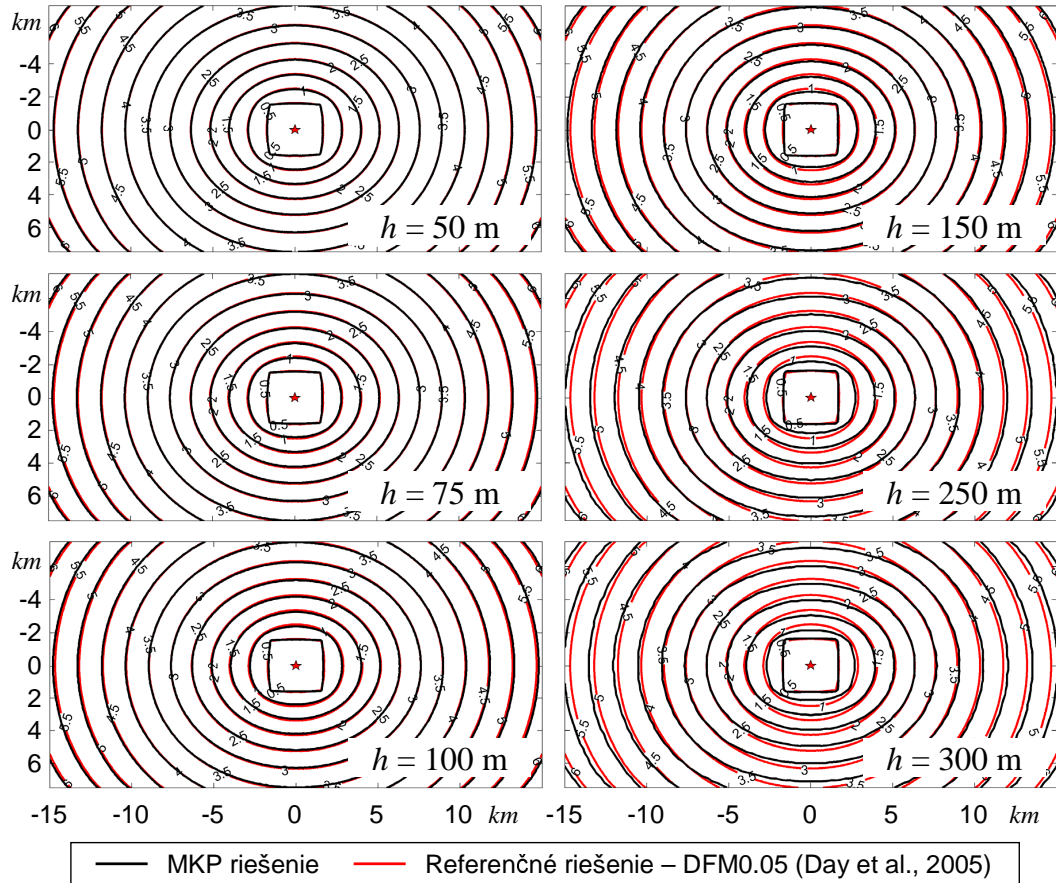
Parameters		Within fault area of 30 km x 15 km		Outside fault area
		Nucleation zone	Outside nucleation zone	
P-wave velocity:	6000 m/s			
S-wave velocity:	3464 m/s			
Density:	2670 kg/m ³			
Initial shear traction	T_{sh}^0 [MPa]	81.6	70.0	70.0
Initial normal traction	T_n^0 [MPa]	120.0	120.0	120.0
Static coefficient of friction	μ_s	0.677	0.677	infinite
Dynamic coefficient of friction	μ_d	0.525	0.525	0.525
Static yielding stress	T_{sh}^s [MPa]	81.24	81.24	infinite
Dynamic yielding stress	T_{sh}^d [MPa]	63.0	63.0	63.0
Dynamic stress drop	$T_{sh}^0 - T_{sh}^d$ [MPa]	18.6	7.0	7.0
Strength excess	$T_{sh}^s - T_{sh}^0$ [MPa]	-0.36	11.24	infinite
Critical slip distance	D_c [m]	0.40	0.40	0.40

Tabuľka 3.3.2: Veľkosti priestorového kroku h a časového kroku Δt použitých pri numerických simuláciách. Priemerné a maximálne hodnoty RMS misfitu času šírenia trhliny pre konfiguráciu na Obr. 3.3.9.

Grid spacing h [m]	50	75	100	150	250	300
Time step Δt [s]	0.0033	0.005	0.0066	0.099	0.16	0.02
Priemerný RMS misfit [%]	0.34	0.62	0.84	1.24	2.10	2/55
Maximálny RMS misfit [%]	0.85	1.64	2.29	3.40	5.22	5.81

et al. (2005) (DFM označuje použitú metódu a 0.05 indikuje, že bol použitý sieťový krok 50 m).

Pre každú simuláciu bol vypočítaný RMS misfit medzi časom šírenia trhliny v našom riešení a referenčnom riešení (DFM0.05) pre všetky body na zlomovej ploche. Z bodových hodnôt RMS misfitu času šírenia trhliny bola vypočítaná priemerná hodnota na celej zlomovej ploche a maximálna hodnota. Obe veličiny sú uvedené v Tab. 3.3.2. Časy šírenia trhliny pre všetky výpočty sú zobrazené na Obr. 3.3.10.



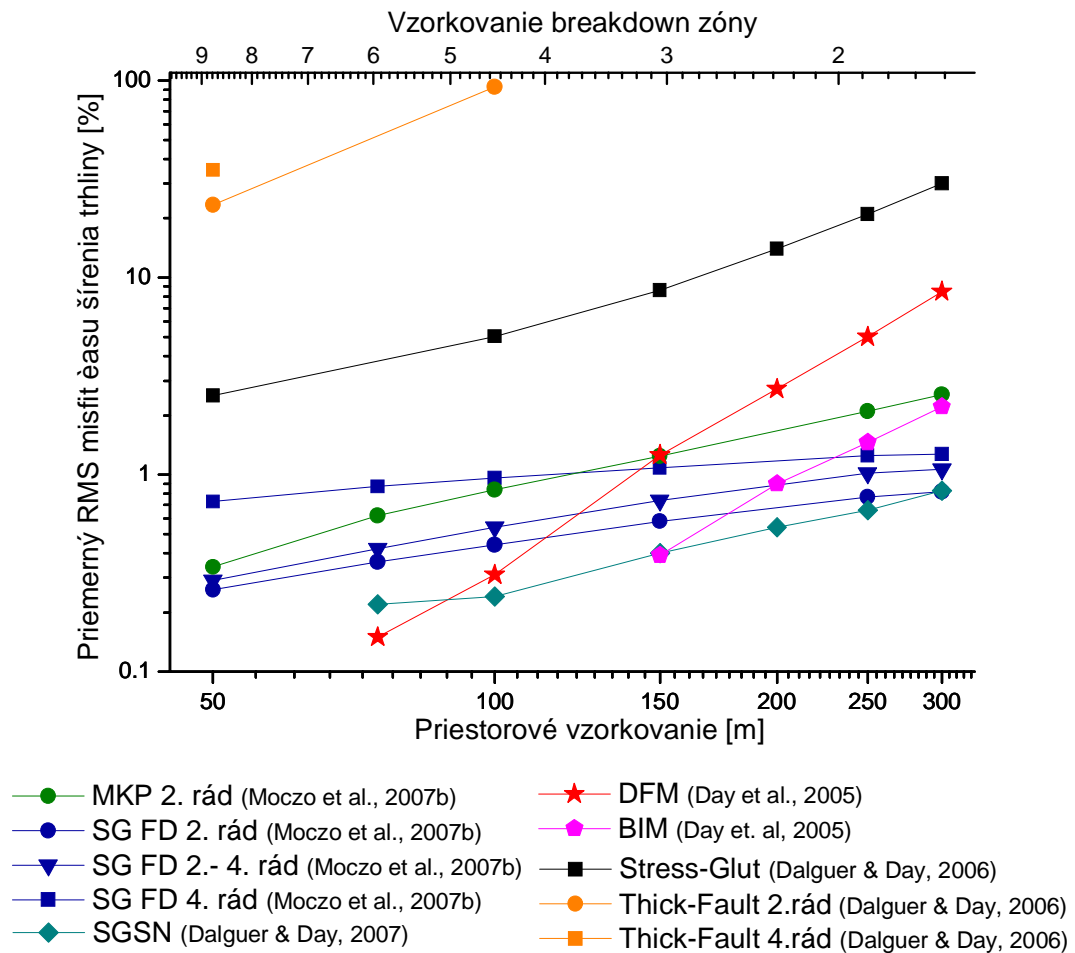
Obr. 3.3.10: Grafické znázornenie časov šírenia trhliny na zlomovej ploche. Čiernou farbou sú znázornené MKP riešenia a červenou farbou referenčné riešenie.

Hodnoty priemerného RMS misfitu času šírenia trhliny pre výpočty s rôznym priestorovým krokom sú graficky porovnané na Obr. 3.3.11 s ďalšími vyššie spomínanými metódami. Pretože aj referenčné riešenie je len približné riešenie, nie je možné pozerat' na Obr. 3.3.11 ako na absolútne porovnanie presnosti metód. Je však pravdepodobné, že riešenie DFM0.05 je relatívne presné. Preto z Obr. 3.3.11 môžeme porovnávať rýchlosť konvergencie jednotlivých metód. Na Obr. 3.3.11 je okrem závislosti od priestorového kroku znázornená aj závislosť od vzorkovania tzv. breakdown zóny. Šírka breakdown zóny sa mení v závislosti od času šírenia trhliny, ale aj v závislosti od smeru šírenia. Vzorkovanie breakdown zóny v Obr. 3.3.11 je definované ako medián počtu sieťových krokov v kohéznej zóne v smere osi x .

Z porovnania na Obr. 3.3.11 je zrejmé, že jednoznačne najhoršou metódou pre zvolenú konfiguráciu je 'thick-fault' metóda v implementácii 2. aj 4. rádu. Aj 'stress-glut' metóda má ešte príliš veľké hodnoty RMS misfitu na to, aby išlo

o prejav faktu, že aj referenčné riešenie je len približné. Tento fakt sa však už môže prejaviť pri ostatných metódach. Preto ich budeme porovnávať iba na základe rýchlosti konvergenzie. Najrýchlejšie konvergujú DFM a BIM, ktoré majú veľmi podobnú rýchlosť konvergenzie. Druhú najrýchlejšiu konvergenciu z uvažovaných metód má naša implementácia TSN do MKP algoritmu a SGSN. Potom nasleduje SG FD 2.-4. rád, SG FD 2. rád a najpomalšie konverguje SG FD 4. rád. Pre úplnosť dodajme, že všetky krivky sú hladké, okrem dvoch - DFM a SGSN. Na oboch je možné pozorovať mierny pokles pre priestorové vzorkovanie $h = 100 \text{ m}$. Na prvý pohľad pôsobí prekvapivo aj fakt, že metódy s vyšším rádom implementácie konvergujú pomalšie. To je zrejme z porovnania SG FD 2. rád, SG FD 2.-4. rád, SG FD 4. rád a SGSN (SGSN je implementácia 1. a 2. rádu). Navyše sa zdá, že rád presnosti schémy použitej na šírenie vln do okolia nemá veľký vplyv na výslednú rýchlosť konvergenzie, nakoľko rýchlosť konvergenzie SGSN a našej MKP implementácie je rovnaká, zatiaľ čo SGSN je implementácia v konečno-diferenčnej schéme 4. rádu, a použitá MKP schéma je 2. rádu.

Tieto zistenia nás viedli k záveru, že pravdepodobným vysvetlením zvláštneho správania metód v tomto teste je fyzikálne nekorektne definovaný samotný test. Ako sme už spomenuli, spontánne šírenie trhliny bolo inicializované v štvorcovej ploche v strede zlomovej plochy. Predpokladáme, že už aj samotný tvar inicializačnej zóny - štvorec - môže pre niektoré metódy znamenať problém. Avšak dôležitejší je priebeh počiatočného napätia. V inicializačnej zóne je počiatočné napätie mierne väčšie ako medza pevnosti kontaktu a mimo inicializačnej zóny má hodnotu medzi medzou pevnosti a dynamickým trením, ako je to vidieť z Tab. 3.3.1. Pretože normálové počiatočné napätie je rovnaké v inicializačnej zóne aj mimo nej, je na hranici inicializačnej zóny nespojitý vektor počiatočného napätia. To je v rozpore so základnými fyzikálnymi predpokladmi o spojitosti vektora napätia. Preto si myslíme, že výsledky sumarizované v Obr. 3.3.11 sú mierou toho, ako sú rôzne metódy citlivé na nekorektne definovaný problém. Vykonané testy však preukázali, že naša implementácia TSN do MKP algoritmu funguje a to aj v prípade pravdepodobne nekorektne definovaného problému.



Referenčné riešenie pre **BIM**: BI0.1 (Day et al., 2005)

Referenčné riešenie pre **ostatné**: DFM0.05 (Day et al., 2005)

Obr. 3.3.11: Grafické porovnanie priemerného RMS misfitu času šírenia trhliny pre rôzne metódy simulácie spontánneho šírenia trhliny. RMS misfit je vypočítaný relatívne voči DFM0.05 (Day et al., 2005) okrem BIM metódy, kde bolo použité referenčné riešenie BI0.1 (Day et al., 2005).

3.4 Hybridná MKD-MKP metóda na simuláciu zemetrasení

Ako už bolo spomenuté, existuje viacero numerických metód, ktoré sa vyvíjajú a používajú súčasne. Je to dané tým, že žiadna z doteraz existujúcich metód nie je najpresnejšia a zároveň najefektívnejšia pre všetky konfigurácie prostredia a zdroja seizmických vln. Pre mnohé konfigurácie vlnového poľa a prostredia je preto výhodné kombinovať dve alebo viac numerických metód, aby sme dosiahli dostatočnú mieru presnosti a výpočtovej efektívnosti. Pre niektoré prípady je vhodné riešiť priestorovú závislosť posunutí použitím jednej metódy a časovú závislosť použitím inej metódy (napr. Alexeev a Mikhailenko, 1980). V iných prípadoch je vhodné rozdeliť výpočtovú oblasť na podoblasti a na riešenie problému v každej časti použiť najvhodnejšiu metódu. V snahe dosiahnuť čo najväčšiu výpočtovú efektívnosť a zároveň aplikovateľnosť metódy na čo najväčší okruh problémov bolo vyvinutých niekoľko hybridných numerických metód, napr. Ohtsuki a Harumi (1983), Shtivelman (1984, 1985), Van den Berg (1984), Kummer et al. (1987), Stead a Helmberger (1988), Kawase (1988), Gaffet a Bouchon (1989), Emmerich (1989, 1992), Fäh (1992); Fäh et al. (1993), Rovelli et al. (1994), Bouchon a Coutant (1994), Robertsson (1996), Zahradník a Moczo (1996), Moczo et al. (1997), Lecomte (2004), Ma et al. (2004).

3.4.1 Konečno-diferenčná a MKP schéma

Metóda konečných diferencií (MKD) je vo všeobecnosti veľmi robustná, t.j., je aplikovateľná na zložité nehomogénne prostredia. MKD je väčšinou aplikovaná na pravidelných sieťach. Práve kvôli pravidelnej sieti sú algoritmy založené na MKD veľmi efektívne. Avšak splniť okrajovú podmienku na nerovinnom voľnom povrchu je pre MKD v súčasnosti nevyriešený problém. Pre MKP je však takáto okrajová podmienka prirodzenou. Z tohoto pohľadu je vhodnejšie použiť metódu konečných prvkov v konfiguráciách s nerovinným voľným povrchom alebo s dynamicky sa šíriacou trhlinou na seizmoaktívnom zlome. Okrem robustnosti metódy je veľmi dôležitým faktorom efektívnosť numerickej metódy, t.j., napríklad koľko operačnej pamäte alebo výpočtového času je potrebné na vyriešenie problému. Uvažujme najskôr homogénne prostredie. Pre takéto prostredie sú MKD a MKP

porovnateľne efektívne. To však za predpokladu, že bude použitá MKP formulácia pre prvky tvaru kocky, inými slovami, aj MKP bude aplikovaná na pravidelnej sieti. Uvažujme teraz prostredie s vnútorným rozhraním nepravidelného tvaru. Pre takýto fyzikálny model môžeme použiť MKD na pravidelnej sieti, ak bodové hodnoty materiálových parametrov nahradíme efektívnymi hodnotami. Efektívnosť MKD schémy sa teda zásadne nezmení. Avšak MKP vyžaduje, aby prvky kopírovali tvar rozhrania. To znamená, že musíme použiť prvky nepravidelného tvaru, ktoré sú však menej efektívne ako špeciálny algoritmus pre prvky tvaru kocky. Môžeme teda povedať, že MKD je efektívnejšia ako MKP. Pre úplnosť dodajme, že formálne je aj v MKP možné uvažovať rozhranie prechádzajúce vnútro prvku. V takom prípade sa efektívnosť v porovnaní s aplikáciou na homogénne prostredie nezmení, avšak dôsledkom budú, samozrejme, oveľa väčšie chyby.

Ak vyžadujeme, aby bola metóda aplikovateľná na nerovinný voľný povrch alebo dynamicky sa šíriacu trhlinu na seizmickom zlome a zároveň, aby bola efektívna pre šírenie seizmických vln ďalej od seizmického zlomu, je prirodzené, na základe úvah o efektívnosti MKD a MKP, uvažovať o spojení metódy konečných diferencií a metódy konečných prvkov do jednej hybridnej metódy.

Moczo et al. (1997) skombinovali konečno-diferenčnú (KD) schému 2. rádu presnosti na konvenčnej sieti so schémou MKP 2. rádu presnosti v štandardnej formulácii s globálnou maticou tuhosti pre 2D P-SV simulácie seizmického pohybu v sedimentárnych a topografických štruktúrach. Ma et al. (2004) skombinovali KD schému 4. rádu presnosti vo formulácii s rýchlosťou posunutia a napätím na striedavo usporiadanej sieti so schémou MKP 2. rádu presnosti vo formulácii s vratnou silou pre 2D P-SV simulácie seizmického pohybu.

My sme skombinovali KD schému 4. rádu presnosti vo formulácii s rýchlosťou posunutia a napätím na striedavo usporiadanej sieti so schémou MKP 2. rádu presnosti vo formulácii s vektorom vratnej sily pre 3D simulácie seizmického pohybu v nehomogénnom viskoelastickom prostredí s nerovinným voľným povrchom a s kinematickým (bodovým alebo konečným) prípadne dynamickým seizmickým zdrojom.

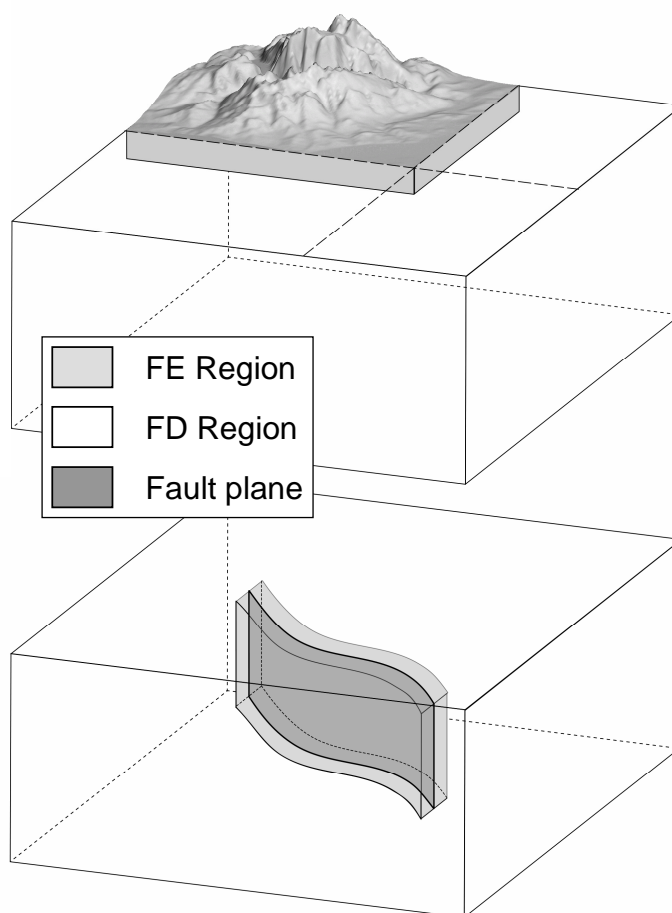
Veľkosť priestorového kroku v MKP sieti je dvakrát menšia ako veľkosť priestorového kroku v KD sieti. Vzhľadom k tomu, že KD schéma je 4. rádu presnosti

a MKP schéma je iba 2. rádu presnosti ide, intuitívne, o rozumnú voľbu. Kristek a Moczo (2006) pomocou numerických testov pre 1D problém indikovali, že KD schéma 4. rádu presnosti vo formulácii v rýchlosti a napätí na striedavo usporiadanej sieti vyžaduje menší priestorový krok, než sa zvyčajne používa. Zvyčajne sa používa priestorový krok dvakrát väčší než priestorový krok pre KD schémy 2. rádu presnosti na konvenčnej sieti. Priestorový krok pre numerickú simuláciu dynamického šírenia trhliny na zlome je menší ako ten, ktorý je používaný pre šírenie seizmických vln. Rovnako možno predpokladať, že aj kvôli dostatočne presnému pokrytiu topografie voľného povrchu bude potrebné použiť menší priestorový krok než pre simulácie šírenia seizmických vln. Preto celková presnosť metódy ostane zachovaná.

3.4.2 Výpočtová oblasť

Ako sme už spomenuli, hlavnou myšlienkou našej hybridnej metódy je umožniť efektívnu simuláciu čo najrealistickejších konfigurácií. Môže ísť o problém s topografiou voľného povrchu, nehomogénnym viskoelastickým prostredím alebo dynamickým modelom seizmického zdroja. Vo výpočtovej oblasti môžeme uvažovať jednu alebo viac MKP oblastí, ktoré budú pokrývať tie časti výpočtovej oblasti, ktoré nie je možné riešiť metódou konečných diferencií, t.j., časti s topografiou voľného povrchu alebo dynamický model seizmického zdroja. Vzhľadom na efektívnosť algoritmov založených na MKP a MKD je zrejmé, že oblasti pokryté MKP by mali byť čo najmenšie a väčšina výpočtovej oblasti by mala byť pokrytá MKD schémou. Výpočtová oblasť je schematicky znázornená na Obr. 3.4.1.

Zložky vektora posunutia v MKP oblasti (oblastiach) a zložky vektora rýchlosti posunutia a tenzora napätia v MKD oblasti sú aktualizované nezávisle pomocou MKP a MKD schém. V každej časovej hladine musia MKP oblasti komunikovať s MKD oblasťou. Vzhľadom na vlastnosti schém nie je možné, aby komunikovali len na jednej sieťovej rovine/ploche. Aby sme dosiahli stabilné a presné riešenie, musíme na komunikáciu medzi MKP a MKD oblasťami použiť prechodovú zónu. Štruktúra prechodovej zóny a algoritmus komunikácie medzi MKD a MKP schémami je vysvetlený v ďalšej kapitole.



Obr. 3.4.1: Ilustrácia pokrytia výpočtovej oblasti. MKP oblasť môže pokrývať časť s topografiou voľného povrchu (vľavo) a/alebo časť s dynamicky sa šíriacou trhlinou na (vo všeobecnosti) nerovninnej zlomovej ploche (vpravo). Zvyšok výpočtovej oblasti je pokrytý KD sieťou. Vo výpočtovej oblasti môže byť viac MKP oblastí. Túto možnosť podporuje program FDFE3D napísaný v jazyku FORTRAN 90/95.

3.4.3 MKD-MKP prechodová zóna

Princíp MKD-MKP komunikácie – algoritmicke minimálna prechodová zóna

MKD a MKP schémy spolu komunikujú v každej časovej hladine iba v tej časti výpočtovej oblasti, kde sa MKD a MKP siete prekrývajú, t.j., v prechodovej zóne. Šírka a tvar prechodovej zóny sú určené MKD schémami pre aktualizáciu zložiek vektora rýchlosti posunutia a zložiek tenzora napätia. Prechodová zóna je znázornená na Obr. 3.4.2. Na obrázku je znázornený rez konkrétnou prechodovou zónou. Prechodová zóna je tvorená Dirichletovou hranicou MKP oblasti a Dirichletovou zónou MKD oblasti. Z obrázku je zrejmé, že Dirichletova hranica MKP oblasti je

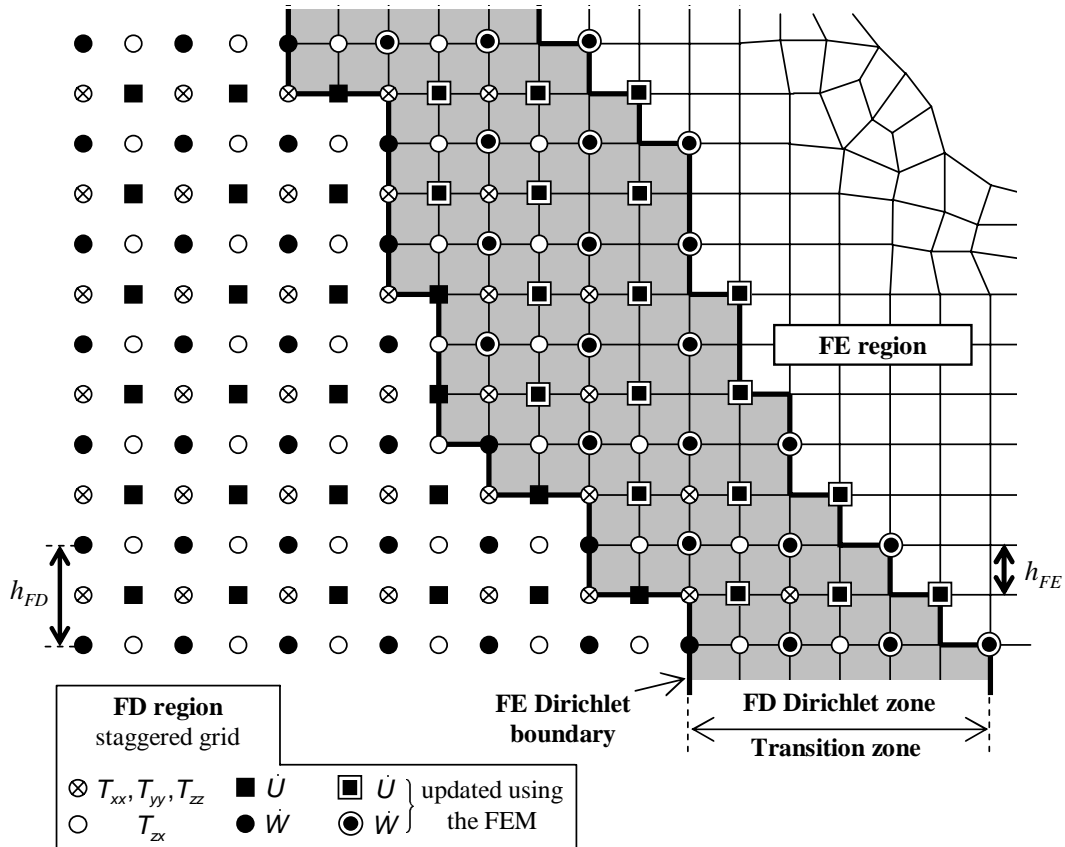
tvorená len jednou sieťovou plochou a musí prechádzať cez MKD sieťové body. Môže mať ľubovoľný stupňovitý tvar. V prípade MKD schémy 4. rádu presnosti na striedavo usporiadanej sieti je potrebné predpísať rýchlosť posunutia v oblasti s konečnou hrúbkou - preto hovoríme o Dirichletovej zóne MKD oblasti.

