

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
v Bratislave



RIGORÓZNA PRÁCA

2008

Mgr. Tomáš Šoltis

**Rotujúca magnetokonvekcia
pri rôznych typoch anizotropie difúzných koeficientov**

RIGORÓZNA PRÁCA

Tomáš Šoltis

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

4.1.9 GEOFYZIKA

Bratislava 2008

Abstrakt

Autor: Tomáš Šoltis

Názov práce: Rotujúca magnetokonvekcia pri rôznych typoch anizotropie difúzných koeficientov

Pracovisko: Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Komisia pre obhajoby: komisia pre rigorózne konanie z odboru geofyzika

Predseda komisie: doc. RNDr. Sebastián Ševčík, CSc.

Miesto a rok: Bratislava 2008

Rozsah práce: 39 strán

Stupeň odbornej kvalifikácie: Mgr.

Podľa súčasných predstáv je v zemskom kvapalnom jadre vysoko rozvinutá turbulencia, pri ktorej sú turbulentné difúzne procesy výrazne efektívnejšie ako difúzne procesy na molekulárnej úrovni. Okrem toho sú už difúzne procesy anizotropné, lebo existujú určité smery, v ktorých je difúzia zosilnená (napr. smer magnetického poľa, smer rotačnej osi), resp. v smere gravitácie môže byť zosilnená alebo zoslabená. Vyšetrený bol vplyv anizotropie difúzných koeficientov na stabilitu hydromagnetických systémov v rovinnej horizontálnej vrstve v rámci možných súvislostí sekulárnych variácií geomagnetického poľa so vznikajúcimi nestabilitami. Využila sa lineárna stabilitná analýza, pričom riešenie sa hľadalo v separovanom tvare, a to v tvare horizontálnych roliek v kartézskej geometrii.

Uvažujeme dva základné typy anizotropií difúzných procesov. V prípade SA anizotropie (stratifikačná anizotropia) má na dynamiku dominantný vplyv hustotná stratifikácia, určená vertikálnym smerom gravitácie, resp. Archimedovej vztlačkovej sily. Difúzne koeficienty majú hodnoty rôzne vo vertikálnom smere z a v horizontálnych smeroch x a y . Ak má na dynamiku dominantný vplyv rotácia a magnetické pole, potom môžeme uvažovať o anizotropii typu BM (podľa Braginského a Meytlisa 1990), pri ktorej sú koeficienty difúzií v smere osi rotácie z a v smere magnetického poľa y väčšie ako v poslednom treťom smere x .

Vyšetrovaná bola stacionárna a nestacionárna konvekcia. V prípade stacionárnej konvekcie obidva typy anizotropie uľahčujú nástup konvekcie, pričom najväčší vplyv anizotropie je pre hodnoty Elsasserovho čísla (miera magnetického poľa) typické pre podmienky jadra Zeme. V prípade nestacionárnej konvekcie (v ktorej bola študovaná len anizotropia typu BM) anizotropia nástup konvekcie ani neuľahčuje ani nesťažuje, ale výrazne obmedzuje rozsah parametrov, pri ktorých môže nestacionárna konvekcia existovať. Z druhej strany pri malých kvantitatívnych zmenách anizotropie možno sledovať bohatý rozsah frekvencií vznikajúcich nestabilit.

klúčové slová: anizotropné difúzne koeficienty, rotujúca magnetokonvekcia, turbulencia, zemské jadro, geomagnetické pole

Predhovor

Téma predkladanej práce úzko súvisí s dvoma zaujímavými a otvorenými problémami – problematikou turbulencie a paradoxom geodynamika. Turbulencia je ešte stále považovaná za jeden z najnáročnejších doteraz nevyriešených problémov. Pritom však koncom 19. a začiatkom 20. storočia sa Reynoldsovi a Prandtlovi podarilo pristúpiť k problému tak, že obrovské množstvo závažných technických problémov tej doby a takisto v súčasnosti sa úspešne riešilo a rieši, a to s dopadmi na každodenný život. Pritom Reynolds len aplikoval základný prístup vtedy úspešnej kinetickej teórie plynov - a to rozdelenie základných fyzikálnych veličín problému na strednú časť a fluktuáciu. Zavedením (Reynoldsových) pravidiel ustredňovania sa mu podarilo dokázať, že stredné polia sú riadené takmer takými istými rovnicami ako východiskové polia. V takýchto rovnicach však boli nové členy vzniknuté nenulovými ustredneniami súčinov fluktuácií. Do hry vstúpila tzv. turbulentná viskozita, ktorá bola výsledkom úspešnej parametrizácie zložitých fluktuácií v systéme, ktoré boli jeho prirodzenou súčasťou. Vďaka turbulentnej viskozite Navier-Stokesova rovnica bola pre stredné polia taká istá ako pre východiskové polia, obsahujúce aj fluktuácie. Parametrizácia všeobecne nebola jednoduchou záležitosťou, lebo úzko súvisela s charakterom študovaných tečení, avšak aj vďaka súladu s experimentami a technickými aplikáciami sa v mnohých prípadoch stala rutinným a úspešným nástrojom. Napr. v meteorológii stačilo v predpovedných modeloch počasia zväčšiť molekulárnu viskozitu 100 až 1000 násobne a modely začali byť použiteľné.

Paradox geodynamika je iný zaujímavý problém. Týka sa zemského jadra, v ktorom tečenia, ktoré sú zaiste turbulentné, elektromagnetickou indukciou generujú a udržiavajú zemské magnetické pole. Počítačové simulácie geodynamika len nedávno, teda v roku 1995, poskytli taký model geomagnetického poľa, že vo všetkých významných ukazovateľoch pozorované magnetické pole s jeho sekulárnymi variáciami (teda pole v časových škálach 10-ok, 100-vák, 1000-ok, ... a stá miliónov rokov) vystihoval veľmi dobre. Paradox je v tom, že kvôli výpočtovým obmedzeniam mnohé difúzne koeficienty (napr. viskozita) boli nerealisticky vysoké. Dokonca aj s uvážením turbulentných difúzií zemského jadra modelovo simulačné hodnoty boli výrazne väčšie. K dosiahnutiu súladu modelových a skutočných polí bolo potrebné zaviesť tzv. hyperviskozitu, teda isté zohľadnenie anizotropie difúzných koeficientov.

K vysvetleniu paradoxu geodynamika treba určite rozumieť aj fyzike procesov v rámci priestorových (a časových) škál, ktoré simulácie zatiaľ nemajú šancu zvládnuť, teda škály pod 10 km, a teda ktoré úzko súvisia s turbulentnými procesmi v jadre. Sú viaceré cesty, súvisiace hlavne s numerikou [DNS, LES – direct numerical simulations, large eddy simulations a triky, ako poznatky z GS (gridscales) prenášať do SGS (subgridscales)]. Dôležité však je upriamiť pozornosť na úspešnú parametrizáciu, napr. zavedením (apriorným) turbulentných difúzií, ktoré majú tenzorový charakter. Treba nájsť cesty (s fyzikálnym chápaním), ako magnetické pole, rotácia a smer gravitácie určujú anizotropné vlastnosti difúzných koeficientov. Náš prístup je relatívne jednoduchý, ale nezastúpiteľný. Apriórne volíme rôzne modely anizotropie difúzných koeficientov a študujeme, ako sa tým ovplyvnia podmienky pre vznik rôznych typov konvekcie (zatiaľ v rovinnej vrstve) – od základnej Bénardovej konvekcie, cez konvekciu s rotáciou, resp. s magnetickým poľom až po rotujúcu magnetokonvekciu. Potrebné je skúmať viaceré typy magnetických polí, napr. homogénne vertikálne pole, resp. horizontálne pole, ale i rôzne polohy rotačnej osi – kolmo na vrstvu alebo v ležatej polohe. Gravitáciu, resp. vztlačovú silu vždy uvažujeme kolmo na vrstvu.

V predkladanej práci študujeme podmienky vzniku konvekcie v rovinnej vrstve, rotujú-

cej okolo vertikálnej osi a s homogénnym horizontálnym magnetickým poľom. Ide o model I. Eltayeba (1972, 1975), ktorý študoval podmienky vzniku stacionárnej konvekcie, resp. periodickej nestability pre módy v tvare roliek vhodným spôsobom naklonených ku magnetickému poľu. Toto štúdium s izotropnými difúznymi koeficientami rozširujeme analýzou pre dva základné typy anizotropných difúzných koeficientov. Prvý typ nazývame stratifikačná anizotropia a je istou hrubou analógiou v počítačových simuláciach zavedenej hyperviskozity. Rozlišujeme difuzivity vo vertikálnom smere od horizontálne izotropných difuzív, a to v rámci dvoch podprípádov anizotropie oceánskeho a atmosférického typu. V prvom (oceánskom) prípade sú difuzivity v horizontálnych smeroch väčšie ako vo vertikálnom smere. V druhom atmosférickom opačne. Druhý typ je anizotropia podľa Braginského a Meytliisa (1990) a je určovaná smermi magnetického poľa \mathbf{B} a rotácie $\mathbf{\Omega}$. V smere $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{B}$ sú difuzivity oveľa menšie ako v smeroch $\mathbf{\Omega}$ a \mathbf{B} .

Predpokladáme, že získané výsledky potvrdia niektoré naše skoršie či v jednoduchších alebo v analogických zložitých modeloch (pozri úvod). Hlavne však očakávame, že naznačia jednoduchšiu matematickú formuláciu zložitejších modelov s možnosťou zrozumiteľnej fyzikálnej interpretácie výsledkov.

Obsah

1	Úvod	1
2	Anizotropie difúzných koeficientov	3
2.1	Stratifikačná anizotropia	3
2.2	Anizotropia typu BM	3
3	Model	4
3.1	Základné rovnice	4
3.2	Metóda riešenia	6
4	Stacionárna konvekcia	9
4.1	Numerické výsledky	10
5	Nestacionárna konvekcia	15
5.1	Numerické výsledky	17
6	Závery	23
7	Podakovanie	24
8	Literatúra	25
9	Príspevky na domácich a zahraničných konferenciách	26
10	Príloha A	28
11	Príloha B	30

Zoznam obrázkov

- 1 Model rotujúcej magnetokonvekcie s homogénnym horizontálnym základným magnetickým poľom v nekonečnej horizontálnej nestabilne stratifikovanej vrstve s vertikálnym teplotným profilom $T_0(z)$ 4
- 2 Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a c) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade stratifikačnej SA anizotropie. Rolky kolmé na magnetické pole - prerušované krivky, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu - plné krivky. 11
- 3 Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a c) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade BM anizotropie. Rolky kolmé na magnetické pole - prerušovaná krivka, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu - plné krivky. 12
- 4 Porovnanie oboch typov anizotropií. Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a c) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade stratifikačnej SA anizotropie a anizotropie podľa Braginského a Metylisa. Rolky kolmé na magnetické pole - prerušované krivky, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu - plné krivky (SA), bodkované krivky (BM). 13
- 5 Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c a b) kritickéj frekvencie σ_c a na Elsasserovom čísle pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ 17
- 6 Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , c) kritickéj frekvencie σ_c a d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$ 18
- 7 Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , c) kritickéj frekvencie σ_c a d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Ekmanovom čísle pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 3$ 19

- 8 Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického Rayleighovho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , c) kritickej frekvencie σ_c a d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Ekmanovom čísle pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 10$ 20
- 9 Vplyv anizotropie typu BM na podmienky existencie nestacionárnej konvekcie. Závislosť maximálnej hodnoty $\zeta = q_z^{-1}$ na parametri anizotropie α , pri ktorej existuje nestacionárna konvekcia pre štyri rôzne hodnoty Elsasserovho čísla $\Lambda = 3, 5, 10$ a 50 . Nestacionárna konvekcia neexistuje pre parametre nad uvedenými úsečkami a môže existovať pre parametre pod týmito úsečkami. 21

1 Úvod

Podľa súčasných poznatkov modernej magnetohydrodynamiky a geofyziky, je magnetické pole Zeme generované hydromagnetickým dynamom, pracujúcim v tekutom vonkajšom jadre Zeme. Hlavným hnacím mechanizmom, ktorý dáva do pohybu obrovské množstvo vysoko elektricky vodivého materiálu (tento pohyb so správnou časovou a priestorovou štruktúrou môže vďaka Faradayovej elektromagnetickej indukcii generovať magnetické pole) je tepelne a kompozične hnaná konvekcia. Matematický opis konvekcie v zemskom jadre je veľmi komplikovaný proces, pretože na rozdiel od klasickej Rayleigh-Bénardovej konvekcie, tu okrem vztlakovej (Archimedovej sily) zohrávajú rovnako dôležitú úlohu aj ďalšie dve sily. Vďaka relatívne rýchlej rotácii Zeme je to Coriolisova sila, a keďže ide o pohyb elektricky vodivej zliatiny železa a ďalších ľahších prímiesi v prítomnosti magnetického poľa, Lorentzova sila hrá takisto dôležitú úlohu. Takto postavený fyzikálny problém sa nazýva problém rotujúcej magnetokonvekcie. Problém rotujúcej magnetokonvekcie bol riešený v rôznych súradnicových sústavách s rôznou konfiguráciou základného magnetického poľa a pri rôznych mechanických, tepelných a elektromagnetických hraničných podmienkach (Chandrasekhar 1961, Soward 1979, Eltayeb 1975). V súčasnosti sa už tento problém považuje za veľmi dobre rozpracovaný, pričom poznáme časovú závislosť a priestorovú štruktúru vznikajúcej konvekcie v rozsiahlom priestore vstupných parametrov (viskozita, magnetické pole, magnetická difuzivita, tepelná vodivosť, rotácia,...), a teda podmienky nástupu konvekcie (Jones a Roberts 2000, Roberts a Jones 2000). Nástup konvekcie je vyšetrovaný lineárnou stabilitnou analýzou, čo je matematický postup, pri ktorom sa navrhnu poruchy rýchlostného, magnetického a teplotného poľa s nekonečne malou amplitúdou a hľadajú sa podmienky, pri ktorých je základný stav nestabilný (poruchy už nie sú klesajúcou funkciou času).

Hlavným cieľom tejto práce je preskúmať, ako anizotropia difúzných koeficientov (viskozita a tepelná difuzivita) môže ovplyvniť jeden z viacerých možných modelov rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej kvapalnej vrstve. Vyberieme základný systém, ktorý vhodne reprezentuje podmienky zemského jadra a študujeme stabilitu systému a podmienky nástupu hydromagnetických nestabilit. Pozornosť upriamime na špeciálny typ nestabilit, ktoré sú ovplyvnené difúznymi procesmi. Chápanie úlohy difúzných procesov - len v slabom tlmení vznikajúcich nestabilit - nepostačuje. Dynamika zemského jadra je určovaná tromi základnými silami: Magnetickou, Archimedovou a Coriolisovou (\mathbf{M} , \mathbf{A} a \mathbf{C}) silou. Avšak difúzne procesy môžu tieto základne sily oslabiť v zmysle: viskozita oslabuje len Coriolisovu silu, magnetická difuzivita len magnetickú silu a tepelná difuzivita oslabuje len Archimedovu silu. Slabé difúzne procesy vedú potom k $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} - \delta\mathbf{M}$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \delta\mathbf{A}$ a $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} - \delta\mathbf{C}$. Ak predpokladáme turbulentný stav v zemskom jadre, potom prenosové javy súvisia s turbulentnými procesmi. Na rozdiel od molekulárnej difúzie (ktorá je vlastnosťou materiálu) je turbulentná difúzia veľmi závislá na charakteristických tokoch. Tieto toky sú ovplyvnené dominantnými silami \mathbf{M} , \mathbf{A} a \mathbf{C} a tvar turbulentných vírov je ovplyvnený týmito silami. Podľa Braginského a Meytlisa (1990) majú víry tvar palacínok predĺžených v smere magnetického poľa (azimutálnom smere) a v smere uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\Omega}$. V geofyzikálnych tokoch sú víry ovplyvnené tiež hustotnou stratifikáciou určenou smerom gravitácie \mathbf{g} .