Lokálna hrúbka a (stupňovitý) tvar prechodovej zóny sú určené požiadavkou, aby zložky vektora rýchlosti posunutia v MKD sieťových bodoch na Dirichletovej hranici MKP oblasti boli aktualizované vnútornou MKD schémou, t.j., tým istým algoritmom, ktorým sú aktualizované zložky vektora rýchlosti posunutia v ktoromkoľvek inom vnútornom sieťovom bode MKD oblasti. To je možné iba vtedy, ak sú k dispozícii všetky potrebné zložky tenzora napätia. Zložky tenzora napätia teda musia byť k dispozícii aj v Dirichletovej zóne MKD oblasti. Zložky tenzora napätia v Dirichletovej zóne MKD oblasti sú vypočítané zo zložiek rýchlosti posunutia, nakoľko je veľmi komplikované vypočítať zložky tenzora napätia pomocou MKP schémy na hraniciach medzi prvkami a teda aj v uzloch. Z algoritmického hľadiska je výhodné, ak sú napätia v Dirichletovej zóne MKD oblasti aktualizované štandardnou MKD schémou pre vnútorné sieťové body. Inými slovami, je výhodné, ak sú všetky zložky vektora rýchlosti posunutia, ktoré potrebujeme na aktualizáciu napätí v Dirichletovej zóne MKD oblasti, súčasťou MKD siete.

MKP sieť v prechodovej zóne musí byť pravidelná, nakoľko MKD sieť je pravidelná a polohy MKD sieťových bodov obsahujúcich zložky vektora rýchlosti posunutia sa musia prekrývať s polohami MKP uzlov.

Algoritmus MKD-MKP komunikácie v algoritmicky minimálnej prechodovej zóne môže byť zhrnutý do nasledujúcich krokov. Kvôli prehľadnosti budeme používať symbol U pre ľubovoľnú zložku vektora posunutia, \dot{U} pre ľubovoľnú zložku vektora rýchlosti posunutia a T pre ľubovoľnú zložku tenzora napätia. Indexy FD a FE indikujú príslušnosť veličiny k MKD, resp. MKP, sieti. Index m značí časovú hladinu.

- Posunutia $U_{FE}(m + 1)$ sú aktualizované vo vnútorných bodoch MKP oblasti, t.j., vo všetkých uzloch neležiacich na Dirichletovej hranici MKP oblasti.



Obr. 3.4.2: Ilustrácia algoritmickej minimálnej prechodovej zóny pre MKD-MKP komunikáciu v každej časovej hladine. Kvôli jednoduchosti a prehľadnosti je zobrazená iba vertikálna sieťová rovina s x - a z - zložkami vektora rýchlosti, \dot{U} a \dot{W} , normálovými zložkami tenzora napätia, T_{xx} , T_{yy} a T_{zz} , a tangenciálnou zložkou tenzora napätia, T_{zx} . h_{FD} je priestorový krok v MKD sieti, h_{FE} je priestorový krok v pravidelnej časti MKP siete v prechodovej zóne a v jej blízkosti (zvyšok MKP siete môže byť pokrytý nepravidelnou sieťou). Na indikáciu polohy zložiek vektora posunutia v MKP sieti nie je použitý žiadny symbol. V každom uzle v MKP sieti, t.j., v každom priesečníku sieťových čiar v MKP sieti, sú k dispozícii všetky zložky vektora posunutia.

- Zložky tenzora napätia $T(m)$ sú aktualizované v sieťových bodoch MKD oblasti, t.j., vrátane MKD sieťových bodov obsahujúcich zložky tenzora napätia v prechodovej zóne.
- Zložky rýchlosti posunutia $\dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2})$ sú aktualizované vo vnútorných bodoch MKD oblasti.
- Zložky rýchlosti posunutia v Dirichletovej zóne MKD oblasti (t.j., v MKD sieťových bodoch naznačených zdvojenými štvorčkami a krúžkami v Obr. 3.4.2) sú aktualizované pomocou MKP zložiek posunutia v tých istých polohách:

$$\dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2}) = \frac{U_{FE}(m + 1) - U_{FE}(m)}{\Delta t}. \quad (3.4.1)$$

- Posunutia $U_{FE}(m + 1)$ na Dirichletovej hranici MKP oblasti sú aktualizované pomocou MKP posunutí a MKD rýchlostí posunutia v tom istom sieťovom bode:

$$U_{FE}(m + 1) = U_{FE}(m) + \Delta t \dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2}). \quad (3.4.2)$$

Pripomeňme, že Dirichletova hranica MKP oblasti je jedna (stupňovitá) sieťová plocha, ktorá prechádza cez MKD sieťové body. V jednom MKD sieťovom bode je definovaná jedna zložka vektora rýchlosti posunutia alebo normálové zložky tenzora napätia alebo jedna tangenciálna zložka tenzora napätia alebo žiadna veličina. Symbolická rovnica (3.4.2) však požaduje všetky zložky vektora rýchlosti posunutia v jednom MKD sieťovom bode. Chýbajúce zložky (vždy minimálne dve) vektora rýchlosti posunutia musíme preto interpolovať z hodnôt v okolitých sieťových bodoch. Všetky možné polohy MKP uzla, pre ktoré je potrebná interpolácia, sú schematicky znázornené na Obr. 3.4.3.

Sú možné tri konfigurácie, na Obr. 3.4.3 označené **1a**, **1b** a **1c**, kedy sú hodnoty rýchlosti posunutia dostupné na sieťovej čiare. Označme symbolom p skutočný MKD sieťový index pozdĺž sieťovej čiary v ľubovoľnom z troch smerov kartézskoho súradnicového systému. Potom interpolačné vzorce 4. rádu presnosti pre tieto tri konfigurácie môžeme zapísať v tvare

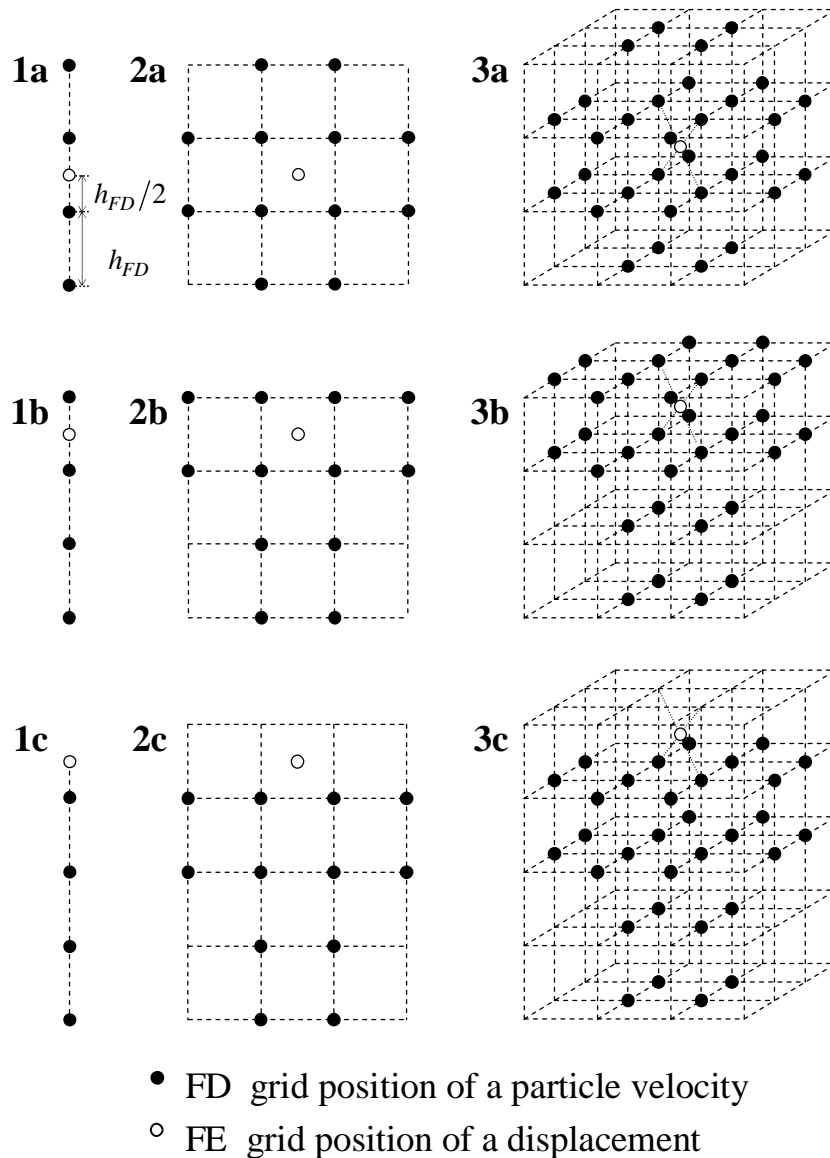
$$f_p = \frac{9}{16} f_{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{16} f_{+\frac{1}{2}} - \frac{1}{16} f_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{16} f_{+\frac{3}{2}}, \quad (3.4.3)$$

$$f_p = \frac{5}{16} f_{-\frac{1}{2}} + \frac{15}{16} f_{+\frac{1}{2}} - \frac{5}{16} f_{+\frac{3}{2}} + \frac{1}{16} f_{+\frac{5}{2}}, \quad (3.4.4)$$

$$f_p = \frac{35}{16} f_{+\frac{1}{2}} - \frac{35}{16} f_{+\frac{3}{2}} + \frac{21}{16} f_{+\frac{5}{2}} - \frac{5}{16} f_{+\frac{7}{2}}, \quad (3.4.5)$$

kde indexy na pravej strane indikujú relatívnu polohu vzhľadom k bodu s indexom p , t.j., index $-\frac{1}{2}$ značí $p - \frac{1}{2}$.

Je zrejmé, že konfigurácie **2a**, **2b** a **2c** z Obr. 3.4.3 (požadovaná zložka rýchlosti posunutia je k dispozícii v rovnakej sieťovej rovine ako MKP uzol), budú vyžadovať zložitejšie interpolačné vzťahy. Označme p, q skutočné MKD sieťové indexy v ktorejkoľvek zo sieťových rovín rovnobežných s rovinami kartézskoho systému. Interpolačné vzorce 4. rádu presnosti pre tieto konfigurácie môžeme zapísať v tvare



Obr. 3.4.3: Priestorové konfigurácie, v ktorých je nutná interpolácia. Každý z 9 obrázkov indikuje možnú priestorovú polohu MKP uzla (prázdny krúžok) na Dirichletovej hranici MKP oblasti vzhľadom k polohám MKD sieťových bodov (plné krúžky) so zložkami vektora rýchlosti posunutia použitými na interpoláciu. Číslica **1** (stĺpec vľavo) sa vzťahuje k situácii, kedy sa MKP uzol nachádza na tej istej sieťovej čiare ako MKD sieťové body s požadovanou zložkou vektora rýchlosti posunutia. Písmená **a**, **b** a **c** označujú tri možné konfigurácie v závislosti od toho, ktoré body sú k dispozícii na interpoláciu (v blízkosti voľného povrchu a na voľnom povrchu nemáme vždy k dispozícii také MKD sieťové body, aby bolo možné použiť konfiguráciu **1a**). Číslica **2** (stĺpec v strede) sa vzťahuje k situácii, kedy sa MKP uzol nachádza na tej istej sieťovej rovine ako dostupné MKD body so zložkami rýchlosti posunutia použitými na interpoláciu. Číslica **3** sa vzťahuje k situácii, kedy sa MKP uzol nachádza mimo sieťovej čiary a mimo sieťovej roviny s dostupnými MKD bodmi so zložkami rýchlosti posunutia použitými na interpoláciu.

$$\begin{aligned}
 f_{pq} = & \frac{5}{16} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{1}{32} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right], \tag{3.4.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{pq} = & \frac{3}{16} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{5}{32} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{32} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} \right] \\
 & - \frac{1}{32} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \right], \tag{3.4.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{pq} = & \frac{19}{16} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{3}{32} \left[f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \right] - \frac{9}{8} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right] \\
 & + \frac{1}{32} \left[f_{-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}} \right] + \frac{21}{32} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} \right] \\
 & - \frac{5}{32} \left[f_{-\frac{1}{2}, +\frac{7}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{7}{2}} \right] - \frac{3}{32} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \right], \tag{3.4.8}
 \end{aligned}$$

kde opäť indexy na pravej strane značia relatívnu polohu vzhľadom k bodu s indexom p, q , t.j., index $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ značí polohu $p - \frac{1}{2}, q - \frac{1}{2}$.

Najzložitejšie interpolačné vzťahy sú potrebné v prípade konfigurácií **3a**, **3b** a **3c** na Obr. 3.4.3 (požadované zložky rýchlosti posunutia nie sú k dispozícii v tej istej sieťovej rovine ako MKP uzol). Označme p, q, r skutočné MKD sieťové indexy požadovanej polohy. Potom interpolačné vzorce 4. rádu presnosti pre tieto tri konfigurácie môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}
 f_{pqr} = & \frac{11}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{1}{64} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right. \\
 & + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \\
 & + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \\
 & + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \\
 & + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} \\
 & \left. + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right], \tag{3.4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{pqr} = & \frac{7}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right] \\
 & + \frac{17}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{5}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right] \\
 & + \frac{1}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} \right] \\
 & - \frac{1}{64} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \\
 & \quad + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \\
 & \quad \left. + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \right],
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}
 f_{pqr} = & \frac{41}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{37}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right] \\
 & + \frac{21}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{5}{2}} \right] \\
 & - \frac{5}{64} \left[f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{7}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{7}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{7}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{7}{2}} \right] \\
 & - \frac{3}{64} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}} \right] \\
 & + \frac{1}{64} \left[f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}} + f_{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}} \right],
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

kde opäť indexy na pravej strane značia relatívnu polohu vzhľadom k bodu s indexom p, q, r , t.j., index $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ značí polohu $p - \frac{1}{2}, q - \frac{1}{2}, r - \frac{1}{2}$.

Vykonalí sme podrobné testy numerického správania algoritmickej najmenšej prechodovej zóny zobrazenej na Obr. 3.4.2. Niektoré z testov budú uvedené v ďalšej kapitole, kde budú porovnané aj so správaním zdokonalenej prechodovej zóny. Numerické správanie algoritmickej minimálnej prechodovej zóny je stabilné, avšak všetky riešenia sú zjavne porušené numerickým šumom. Práve prítomnosť numerického šumu v riešeniach nás viedla k zdokonaleniu prechodovej zóny. V ďalšej kapitole je opísaná zdokonalená prechodová zóna.

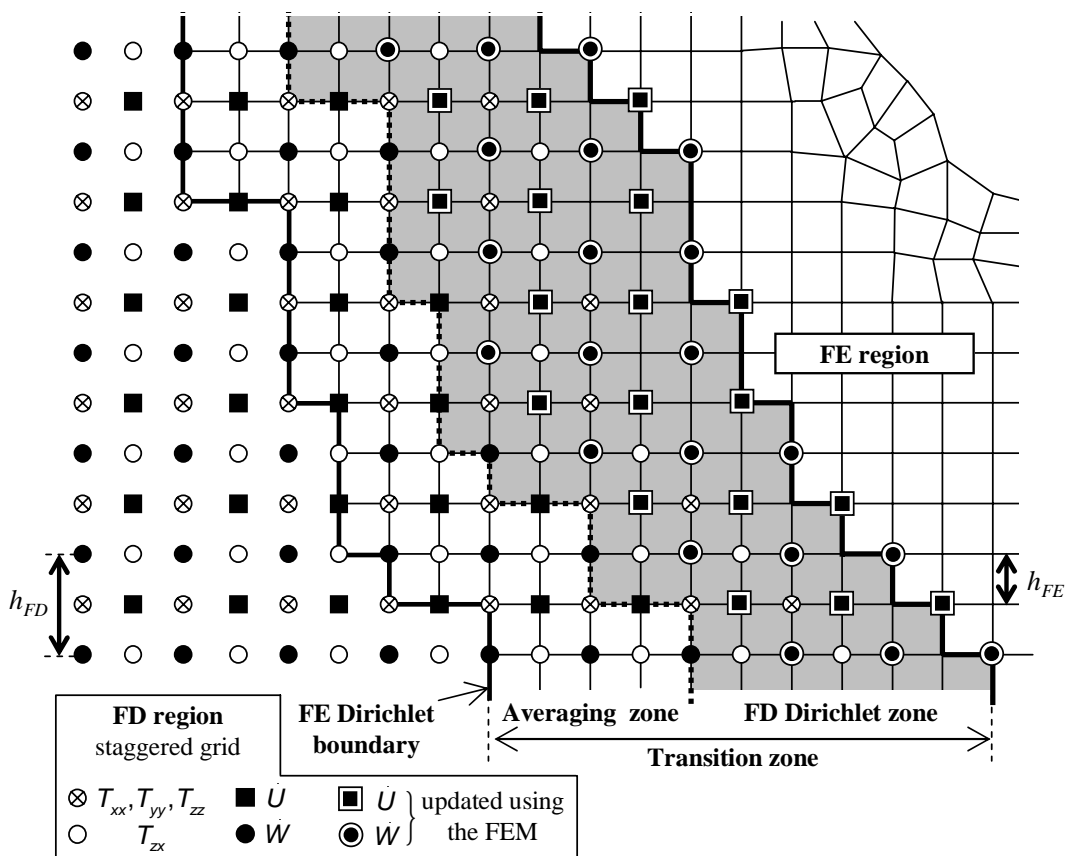
Hladká prechodová zóna s MKD-MKP priemerovaním

Algoritmicky minimálnu prechodovú zónu (pozri Obr. 3.4.2) sme modifikovali tak, že medzi Dirichletovu hranicu MKP oblasti a Dirichletovu zónu MKD oblasti sme vložili zónu s MKD-MKP priemerovaním. Inými slovami, modifikovanú prechodovú zónu tvoria tri časti - Dirichletova hranica MKP oblasti, zóna s MKD-MKP priemerovaním a Dirichletova zóna MKD oblasti. Modifikovaná prechodová zóna je znázornená na Obr. 3.4.4. Po modifikácii prechodovej zóny je jej lokálna šírka a (stupňovitý) tvar určené požiadavkou, aby zložky vektora rýchlosti posunutia v MKD sieťových bodoch na sieťovej čiare medzi zónou s MKD-MKP priemerovaním a Dirichletovou zónou MKD oblasti (t.j., na čiarkovanej čiare na Obr. 3.4.4) boli aktualizované vnútornou MKD schémou, t.j., tým istým algoritmom, ktorým by boli aktualizované zložky vektora rýchlosti posunutia v ktoromkoľvek inom vnútornom sieťovom bode MKD oblasti. (Pre algoritmicky minimálnu prechodovú zónu bola táto požiadavka kladená na MKD sieťové body na Dirichletovej hranici MKP oblasti.)

Potrebnú šírku zóny s MKD-MKP priemerovaním je možné určiť pomocou numerických testov pre rôzne šírky zóny. Skôr než ukážeme numerické testy a ich výsledky, vysvetlíme algoritmus komunikácie medzi MKD a MKP pre modifikovanú zónu.

Algoritmus hybridnej MKD-MKP metódy môžeme zhrnúť do týchto krokov:

- Posunutia $U_{FE}(m + 1)$ sú aktualizované vo vnútorných bodoch MKP oblasti, t.j., vo všetkých uzloch okrem uzlov ležiacich na Dirichletovej hranici MKP oblasti.
- Zložky tenzora napätia $T(m)$ sú aktualizované v sieťových bodoch MKD oblasti, t.j., vrátane MKD sieťových bodov obsahujúcich zložky tenzora napätia v prechodovej zóne.
- Zložky rýchlosti posunutia $\dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2})$ sú aktualizované vo vnútorných bodoch MKD oblasti, t.j., vrátane bodkovanej čiary medzi zónou MKD-MKP priemerovania a Dirichletovou zónou MKD oblasti.
- Zložky rýchlosti posunutia v Dirichletovej zóne MKD oblasti (t.j., v MKD sieťových bodoch naznačených zdvojenými štvorčkami a krúžkami v Obr. 3.4.4)



Obr. 3.4.4: Ilustrácia prechodovej zóny, ktorú používame v našej hybridnej metóde. Rozdiel voči algoritmicke minimálnej prechodovej zóne (zobrazenej na Obr. 3.4.2) spočíva v pridaní zóny s MKD-MKP priemerovaním medzi Dirichletovu hranicu MKP oblasti a Dirichletovu zónu MKD oblasti. Kvôli jednoduchosti a prehľadnosti je zobrazená iba vertikálna sieťová rovina s x - a z - zložkami vektora rýchlosti, \dot{U} a \dot{W} , normálovými zložkami tenzora napätia, T_{xx} , T_{yy} a T_{zz} , a tangenciálnou zložkou tenzora napätia, T_{zx} . h_{FD} je priestorový krok v MKD sieti, h_{FE} je priestorový krok v pravidelnej časti MKP siete v prechodovej zóne a v jej blízkosti (zvyšok MKP siete môže byť pokrytý nepravidelnou sieťou). Na indikáciu polohy zložiek vektora posunutia v MKP sieti nie je použitý žiadny symbol. V každom uzle MKP siete, t.j., v každom priesečníku sieťových čiar MKP siete, sú k dispozícii všetky zložky vektora posunutia.

sú aktualizované pomocou MKP zložiek posunutia v tých istých polohách:

$$\dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2}) = \frac{U_{FE}(m + 1) - U_{FE}(m)}{\Delta t}. \quad (3.4.12)$$

- Rýchlosti posunutia $\dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2})$ v zóne s MKD-MKP priemerovaním (vrátane bodkovej čiary medzi zónou s MKD-MKP priemerovaním a Dirichletovou zónou MKD oblasti) sú nahradené priemernými hodnotami $\dot{U}_{FD}^w(m + \frac{1}{2})$ získanými váženým priemerom rýchlosti z MKP oblasti a $\dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2})$,

$$\dot{U}_{FD}^w(m + \frac{1}{2}) = w \frac{U_{FE}(m + 1) - U_{FE}(m)}{\Delta t} + (1 - w) \dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2}), \quad (3.4.13)$$

kde $w = 1$ na bodkovanej čiare medzi zónou s MKD-MKP priemerovaním a Dirichletovou zónou MKD oblasti a $w = 0$ na Dirichletovej hranici MKP oblasti. Váhový koeficient w sa mení lineárne vnútri zóny s MKP-MKD priemerovaním.

- MKP posunutia $U_{FE}(m + 1)$ v zóne s MKD-MKP priemerovaním (vrátane bodkovanej čiary medzi zónou s MKD-MKP priemerovaním a Dirichletovou zónou MKD oblasti) sú nahradené hodnotami $U_{FE}^w(m + 1)$ vypočítanými podľa

$$\dot{U}_{FE}^w(m + \frac{1}{2}) = w \dot{U}_{FE}(m + \frac{1}{2}) + (1 - w) \dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2}), \quad (3.4.14)$$

$$U_{FE}^w(m + 1) = U_{FE}(m) + \Delta t \dot{U}_{FE}^w(m + \frac{1}{2}). \quad (3.4.15)$$

Pripomeňme, že v jednom MKD sieťovom bode je definovaná jedna zložka vektora rýchlosti posunutia alebo normálové zložky tenzora napätia alebo jedna tangenciálna zložka tenzora napätia alebo žiadna veličina. Symbolická rovnica (3.4.14) však požaduje všetky zložky vektora rýchlosti posunutia v jednom MKD sieťovom bode. Chýbajúce zložky (vždy minimálne dve) vektora rýchlosti posunutia musíme preto interpolovať z okolitých bodov. Interpolácia je rovnaká ako v prípade algoritmicky najmenšej prechodovej zóny, pozri vzorce (3.4.3) - (3.4.11).

- Posunutia $U_{FE}(m + 1)$ na Dirichletovej hranici MKP oblasti sú aktualizované pomocou MKP posunutí a MKD rýchlostí posunutia v tom istom sieťovom bode:

$$U_{FE}(m + 1) = U_{FE}(m) + \Delta t \dot{U}_{FD}(m + \frac{1}{2}). \quad (3.4.16)$$

Aj rovnica (3.4.16) požaduje všetky zložky vektora rýchlosti posunutia v jednom MKD sieťovom bode. Preto aj v tomto prípade je potrebná interpolácia chýbajúcich zložiek vektora rýchlosti posunutia. Poznamenajme, že ak je na interpoláciu potrebná hodnota rýchlosti v zóne s MKD-MKP priemerovaním, použijeme na interpoláciu už spriemerované hodnoty zložiek rýchlosti posunutia.

Poznamenajme, že priemerovanie zložiek rýchlosti posunutia z MKD siete a MKP siete v zóne s MKP-MKD priemerovaním sme navrhli preto, lebo sme

predpokladali, že takéto zhladenie prechodu medzi MKD riešením a MKP riešením môže zlepšiť numerické správanie prechodovej zóny.