Víry ovplyvnené Coriolisovou a magnetickou silou sú deformované do tvaru, ktorý pomáha minimalizovať vplyv týchto síl. To znamená, že Coriolisova sila \mathbf{C} ($\sim \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$) a magnetická sila \mathbf{M} ($M \sim |\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$) sú veľmi malé a môžu byť v tomto smere zanedbateľné. Od štúdia Braginského a Meytlisa (1990) boli použité viaceré prístupy na vyšetrovanie úlohy

a dôsledkov zavedenia anizotropných difúzných koeficientov do problémov dynama a magnetokonvekcie, napr. St. Pierre (1996), Matsushima et al (1999), Donald a Roberts (2004), Phillips a Ivers (2000, 2001), Siso-Nadal a Davidson (2004),... Naša stratégia je modifikovať staré, alebo postaviť nové modely rotujúcej magnetokonvekcie v zmysle zavedenia anizotropie difúzných koeficientov. Výsledkom sú podmienky nástupu nestabilit, ktoré sú ovplyvnené novým parametrom anizotropie difúzných koeficientov. V prípade turbulentných prenosových javov tvar prenášačov - vírov určuje efektivitu prenosu v rôznych smeroch. Z toho dôvodu je vhodné nahradiť izotropný prístup, bežný na molekulárnej úrovni, anizotropným. To znamená, že pre transportné koeficienty máme prechod skalárne veličiny \rightarrow tenzorové veličiny.

2 Anizotropie difúzných koeficientov

V modeli vyšetřovanom v tejto práci (model rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve, viď kapitolu 3) uvažujeme dva základné typy anizotropií difúzných procesov, a to podľa toho, ktorým základným silám pripisujeme podstatnú dôležitosť a vplyv na dynamiku systému.

2.1 Stratifikačná anizotropia

V prvom prípade má na dynamiku dominantný vplyv hustotná stratifikácia, určená vertikálnym smerom gravitácie, resp. Archimedovej vztlakovej sily. Os rotácie je tiež vo vertikálnom smere z . Tento typ anizotropie nazývame stratifikačnou anizotropiou (SA). Anizotropia je tu definovaná následovne. Difúzne koeficienty majú hodnoty rôzne vo vertikálnom smere z a v horizontálnych smeroch x a y . V princípe rozlišujeme dva podtypy, a to podľa toho, či je difuzivita vo vertikálnom smere väčšia alebo menšia ako v horizontálnych smeroch (v horizontálnom smere uvažujeme izotropnú difúziu, čo znamená, že vo všetkých smeroch horizontálnej roviny je difúzia rovnaká, napr. pre viskozitu platí $\nu_{xx} = \nu_{yy}$). Ako mieru anizotropie definujeme parameter anizotropie, ktorý je pomerom dvoch hodnôt difuzívít v dvoch rôznych smeroch. Mierou anizotropie viskozity je parameter $\alpha_\nu = \nu_{xx}/\nu_{zz}$. Mierou anizotropie tepelnej difúzie je parameter $\alpha_\vartheta = \kappa_{xx}/\kappa_{zz}$. Ďalej budeme predpokladať, že tieto koeficienty sú rovnaké, teda že $\alpha \equiv \alpha_\nu = \alpha_\vartheta$ a rôzne značenie, ak sa použije, bude len kvôli prehľadnosti a uvedomeniu si, ktorý parameter s akým dejom súvisí.

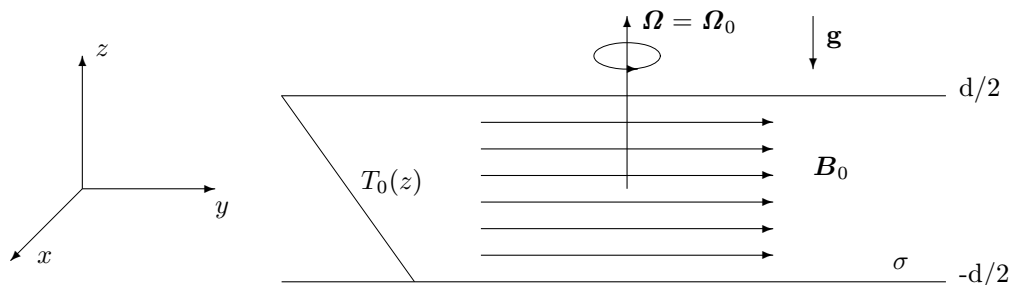
Ak je difuzivita vo vertikálnom smere väčšia ako v horizontálnych smeroch, hovoríme o tzv. a -anizotropii, pričom ide o analógiu s najspodnejšou vrstvou atmosféry, v ktorej je vďaka rozvinutej konvekcii uľahčený turbulentný prenos vo vertikálnom smere. Táto anizotropia je teda definovaná: $\nu_{zz} > \nu_{xx} = \nu_{yy}$ a parameter anizotropie má hodnoty menšie ako jedna, teda $\alpha < 1$. Ak uvažujeme o opačnom prípade, teda ak je difuzivita vo vertikálnom smere menšia ako v horizontálnom smere, hovoríme o tzv. o -anizotropii, ktorá je analógická stavu najvrchnejších vrstiev oceánu, ktorý je vďaka zohrievaniu zvrchu stratifikovaný stabilne, čo má za následok zhoršený turbulentný prenos vo vertikálnom smere. V tomto prípade je anizotropia definovaná takto: $\nu_{zz} < \nu_{xx} = \nu_{yy}$. Parameter anizotropie je v tomto prípade väčší ako jedna ($\alpha > 1$).

2.2 Anizotropia typu BM

Ak má na dynamiku dominantný vplyv rotácia a magnetické pole, potom môžeme uvažovať o anizotropii typu BM (skratka od mien Braginsky Meytlis), pri ktorej sú koeficienty difúzií v smere osi rotácie (teda vo vertikálnom smere) z a v smere magnetického poľa y (uvažujeme homogénne horizontálne magnetické pole v smere osi y) väčšie ako v poslednom treťom smere x . Anizotropiu typu BM teda definujeme následovne: $\nu_{zz} = \nu_{yy} > \nu_{xx}$. Parameter anizotropie α v tomto prípade je menší ako jedna, $\alpha < 1$. Táto anizotropia korešponduje práci Braginského a Meytlisa (1990), v ktorej študovali lokálnu turbulenciu zemského jadra a ukázali, že vďaka vplyvu rotácie a azimutálneho magnetického poľa, je zvýšená difúzia vo vertikálnom smere z a v azimutálnom smere φ , čo vlastne definuje anizotropiu difúzných koeficientov v nasledujúcom tvare: $\nu_{zz} \sim \nu_{\varphi\varphi} \gg \nu_{ss}$.

3 Model

V tejto práci je vyšetovaná lineárna stabilita nekonečnej horizontálnej rovinnej vrstvy vodivej nestlačiteľnej kvapaliny s konečnou vodivosťou σ , ktorá je preniknutá homogénnym horizontálnym magnetickým poľom v smere osi y . Vrstva rotuje okolo osi vo vertikálnom smere z , gravitačné pole smeruje v smere $-z$ a vrstva je zohrievaná zospodu a chladená zvrchu, pričom je udržiavaný lineárny teplotný profil vo vnútri vrstvy. Dôraz je kladený na preskúmanie vplyvu anizotropie difúzných koeficientov (koeficient viskozity a koeficient tepelnej difúzie) na vznik tepelne hnaných nestabilít, ktoré majú tvar roliek v horizontálnom smere.



Obr. 1: Model rotujúcej magnetokonvekcie s homogénnym horizontálnym základným magnetickým poľom v nekonečnej horizontálnej nestabilne stratifikovanej vrstve s vertikálnym teplotným profilom $T_0(z)$.

3.1 Základné rovnice

Uvažujeme teda základný stav systému

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_0 = B_M \hat{\mathbf{y}}, \quad T_0 = T_l - \Delta T \frac{z + d/2}{d}, \quad (1)$$

ktorého stabilitu študujeme naložením porúch rýchlostného poľa, magnetického poľa a teploty. Tento systém je opísaný nasledujúcimi rovnicami, ktoré sú už v linearizovanom a bezrozmernom tvare. Rovnice sú zbezrozmernené použitím nasledujúcich substitúcií¹, kde vlnkované veličiny sú s rozmerom, zatiaľ čo ich nevlnkované verzie sú už bezrozmerné, pričom sa už v nasledujúcich rovniciach objavujú len bezrozmerné veličiny

$$\tilde{z} = dz, \quad \tilde{t} = \frac{d^2}{\eta} t, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\eta}{d} \mathbf{u}, \quad \tilde{p} = 2\Omega_0 \eta \rho_0 p, \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 = \mathcal{B}_0 \mathbf{B}_0, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathcal{B}_0 \mathbf{b}, \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\eta \beta d}{\kappa} \vartheta.$$

Prvá rovnica (2) je pohybová Navier-Stokesova rovnica, ktorá opisuje časový vývin poruchového rýchlostného poľa \mathbf{u} . Druhá rovnica (3), opisujúca časový vývin poruchového magnetického poľa \mathbf{b} , je indukčná rovnica. Tretia rovnica (4), rovnica vedenia tepla, opisuje vývin poruchového teplotného poľa $\tilde{\vartheta}$ v čase. Štvrtá rovnica (5) je rovnica kontinuity pre nestlačiteľnú kvapalinu a posledná piata rovnica hovorí o neexistencii magnetických nábojov.

$$R_o \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda (\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{y}} + R \tilde{\vartheta} \hat{\mathbf{z}} + E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

¹špeciálny tvar škálovania teplotnej poruchy $\tilde{\vartheta} = \frac{\eta \beta d}{\kappa} \vartheta$ sa použil preto, aby malo modifikované Rayleighove číslo ako aj rovnica vedenia tepla bežne používaný tvar. Pri použití jednoduchšieho škálovania $\tilde{\vartheta} = \beta d \vartheta$ by malo modifikované Rayleighove číslo tvar $R = \alpha g \beta d^2 / 2\Omega_0 \eta$ a rovnica vedenia tepla tvar $\frac{1}{q_z} \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = \frac{1}{q_z} \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \tilde{\vartheta}$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{y}}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{q_z} \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \tilde{\vartheta}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (6)$$

V Navier-Stokesovej rovnici uvažujeme dva rôzne tvary posledného členu $E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}$, opisujúceho viskózne sily, keďže uvažujeme dva typy anizotropie. V prípade stratifikačnej anizotropie (SA) má viskózný člen tvar

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = E_z [(1 - \alpha_\nu) \partial_{zz} + \alpha_\nu \nabla^2] \mathbf{u} \quad (7)$$

a v prípade anizotropie podľa Braginského a Meytlisa (BM) je viskózný člen nasledujúceho tvaru

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = E_z [(\alpha_\nu - 1) \partial_{xx} + \nabla^2] \mathbf{u}. \quad (8)$$

Okrem anizotropného koeficientu viskozity uvažujeme tiež anizotropiu tepelnej difúzie. V rovnici vedenia tepla preto tiež uvažujeme dva tvary difúzneho členu $\nabla_\alpha^2 \tilde{\vartheta}$. V prípade anizotropie SA, resp. BM sú tvary tohto členu nasledovné

$$\nabla_\alpha^2 \tilde{\vartheta} = [(1 - \alpha_\vartheta) \partial_{zz} + \alpha_\vartheta \nabla^2] \tilde{\vartheta}, \quad \text{resp.} \quad \nabla_\alpha^2 \tilde{\vartheta} = [(\alpha_\vartheta - 1) \partial_{xx} + \nabla^2] \tilde{\vartheta}. \quad (9)$$

Veľmi ľahko v oboch prípadoch overíme, že položením anizotropných parametrov α_ν a α_ϑ jednotke (teda uvažovaním izotropného prípadu $\alpha = 1$) sa difúzne členy zmenia na bežne používané tvary $E \nabla^2 \mathbf{u}$, resp. $\nabla^2 \tilde{\vartheta}$. V rovniciach sa objavujú bezrozmerné parametre vyjadrujúce pomery veličín s rovnakým rozmerom, napr. jednotlivých síl, resp. jednotlivých difúzných koeficientov.

$R_o = \eta / 2\Omega_0 d^2$ - modifikované Rossbyho číslo je mierou pomeru periódy rotácie a magnetického difúzneho času (klasické Rossbyho číslo $R_o = U / \Omega_0 d$ je mierou pomeru periódy rotácie a času d/U , za ktorý charakteristický tok v systéme s rýchlosťou U prejde charakteristickú dĺžku systému d).

$\Lambda = \mathcal{B}_0^2 / 2\Omega_0 \rho_0 \mu \eta$ - Elsasserovo číslo dáva do pomeru magnetickú silu a Coriolisovu silu.

$E = \nu / 2\Omega_0 d^2$ - Ekmanove číslo je mierou viskózných síl vzhľadom ku Coriolisovej sile. Kvôli anizotropnej viskozite máme dve rôzne Ekmanove čísla, a to $E_z = \nu_{zz} / 2\Omega_0 d^2$ a $E_x = \nu_{xx} / 2\Omega_0 d^2$.

$R = \alpha g \beta d^2 / 2\Omega_0 \kappa$ - modifikované Rayleighove číslo meria efektívnu vztlakovú silu vzhľadom na Coriolisovu silu (modifikované Rayleighove číslo je súčinom klasického Rayleighoveho čísla $R_a = g \alpha \beta d^4 / \kappa \nu$ a Ekmanoveho čísla E , teda $R = R_a E$).

$q = \kappa / \eta$ - Robertsove číslo je určené pomerom koeficientov tepelnej difúzie a magnetickej difúzie. Podobne ako v prípade Ekmanovho čísla, aj Robertsove číslo má dve rôzne hodnoty, pretože uvažujeme anizotropiu, a teda dve rôzne hodnoty tepelnej difúzie. Rozlišujeme preto $q_z = \kappa_{zz} / \eta$ a $q_x = \kappa_{xx} / \eta$.

V rovniciach sa takisto objavujú parametre anizotropie $\alpha_\nu = \nu_{xx} / \nu_{zz}$ a $\alpha_\vartheta = \kappa_{xx} / \kappa_{zz}$, ktoré sú mierou anizotropie (čím väčší rozdiel od hodnoty 1, tým väčšia anizotropia) a sú definované ako pomer difuzivít v dvoch rôznych smeroch v karteziánskej súradnicovej sústave (v horizontálnom a vertikálnom smere).