3.4.4 Testy numerického správania algoritmickej minimálnej prechodovej zóny a hladkej prechodovej zóny

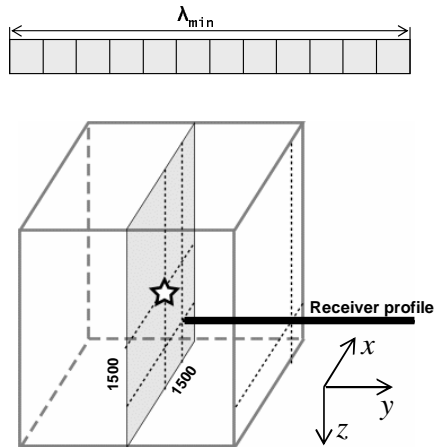
Vykonalí sme podrobné numerické testy správania prechodovej zóny. Prvé testy boli, samozrejme, zamerané na overenie numerického správania algoritmickej minimálnej prechodovej zóny (Obr. 3.4.2), t.j., najjednoduchšej možnej prechodovej zóny. Cieľom bolo overiť, či táto prechodová zóna umožní získať stabilné a dostatočne presné riešenie. Všetky vykonané testy ukázali, že riešenia získané s použitím algoritmickej minimálnej prechodovej zóny boli stabilné v dostatočne dlhom časovom okne. Zároveň však boli všetky riešenia porušené slabým, avšak jednoznačne viditeľným numerickým šumom. Preto sme navrhli modifikáciu prechodovej zóny. Pridali sme zónu MKD-MKP priemerovania (Obr. 3.4.4), v ktorej "čisté" hodnoty rýchlosti posunutia v MKD sieti a "čisté" hodnoty posunutia v MKP sieti sú nahradené váženým priemerom MKD a MKP hodnôt. V tomto zmysle pôsobí zóna s MKD-MKP priemerovaním ako zhladzujúca.

Numerické testy boli vykonané pre konfigurácie na Obr. 3.4.5, 3.4.6 a 3.4.7. Na Obr. 3.4.5 sú znázornené dve konfigurácie v neohraničenom homogénnom elastickom priestore. Konfigurácie US-12 a US-18 sa líšia použitým vzorkovacím pomerom. V konfigurácii US-12 sme uvažovali vzorkovanie 12 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku v MKP oblasti a v konfigurácii US-18 sme uvažovali vzorkovanie 18 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku v MKP oblasti. V MKD oblasti sme použili priestorové vzorkovanie 6 a 9 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku. V oboch konfiguráciách sme použili bodový kinematický model seizmického zdroja. Zdroj bol umiestnený v strede MKP oblasti. Vlnové pole bolo zaznamenané prijímačmi na profile siahajúcom z MKP oblasti cez prechodovú zónu až do MKD oblasti. Prijímače boli na profile rozložené rovnomerne s krokom h_{FD} .

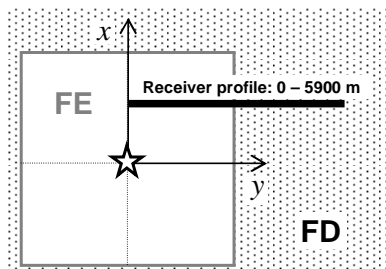
Pre obe konfigurácie boli vykonané numerické testy so štyrmi prechodovými zónami znázornenými na Obr. 3.4.7. Prvá prechodová zóna (na Obr. 3.4.7 označená $B = 0$) zodpovedá algoritmickej minimálnej prechodovej zóne, t.j., precho-

Unbounded space US-12

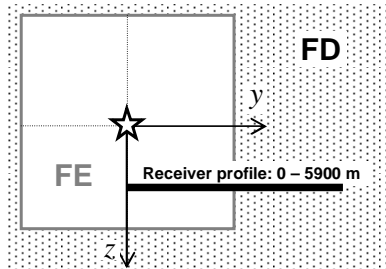
FE Region: $100 \times 100 \times 100 \text{ e1}$.
 (5000 × 5000 × 5000 m³)
 FE sampling: $\lambda_{\min}/12$ ($h_{FE} = 50 \text{ m}$)
 FD sampling: $\lambda_{\min}/6$ ($h_{FD} = 100 \text{ m}$)



Horizontal view (xy-plane)

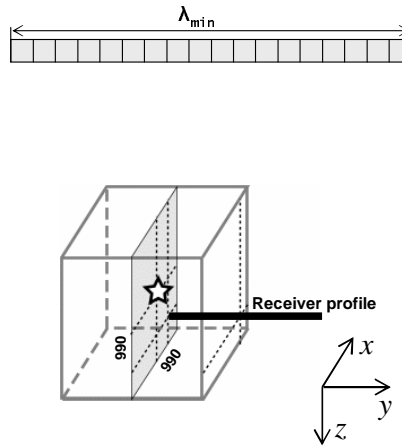


Vertical view (yz-plane)

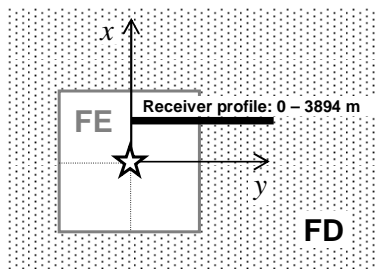


Unbounded space US-18

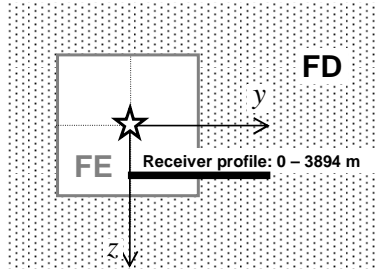
FE Region: $100 \times 100 \times 100 \text{ e1}$.
 (3300 × 3300 × 3300 m³)
 FE sampling: $\lambda_{\min}/18$ ($h_{FE} = 33 \text{ m}$)
 FD sampling: $\lambda_{\min}/9$ ($h_{FD} = 66 \text{ m}$)



Horizontal view (xy-plane)



Vertical view (yz-plane)

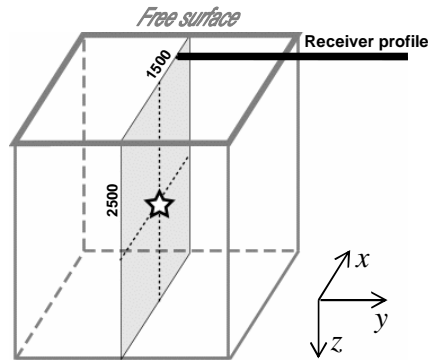


Obr. 3.4.5: Konfigurácie testov numerického správania prechodovej zóny. Bodový kinematický model seizmického zdroja (indikovaný hviezdou) a profil prijímačov (indikovaný hrubou čiarou) sú umiestnené v neohraničenom homogénnom kontinuu. Zdroj je umiestnený v strede MKP oblasti (tvaru kocky). Zvyšok výpočtovej oblasti je pokrytý MKD sieťou. Profil prijímačov siaha z MKP oblasti cez prechodovú zónu do MKD oblasti. V testoch sme uvažovali dve priestorové vzorkovania. V konfigurácii US-12 (vľavo) sme uvažovali vzorkovanie 12 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku v MKP oblasti a v konfigurácii US-18 (vpravo) sme uvažovali vzorkovanie 18 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku v MKP oblasti. V MKD oblasti sme použili priestorové vzorkovanie 6 a 9 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku.

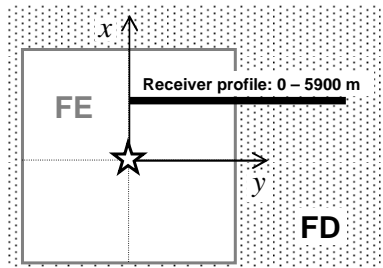
Free-surface FS-12

FE Region: $100 \times 100 \times 100$ e1.
($5000 \times 5000 \times 5000$ m³)

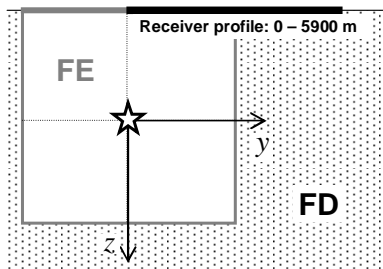
FE sampling: $\lambda_{\min}/12$ ($h_{FE} = 50$ m)
FD sampling: $\lambda_{\min}/6$ ($h_{FD} = 100$ m)



Horizontal view (xy-plane)



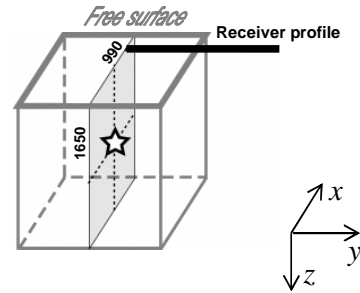
Vertical view (yz-plane)



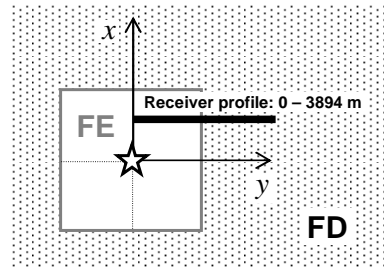
Free-surface FS-18

FE Region: $100 \times 100 \times 100$ e1.
($3300 \times 3300 \times 3300$ m³)

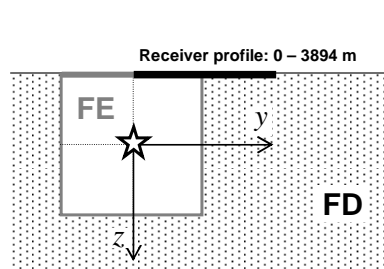
FE sampling: $\lambda_{\min}/18$ ($h_{FE} = 33$ m)
FD sampling: $\lambda_{\min}/9$ ($h_{FD} = 66$ m)



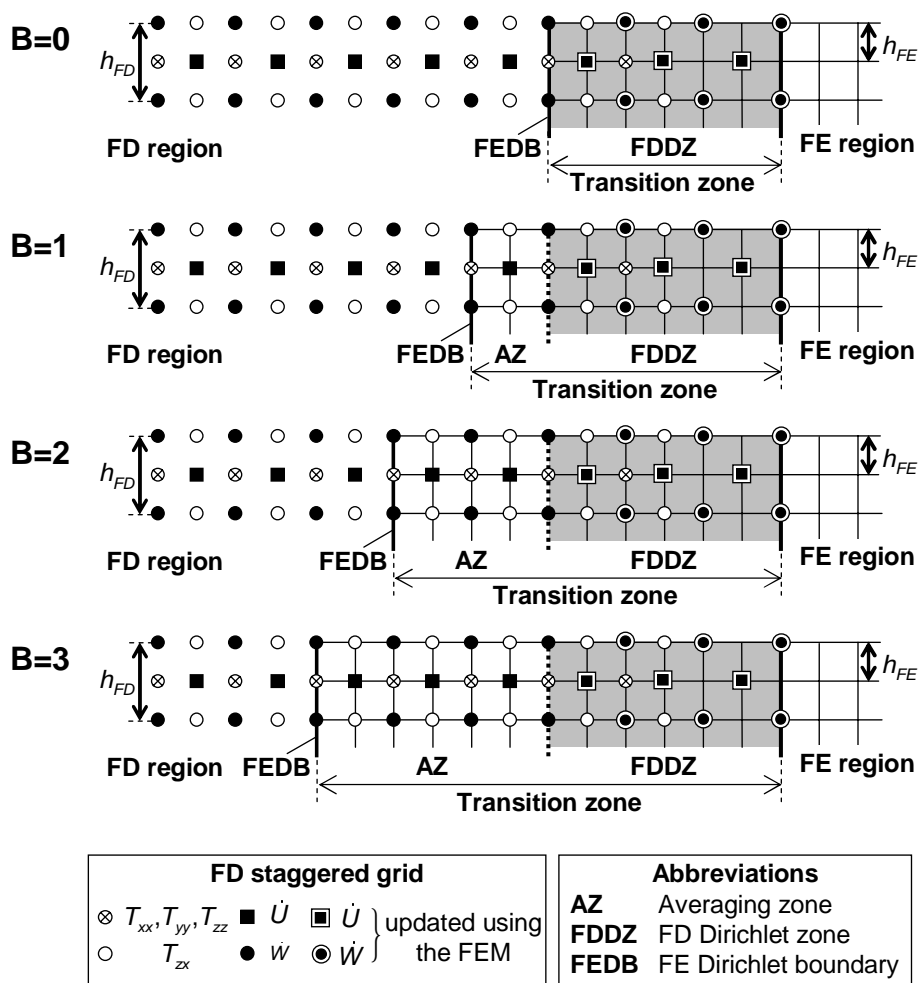
Horizontal view (xy-plane)



Vertical view (yz-plane)



Obr. 3.4.6: Konfigurácie testov numerického správania prechodovej zóny. Bodový kinematický model seizmického zdroja (indikovaný hviezdou) je umiestnený v homogénnom polpriestore. Profil prijímačov (indikovaný hrubou čiarou) je umiestnený na voľnom povrchu polpriestoru. V konfigurácii FS-12 (vľavo) sme uvažovali vzorkovanie 12 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku v MKP oblasti a v konfigurácii FS-18 (vpravo) sme uvažovali vzorkovanie 18 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku v MKP oblasti. V MKD oblasti sme použili priestorové vzorkovanie 6 a 9 sieťových krokov na minimálnu vlnovú dĺžku.



Obr. 3.4.7: Pre každú konfiguráciu na Obr. 3.4.5 a Obr. 3.4.6 sme vykonali numerické testy pre štyri rôzne prechodové zóny. Kvôli prehľadnosti sú ilustrované zóny jednoduchej geometrie. $B = 0$ zodpovedá algoritmickej minimálnej prechodovej zóne, t.j. prechodovej zóne bez zóny s MKD-MKP priemerovaním. $B = 1, 2, 3$ zodpovedajú hladkej prechodovej zóne s rôznou šírkou zóny s MKD-MKP priemerovaním.

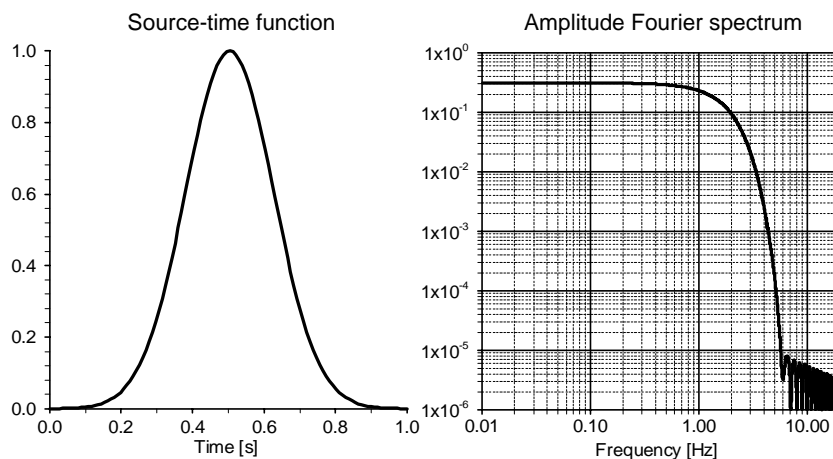
dovej zóne bez zóny s MKD-MKP priemerovaním. Tri ďalšie prechodové zóny (na Obr. 3.4.7 označené $B = 1, 2, 3$) sa líšia šírkou prechodovej zóny, konkrétne šírkou zóny MKD-MKP priemerovania.

V numerických testoch sme použili časovú funkciu zdroja v tvare Gaborovho signálu, pozri vzťah (3.1.19). Parametre časovej funkcie, ako aj parametre bodového kinematického bodového zdroja, sú uvedené v Tab. 3.4.1. Časová funkcia zdroja a jej amplitúdové Fourierove spektrum sú zobrazené na Obr. 3.4.8

Výsledky numerických testov sú zhrnuté v Obr. 3.4.9 a Obr. 3.4.10, kde sú syntetické seizmogramy vypočítané našou MKD-MKP hybridnou metódou porov-

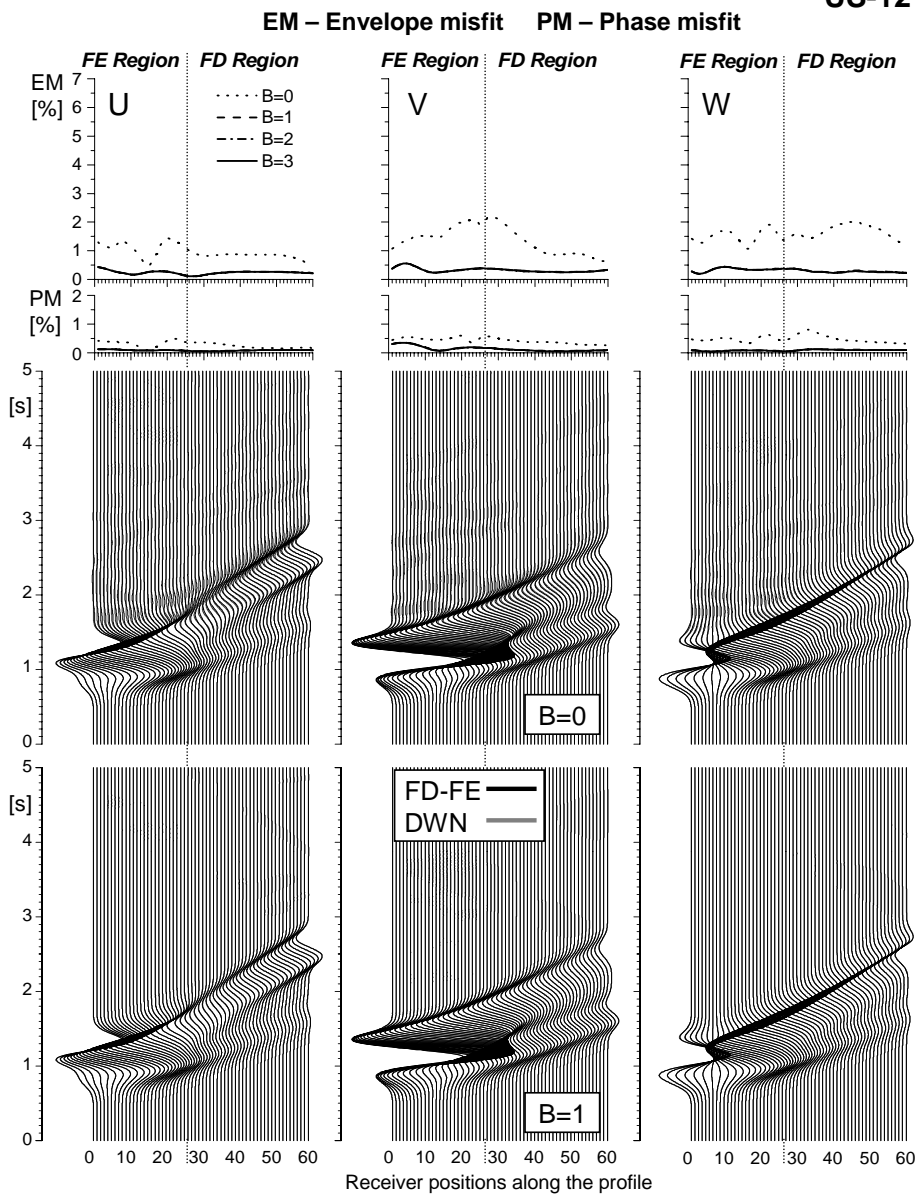
Tabuľka 3.4.1: Parametre bodového kinematického modelu seizmického zdroja a parametre časovej funkcie zdroja použitých v numerických testoch pre konfigurácie US-12, US-18, FS-12 a FS-18.

Source parameters				Source-time-function parameters			
Strike Φ_s	Dip δ	Rake λ	M_0	f_p	γ	ψ	T_s
22.5°	90°	0°	1×10^{16} N.m	0.225 Hz	0.25	0.	0.5 s

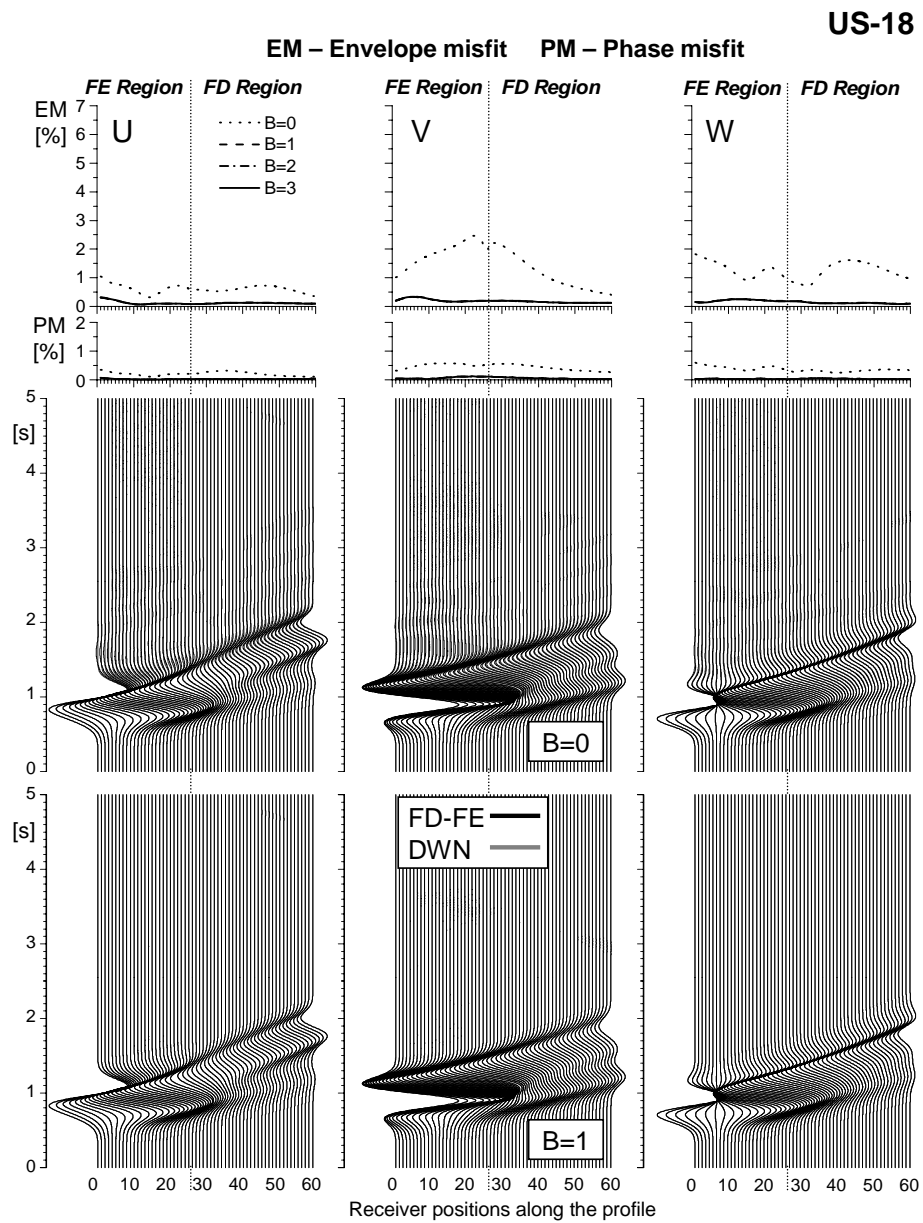


Obr. 3.4.8: Gaborov signál použitý ako časová funkcia zdroja v numerických testoch správania prechodovej zóny (vľavo) a amplitúdové Fourierove spektrum (vpravo).