3.2 Metóda riešenia

Ďalší postup je v rozložení porúch rýchlostného \mathbf{u} a magnetického poľa \mathbf{b} na poloidálnu a toroidálnu časť

$$\mathbf{u} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times \tilde{u}\hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \tilde{\omega}\hat{\mathbf{z}}] \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times \tilde{b}\hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \tilde{j}\hat{\mathbf{z}}]. \quad (10)$$

Všetky poruchy (\tilde{u} , $\tilde{\omega}$, \tilde{b} , \tilde{j} a $\tilde{\vartheta}$) majú tvar

$$\tilde{f}(x, y, z, t) = \Re [F(z) \exp(ilx + imy) \exp(\lambda t)], \quad (11)$$

kde horizontálne zložky vlnového čísla l a m určujú $a^2 = l^2 + m^2$, odmocninu a tohto výrazu nazývame horizontálnym vlnovým číslom a λ je komplexná frekvencia ($\lambda = i\sigma$). Ďalej aplikujeme na Navier-Stokesovu rovnicu operátor rotácie a dvojitej rotácie. To isté spravíme s indukčnou rovnicou a po dosadení porúch (\tilde{u} , $\tilde{\omega}$, \tilde{b} , \tilde{j} a $\tilde{\vartheta}$) do týchto rovníc a do rovnice vedenia tepla a uvážením $\hat{\mathbf{z}}$ zložiek dostaneme nasledujúci systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $F(z) = W(z)$, $\Omega(z)$, $B(z)$, $J(z)$ a $\Theta(z)$ (pre podrobnejšie odvodenie vid' prílohu A),

$$[E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] \Omega + DW + im\Lambda J = 0, \quad (12)$$

$$(D^2 - a^2) [E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] W - D\Omega + im\Lambda(D^2 - a^2)B = a^2 R\Theta, \quad (13)$$

$$(D^2 - a^2 - \lambda)J + im\Omega = 0, \quad (14)$$

$$(D^2 - a^2 - \lambda)B + imW = 0, \quad (15)$$

$$(\mathcal{D}_\alpha - \zeta\lambda)\Theta + W = 0. \quad (16)$$

Pretože uvažujeme dva rôzne typy anizotropií, SA typ a BM typ, operátor \mathcal{D}_α má dva rôzne tvary, a to $D^2 - \alpha l^2 - m^2$ v prípade typu BM a $D^2 - \alpha l^2 - \alpha m^2$ v prípade SA. Z týchto piatich rovníc postupne eliminujeme všetky neznáme funkcie až na funkciu W . K tomu sme si kvôli prehľadnosti zaviedli nasledujúce operátory

$$\mathcal{D}_\beta = D^2 - a^2$$

$$\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_\beta - \lambda$$

$$\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha l^2 - m^2 \text{ (BM)}$$

$$\mathcal{D}_p = E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda = E_z (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda)$$

$$\mathcal{D}_\zeta = \mathcal{D}_\alpha - \zeta\lambda$$

$$\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_p + \Lambda m^2 = E_z [\mathcal{D}_\lambda (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) + Q^2 m^2]$$

a pri algebraických úpravách využijeme komutatívnosť týchto operátorov (kde $p = R_o/E_z = \eta/\nu_{zz}$ a $\zeta = q_z^{-1} = \eta/\kappa_{zz}$, sú obrátené hodnoty magnetického Reynoldsoveho čísla a Robertsoveho čísla). Rovnice (12) - (16) využitím týchto operátorov majú takýto tvar

$$\mathcal{D}_p \Omega + DW + im\Lambda J = 0, \quad (17)$$

$$\mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_p W - D\Omega + im\Lambda \mathcal{D}_\beta B = a^2 R\Theta, \quad (18)$$

$$\mathcal{D}_\lambda J + im\Omega = 0, \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_\lambda B + imW = 0, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_\zeta \Theta + W = 0. \quad (21)$$

Najprv aplikujeme operátor \mathcal{D}_λ na rovnicu (17) a s využitím rovnice (19) dostaneme rovnicu

$$\mathcal{D}_\Omega \Omega + \mathcal{D}_\lambda DW = 0. \quad (22)$$

Potom aplikujeme operátor \mathcal{D}_λ na rovnicu (18) a s využitím rovnice (20) dostávame rovnicu

$$\mathcal{D}_\beta(\mathcal{D}_p \mathcal{D}_\lambda + \Lambda m^2)W - \mathcal{D}_\lambda D\Omega = a^2 R \mathcal{D}_\lambda \Theta. \quad (23)$$

Keď na túto rovnicu aplikujeme operátor \mathcal{D}_Ω a využijeme predchádzajúcu rovnicu (22), dostaneme rovnicu

$$(\mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\Omega^2 + \mathcal{D}_\lambda^2 D^2)W = a^2 R \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\Omega \Theta, \quad (24)$$

ktorá už obsahuje len neznáme funkcie W a Θ . Ostáva už len vylúčiť neznámu Θ , čo urobíme ľahko aplikáciou operátora \mathcal{D}_ζ na túto rovnicu a využitím rovnice (21). Dostaneme potom hľadanú rovnicu pre neznámu W , ktorá je obyčajnou diferenciálnou rovnicou 12 rádu a má tvar

$$\left[\mathcal{D}_\zeta (\mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\Omega^2 + \mathcal{D}_\lambda^2 D^2) + a^2 R \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\Omega \right] W = 0. \quad (25)$$

Aby sme mohli rovnice porovnávať s rovnicami odvodenými Chandrasekharom (1961), tak túto rovnicu (25) vynásobíme E_z^{-2} a po ľahkých úpravách prejde na nasledujúci tvar

$$\left[\mathcal{D}_\zeta \left(\mathcal{D}_\beta \left\{ \mathcal{D}_\lambda (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) + Qm^2 \right\}^2 + T_a \mathcal{D}_\lambda^2 D^2 \right) + a^2 R_a \mathcal{D}_\lambda \left\{ \mathcal{D}_\lambda (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) + Qm^2 \right\} \right] W = 0, \quad (26)$$

v ktorom sa už namiesto nami používaných bezrozmerných parametrov (E_z - Ekmanove číslo, Λ - Elsasserove číslo, R - modifikované Rayleighove číslo) objavujú bezrozmerné parametre použité Chandrasekharom ($Q = \Lambda/E_z$ - Chandrasekharove číslo, $T_a = E_z^{-2}$ - Taylorove číslo, $R_a = R/E_z$ - klasické Rayleighove číslo). Pre porovnanie s Chandrasekharom zavádzame tiež substitúcie

$$\tilde{x} = \frac{l^2}{\pi^2}, \quad \tilde{y} = \frac{m^2}{\pi^2}, \quad \sigma_1 = -\frac{i\lambda}{\pi^2}, \quad T_1 = \frac{T_a}{\pi^4}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\pi^2} \quad \text{a} \quad R_1 = \frac{R_a}{\pi^4}. \quad (27a)$$

Ak uvažujeme najjednoduchšie hraničné podmienky na $-d/2, d/2$,

- voľné hranice : $W = D^2W = D\Omega = 0$
- dokonale tepelne vodivé hranice : $\Theta = 0$
- dokonale elektricky vodivé hranice : $B = DJ = 0$,

tak môžeme operátory nahradiť jednoduchými algebraickými výrazmi. Pričom ešte zavedieme pomocné premenné

$$\tilde{a} = \tilde{x} + \tilde{y}, \quad A = 1 + \tilde{a} \quad \text{a} \quad (27b)$$

$$A_\alpha = \begin{cases} 1 + \alpha\tilde{x} + \tilde{y} \\ 1 + \alpha\tilde{a} \end{cases} \quad \text{v prípade} \quad \begin{matrix} \text{BM} \\ \text{SA} \end{matrix} \quad \text{anizotropie.} \quad (27c)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\beta &\rightarrow -\pi^2(1 + \tilde{x} + \tilde{y}) = -\pi^2 A, \\
\mathcal{D}_\alpha &\rightarrow -\pi^2(1 + \alpha\tilde{x} + \tilde{y}) = -\pi^2 A_\alpha \text{ (BM) ,} \\
\mathcal{D}_\alpha &\rightarrow -\pi^2(1 + \alpha\tilde{x} + \alpha\tilde{y}) = -\pi^2 A_\alpha \text{ (SA)} \\
\mathcal{D}_\lambda &\rightarrow -\pi^2(1 + \tilde{x} + \tilde{y} + i\sigma_1) = -\pi^2(A + i\sigma_1), \\
\mathcal{D}_\alpha - p\lambda &\rightarrow -\pi^2(1 + \alpha\tilde{x} + \tilde{y} + ip\sigma_1) = -\pi^2(A_\alpha + ip\sigma_1) \text{ (BM)}, \\
\mathcal{D}_\alpha - p\lambda &\rightarrow -\pi^2(1 + \alpha\tilde{x} + \alpha\tilde{y} + ip\sigma_1) = -\pi^2(A_\alpha + ip\sigma_1) \text{ (SA)}, \\
\mathcal{D}_\zeta &\rightarrow -\pi^2(1 + \alpha\tilde{x} + \tilde{y} + i\zeta\sigma_1) = -\pi^2(A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \text{ (BM) ,} \\
\mathcal{D}_\zeta &\rightarrow -\pi^2(1 + \alpha\tilde{x} + \alpha\tilde{y} + i\zeta\sigma_1) = -\pi^2(A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \text{ (SA) ,}
\end{aligned}$$

ktoré keď dosadíme do rovnice (26), dostaneme rovnicu pre Rayleighove číslo R_1 , ktorá je už analogickou rovnicou pre Chandrasekharov prípad a má tvar

$$\begin{aligned}
(A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \left\{ A [(A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{y}]^2 + T_1(A + i\sigma_1)^2 \right\} = \\
= R_1(A - 1)(A + i\sigma_1) \left\{ (A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{y} \right\}. \tag{28}
\end{aligned}$$

4 Stacionárna konvekcia

Uvažujme na začiatok stacionárnu konvekciu, pre ktorú platí $\sigma_1 = 0$. Rovnica (28) prejde na jednoduchší tvar

$$A_\alpha \left\{ A [AA_\alpha + Q_1\tilde{y}]^2 + T_1A^2 \right\} = R_1(A-1)A \{AA_\alpha + Q_1\tilde{y}\}. \quad (29)$$

Predpis pre Rayleighove číslo R_1 je

$$R_1 = \frac{A_\alpha \left\{ A [(AA_\alpha + Q_1\tilde{y})^2 + T_1A^2] \right\}}{(A-1)A [AA_\alpha + Q_1\tilde{y}]}, \quad (30)$$

a po jednoduchých algebraických úpravach ho môžeme napísať v tvare

$$R_1 = \frac{A_\alpha}{A-1} \left\{ AA_\alpha + Q_1\tilde{y} + T_1 \frac{A}{AA_\alpha + Q_1\tilde{y}} \right\}.$$

Celé odvodenie je všeobecné a platí pre prípad anizotropie typu BM aj pre prípad anizotropie typu SA. Rozdiel je jedine v definícii pomocnej premennej A_α , ktorá ma v prípade BM tvar $A_\alpha = 1 + \alpha\tilde{x} + \tilde{y}$, zatiaľ čo v prípade SA je tvar $A_\alpha = 1 + \alpha\tilde{x} + \alpha\tilde{y} = 1 + \alpha\tilde{a}$, kde $\tilde{a} = \tilde{x} + \tilde{y}$. Ak teda v rovnici (30) nahradíme premennú A_α výrazom $1 + \alpha\tilde{a}$, tak dostaneme analogický predpis pre Rayleighove číslo R_1 pre prípad anizotropie typu SA v tvare

$$R_1 = \frac{(1 + \alpha\tilde{a}) \left\{ A [A(1 + \alpha\tilde{a}) + Q_1\tilde{y}]^2 + T_1A^2 \right\}}{\tilde{a}A \{A(1 + \alpha\tilde{a}) + Q_1\tilde{y}\}}, \quad (31)$$

kde zrejme $A = 1 + \tilde{a}$.

Ak máme predpisy pre Rayleighove čísla (rovnice 30 a 31), tak hľadanie kritických Rayleighových čísel je vlastne hľadanie lokálneho minima vzľadom na vlnové čísla l a m (resp. im úmerné premenné \tilde{x} a \tilde{y}). Táto minimalizácia bola vykonaná numericky.