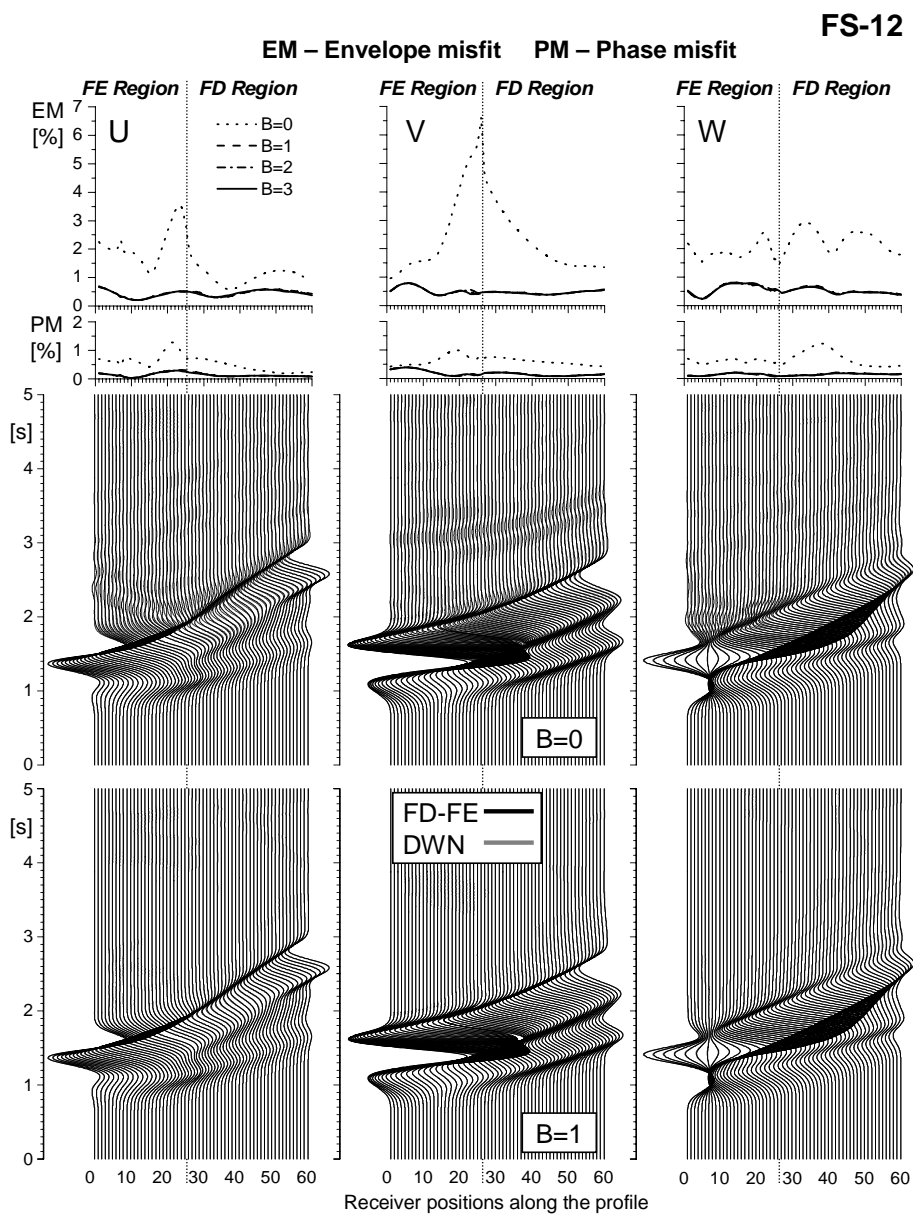
nané so seizmogramami vypočítanými metódou diskretných vlnových čísel - DWN (Bouchon, 1981; Coutant, 1989). Syntetické seizmogramy vypočítané s algoritmicke minimálnou prechodovou zónou, označenou $B = 0$, sú vykreslené spolu s DWN seizmogramami v strednom riadku. Na všetkých prijímačoch a na všetkých zložkách je za hlavnou vlnovou skupinou zreteľne vidieť numerický šum. Syntetické seizmogramy vypočítané s prechodovou zónou označenou $B = 1$ sú vykreslené spolu s DWN seizmogramami v spodnom riadku. MKD-MKP hybridné riešenia sa prakticky v hrúbke čiar prekrývajú s referenčnými DWN riešeniami. Všetky štyri prechodové zóny, t.j., $B = 0, 1, 2, 3$, sú porovnané v hornom riadku, kde sú zobrazené amplitúdové a fázové misfity MKD-MKP hybridných riešení vzhľadom k referenčným DWN riešeniam vo všetkých prijímačoch. Amplitúdové a fázové misfity boli vypočítané podľa práce Kristeková et al. (2006). Porovnanie amplitúdových a fázových misfitov jednoznačne ukazuje, že miera presnosti riešenia získaného pomocou algoritmicke minimálnej prechodovej zóny, t.j., $B = 0$, je



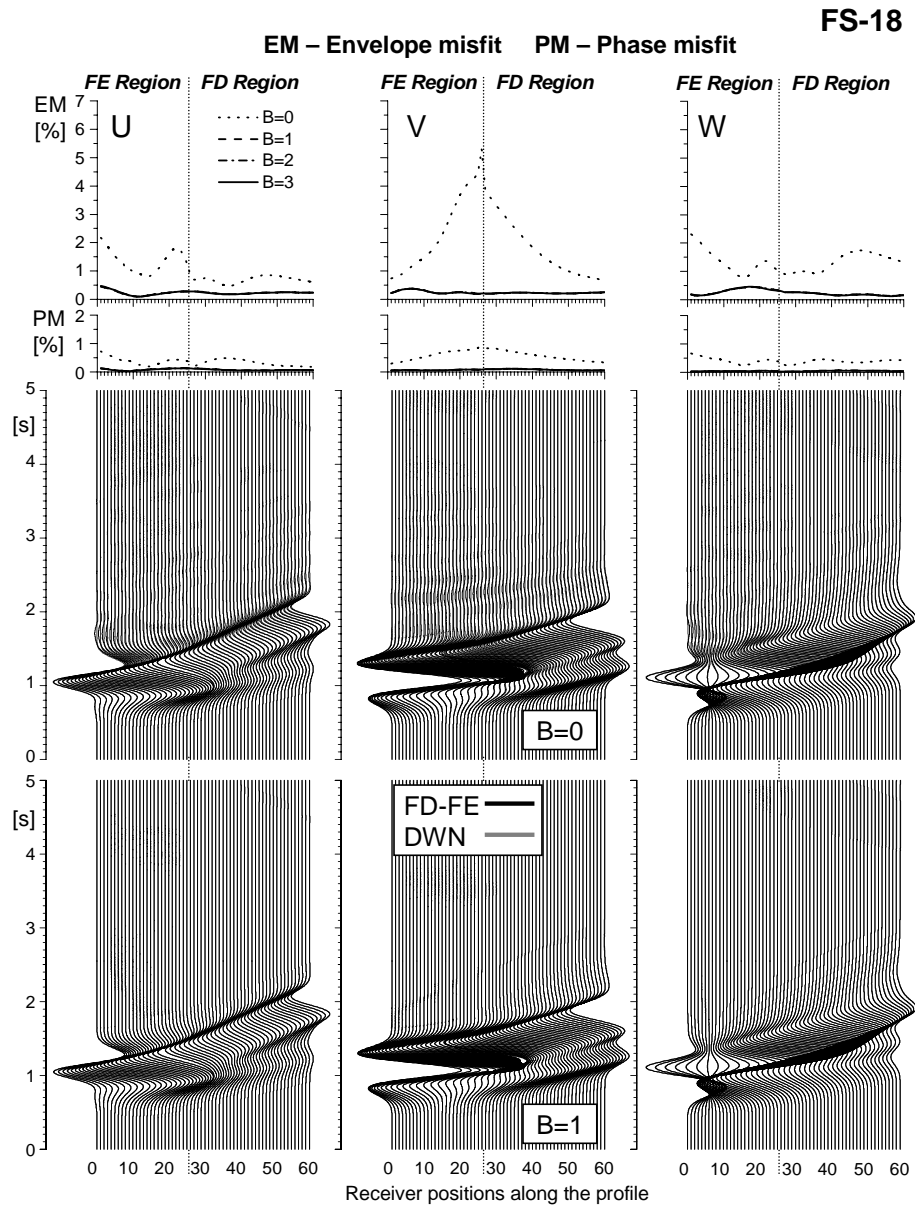
Obr. 3.4.9: Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny - porovnanie MKD-MKP hybridných riešení s DWN (metóda diskretných vlnových čísel) riešeniami pre konfiguráciu US-12. Ľavý, stredný a pravý stĺpec obsahujú porovnanie pre x -, y - a z - zložky vektora posunutia (zložky vektora posunutia sú označené U, V a W). Stredný riadok: MKD-MKP hybridné a DWN syntetické seizmogramy pozdĺž profilu prijímačov siahajúceho z MKP oblasti cez prechodovú zónu až do MKD oblasti vypočítané s algoritmicke minimálnou prechodovou zónou, t.j., pre $B = 0$. Spodný panel: To isté ako stredný panel, ale pre najmenšiu hladkú prechodovú zónu, t.j., pre $B = 1$. Horný panel: Amplitúdové a fázové misfity MKD-MKP hybridných riešení voči DWN riešeniam vo všetkých prijímačoch na profile a pre všetky uvažované prechodové zóny, t.j., pre $B = 0, 1, 2, 3$. Vertikálna bodkovaná čiara naznačuje polohu Dirichletovej hranice MKP oblasti.



Obr. 3.4.10: To isté ako na Obr. 3.4.9 ale pre konfiguráciu US-18.



Obr. 3.4.11: To isté ako na Obr. 3.4.9 ale pre konfiguráciu FS-12.



Obr. 3.4.12: To isté ako na Obr. 3.4.9 ale pre konfiguráciu FS-18.

menšia ako miera presnosti riešení získaných pomocou hladkých prechodových zón s rôznou šírkou, t.j., $B = 1, 2, 3$. Misfity pre riešenia získané pomocou všetkých troch hladkých prechodových zón sú veľmi malé a takmer sa nelíšia. Podľa predpokladov majú riešenia s hustejším vzorkovaním, t.j., riešenia pre konfiguráciu US-18, menšie amplitúdové aj fázové misfity ako riešenia s redším vzorkovaním, t.j., US-12. Tieto numerické testy nás viedli k záveru, že už aj použitie najmenej z hladkých prechodových zón, t.j., $B = 1$, vedie k dostatočne presným riešeniam s misfitmi menšími ako 0.5% pre obidve testované priestorové vzorkovania.

Malá "medzera" v blízkosti Dirichletovej hranice MKP oblasti, ktorú je možné vidieť v obrázkoch syntetických seizmogramov pre U a V zložky posunutia v strednom a spodnom paneli na Obr. 3.4.9 a Obr. 3.4.10, je spôsobená tým, že v dôsledku striedavo usporiadanej MKD siete sú polohy prijímačov pre U a V zložku v MKD sieti posunuté o $h_{FD}/2$ voči prijímačom v MKP oblasti. Tento posun sa netýka W prijímačov. Pretože tento posun bol zohľadnený pri výpočte referenčného DWN riešenia, porovnanie presnosti našej hybridnej metódy voči DWN nie je ovplyvnené.

Pre úplnosť dodajme, že amplitúdové aj fázové misfity boli škálované na maximálnu amplitúdu posunutia. Keďže pre konfigurácie US-12 aj US-18 bola maximálna amplitúda na V zložke, je prirodzené, že misfity pre V zložku sú systematicky najväčšie.

Na Obr. 3.4.6 sú zobrazené konfigurácie testov FS-12 a FS-18. Tieto konfigurácie sú podobné ako konfigurácie US-12 a US-18. Rozdiel je v tom, že v konfiguráciách FS je vrchná stena MKP oblasti (kocky) a aj profil prijímačov umiestnený priamo na voľnom povrchu. Dôvodom pre tento test je overiť numerické správanie prechodovej zóny v prítomnosti voľného povrchu. Testy s voľným povrchom môžeme považovať za prísnejšie ako numerické testy s neohraničeným priestorom. Dôvodom je jednak fyzikálna interakcia vlnového poľa s voľným povrchom, jednak nutnosť použiť adjustované jednostranné interpolačné vzorce v blízkosti voľného povrchu (polohy označené **b** a **c** na Obr. 3.4.3). Rovnako ako v prípade US konfigurácií, aj v tomto prípade sme overili správanie štyroch rôznych prechodových zón zobrazených na Obr. 3.4.7.

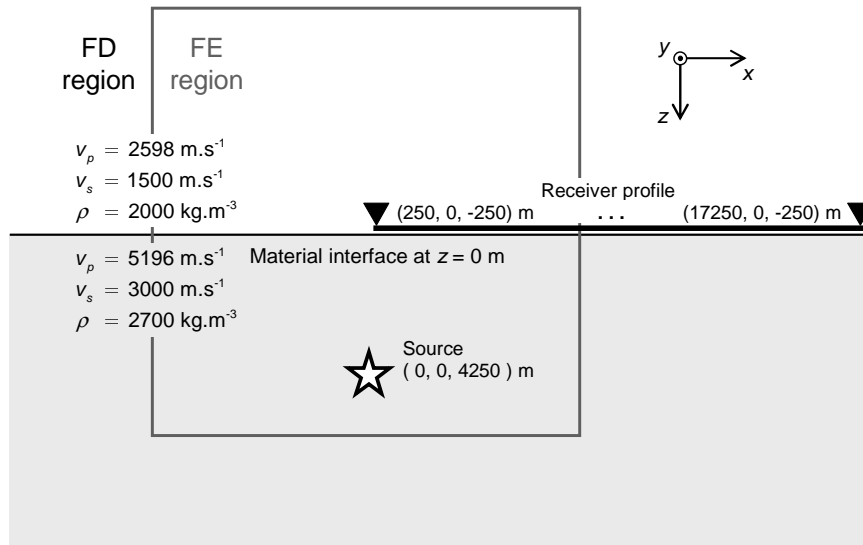
Výsledky numerických testov sú zhrnuté na Obr. 3.4.11 a Obr. 3.4.12. Riešenia vypočítané našou MKD-MKP hybridnou metódou sú porovnané s rieše-

niami získanými metódou diskretných vlnových čísel - DWN. Štruktúra Obr. 3.4.11 a Obr. 3.4.12 je rovnaká ako štruktúra Obr. 3.4.9 a Obr. 3.4.10. Aj v prípade prítomnosti voľného povrchu je presnosť hladkej prechodovej zóny, t.j., pre $B = 1, 2, 3$, oveľa vyššia ako presnosť algoritmickej minimálnej prechodovej zóny, t.j., pre $B = 0$. Vplyv hladkej prechodovej zóny je teda jednoznačný. Rovnako, ako v prípade US konfigurácií, sú riešenia pre rôzne šírky hladkej prechodovej zóny, t.j., pre $B = 1, 2, 3$, takmer totožné. Riešenia vypočítané pomocou hladkej prechodovej zóny boli dostatočne presné (amplitúdové aj fázové misfity do 1%). Aj v týchto testoch boli misfity pre hustejšie vzorkovanie, t.j., pre konfiguráciu FS-18, menšie ako misfity pre redšie vzorkovanie, t.j., konfiguráciu FS-12. Numerické testy s prítomnosťou voľného povrchu potvrdili závery testov pre homogénny neohraničený priestor, t.j., že aj najmenšia hladká prechodová zóna, t.j., pre $B = 1$, vedie k dostatočne presným riešeniam.

Keďže cieľom je mať čo najmenšiu MKP oblasť, budeme ďalej používať hladkú prechodovú zónu so zónou MKD-MKP priemerovania širokou h_{FD} , t.j., prechodovú zónu označenú $B = 1$ v prezentovaných numerických testoch.

Ďalším testom bolo overiť numerické správanie prechodovej zóny v prípade prítomnosti materiálového rozhrania. Na Obr. 3.4.13 je konfigurácia testu. Rovinné rozhranie medzi dvomi elastickými homogénnymi polpriestormi prechádza cez MKP oblasť a teda aj cez prechodovú zónu. Na generovanie seizmického pohybu bol, rovnako ako v predchádzajúcich testoch, použitý bodový kinematický model seizmického zdroja. Bol umiestnený v tvrdšom polpriestore a vnútri MKP oblasti. Ako časovú funkciu sme použili Gaborov signál, pozri rovnicu (3.1.19). Parametre časovej funkcie a bodového modelu seizmického zdroja sú zhrnuté v Tab. 3.4.2. Časová funkcia a jej amplitúdové Fourierove spektrum sú na Obr. 3.4.14. Prijímače boli rozmiestnené pozdĺž profilu v mäkšom polpriestore, jeden sieťový krok, h_{FD} , nad rozhraním. Aj v tomto teste siahali profile prijímačov z MKP oblasti cez prechodovú zónu až do MKD oblasti. Prijímače na profile boli rozložené rovnomerne s krokom h_{FD} .

Vzhľadom na výsledky testov numerického správania prechodovej zóny v prípade homogénneho priestoru a homogénneho polpriestoru (t.j., pre voľný povrch)



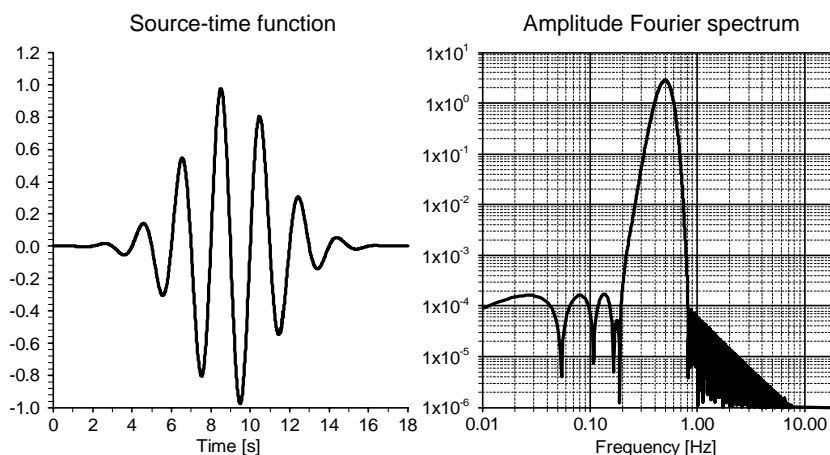
Obr. 3.4.13: Konfigurácia testu numerického správania prechodovej zóny v prítomnosti materiáloveho rozhrania. MKP oblasťou (tvary kocky) prechádza kontakt dvoch elastických polpriestorov. V simuláciách bol použitý bodový kinematický model seizmického zdroja (naznačený hviezdíčkou) umiestnený v tvrdšom polpriestore a vo vnútri MKP oblasti. Vlnové pole bolo zaznamenané prijímačmi rovnomerne rozloženými (s krokom h_{FD}) pozdĺž profilu v mäkkom polpriestore, jeden sieťový krok (h_{FD}) nad materiálovým rozhraním. Profil prijímačov siahal z MKP oblasti cez prechodovú zónu až do MKD oblasti.

sme vykonali testy iba pre prechodovú zónu $B = 1$, t.j., pre najmenšiu hladkú prechodovú zónu.

Hybridné riešenia pre túto konfiguráciu sme porovnali s riešeniami vypočítanými metódou diskretných vlnových čísel - DWN. Porovnanie je na Obr. 3.4.15. Porovnané sú syntetické seizmogramy pre x - a z -zložky vektora posunutia, označené sú U a W, pre všetky prijímače umiestnené na profile z Obr. 3.4.13. Naše hybridné riešenia sú vo veľmi dobrej zhode s referenčnými DWN riešeniami. Zhoda je prakticky v hrúbke čiary, ako je zrejme z porovnania riešení v dvoch vybraných prijímačoch (jeden v MKP oblasti, druhý v MKD oblasti). Doplňme, že y -zložka vektora posunutia, označená V, nie je zobrazená, pretože vzhľadom na mechanizmus bodového zdroja je V zložka vektora posunutia v MKP oblasti nulová (profil prijímačov leží presne v nodálnej rovine) a je veľmi malá v MKD oblasti (kvôli charakteru striedavo usporiadanej siete je profil prijímačov pre V zložku v MKD sieti posunutý o $h_{FD}/2$ mimo nodálnej roviny).

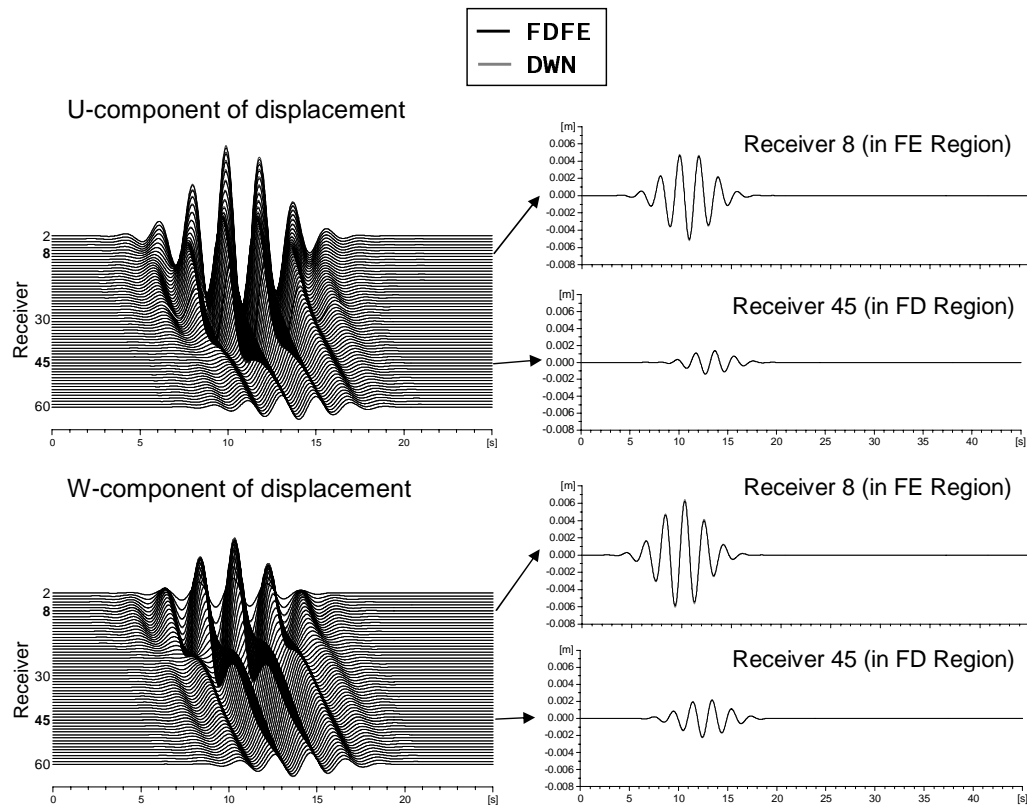
Tabuľka 3.4.2: Parametre bodového kinematického modelu seizmického zdroja a parametre časovej funkcie zdroja použitých v numerických testoch s materiálovým rozhraním.

Source parameters				Source-time-function parameters			
Strike Φ_s	Dip δ	Rake λ	M_0	f_p	γ	ψ	T_s
0°	0°	0°	1×10^{16} N.m	0.5 Hz	10.	$\pi/2$	9 s



Obr. 3.4.14: Gaborov signál použitý ako časová funkcia zdroja v numerických testoch správania prechodovej zóny s materiálovým rozhraním (vľavo) a amplitúdové Fourierove spektrum (vpravo).

Ako sme už spomenuli, jednou z hlavných aplikácií našej MKD-MKP hybridnej metódy je komplexná simulácia seizmického pohybu vrátane dynamického modelu seizmického zdroja. Pretože dynamický model zdroja je ovplyvnený vlnovým poľom v okolí (na rozdiel od kinematického modelu, ktorého správanie je dopredu predpísané), je dôležité zistiť, aká veľká musí byť MKP oblasť. Inými slovami, ako ďaleko musí byť prechodová zóna od zlomovej plochy, aby sa neprejavili numerické efekty v dôsledku prítomnosti prechodovej zóny zmenami v šírení trhliny na zlome. Preto sme definovali a vykonali sériu numerických testov s dynamicky sa šíriacou trhlinou na seizmickom zlome. Schematicky je geometrická konfigurácia testov ilustrovaná na Obr. 3.4.16. Vykonali sme numerické simulácie so šiestimi rôznymi vzdialenosťami, δ , prechodovej zóny od zlomovej plochy. Uvažovali sme homogénne elastické prostredie. Materiálové a výpočtové parametre sú zhrnuté v Tab. 3.4.3. Uvažovali sme tzv. LSW zákon trenia (t.j., zákon trenia, pri ktorom trenie na zlome lineárne klesá s rastúcim sklzom, kým neklesne na dynamickú úroveň



Obr. 3.4.15: Výsledky numerických testov správania prechodovej zóny - porovnanie MKD-MKP hybridných riešení s riešeniami vypočítanými metódou diskretných vlnových čísel (DWN) pre konfiguráciu s materiálovým rozhraním prechádzajúcim cez prechodovú zónu na Obr. 3.4.13. Ľavý stĺpec - riešenia pre x - a z -zložky vektora posunutia (označené U a W) vypočítané našou hybridnou metódou a DWN vykreslené spolu pre všetky prijímače na profile z Obr. 3.4.13. Pravý stĺpec - hybridné a DWN riešenia zobrazené zvlášť pre dva prijímače. y -zložka vektora posunutia, označená V, nie je zobrazená, pretože vzhľadom na mechanizmus bodového zdroja je V zložka vektora posunutia v MKP oblasti nulová (profil prijímačov leží presne v nodálnej rovine) a je veľmi malá v MKD oblasti (kvôli charakteru striedavo usporiadanej siete je profil prijímačov pre V zložku v MKD sieti posunutý o $h_{FD}/2$ mimo nodálnej roviny).

trenia, pozri kap. 3.3.1). Počiatočné normálové napätie ako aj ostatné parametre dynamického modelu sú konštanty na celej zlomovej ploche. Tangenciálne počiatočné napätie je konštantné na celej zlomovej ploche okrem inicializačnej zóny. Uvažovali sme kruhovú inicializačnú zónu. Nastavením tangenciálneho počiatočného napätia v inicializačnej zóne o 0.5% väčšieho ako medza pevnosti je inicializované spontánne šírenie trhliny mimo inicializačnej zóny. Parametre zákona trenia ako aj ostatné parametre dynamického modelu sú uvedené v Tab. 3.4.4. Na Obr. 3.4.17

Tabuľka 3.4.3: Materiálové a výpočtové parametre použité v numerických testoch s dynamickým šírením trhliny. λ a μ - Laméove elastické koeficienty, v_P a v_S - rýchlosť P- a S- vln, ρ - hustota, h_{FD} - priestorový krok v MKD sieti, h_{FE} - priestorový krok v MKP sieti, Δt - časový krok.

$\lambda = \mu$ [GPa]	v_P [m/s]	v_S [m/s]	ρ [kg/m ³]	h_{FD} [m]	h_{FE} [m]	Δt [m]
34.3	6050	3500	2800	50	25	1.3875×10^{-3}

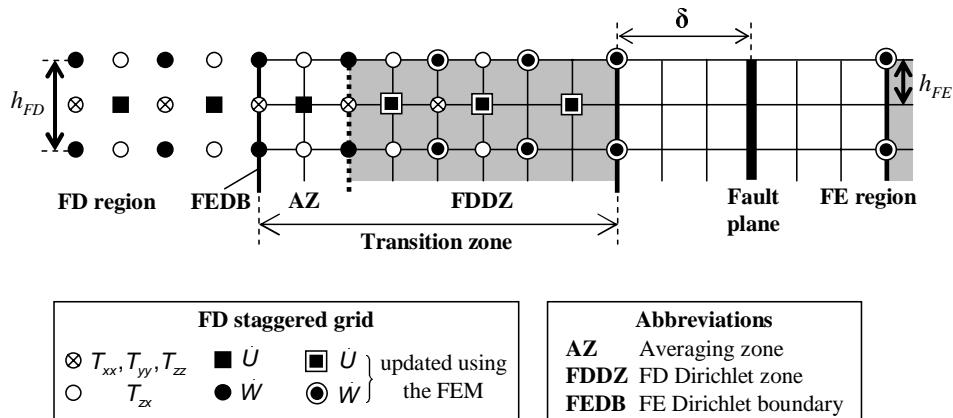
Tabuľka 3.4.4: Parametre LSW zákona trenia použité v numerických testoch s dynamickým šírením trhliny. σ_0 - normálové počiatočné napätie, τ_0 - tangenciálne počiatočné napätie, μ_u - koeficient statického trenia, μ_f - koeficient dynamického trenia, d_0 - charakteristická vzdialenosť, S - parameter pevnosti zlomu, r^{nucl} - polomer kruhovej inicializačnej zóny, τ_0^{nucl} - tangenciálne počiatočné napätie v inicializačnej zóne.

σ_0 [MPa]	τ_0 [MPa]	μ_u	μ_f	d_0 [m]	S	r^{nucl} [m]	τ_0^{nucl} [MPa]
30.0	20.0	0.933	0.25	0.1	0.64	300	28.14

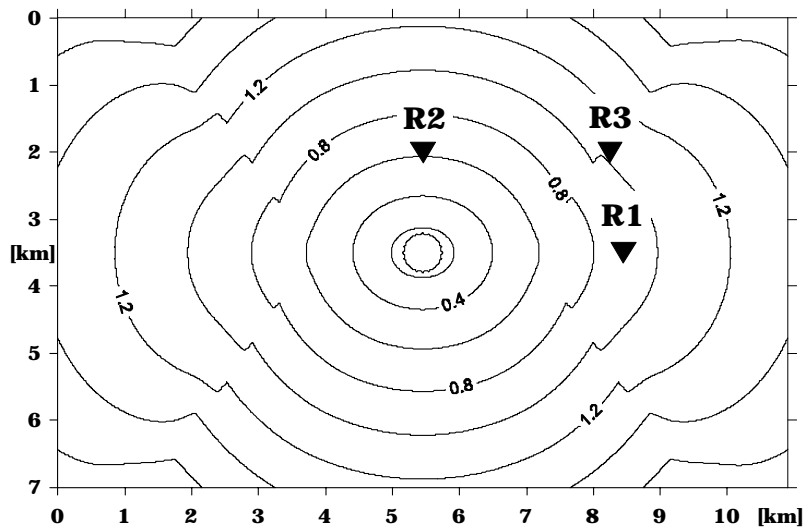
sú zobrazené tri prijímače. Poloha prijímača R1 bola zvolená tak, aby prijímač zaznamenával čistý tzv. "in-plane mód" šírenia trhliny, t.j., mód, kedy je vektor sklzu rovnobežný so smerom šírenia trhliny. Poloha prijímača R2 bola zvolená tak, aby prijímač zaznamenával čistý tzv. "anti-plane mód" šírenia trhliny, t.j., mód, kedy je vektor sklzu kolmý na smer šírenia trhliny. Poloha prijímača R3 bola zvolená tak, aby bol prijímač v blízkosti rozdelenia čela trhliny.

Nefiltrované a nezhladené časové histórie rýchlosti sklzu v prijímačoch R1, R2 a R3 pre šesť vzdialeností prechodovej zóny od zlomovej plochy sú zhrnuté v Obr. 3.4.18. Ako sme očakávali, vzdialenosť iba jedného sieťového kroku ($\delta = h_{FE}$) medzi zlomovou plochou a prechodovou zónou je nedostatočná. Riešenia zo simulácií s $\delta = 9 h_{FE}$ sú ťažko odlíšiteľné od riešení vypočítaných s $\delta = 21 h_{FE}$. Ako je vidieť z Obr. 3.4.18, riešenia vypočítané s $\delta = 21 h_{FE}$ je možné považovať za dostatočne presné vzhľadom na použité výpočtové parametre.

V časových priebehoch rýchlosti sklzu v prijímači R2 je možné rozoznať poruchu, ktorá sa s rastúcou vzdialenosťou δ objavuje v neskorších časoch. Našou

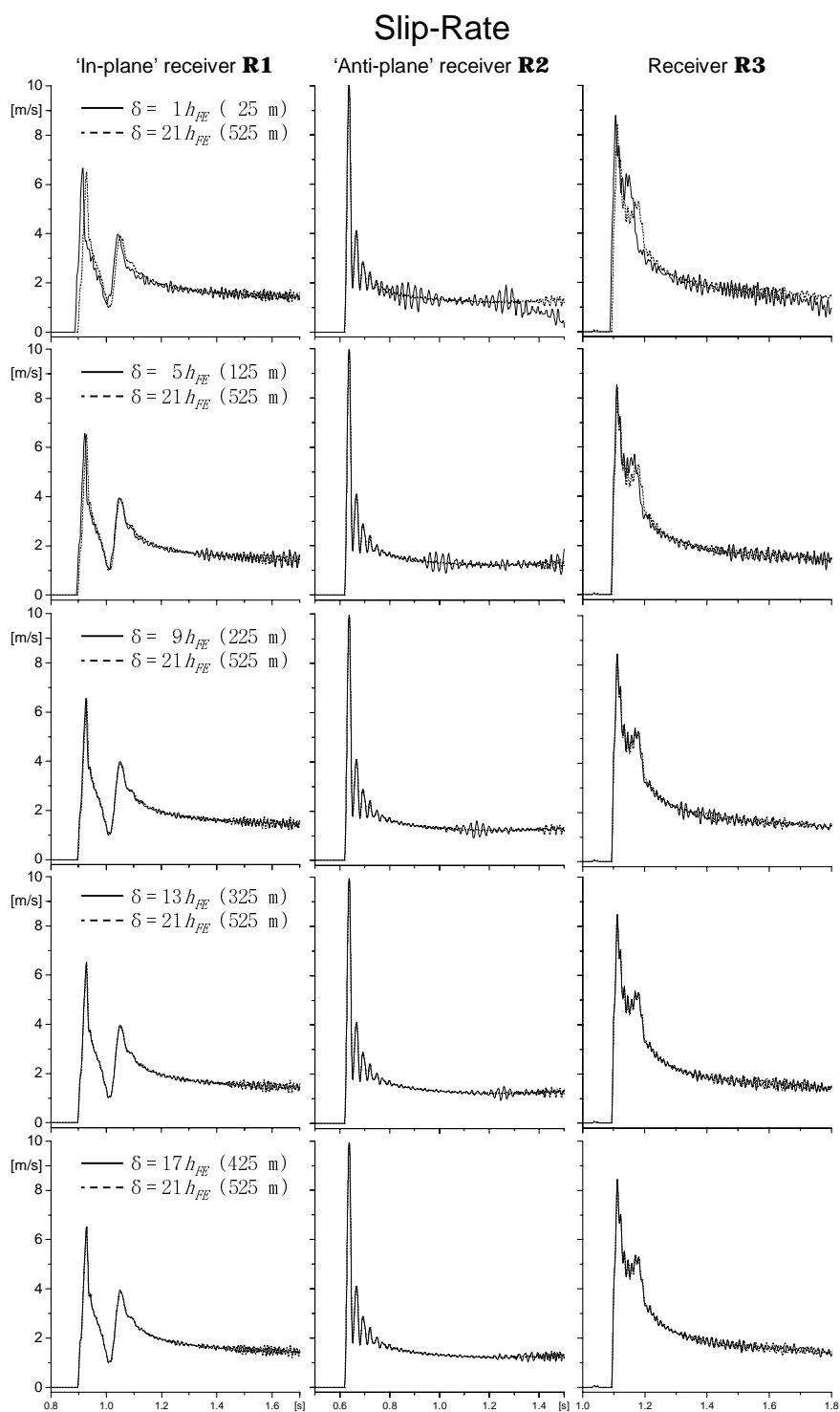


Obr. 3.4.16: Znáznorenie polohy zlomovej plochy a MKD-MKP prechodovej zóny. Vzdialenosť medzi zlomovou plochou a prechodovou zónou je označená δ . Numerické simulácie boli vykonané pre šesť rôznych vzdialeností; $\delta = \{1, 5, 9, 13, 17, 21\} \times h_{FE}$.



Obr. 3.4.17: Poloha prijímačov na zlomovej ploche a izočiaru čela trhliny. Prijímač R1 zaznamenáva "in-plane mód", R2 zaznamenáva "anti-plane mód" šírenia trhliny. Prijímač R3 bol umiestnený v blízkosti rozdelenia čela trhliny. Čísla pri izočiarach udávajú čas v sekundách, pre ktorý je vykreslené čelo trhliny.

jedinou interpretáciou je, že ide o "odraz" od Dirichletovej hranice MKP oblasti (pozri Obr. 3.4.4). Z praktického hľadiska však táto porucha nepredstavuje problém, nakoľko je vysokofrekvenčná, t.j., jej frekvencia je vyššia než maximálna frekvencia, ktorú dokážeme v numerickej sieti dostatočne presne simulovať. Ešte raz zdôrazníme, že časové priebehy na Obr. 3.4.18 nie sú ani filtrované ani inak zhladené.

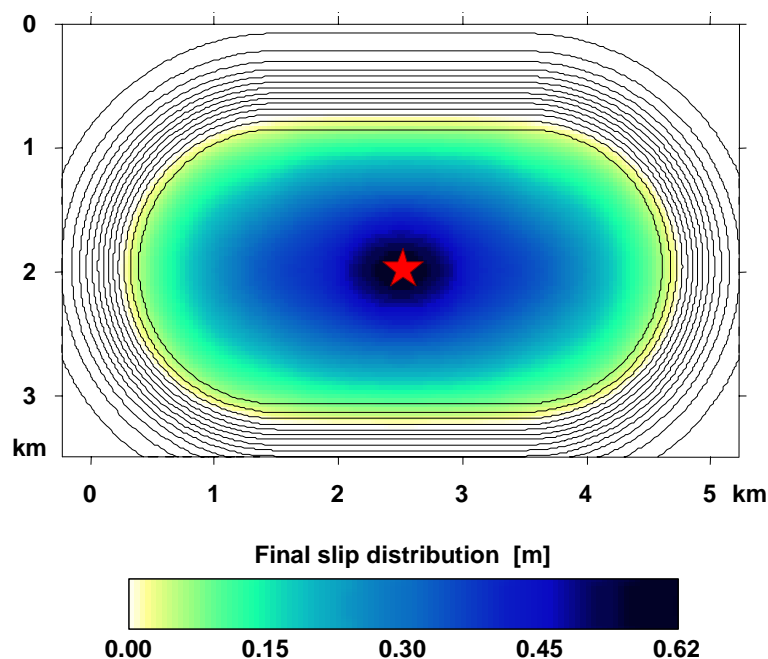


Obr. 3.4.18: Časové priebehy rýchlosti sklzu v simuláciách s dynamicky sa šíriacou trhlinou. Hodnoty δ v násobkoch h_{FE} , t.j., sieťového kroku v MKP oblasti, označujú vzdialenosť medzi zlomovou plochou a prechodovou zónou (pozri Obr. 3.4.16). Stĺpce zľava doprava obsahujú časové histórie rýchlosti sklzu zaznamenané v prijímačoch R1, R2 a R3. Každý riadok obsahuje riešenia pre jednu vzdialenosť δ , t.j., $\delta = \{ 1, 5, 9, 13, 17 \} \times h_{FE}$, vykreslené spolu s referenčným riešením pre $\delta = 21 \times h_{FE}$.

3.4.5 Numerické simulácie dvoch hypotetických zemetrasení v okolí mesta Grenoble

Lokálna seizmická aktivita v blízkosti mesta Grenoble je spôsobená niekoľkými seizmickými/tektonickými zlomami; pozri napr. Cotton et al. (1998). Na základe analýzy historickej seizmickej aktivity a tektonickej situácie v prácach Gamond (1994) a Thouvenot (1996), uvažovali Cotton et al. (1998) dve hypotetické zemetrasenia v okolí Grenoblu a vykonali numerické simulácie seizmického pohybu v sedimentárnom bazéne Grenoble. Prvé uvažované hypotetické zemetrasenie bolo lokalizované na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble, druhé bolo uvažované na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne. V oboch prípadoch Cotton et al. (1998) použili bodový kinematický model seizmického zdroja. Na simulácie použili MKD schému v rýchlosti a napätí na striedavo usporiadanej sieti a 4. rádu presnosti.

My sme aplikovali na simulácie seizmického pohybu v bazéne Grenoble našu MKD-MKP hybridnú metódu. Vzhľadom k tomu, že v našej metóde je relatívne jednoduché použiť dynamický model seizmického zdroja, uvažovali sme pre obe hypotetické zemetrasenia konečný dynamický model, t.j., spontánne sa šíriacu trhlinu na seizmickom zlome. Parametre dynamického modelu navrhli Michel Bouchon a Pierre-Yves Bard (obaja z LGIT, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francúzsko). Uvažovali sme LSW zákon trenia. Tangenciálne počiatkové napätie v modeli bolo 10 MPa, normálové počiatkové napätie bolo -17 MPa (záporné znamienko zodpovedá tlaku na zlomovú plochu), statický a dynamický koeficient trenia mal hodnotu 0.7 a 0.235 a charakteristická vzdialenosť bola 0.1 m. Hypocentrum bolo v strede porušenej časti zlomu. Trhlina bola inicializovaná v kruhovej inicializačnej zóne s polomerom 250 m. Tangenciálne počiatkové napätie v inicializačnej zóne bolo o 2.5% väčšie ako medza pevnosti zlomu. To spôsobilo, že mimo inicializačnej zóny sa začala trhlina spontánne šíriť. Keďže na základe analýzy seizmickej aktivity je možné očakávať zemetrasenie s momentovým magnitúdom M_W 5 až 5.5, museli sme obmedziť celkovú plochu, na ktorú sa trhlina rozšíri tak, aby výsledné momentové magnitúdo simulovaného zemetrasenia bolo v požadovanom intervale. Preto sme pri okrajoch zlomovej plochy definovali bariéru. Bariéra bola definovaná hladkým nárastom statického aj dynamického koeficientu trenia. Šírka bariéry aj presný

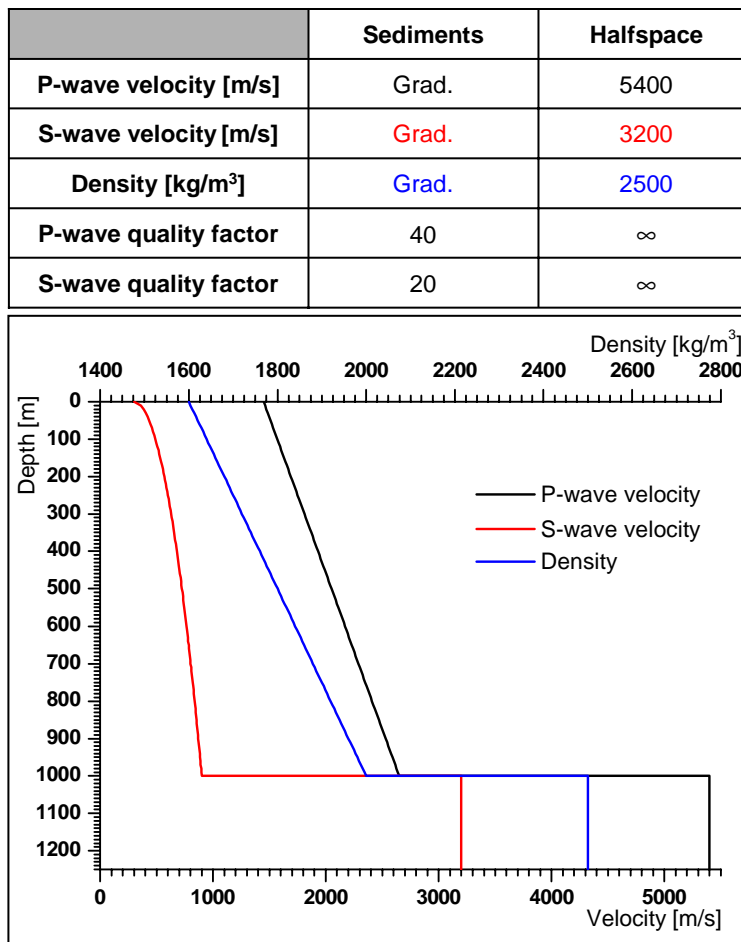


Obr. 3.4.19: Pohľad na zlomovú plochu a konečné rozloženie sklzu na zlomovej ploche. Hviezdička indikuje polohu hypocentra (v strede porušenej časti zlomu). Šírenie trhliny bolo ohraničené bariérou s postupným nárastom koeficientov dynamického aj statického trenia. Nárast koeficientov je indikovaný izočiarami. Najnižšie hodnoty koeficientov trenia, t.j., hodnoty, ktoré umožňujú šírenie trhliny pri predpísanom počiatočnom napätí a inicializácii, sú vnútri 'elipsy'. Smerom k okrajom zlomovej plochy koeficienty trenia rastú. Konečné rozloženie sklzu na zlomovej ploche zodpovedá zemetraseniu s momentovým magnitúdom $M_W = 5.3$.

tvár nárastu koeficientov trenia bol nájdený metódou pokus-omyl. Na Obr. 3.4.19 je vidieť konečný tvar navrhutej bariéry a výsledné rozloženie sklzu na zlomovej ploche. Porušená časť zlomu bola približne 4 km dlhá a 2 km široká. Výsledné momentové magnitúdo bolo $M_W = 5.3$, čo je v požadovanom intervale. Rovnaký dynamický model bol uvažovaný v oboch prípadoch. Líšila sa iba orientácia zlomovej plochy.

Materiálové parametre štruktúrného modelu sú uvedené na Obr. 3.4.20. V dôsledku použitých priestorových krokov, $h_{FD} = 70$ m a $h_{FE} = 35$ m, boli výpočty presné do (približne) 7.6 Hz v podloží a do (približne) 0.7 Hz na povrchu sedimentárneho bazénu.

Geometrická konfigurácia výpočtového modelu pre prvé hypotetické zemetrasenie, t.j., zemetrasenie na horizontálnom tektonickom zlome v hĺbke 5 km pod bazénom Grenoble je na Obr. 3.4.21. Zlomová plocha je umiestnená vnútri MKP



Obr. 3.4.20: Materiálové parametre výpočtového modelu sedimentárneho bazénu Grenoble.

oblasti. Ako je zrejmé z Obr. 3.4.21, MKP oblasť je veľmi malá v porovnaní s celou výpočtovou oblasťou. Väčšina výpočtovej oblasti je pokrytá MKD sieťou. Práve preto je v tomto prípade naša hybridná MKD-MKP metóda značne výpočtovo efektívnejšia než aplikácia samotnej metódy konečných prvkov.

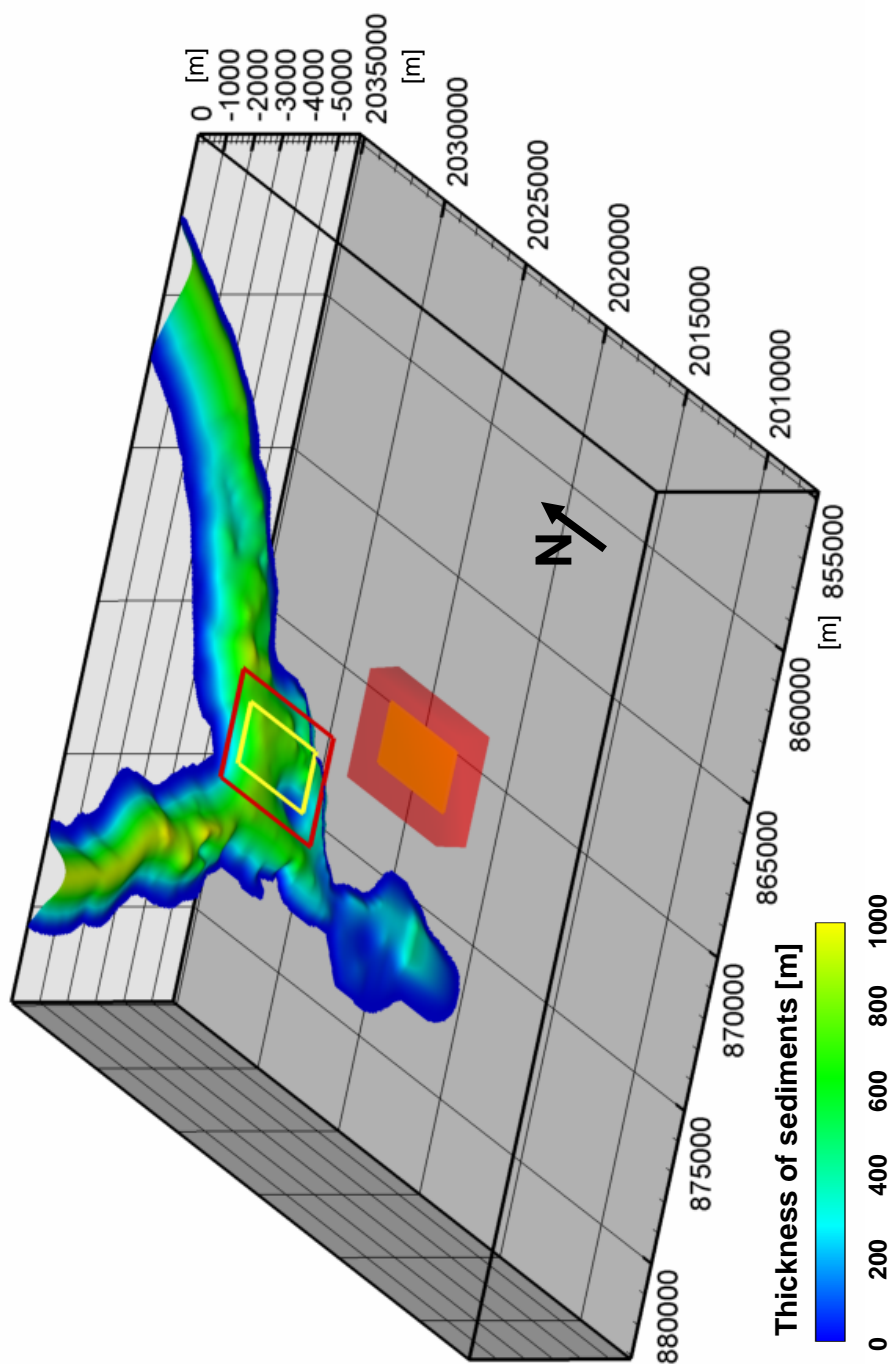
Výsledky numerických simulácií pre horizontálny zlom pod bazénom Grenoble sú ilustrované na Obr. 3.4.22 - 3.4.24. Na obrázkoch sú zobrazené sekvencie tzv. snapshotov vlnového poľa na voľnom povrchu počas simulovaného zemetrasenia. Jeden snapshot zobrazuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia v konkrétnom čase. Na obrázkoch je vidieť vyžiarené seizmické vlny a ich šírenie v podloží ako aj prienik do sedimentárneho bazénu. V dôsledku relatívne veľkého rýchlostného kontrastu medzi podloží a sedimentmi sa seizmické vlny, ktoré prenikli do sedimentárneho bazénu odrážajú späť dovnútra,

inými slovami, podstatná časť energie už neprenikne do podlažia. Seizmická energia je tak koncentrovaná vo vnútri sedimentárneho bazénu. V dôsledku komplikovaného tvaru sedimentárneho bazénu vznikajú povrchové vlny, konštruktívna aj deštruktívna interferencia povrchových a objemových vln, dochádza k mnohonásobným odrazom medzi voľným povrchom a rozhraním medzi sedimentmi a podlažím a tiež k difrakcii seizmických vln. Kvôli týmto javom je v neskorších časoch jednoznačne vidieť, že aj keď v podlaží už seizmický pohyb ustal, v sedimentárnom bazéne ešte stále dosahuje významné amplitúdy.

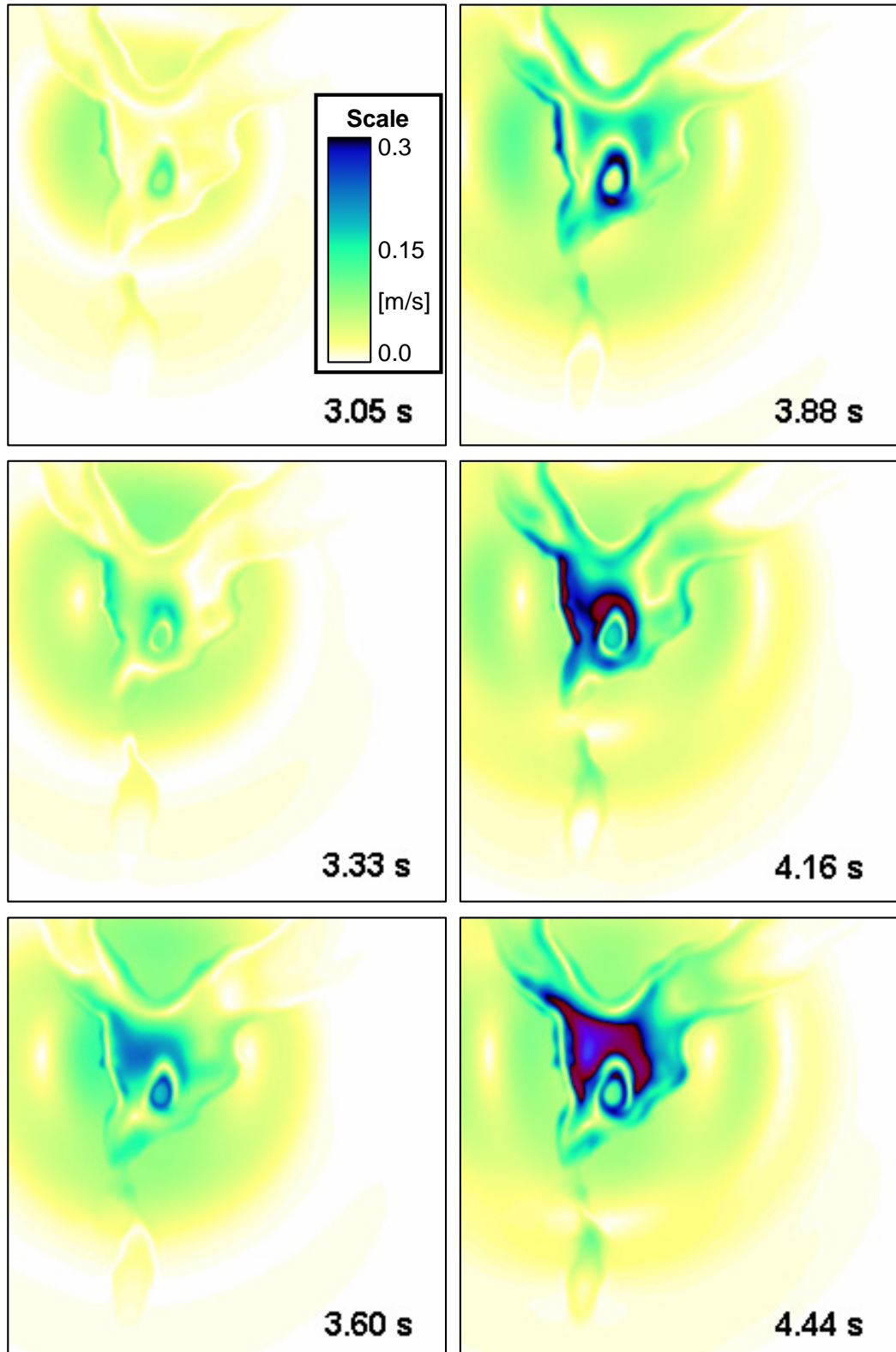
Geometrická konfigurácia výpočtového modelu pre druhé uvažované hypotetické zemetrasenie, t.j., zemetrasenie na vertikálnom tektonickom zlome v pohorí Belledonne, je na Obr. 3.4.25. Uvažovali sme rovnaké materiálové parametre štruktúrného modelu ako pre prvé hypotetické zemetrasenie, pozri Obr. 3.4.21. Preto ostal rovnaký aj frekvenčný interval, v ktorom môžeme považovať riešenia za dostatočne presné z hľadiska sieťovej disperzie.