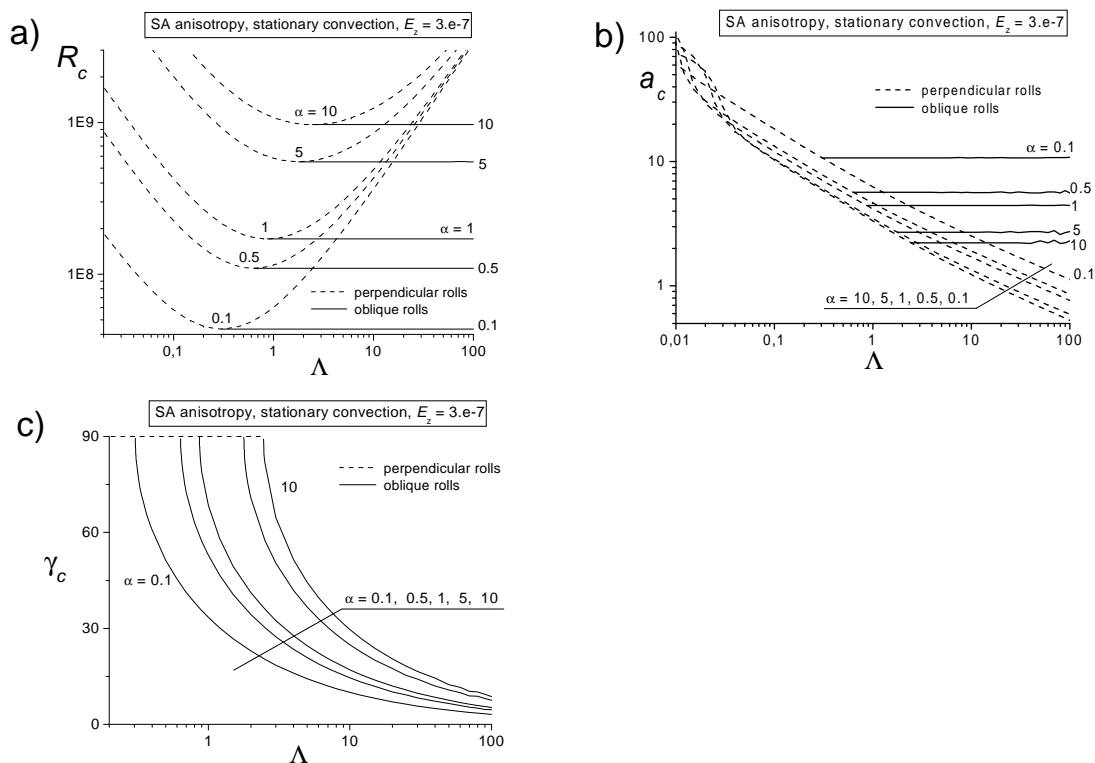
4.1 Numerické výsledky

Hlavným cieľom lineárnej stabilitnej analýzy je vyšetriť nástup konvekcie, teda nájsť také základné vstupné parametre opisujúce systém a takú konfiguráciu nestability, ktorá sa vybudí najľahšie. Nestabilita vznikne, ak Rayleighove číslo, ktoré je pomerom stabilizujúcich a destabilizujúcich síl, dosiahne určitú kritickú hodnotu. Úlohou je nájsť pri zadaných vstupných parametroch (Ekmanove číslo, Elsasserove číslo, Robertsove číslo) taký tvar poruchy (daný vlnovými číslami), ktorá vznikne pri najmenšom Rayleighovom čísle. Takéto Rayleighove číslo nazývame kritickým Rayleighovým číslom a označujeme ho R_c . Vyšetrujeme nástup stacionárnej konvekcie, ktorá má tvar horizontálnych roliek a je jednoznačne popísaná dvoma horizontálnymi zložkami vlnového čísla, l a m . Zo znalosti týchto dvoch vlnových čísel vieme jednoducho spočítať dva dôležité parametre, a to celkové horizontálne vlnové číslo $a = (l^2 + m^2)^{1/2}$ a uhol $\gamma = \arctg(m/l)$, uhol sklonu roliek vzhľadom na orientáciu základného magnetického poľa v smere osi y .

Numerické výsledky tejto stabilitnej analýzy sú prezentované vo forme grafov, vyjadrujúcich závislosti kritického Rayleighoveho čísla R_c , kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a kritického uhla sklonu roliek γ_c na Elsasserovom čísle Λ , ktoré je mierou magnetického poľa. Hlavným cieľom tejto práce je vyšetriť vplyv anizotropie difúzných koeficientov na rotujúcu magnetokonvekciu, preto rôzne krivky na grafoch odpovedajú rôznym hodnotám parametra anizotropie, ktorý je mierou anizotropie. Pre porovnanie sa na grafoch vždy vyskytuje aj izotropný prípad s $\alpha = 1$.

Grafy sú rozdelené do troch trojíc, kde každá obsahuje grafy závislosti R_c vs Λ , a_c vs Λ a γ_c vs Λ . Prvá trojica opisuje vplyv stratifikačnej (SA) anizotropie, druhá trojica vplyv anizotropie podľa Braginského a Meytlisa (BM) a tretia trojica porovnáva tieto dve vyšetované anizotropie difúzných koeficientov. Pri tu uvažovanom rozsahu vstupných parametrov (Elsasserove číslo $\Lambda \in (0.01, 100)$ a Ekmanove číslo v z -ovom smere $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ ($E_x = \alpha E_z$)) sme pozornosť upriamili na dve orientácie roliek vzhľadom na magnetické pole. Os roliek je buď kolmá na magnetické pole (uhol γ_c je rovný 90°), alebo je vzhľadom na magnetické pole naklonená o nejaký uhol. Na grafoch sú tieto dva prípady odlišené rôznym typom kriviek. Prvý obrázok (obr. 2) je venovaný vplyvu stratifikačnej anizotropie na stacionárnu konvekciu a obsahuje tri grafy, kde rôzne dvojice plnej a prerušovanej krivky súvisia s rôznymi hodnotami parametra anizotropie α . Na prvom grafe a) vidíme, že SA anizotropia ovplyvňuje aj rolky kolmé na magnetické pole, aj rolky šikmé vzhľadom na magnetické pole. Závislosť kritického Rayleighoveho čísla na Elsasserovom čísle Λ má pre kolmé a šikmé rolky úplne rozdielny charakter. Krivky závislosti pre kolmé rolky (prerušované krivky) majú tvar paraboly s lokálnym minimom (v loglog mierke). Krivky závislosti pre šikmé rolky (plné krivky) sú polpriamky, so začiatkom v minime príslušných parabol, pričom sú tieto polpriamky vodorovné a teda nezávislé na Elsasserovom čísle. Jeden z dôležitých záverov tejto analýzy je, že v prípade stratifikačnej anizotropie je kritické Rayleighove číslo R_c pre šikmé rolky nezávislé na magnetickom poli. Ďalším dôležitým záverom je, že šikmé rolky (ak existujú) sú preferované pred kolmými rolkami, pričom k zmene preferencie dochádza pri hodnote Elsasserovho čísla Λ , v ktorej dosahuje prerušovaná krivka svoje lokálne minimum. Táto hodnota je funkciou parametra anizotropie α a s nárastom α tiež rastie. Anizotropia typu o (koeficient anizotropie $\alpha > 1$) nástup konvekcie sťažuje, lebo zvyšuje hodnoty kritického Rayleighoveho čísla R_c . Anizotropia a typu (koeficient anizotropie $\alpha < 1$) naopak znižovaním kritického Rayleighoveho čísla konvekciu napomáha.

Druhý graf b) tohto obrázku opisuje vplyv SA anizotropie na celkové kritické horizon-

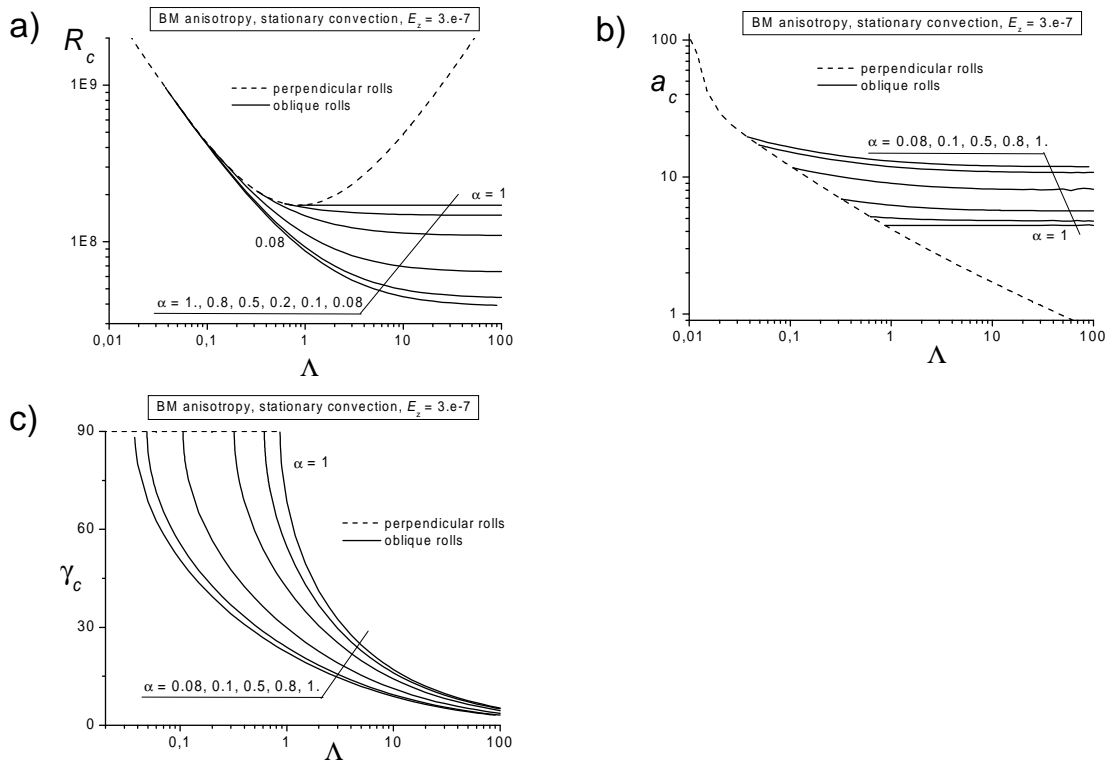


Obr. 2: Závislosť a) kritického Rayleighovho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a c) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade stratifikačnej SA anizotropie. Rolky kolmé na magnetické pole - prerušované krivky, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu - plné krivky.

tálne vlnové číslo a_c . Závislosť tohto vlnového čísla na Elsasserovom čísle Λ je opäť rozdielna pre kolmé a šikmé rolky. Horizontálne vlnové číslo a_c kolmých roliek je klesajúcou funkciou Elsasserovho čísla, ale pre šikmé rolky je a_c na Elsasserovom čísle nezávislé. Anizotropia ovplyvňuje hodnoty celkového horizontálneho čísla a_c nasledovne. Anizotropia typu o znižuje kritické horizontálne vlnové číslo a anizotropia typu a ho zvyšuje, pričom kvalita tohto vplyvu je rovnaká na kolmé ako aj na šikmé rolky.