Výsledky numerických simulácií pre hypotetické zemetrasenie na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne sú ilustrované na Obr. 3.4.26 - 3.4.28. Podobne ako pre prvé zemetrasenie, zobrazené sú sekvencie snapshotov veľkosti horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu. Aj keď vidieť niektoré črty vlnového poľa podobné tým pri prvom zemetrasení, máme na mysli najmä značné predĺženie trvania seizmického pohybu vnútri bazénu v porovnaní s trvaním seizmického pohybu mimo sedimentárneho bazénu, je zrejmé, že každé zemetrasenie vyvolalo úplne iné vlnové pole. Zjavne ide o dôsledok inej geometrickej konfigurácie bazénu a zlomovej plochy v dvoch uvažovaných prípadoch.

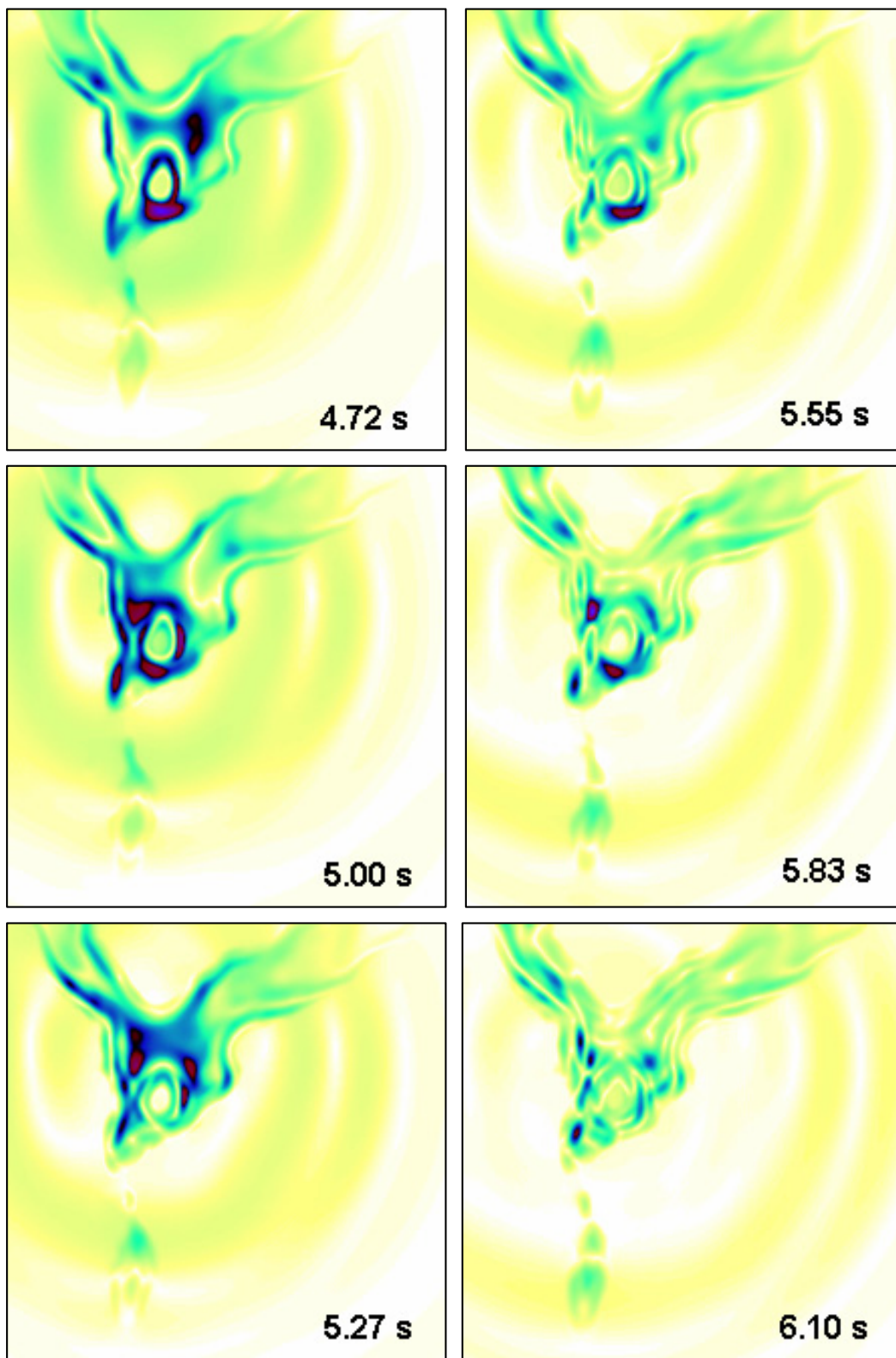
Aj keď je podrobná analýza a komplexná charakteristika seizmického pohybu možná a nutná v teoretických seizmologických štúdiách, nie je takmer vôbec používaná v inžinierskej praxi. Namiesto komplexného opisu časového vývoja vektora posunutia, vektora rýchlosti posunutia alebo vektora zrýchlenia v danom bode voľného povrchu v záujmovej lokalite sa v inžinierskej praxi používajú skalárne charakteristiky reprezentujúce seizmický pohyb v danom bode. Je zrejmé, že skalárna veličina nemôže obsahovať všetku informáciu obsiahnutú v seizmogramoch. Preto bolo definovaných niekoľko číselných alebo integrálnych charakteristík seizmického pohybu. My sme uvažovali špičkové horizontálne zrýchlenie, PHA,



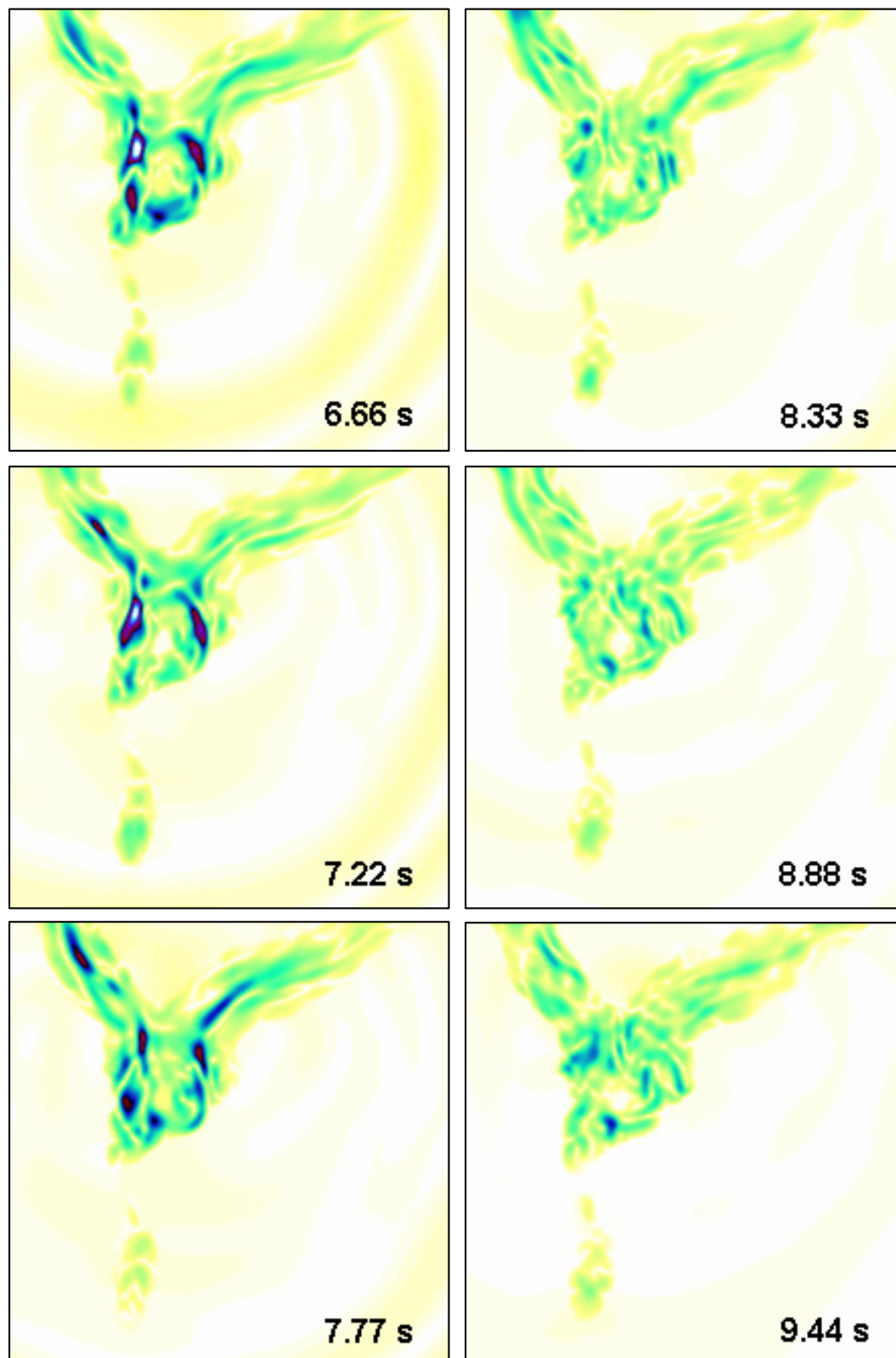
Obr. 3.4.21: Poloha sedimentárneho bazénu Grenoble a zlomovej plochy pre prípad zemetrasenia na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble. Tvar rozhrania medzi sedimentmi a podložíom s farebnou indikáciou hĺbky rozhrania. Červený kváder ukazuje veľkosť MKP oblasti, zvyšok výpočtového modelu je MKD sieť. Zlomová plocha (žltý obdĺžnik) je vo vnútri MKP oblasti. Naznačené sú aj priemety MKP oblasti a zlomovej plochy na voľný povrch (červená a žltá čiara). Uvažovaná zlomová plocha bola v hĺbke 5 km.



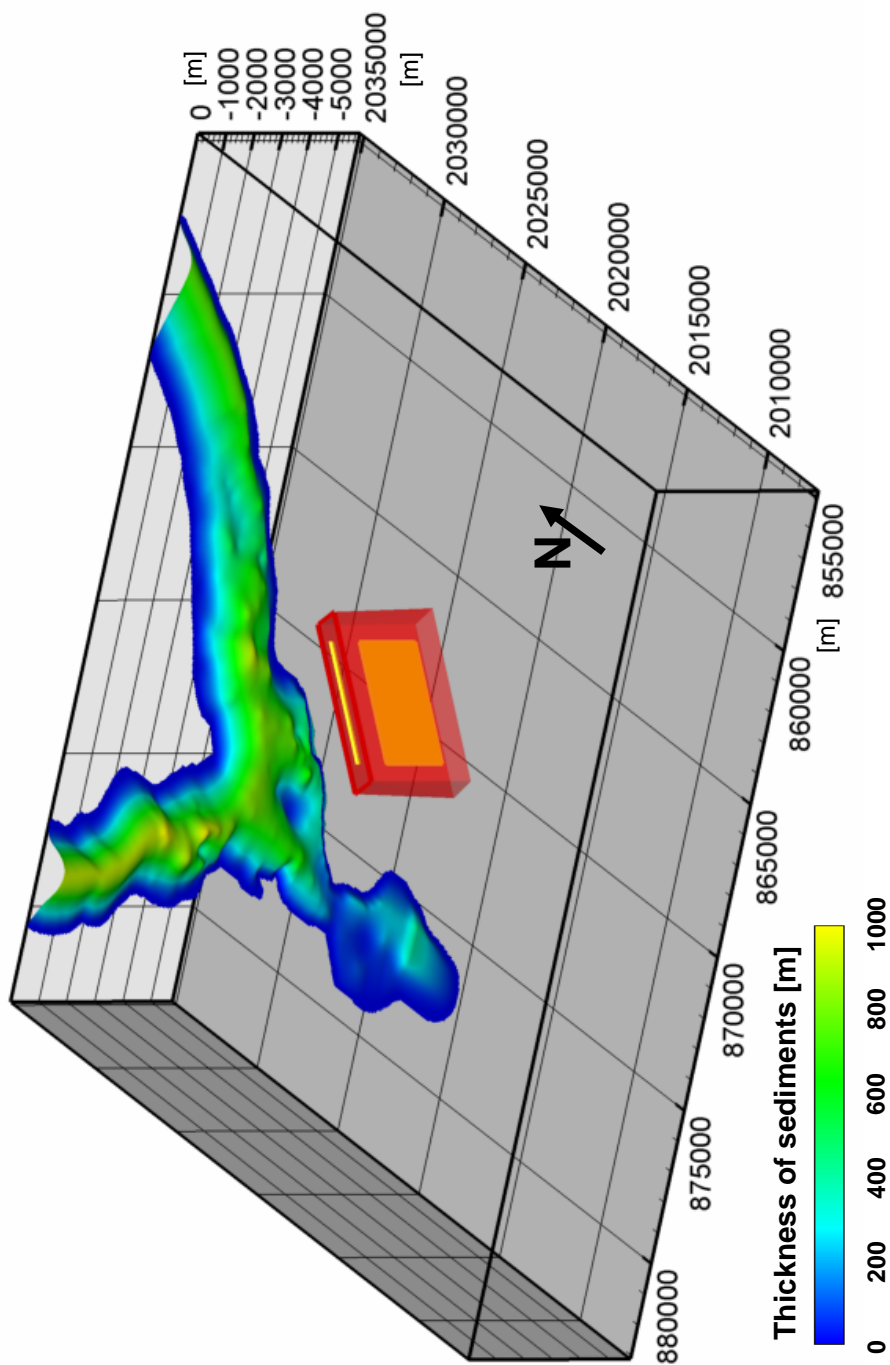
Obr. 3.4.22: Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad prvého hypotetického zemetrasenia, t.j., zemetrasenia na horizontálnom zlome pod bazénom Grenoble - 1. časť. Farebná škála indikuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu.



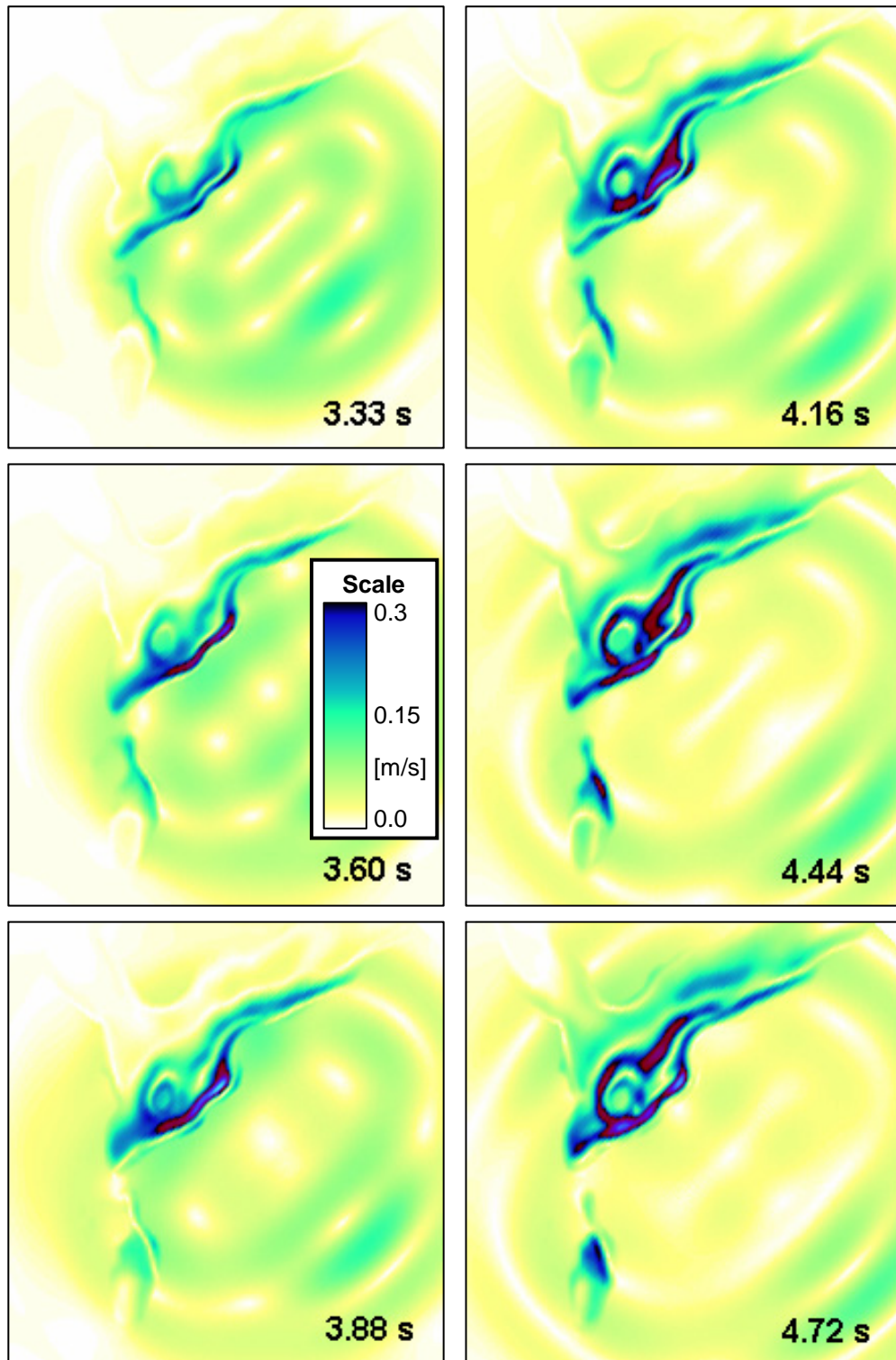
Obr. 3.4.23: Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad prvého hypotetického zemetrasenia, t.j., zemetrasenia na horizontálnom zlome pod bazénom Grenoble - 2. časť. Farebná škála indikuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu.



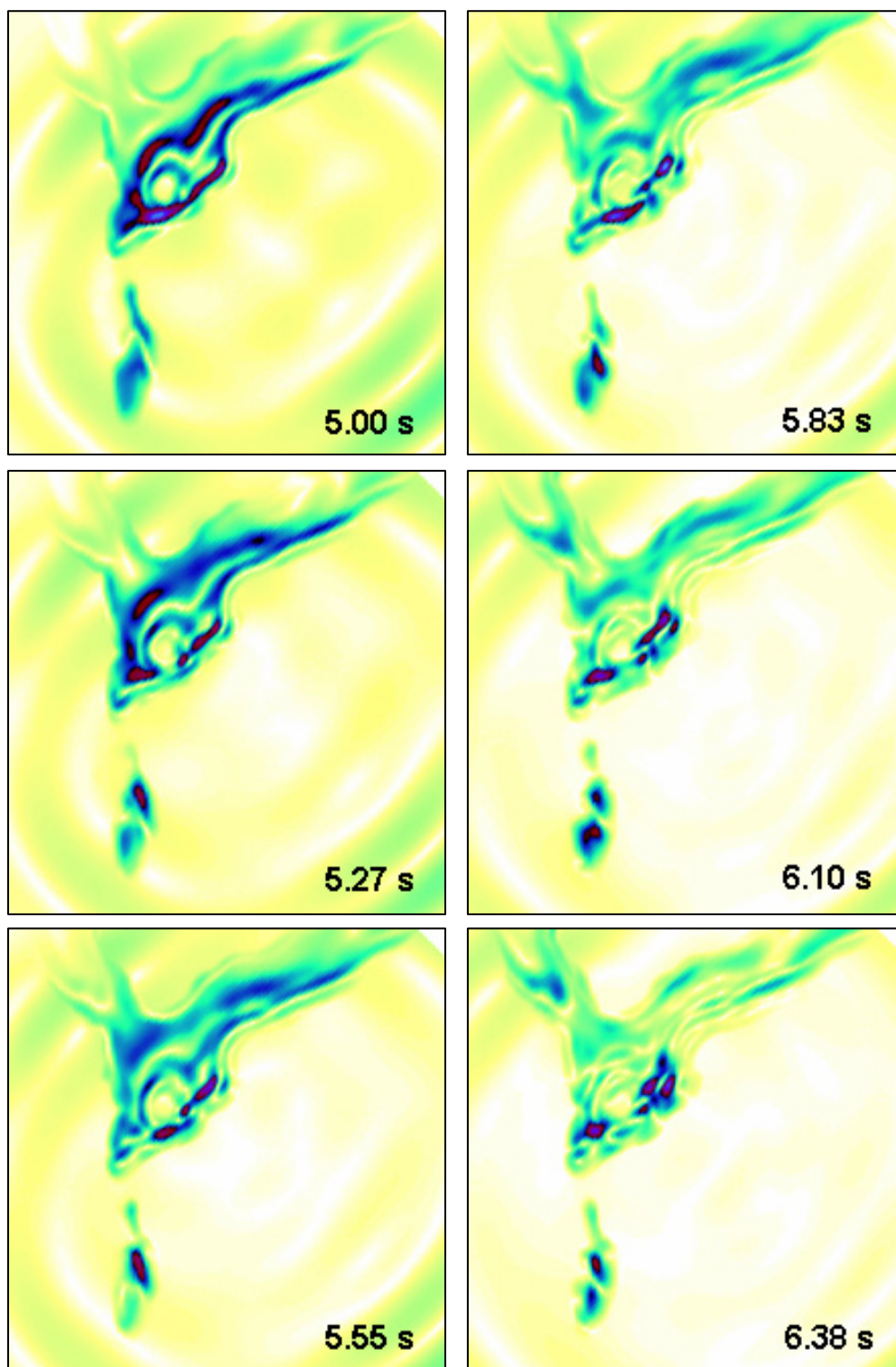
Obr. 3.4.24: Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad prvého hypotetického zemetrasenia, t.j., zemetrasenia na horizontálnom zlome pod bazénom Grenoble - 3. časť. Farebná škála indikuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu.



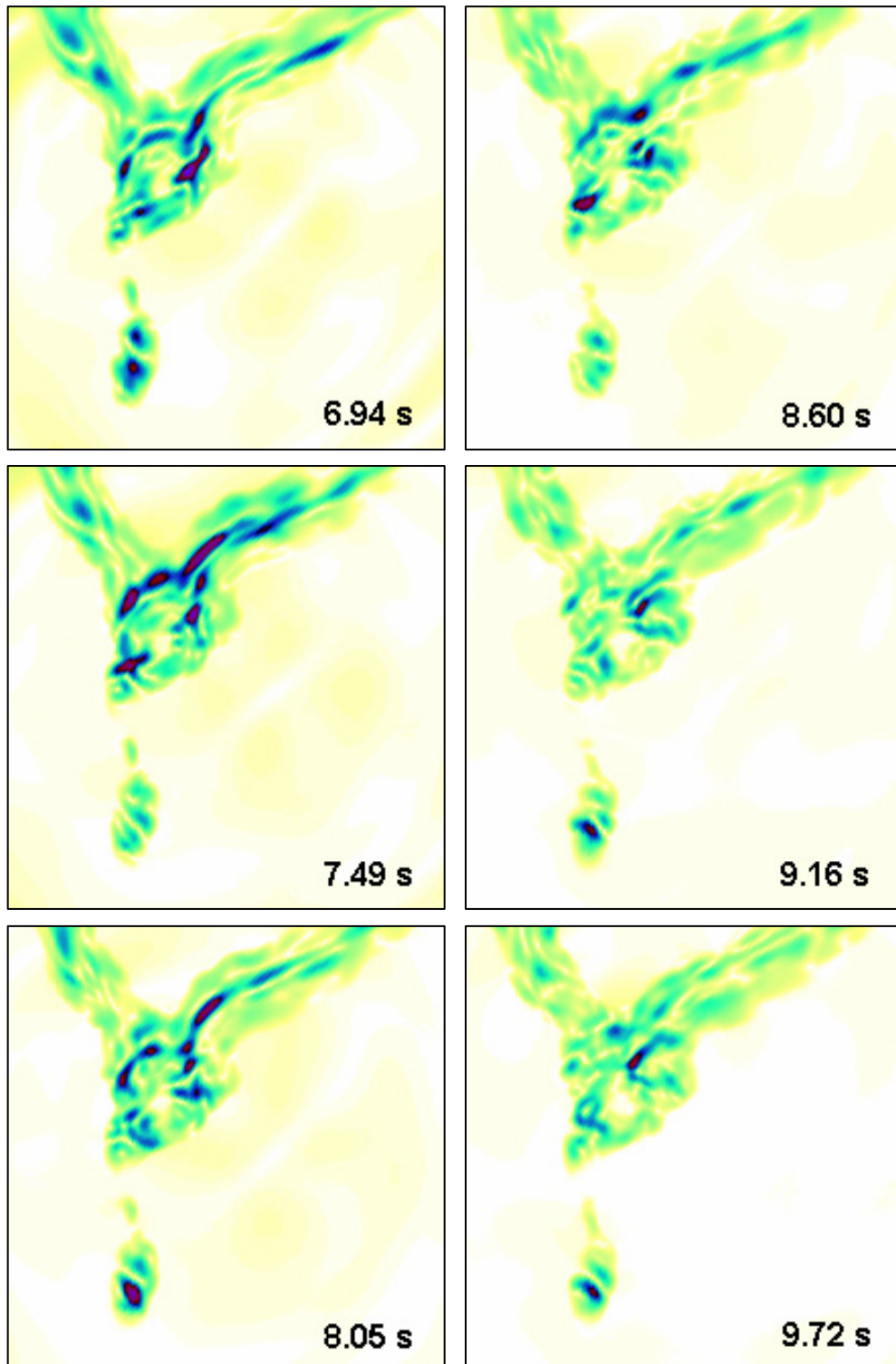
Obr. 3.4.25: Poloha sedimentárneho bazénu Grenoble a zlomovej plochy v prípade zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble. Tvar rozhrania medzi sedimentmi a podloží s farebnou indikáciou hĺbky rozhrania. Červený kváder ukazuje veľkosť MKP oblasti, zvyšok výpočtového modelu je MKD sieť. Zlomová plocha (žltý obdĺžnik) je vnútri MKP oblasti. Naznačené sú aj priemety MKP oblasti a zlomovej plochy na voľný povrch (červená a žltá čiara). Zlomová plocha siaha do hĺbky 3.5 km.



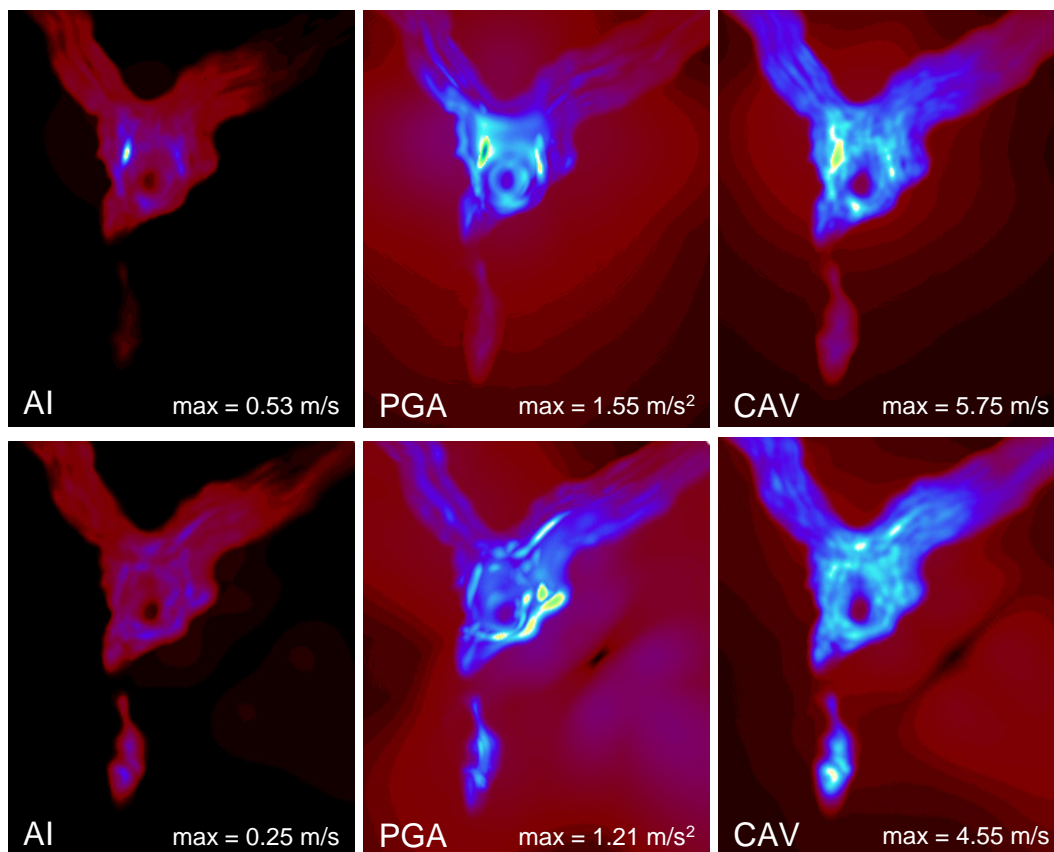
Obr. 3.4.26: Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad druhého hypotetického zemetrasenia, t.j., zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 1. časť. Farebná škála indikuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu.



Obr. 3.4.27: Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad druhého hypotetického zemetrasenia, t.j., zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 2. časť. Farebná škála indikuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu.



Obr. 3.4.28: Sekvencia snapshotov vlnového poľa v numerickej simulácii pre prípad druhého hypotetického zemetrasenia, t.j., zemetrasenia na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 3. časť. Farebná škála indikuje veľkosť, t.j., absolútnu hodnotu, horizontálnej zložky vektora rýchlosti posunutia na voľnom povrchu.



Obr. 3.4.29: Ariasova intenzita (AI), špičkové horizontálne zrýchlenie (PGA) a kumulatívna absolútna rýchlosť (CAV) pre obe simulované hypotetické zemetrasenia - vrchný riadok pre zemetrasenie na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble, spodný panel pre zemetrasenie na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne pri meste Grenoble. Zobrazené sú hodnoty na voľnom povrchu.

t.j., maximálnu hodnotu veľkosti (absolútnej hodnoty) horizontálnej zložky vektora zrýchlenia, Ariasovu intenzitu, AI, a kumulatívnu absolútnu rýchlosť, CAV. Ariasova intenzita a kumulatívna absolútna rýchlosť sú definované vzťahmi, pozri napríklad Reiter (1990),

$$AI = \frac{\pi}{2g} \int_0^{t_0} a^2(t) dt, \quad (3.4.17)$$

$$CAV = \int_0^{t_0} |a(t)| dt, \quad (3.4.18)$$

kde t_0 je čas trvania silných pohybov, inými slovami, čas, do ktorého je seizmický pohyb na danom mieste významný, a $a(t)$ je veľkosť horizontálnej zložky zrýchlenia.

Na Obr. 3.4.29 sú zobrazené Ariasova intenzita, špičkové horizontálne zrýchlenie a kumulatívna absolútna rýchlosť vypočítané na voľnom povrchu pre obe uvažované hypotetické zemetrasenia v okolí mesta Grenoble.

Z porovnania sekvencií snapshotov vlnového poľa a z porovnania troch charakteristík (IA, CAV, PHA) pre obe hypotetické zemetrasenia vyplýva, že zemetrasenia spôsobili značne odlišné časo-priestorové variácie seizmického pohybu na povrchu sedimentárneho bazénu Grenoble, ako aj značne odlišné priestorové rozloženie Ariasovej intenzity, špičkového horizontálneho zrýchlenia a kumulatívnej absolútnej rýchlosti. Je veľmi pravdepodobné, že toto zistenie je silnou indikáciou, že odhady seizmického pohybu založené na simuláciách s kolmým dopadom rovinatej vlny môžu mať veľmi limitovaný význam.

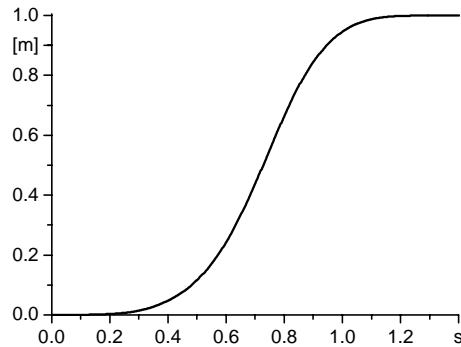
Okrem porovnania dvoch hypotetických zemetrasení sme boli zvedaví aj na porovnanie vlnového poľa vyvolaného dynamickým modelom seizmického zdroja a ekvivalentným bodovým kinematickým modelom seizmického zdroja. Bodový model seizmického zdroja je určený orientáciou zlomovej plochy a smeru sklzu na zlomovej poloche, uhly ϕ_S , δ a λ , pozri Obr. 1.3.10, skalárnym seizmickým momentom M_0 , rovnica (1.3.100), a časovou funkciou zdroja $s(t)$, rovnica (1.3.98). Parametre ekvivalentného bodového kinematického modelu sme určili tak, že v každej časovej hladine sme integrovali sklz v danej časovej hladine na celej zlomovej ploche. Takto integrované hodnoty sklzu sme v každej časovej hladine delili veľkosťou plochy porušenej časti zlomu v danej časovej hladine. Vydelením konečnou veľkosťou porušenej časti zlomu A , rovnica (1.3.97), sme získali priemerný sklz na zlomovej ploche ako funkciu času, $\overline{Du}(t)$ v rovnici (1.3.97). Časovú funkciu zdroja, $s(t)$, sme potom určili podľa

$$s(t) = \frac{\overline{Du}(t)}{\overline{Du}}, \quad (3.4.19)$$

kde \overline{Du}

$$\overline{Du} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{Du}(t). \quad (3.4.20)$$

Takto získaná časová funkcia zdroja je vykreslená na Obr. 3.4.30. Skalárny seizmický moment získaného bodového zdroja bol $M_0 \doteq 8.8$ Nm. Orientácia zlomovej plochy a smeru sklzu pre zemetrasenie na horizontálnom zlome pod mestom Gre-

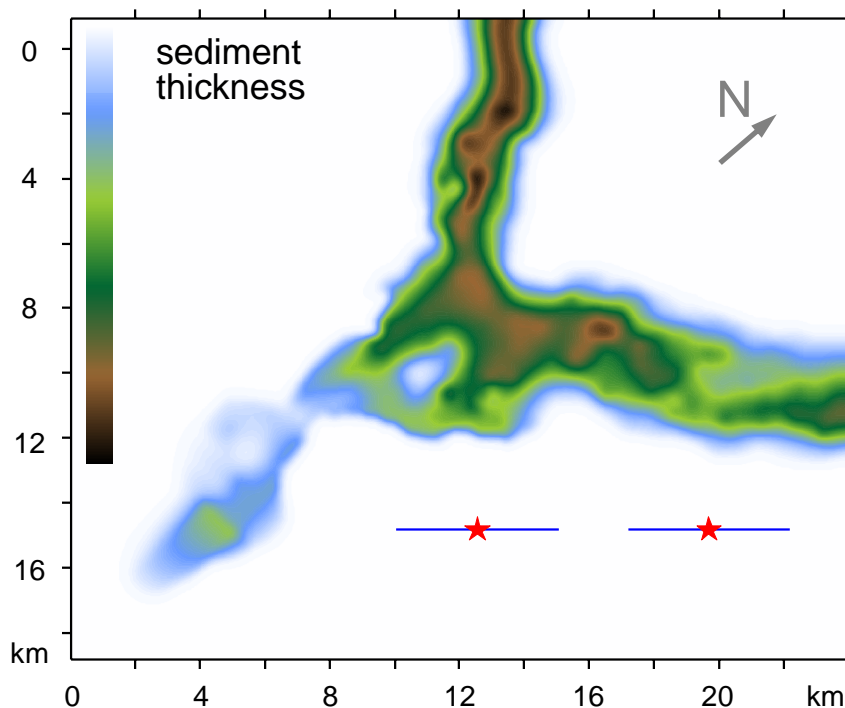


Obr. 3.4.30: Časová funkcia zdroja použitá v numerických simuláciách pre porovnanie dynamického a bodového kinematického modelu seizmického zdroja.

noble je $\phi = 90^\circ$, $\delta = 0^\circ$ a $\lambda = 90^\circ$ a pre zemetrasenie na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne $\phi = 45^\circ$, $\delta = 90^\circ$ a $\lambda = 90^\circ$.

V prvom porovnaní ekvivalentného kinematického bodového a konečného dynamického zdroja sme uvažovali dve polohy hypocentra na vertikálnom zlome v pohorí Belledonne. Polohy sme označili 'ľavá' a 'pravá' poloha. Znázornené sú na Obr. 3.4.31. Pre túto konfiguráciu sme vykonali štyri numerické simulácie - s dynamickým zdrojom v 'ľavej' polohe, s dynamickým zdrojom v 'pravej' polohe, s ekvivalentným bodovým zdrojom v 'ľavej' polohe a s ekvivalentným bodovým zdrojom v 'pravej' polohe. Na Obr. 3.4.32 - 3.4.34 sú vykreslené rozdiely v Ariasovej intenzite, špičkovom horizontálnom zrýchlení a kumulatívnej absolútnej rýchlosti v dôsledku rôznej polohy toho istého zdroja ako aj rozdiely v dôsledku použitia ekvivalentného bodového zdroja miesto dynamického zdroja. Výsledky indikujú, že efekt smerovosti je podhodnotený v prípade použitia ekvivalentného bodového zdroja. Okrem efektu smerovosti je však dôležitejšia poloha hypocentra než typ modelu seizmického zdroja. Dodajme, že tieto indikácie platia pre relatívne malé zemetrasenie. Preto závery z našich simulácií nemôžu byť a priori extrapolované na väčšie zemetrasenia.

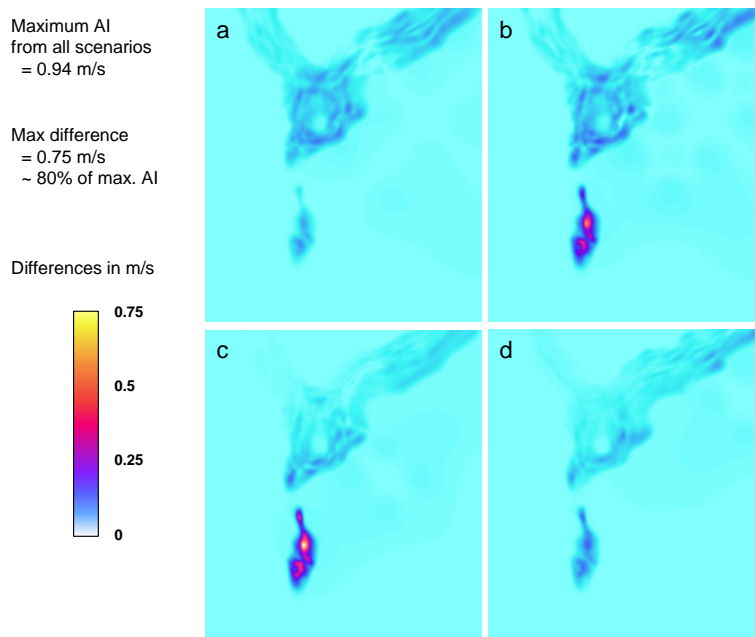
Ďalším testom bolo porovnanie seizmického pohybu vyvolaného dynamickým a ekvivalentným bodovým zdrojom s hypocentrom na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble. Na Obr. 3.4.35 sú vykreslené rozdiely v Ariasovej intenzite, špičkovom horizontálnom zrýchlení a kumulatívnej absolútnej rýchlosti pre tento test. Z obrázku je zrejmé, že rozdiely sú značné. Hodnoty Ariasovej intenzity pre ekviva-



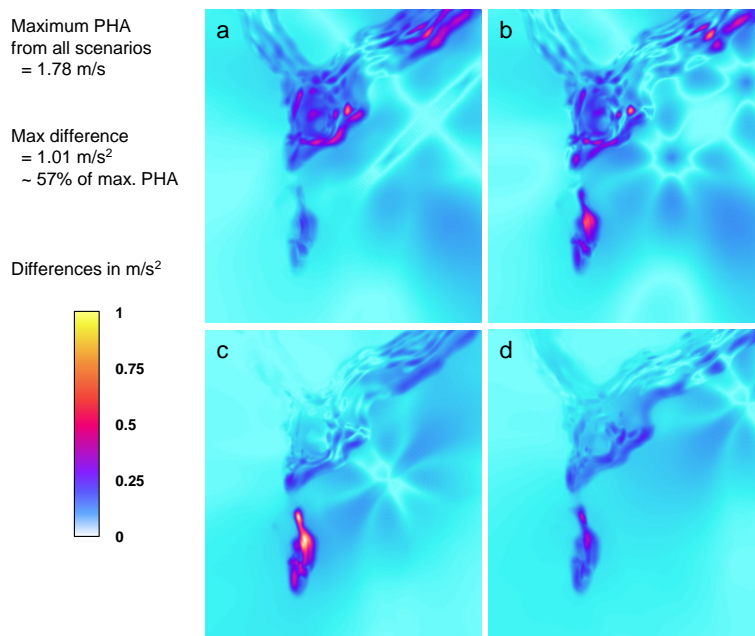
Obr. 3.4.31: Dve uvažované polohy hypocentra v pohorí Belledonne pri meste Grenoble - 'ľavá' a 'pravá' poloha. Modré čiary označujú priemet zlomovej plochy dynamických modelov na voľný povrch, hviezdičky označujú polohu epicentier ekvivalentných bodových zdrojov.

lentný bodový zdroj sú o 20 % vyššie než hodnoty vypočítané pre dynamický model. Podobný je rozdiel v hodnotách špičkového horizontálneho zrýchlenia. Najväčšie rozdiely, až 40 %, sú v hodnotách kumulatívnej absolútnej rýchlosti.

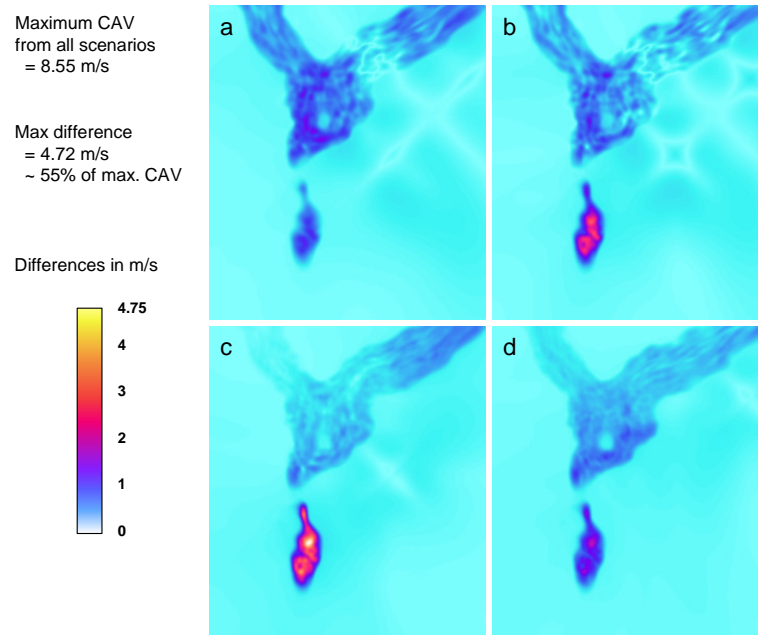
Vykonané testy a porovnania indikujú, že už aj v prípade relatívne slabého zemetrasenia s momentovým magnitúdom $M_W = 5.3$ môžeme pozorovať významné rozdiely medzi riešeniami získanými s ekvivalentným bodovým kinematickým a s dynamickým modelom seizmického zdroja. Inými slovami, výsledky našich testov sú indikáciou, že dynamický (t.j., najrealistickejší) model seizmického zdroja by mal byť použitý v numerických simuláciách, ktoré sú zamerané na predpoveď seizmického pohybu.



Obr. 3.4.32: Rozdiely v Ariasovej intenzite a) v dôsledku rôznej polohy dynamických zdrojov, b) v dôsledku rôznej polohy ekvivalentných bodových zdrojov, c) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'ľavej' polohe, d) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'pravej' polohe.



Obr. 3.4.33: Rozdiely v špičkovom horizontálnom zrýchlení a) v dôsledku rôznej polohy dynamických zdrojov, b) v dôsledku rôznej polohy ekvivalentných bodových zdrojov, c) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'ľavej' polohe, d) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'pravej' polohe.



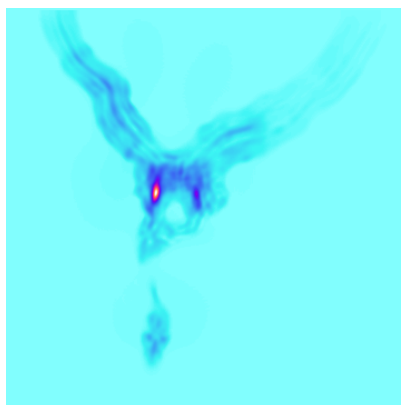
Obr. 3.4.34: Rozdiely v kumulatívnej absolútnej rýchlosti a) v dôsledku rôznej polohy dynamických zdrojov, b) v dôsledku rôznej polohy ekvivalentných bodových zdrojov, c) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'ľavej' polohe, d) v dôsledku použitia dynamického a ekvivalentného bodového zdroja v 'pravej' polohe.

Max AI
for DS = 0.53 m/s
for EPS = 0.85 m/s

Max difference
= 0.33 m/s
~ 40% of max. AI

Differences in m/s

0 0.11 0.22 0.33

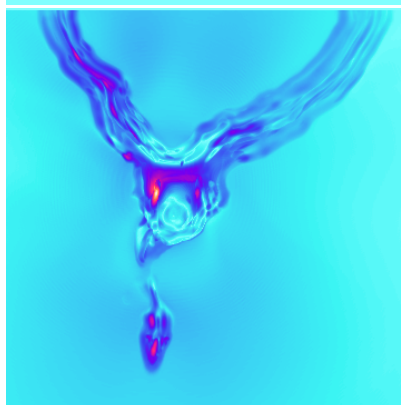


Max PHA
for DS = 1.58 m/s²
for EPS = 1.96 m/s²

Max difference
= 0.39 m/s²
~ 20% of max. PHA

Differences in m/s²

0 0.1 0.2 0.3 0.4

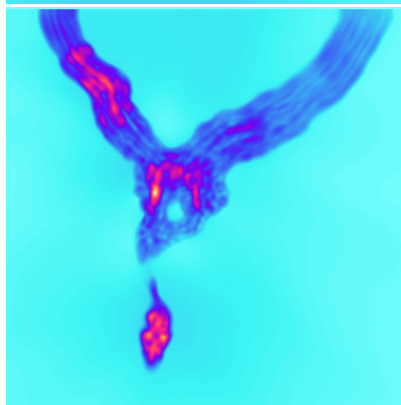


Max CAV
for DS = 5.75 m/s
for EPS = 7.19 m/s

Max difference
= 1.44 m/s
~ 20% of max. CAV

Differences in m/s

0 0.3 0.6 0.9 1.2 1.5



Obr. 3.4.35: Rozdiely v Ariasovej intenzite, špičkovom horizontálnom zrýchlení a kumulatívnej absolútnej rýchlosti medzi dynamickým a ekvivalentným bodovým zdrojom s hypocentrom na horizontálnom zlome pod mestom Grenoble.

4 Závery

Výsledky dizertačnej práce sú príspevkom k vývoju efektívnych numerických metód na simuláciu zemetrasení a seizmického pohybu. Možno ich zhrnúť nasledovne:

1. Na základe alternatívnej formulácie metódy konečných prvkov s vektorom vratnej sily bol vypracovaný výpočtový algoritmus a výpočtový program FESDv2 naprogramovaný v jazyku Fortran 90/95. Alternatívna formulácia MKP má v porovnaní so štandardnou formuláciou MKP podstatne menšie nároky na operačnú pamäť.
2. Do algoritmu MKP bol implementovaný realistický útlm založený na reológii generalizovaného Maxwellovho telesa GMB-EK v definícii Emmerich a Korn (1987). Boli vykonané numerické testy presnosti implementácie útlmu.
3. Do MKP algoritmu bola implementovaná metóda napätí v rozdelených uzloch (TSN) na simuláciu spontánneho šírenia trhliny na zlome. Boli vykonané numerické testy relatívnej konvergenzie MKP implementácie TSN.
4. Bola navrhnutá nová hybridná metóda založená na kombinácii konečno-diferenčnej schémy 4-tého rádu presnosti na striedavo usporiadanej sieti vo formulácii v rýchlosti a napätí a MKP algoritme s vratnou silou. Vykonané numerické testy správania algoritmickej minimálnej prechodovej zóny ukázali, že nie je vhodná pre praktické použitie. Preto bola navrhnutá hladká prechodová zóna. Podrobné numerické testy ukazujú, že riešenia získané s hladkou prechodovou zónou sú stabilné a bez numerického šumu a odrazov od prechodovej zóny. Hybridná metóda bola aplikovaná na výpočet seizmického pohybu v sedimentárnom bazéne Grenoble vo Francúzsku v dôsledku dvoch hypotetických zemetrasení v okolí mesta Grenoble. Pri výpočtoch seizmického pohybu boli použité dynamické modely seizmického zdroja.

Nová hybridná MKD-MKP metóda umožňuje využiť vlastnosti MKP v súvislosti so splnením okrajovej podmienky v blízkosti nerovinného voľného povrchu a zároveň využiť efektívnosť konečno-diferenčnej schémy 4. rádu presnosti v priestore. MKD-MKP hybridnú metódu je možné aplikovať na širokú triedu problémov simulácie seizmického pohybu a zemetrasení v 3D nehomogénnych štruktúrach

s nerovinným povrchom. V MKD-MKP hybridnej metóde je možné použiť dynamický model seizmického zdroja s nerovinnou zlomovou plochou alebo v prípadoch, keď zlomová plocha je sklonená pod ľubovoľným uhlom voči MKD sieťovým rovinám.

Formulácia MKP s vratnou silou znižuje pamäťové nároky, avšak vo všeobecnosti zvyšuje nároky na výpočtový čas. Preto je potrebné sústrediť sa v budúcnosti na optimalizáciu algoritmov výpočtu vratnej sily.

Za predpokladu, že sa podarí nájsť vhodný nástroj na generovanie siete prvkov (problém generovania siete prvkov je veľmi zložitý a v súčasnosti sa mu venujú viaceré špecializované výskumné tímy; v súčasnosti neuvažujeme o vytvorení vlastného generátora siete prvkov), je možné MKD-MKP hybridnú metódu použiť aj na riešenie problémov interakcie medzi kmitaním stavebných štruktúr a podložia.

Literatúra

- Aagaard, B. T., J. F. Hall a T. Heaton, 2001.** Characterization of nearsource ground motions with earthquake simulations. *Earthquake Spectra* 17, 177 - 207.
- Aki, K. a P. G. Richards, 1980.** Quantitative Seismology. Theory and Methods, Vol. I and II. *W. H. Freeman & Co.*, San Francisco.
- Aki, K. a P. G. Richards, 2002.** Quantitative Seismology. Second Edition. *University Science Books*.
- Alekseev, A. S. a B. G. Mikhailenko, 1980.** The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods. *J. Geophys.* 48, 161 - 172.
- Andrews, D. J., 1973.** A numerical study of tectonic stress release by underground explosions. *Bull. Seism. Soc. Am.* 63, 1375 - 1391.
- Andrews, D. J., 1976a.** Rupture propagation with finite stress in antiplane strain. *J. Geophys. Res.* 81, 3575 - 3582.
- Andrews, D. J., 1976b.** Rupture velocity of plane strain shear cracks. *J. Geophys. Res.* 81, 5679 - 5687.
- Andrews, D. J., 1999.** Test of two methods for faulting in finite-difference calculations. *Bull. Seism. Soc. Am.* 89, 931 - 937.
- Andrews, D. J., 2002.** A fault constitutive relation accounting for thermal pressurization of pore fluid. *J. Geophys. Res.* 107 (B12), 2363, doi: 10.1029/2002JB001942.
- Andrews, D. J., 2004.** Rupture models with dynamically determined breakdown displacement. *Bull. Seism. Soc. Am.* 94, 760 - 775.
- Archuleta, R. J., 1976.** Experimental and numerical three-dimensional simulations of strike-slip earthquakes. PhD. Thesis. *University of California*, San Diego.

- Archuleta, R. J. a G. A. Frazier, 1978.** Three-dimensional numerical simulation of dynamic faulting in a half-space. *Bull. Seism. Soc. Am.* 68, 541 - 572.
- Bao, H., 1998.** Finite element simulation of earthquake ground motion in realistic basins. PhD. Thesis. *Carnegie Mellon University*, Pittsburgh.
- Bao, H., J. Bielak, O. Ghattas, L. F. Kallivokas, D. R. O'Hallaron, J. R. Shewchuk a J. Xu, 1998.** Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 152, 85 - 102.
- Barenblatt, G. I., 1959.** Concerning equilibrium crack forming during brittle fracture. The stability of isolated cracks. Relationship with energetic theories. *Appl. Math. Mech.* 23, 1273 - 1282.
- Beeler, N. M., T. E. Tullis a J. D. Weeks, 1994.** The roles of time and displacement in the evolution effect in rock friction. *Geophys. Res. Lett.* 21, 1987 - 1990.
- Belytschko, T., W. K. Liu a B. Moran, 2000.** Nonlinear finite elements for continua and structures. *John Wiley & Sons*, New York.
- Belytschko, T. a R. Mullen, 1978.** On Dispersive Properties of Finite Element Solutions, In *Modern problems in elastic wave propagation*, Eds. J. Achenbach a J. Miklowitz, 67 - 82. *Springer-Verlag*.
- Bielak J., K. Loukakis, Y. Hisada a Ch. Yoshimura, 2003.** Domain Reduction Method for Three-Dimensional Earthquake Modeling in Localized Regions, Part I: Theory *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 817 - 824.
- Bizzarri, A., 2004.** Osobná komunikácia.
- Bizzarri, A., M. Cocco, D. J. Andrews a E. Boschi, 2001.** Solving the dynamic rupture problem with different numerical approaches and constitutive laws. *Geophys. J. Int.* 144, 656 - 678.
- Bizzarri, A. a M. Cocco, 2004.** Thermal pressurization in 3D dynamic spontaneous models with cohesive zone. *Eos, Trans. Am. Geophys. Un.* 85 (47), abstr. T23A-0572.

- Bizzarri, A. a M. Cocco, 2005.** 3D dynamic simulations of spontaneous rupture propagation governed by different constitutive laws with rake rotation allowed. *Annals of Geophysics* 48, 279 - 299.
- Bizzarri, A. a M. Cocco, 2006a.** A thermal pressurization model for the spontaneous dynamic rupture propagation on a three-dimensional fault: 1. Methodological approach. *J. Geophys. Res.* 111, B05303, doi:10.1029/2005JB003862.
- Bizzarri, A. a M. Cocco, 2006b.** A thermal pressurization model for the spontaneous dynamic rupture propagation on a three-dimensional fault: 2. Traction evolution and dynamic parameters. *J. Geophys. Res.* 111, B05304, doi:10.1029/2005JB003864.
- Bouchon, M., 1981.** A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. *Bull. Seism. Soc. Am.* 71, 959 - 971.
- Bouchon, M. and O. Coutant, 1994.** Calculation of synthetic seismograms in a laterally-varying medium by the boundary element - discrete wavenumber method. *Bull. Seism. Soc. Am.* 84, 1869 - 1881.
- Brodsky, E. E. a H. Kanamori, 2001.** Elastohydrodynamic lubrication of faults. *J. Geophys. Res.* 106 (B8), 16357 - 16374.
- Bystrický, E., 1995.** Výpočet seizmickej odozvy metódou konečných prvkov, Diplomová práca. *Univerzita Komenského, Bratislava.*
- Bystrický, E., P. Moczo a J. Kristek, 1999.** 3D finite-element modeling of seismic wave propagation. *Bollettino di Geofisica*, 40, p. 66, (abstract).
- Carcione, J. M., D. Kosloff a R. Kosloff, 1988a.** Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium. *Geophys. J.* 93, 393 - 407.
- Carcione, J. M., D. Kosloff a R. Kosloff, 1988b.** Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophys. J.* 95, 597 - 611.
- Clayton, R. a B. Enquist, 1977.** Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bull. Seism. Soc. Am.* 67, 1529 - 1540.

- Clough, R. W., 1960.** The finite element in plane stress analysis. *Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh.
- Cotton, F., C. Berge, F. Lemeille, A. Pitarka, B. Lebrun a M. Vallon, 1998.** Three-dimensional simulation of earthquakes in the Grenoble's basin. In *The Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, Vol. 2, 873 - 878, Eds. K. Irikura, K. Kudo, H. Okada a T. Sasatani, *Balkema*, Rotterdam.
- Coutant, O., 1989.** Program of numerical simulation AXITRA. Res. Rep. LGIT (in French), *Université Joseph Fourier*, Grenoble.
- Cruz-Atienza, V. M. a J. Virieux, 2004.** Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach. *Geophys. J. Int.* 158, 939 - 954.
- Day, S. M., 1977.** Finite element analysis of seismic scattering problems. PhD. Thesis. *University of California*, San Diego.
- Day, S. M., 1982.** Three-dimensional simulation of spontaneous rupture: the effect of nonuniform prestress. *Bull. Seism. Soc. Am.* 72, 1881 - 1902.
- Day, S. M., 1998.** Efficient simulation of constant Q using coarse-grained memory variables. *Bull. Seism. Soc. Am.* 88, 1051 - 1062.
- Day, S. M., 2005.** Osobná komunikácia.
- Day, S. M., L. A. Dalguer, N. Lapusta a Y. Liu, 2005.** Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture. *J. Geophys. Res.* 110, B12307.
- Day, S. M. a J. B. Minster, 1984.** Numerical simulation of wavefields using a Padé approximant method. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.* 78, 105 - 118.
- Dalguer, L. A. a S. M. Day, 2006.** Comparison of fault representation methods in finite difference simulations of dynamic rupture. *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, 1764 - 1778.
- Dalguer, L. A. a S. M. Day, 2007.** Staggered-grid split-node method for spontaneous rupture simulation. *J. Geophys. Res.*, 112, B02302, doi:10.1029/2006JB004467.

- Dieterich, J. H., 1979.** Modeling of rock friction – 1. Experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.* 84, 2161 - 2168.
- Dieterich, J. H., 1986.** A model for the nucleation of earthquake slip. In *Earthquake Source Mechanics, Geophysical Monograph 37, Maurice Ewing Series 6*, S. Das, J. Boatwright and C. H. Scholz, eds., *Am. Geophys. Union*, Washington D. C., 37 - 47.
- Dieterich, J. H. a G. Conrad, 1984.** Effect of humidity on time- and velocity-dependent friction in rocks *J. Geophys. Res.* 89 (B6), 4196 - 4202.
- Dumbser, M. a M. Käser, 2006.** An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case. *Geophys. J. Int.* 167, 319 - 336
- Dumbser, M., M. Käser a E. Toro, 2007.** An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes , V. Local time stepping and p-adaptivity. *Geophys. J. Int.* , in press.
- Emmerman, S. H. a R. A. Stephen, 1983.** Comment on "Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations," by R. Clayton and B. Engquist. *Bull. Seism. Soc. Am.* 73, 661 - 665.
- Emmerich, H., 1989.** 2-D wave propagation by a hybrid method. *Geophys. J. Int.* 99, 307 - 319.
- Emmerich, H., 1992.** PSV-wave propagation in a medium with local heterogeneities: a hybrid formulation and its application. *Geophys. J. Int.* 109, 54 - 64.
- Emmerich, H. a M. Korn, 1987.** Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields. *Geophysics* 52, 1252 - 1264.
- Fäh, D., 1992.** A hybrid technique for the estimation of strong ground motion in sedimentary basins. Diss. ETH Nr. 9767, *Swiss Federal Institute of Technology*, Zurich.

- Fäh, D., P. Suhadolc a G. F. Panza, 1993.** Variability of seismic ground motion in complex media: the case of a sedimentary basin in the Friuli (Italy) area. *J. Applied Geophysics* 30, 131 - 148.
- Festa, G., 2004.** Fault dynamics with Spectral elements and slip imaging by isochone back-projection. PhD. Thesis. *University of Bologna*, Bologna.
- Flanagan D.P. a T. Belytschko, 1981.** A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, 679 - 706.
- Frankel, A., 1993.** Three-dimensional simulations of ground motions in the San Bernardino Valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault. *Bull. Seism. Soc. Am.* 83, 1020 - 1041.
- Frazier, G. A. a C. M. Petersen, 1974.** 3-D stress wave code for the Illiac IV. *Systems, Science and Software Report SSS-R-74-2103*.
- Gaffet, S. a M. Bouchon, 1989.** Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases. *J. Acoust. Soc. Am.* 85, 2277 - 2283.
- Gális, M., 2002.** 3D výpočet šírenia seizmických vln a seizmického pohybu v dokonale elastickom prostredí metódou konečných prvkov. Diplomová práca. *Univerzita Komenského*, Bratislava.
- Gamond, J. F., 1994.** Normal faulting and tectonic inversion driven by gravity in a thrusting regime. *J. Struct. Geol.* 16, 1 - 9.
- Graves, R. W. a S. M. Day, 2003.** Stability and accuracy analysis of coarse-grain viscoelastic simulations. *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 283 - 300.
- Gubbins, D., 1990.** Seismology and plate tectonics. *Cambridge University Press*.

- Harris, R.A., R. Archuleta, B. Aagaard, J. P. Ampuero, D.J. Andrews, L. Dalguer, S. Day, E. Dunham, G. Ely, Y. Kase, N. Lapusta, Y. Liu, S. Ma, D. Oglesby, K. Olsen a A. Pitarka, 2004.** The Source Physics of Large Earthquakes – Validating Spontaneous Rupture Methods. *Eos Trans. AGU*, 85(47), Fall Meet. Suppl., Abstract S12A-05.
- Higdon, R. L., 1991.** Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics* 56, 231 - 241.
- Hughes, T. J. R., 2000.** The finite element method. Linear static and dynamic finite element method analysis. *Prentice Hall*.
- Chaljub, E., D. Komatitsch, J. P. Vilotte, Y. Capdeville, B. Valette a G. Festa, 2007.** Spectral-element analysis in seismology. In *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Earth*, 365 - 419, R.-S. Wu and V. Maupin, eds., *Advances in Geophysics* Vol. 48, R. Dmowska, ed. *Elsevier - Academic Press*.
- Ida, Y., 1972.** Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and Griffith's specific surface energy. *J. Geophys. Res.* 77, 3796 - 3805.
- Ida, Y., 1973.** The maximum acceleration of seismic ground motion. *Bull. Seism. Soc. Am.* 63, 959 - 968.
- Ionescu, I. R. a M. Campillo, 1999.** Influence of the shape of the friction law and fault finiteness on the duration of initiation. *J. Geophys. Res.* 104, 3013 - 3024.
- Kawase, H., 1988.** Time-domain response of a semi-circular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bull. Seism. Soc. Am.* 78, 1415 - 1437.
- Käser, M. a M. Dumbser, 2006.** An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. *Geophys. J. Int.* 166, 855 - 877.
- Käser, M., M. Dumbser, J. de la Puente a H. Igel, 2007.** An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - III. Viscoelastic attenuation. *Geophys. J. Int.* 168, 224 - 242.

- Kennett, B. L. N., 2001.** The seismic wavefield. Vol. I: Introduction and theoretical development. *Cambridge University Press*.
- Komatitsch, D. a J. Tromp, 1999.** Introduction to the spectral-element method for 3D seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.* 139, 806 - 822.
- Kostrov, B. V. a S. Das, 1988.** Principles of earthquake source mechanics. *Cambridge University Press*.
- Kristek, J., 2001.** Výpočet seizmického pohybu v trojrozmerné nehomogénnych prostrediach metódou konečných diferencií, Dizertačná práca. *Univerzita Komenského, Bratislava*.
- Kristek, J. a P. Moczo, 2003.** Seismic wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities – a 3D 4th-order staggered-grid finite-difference modeling. *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 2273 - 2280.
- Kristek, J. a P. Moczo, 2006.** On the accuracy of the finite-difference schemes: the 1D elastic problem. *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, 2398 - 2414.
- Kristeková, M., J. Kristek, P. Moczo a S. M. Day, 2006.** Misfit criteria for quantitative comparison of seismograms. *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, 1836 - 1850.
- Kummer, B., A. Behle, a F. Dorau, 1987.** Hybrid modelling of elastic-wave propagation in two-dimensional laterally inhomogeneous media. *Geophysics* 52, 765 - 771.
- Lecomte, I., H. Gjøystdal, F. Maaø, R. Bakke, Å. Drottning a T.-A. Johansen, 2004.** Efficient and flexible seismic modelling of reservoirs: the HybriSeis concept. *The Leading Edge* 23, 432 - 437.
- Liu, P.-C. a R. J. Archuleta, 2000.** Osobná komunikácia.
- Liu, H.-P., D. L. Anderson a H. Kanamori, 1976.** Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 47, 41 - 58.

- Lysmer, J. a L. A. Drake, 1971.** The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 61, 1233 - 1252.
- Lysmer, J. a L. A. Drake, 1972.** A finite element method for seismology. In *Methods in Computational Physics*, Vol. 11, B. Alder, S. Fernbach, and B. A. Bolt, eds., Academic Press, New York.
- Ma, S., R. J. Archuleta a P. Liu, 2004.** Hybrid Modeling of Elastic P-SV Wave Motion: A Combined Finite-Element and Staggered-Grid Finite-Difference Approach. *Bull. Seism. Soc. Am.* 94, 1557 - 1563.
- Ma, S. a P. Liu, 2006.** Modeling of the Perfectly Matched Layer Absorbing Boundaries and Intrinsic Attenuation in Explicit Finite-Element Methods *Bull. Seism. Soc. Am.* 96, 1779 - 1794.
- Madariaga, R., K. Olsen a R. Archuleta, 1998.** Modeling dynamics rupture in a 3D earthquake fault model. *Bull. Seism. Soc. Am.* 88, 1182 - 1197.
- Mair, K. a C. Marone, 1999.** Friction of simulated fault gouge for a wide range of slip velocities and normal stresses. *J. Geophys. Res.* 104 (B12), 28899 - 28914.
- Mair, K., K. M. Frye a C. Marone, 2002.** Influence of grain characteristic on the friction of granular shear zones. *J. Geophys. Res.* 107 (B10), 2219, doi: 10.1029/2001JB000516.
- Marone, C. a B. Kilgore, 1993.** Scaling of the critical slip distance for seismic faulting with shear strain in fault zones. *Nature* 362, 618 - 621.
- Marone, C., C. B. Raleigh a C. H. Scholtz, 1990.** Frictional behavior and constitutive modeling of simulated fault gouge. *J. Geophys. Res.* 95 (B5), 7007 - 7025.
- Marfurt, K. J., 1984.** Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics* 49, 533-549.
- McDonal, F. J., F. A. Angona, L. R. Mills, R. L. Sengbush, R. G. van Nostrand a J. E. White, 1958.** Attenuation of shear and compressional waves in Pierre shale. *Geophysics* 23, 421 - 439.

- Moczo, P., 1998.** Introduction to Modeling Seismic Wave Propagation by the Finite-Difference Method. Lecture Notes. *Kyoto University*.
- Moczo, P. and P.-Y. Bard, 1993.** Wave diffraction, amplification and differential motion near strong lateral discontinuities. *Bull. Seism. Soc. Am.* 83, 85 - 106.
- Moczo, P., E. Bystrický, J. Kristek, J. M. Carcione a M. Bouchon, 1997.** Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 87, 1305 - 1323.
- Moczo, P., J. Kristek a L. Halada, 2004b.** The Finite-Difference Method for Seismologists. An Introduction. *Comenius University, Bratislava*.
- Moczo, P. a J. Kristek, 2005.** On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation. *Geophys. Res. Lett.* 32, L01306, doi: 10.1029/2004GL021598.
- Moczo, P., J. O. A. Robertsson a L. Eisner, 2007.** The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation. In *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Earth*, 421 - 516, R.-S. Wu and V. Maupin, eds., *Advances in Geophysics* Vol. 48, R. Dmowska, ed. *Elsevier - Academic Press*.
- Moczo, P., J. Kristek, M. Galis, P. Pazak, a M. Balazovjeh, 2007.** The Finite-Difference and Finite-Element Modeling of Seismic Wave Propagation and Earthquake Motion. *Acta Physica Slovaca*, 57(2), 177 - 406.
- Murphy, W. F. III, 1982.** Effects of partial saturation on attenuation in Massillon sandstone and Vycor porous glass. *J. Acoust. Soc. Am.* 71, 1458 - 1468.
- Nielsen S. a J. M. Carlson, 2000.** Rupture Pulse Characterization: Self-Healing, Self-Similar, Expanding Solutions in a Continuum Model of Fault Dynamics. *Bull. Seism. Soc. Am.* 90, 1480 - 1497.
- Nielsen S., J. M. Carlson a K. Olsen, 2000.** Influence of friction and fault geometry on earthquake rupture. *J. Geophys. Res.* 105B, 6069 - 6088.
- Oglesby, D. D., 19799.** Earthquake dynamics on dip-slip faults. PhD. Thesis. *University of California, Santa Barbara*.

- Oglesby, D. D., R. J. Archuleta a S. B. Nielsen, 1998.** Earthquakes on dipping faults: the effects of broken symmetry. *Science* 280, 1055 - 1059.
- Oglesby, D. D., R. J. Archuleta a S. B. Nielsen, 2000.** The three-dimensional dynamics of dipping faults. *Bull. Seism. Soc. Am.* 90, 616 - 628.
- Ohnaka, M., 2003.** A constitutive scaling law and a unified comprehension for frictional slip failure, shear fracture of intact rocks, and earthquake rupture. *J. Geophys. Res.* 108 (B2), 2080, doi: 10.1029/2000JB000123.
- Ohnaka, M., Y. Kuwahara, K. Yamamoto a T. Hirasawa, 1986.** Dynamic breakdown processes and the generating mechanism for high-frequency elastic radiation during stick-slip instabilities. In *Earthquake Source Mechanics, Geophys. Monogr. Ser.*, eds. S. Das, J. Boatwright a C. H. Scholz, vol. 37, 13 - 24, AGU, Washington, D. C..
- Ohnaka, M., Y. Kuwahara a K. Yamamoto, 1987.** Constitutive relations between dynamic physical parameters near a tip of the propagating slip zone during stick-slip shear failure. *Tectonophysics* 144, 109 - 125.
- Ohnaka, M., Y. Kuwahara a K. Yamamoto, 1987.** Nucleation and propagation processes of stick-slip failure and normal stress dependence of the physical parameters of dynamic slip failure. *J. Nat. Disaster Sci.* 9, 1 - 21.
- Ohnaka, M. a L. Shen, 1999.** Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation: implications of geometric irregularity of the rupturing surfaces. *J. Geophys. Res.* 104 (B1), 817 - 844.
- Ohnaka, M. a K. Yamamoto, 1984.** Experimental studies of failure nucleation and propagation along simulated faults in rock. In *Study in short-period behaviour in fault motion and estimation of input seismic motion*, ed. R. Sato *Final Tech. Rep.*, A-59-3, 11 - 46, Earthquake Res. Inst., Tokyo.
- Ohnaka, M. a T. Yamashita, 1989.** A cohesive zone model for dynamic shear faulting based on experimentally inferred constitutive relation and strong motion source parameters. *J. Geophys. Res.* 94, 4089 - 4104.

- Ohtsuki, A. a K. Harumi, 1983.** Effects of topography and subsurface inhomogeneities on seismic SV waves. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 11, 441 - 462.
- Okubo, P. G., 1989.** Dynamic rupture modeling with laboratory-derived constitutive relations. *J. Geophys. Res.* 94, 12321 - 12335.
- Okubo, P. G. a J. H. Dieterich, 1981.** Fracture energy of stick-slip events in a large scale biaxial experiment. *Geophys. Res. Lett.* 8, 887 - 890.
- Okubo, P. G. a J. H. Dieterich, 1984.** Effects of physical fault properties on frictional instabilities produced on simulated faults. *J. Geophys. Res.* 89, 5817 - 5827.
- Ottosen, N. S. a H. Petersson, 1992.** Introduction to the finite element method. *Prentice Hall*.
- Palmer, A. C. a J. R. Rice, 1973.** The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay. *Proc. Royal Soc. London A332*, 527 - 548.
- Peng, C. a M. N. Toksöz, 1994.** An optimal absorbing boundary condition for finite difference modeling of acoustic and elastic wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am.* 95, 733 - 745.
- Peng, C. a M. N. Toksöz, 1995.** An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling. *Geophysics* 60, 296 - 301.
- De la Puente, J., M. Käser, M. Dumbser a H. Igel, 2007.** An arbitrary high order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes IV: Anisotropy. *Geophys. J. Int.* 169, 1210 - 1228, doi:10.1111/j.1365-246X.2007.03381.x.
- Pujol, J., 2003.** Elastic wave propagation and generation in seismology. *Cambridge University Press*.
- Ranalli, G., 1995.** Rheology of the Earth. *Chapman & Hall*.
- Reddy, J. N., 2006.** An introduction to the finite element method. *McGraw-Hill*, New York.

- Reiter, L., 1990.** Earthquake Hazard Analysis. Issues and Insights. *Columbia University Press*, New York.
- Reynolds, A. C., 1978.** Boundary conditions for numerical solution of wave propagation problems. *Geophysics* 43, 1099 - 1110.
- Rice, J. R., 1980.** The mechanics of earthquake rupture. In *Physics of the Earth's interior*, 555-649, *North-Holland*, Amsterdam.
- Rice, J. R., 1983.** Constitutive relations for fault slip and earthquake instabilities. *Pure Appl. Geophys.* 121, 443 - 475.
- Robertsson, J. O. A., 1996.** A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics* 61, 1921 - 1934.
- Rovelli, A., A. Caserta, L. Malagnini a F. Marra, 1994.** Assessment of potential strong ground motions in the city of Rome. *Annali di Geofisica* 37, 1745-1769.
- Rudnicki, J. W., 1980.** Fracture mechanics applied to Earth's crust. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 8, 489 - 525.
- Ruina, A. L., 1980.** Friction laws and instabilities: a quasistatic analysis of some dry frictional behavior. PhD. Thesis. *Brown University*, Providence, RI.
- Ruina, A. L., 1983.** Slip instability and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.* 88 (B12), 10359 - 10370.
- Serón, F. J., F. J. Sanz a M. Kindelán, 1989.** Elastic wave propagation with the finite element method. *IBM, European center for science and engineering computing*, ICE-0028.
- Shtivelman, V., 1984.** A hybrid method for wave field computation. *Geophys. Prospect.* 32, 236 - 257.
- Shtivelman, V., 1985.** Two-dimensional acoustic modelling by a hybrid method. *Geophysics* 50, 1273 - 1284.

- Smith, W. D., 1974.** A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems. *J. Comp. Phys.* 15, 492 - 503.
- Smith, W. D., 1975.** The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophys. J.* 42, 747 - 768.
- Spencer, J. W. Jr., 1981.** Stress relaxation at low frequencies in fluid-saturated rocks. *J. Geophys. Res.* 86, 1803 - 1812.
- Stead, R.J. a D. V. Helmberger, 1988.** Numerical-analytical interfacing in two dimensions with applications to modeling NTS seismograms. In *Scattering and Attenuation of Seismic Waves*, 157-193, Eds. A. Aki and R.-S. Wu. *Birkhauser*, Basel.
- Thouvenout, F., 1996.** Aspects géophysiques et structuraux des Alpes occidentales et de trois autres orogenes (Atlas, Pyrénées, Oural). *Université Joseph Fourier*, Grenoble, pp. 378.
- Toshinawa, T. a T. Ohmachi, 1992.** Love wave propagation in a three-dimensional sedimentary basin. *Bull. Seism. Soc. Am.* 82, 1661 - 1667.
- Tu, T., H. Yu, L. Ramirez-Guzman, J. Bielak, O. Ghattas, K.-L. Ma a D. R. O'Hallaron, 2006.** From mesh generation to scientific visualization – an end-to-end approach to parallel supercomputing. In *SC2006*, Tampa, FL, November 2006. (URL: http://sc06.supercomputing.org/schedule/event_detail.php?evid=9160.)
- Van den Berg, A., 1984.** A hybrid solution for wave propagation problems in regular media with bounded irregular inclusions. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 79, 3 - 10.
- Varga, R. S., 1962.** Matrix iterative analysis. *Prentice Hall*.
- Whirley, R. G., B. E. Engelmann a J. O. Hallquist, 1992.** DYNA2D: A nonlinear, explicit, two-dimensional finite element code for solid and structural mechanics - User manual. *University of California, Lawrence Livermore National Laboratory*, UCRL-MA-110630.

Whirley, R. G. a B. E. Engelmann, 1993. DYNA3D: A nonlinear, explicit, three-dimensional finite element code for solid and structural mechanics - User manual. *University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-MA-1107254, Rev. 1.*

www.top500.org. URL: <http://www.top500.org/list/2006/11/100>
a URL: <http://www.top500.org/system/7747>.

Yoshimura Ch., J. Bielak, Y. Hisada a A. Fernández, 2003. Domain Reduction Method for Three-Dimensional Earthquake Modeling in Localized Regions, Part II: Verification and Applications *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 825 , 840.

Zahradník, J. a P. Moczo, 1996. Hybrid seismic modeling based on discrete-wavenumber and finite-difference methods. *PAGEOPH* 148, 21 - 38.

Zienkiewicz, O. C. a R. L. Taylor, 1989. The finite element method. 4th edition, vol. 1. *McGraw-Hill*, New York.