Posledný graf na tomto obrázku ukazuje, ako je anizotropiou ovplyvnený uhol medzi osou roliek a smerom magnetického poľa. Vidíme, že pre všetky hodnoty parametra anizotropie α dôjde k prechodu z kolmých roliek na šikmé. Ak sa bližšie pozrieme na jednu konkrétnu krivku (pre jednoduchosť na krivku s $\alpha = 1$, teda izotropný prípad), tak vidíme, že pre malé hodnoty magnetického poľa (malé Λ) je preferovaný mód s kolmými rolkami až po určitú hodnotu Λ , od ktorej sú už preferované šikmé rolky. Zvyšovaním magnetického poľa sa rolka postupne stále viac nakláňa do smeru magnetického poľa (zvyšovaním Λ sa uhol γ_c postupne znižuje z 90° na menšie hodnoty), pričom sa tento uhol asymptoticky blíži k nulovej hodnote pre veľké Elsasserove číslo (rolky rovnobežné s magnetickým poľom). Vplyv anizotropie je v hodnote Elsasserovho čísla Λ , pri ktorej dochádza k zmene preferencie medzi kolmými a šikmými rolkami, teda v hodnote od ktorej sa už začnú rolky zošikmovať smerom k magnetickému poľu.

Druhý obrázok (obr. 3) popisuje vplyv anizotropie typu BM. Obsahuje tri grafy rovnakých závislostí ako predchádzajúci obrázok. Opäť je pozornosť venovaná prípadu, keď sú



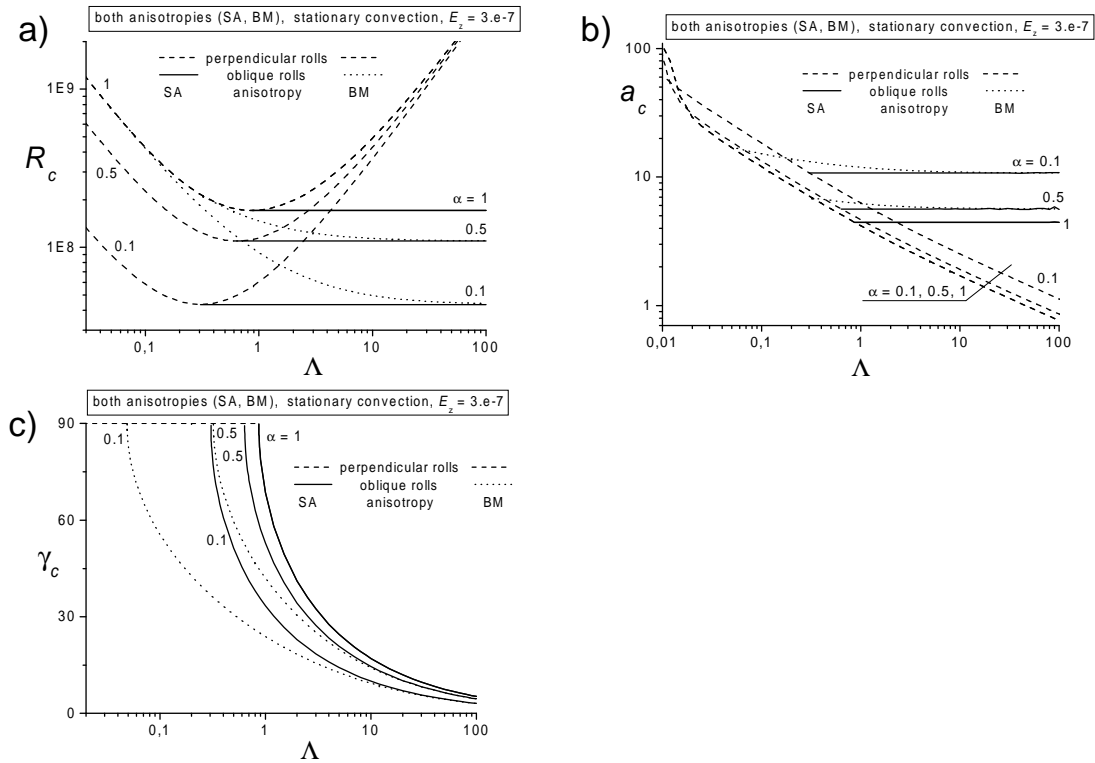
Obr. 3: Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a c) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade BM anizotropie. Rolky kolmé na magnetické pole - prerušovaná krivka, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu - plné krivky.

rolky kolmé na magnetické pole (prerušované krivky) a prípadu, keď sú rolky vzhľadom na toto pole šikmé (plné krivky). Hneď na prvý pohľad vidno na všetkých troch grafoch tohto obrázku, že rolky kolmé na magnetické pole sú v prípade BM anizotropie nezávislé na tejto anizotropii (v prípade SA anizotropie sú kolmé rolky na anizotropii závislé, viď predchádzajúci obr.2). Ak sa pozrieme na rovnicu (30), ktorá vyjadruje predpis pre Rayleighove číslo R_1 v prípade BM anizotropie, tak vidíme, že koeficient anizotropie α je vždy násobený s premennou \tilde{x} , ktorá je úmerná štvorcu l^2 horizontálneho vlnového čísla l . Pre rolky kolmé na základné magnetické pole v smere y platí $l = 0$, teda $\tilde{x} = 0$, čo spôsobí zánik závislosti Rayleighoveho čísla na anizotropii. Šikmé rolky sú na anizotropii závislé ($l \neq 0$) a z grafu a) vidno, že BM anizotropia uľahčuje nástup konvekcie, lebo kritické Rayleighove číslo R_c s nárastom anizotropie (poklesom hodnoty parametra anizotropie α) klesá. R_c je až na izotropný prípad $\alpha = 1$ klesajúcou funkciou Elsasserovho čísla Λ (na rozdiel od prípadu SA anizotropie, kde R_c bolo nezávislé na Elsasserovom čísle pre všetky uvažované hodnoty parametra anizotropie α). Ďalej si môžeme všimnúť, že BM anizotropia určuje hodnotu Elsasserovho čísla Λ , pri ktorej dôjde k zmene preferencie medzi kolmými a šikmými rolkami. S nárastom anizotropie (pokles parametra anizotropie α) sa hodnota Elsasserovho čísla pre zmenu preferencie znižuje, čo z fyzikálneho hľadiska znamená, že zvýšením anizotropie je potrebné slabšie magnetické pole na to, aby pre magnetokonvekciu začalo byť výhodnejšie mať rolky šikmo vzhľadom na magnetické pole.

Druhý graf b) nám hovorí, že BM anizotropia zvyšuje celkové kritické horizontálne vlnové

číslo a_c , ktoré je klesajúcou funkciou Elsasserovho čísla Λ ako pre kolmé rolky, tak aj pre šikmé rolky (horizontálne vlnové číslo šikmých roliek v prípade SA anizotropie nezávisí na Elsasserovom čísle), aj keď pre šikmé rolky sa s nárastom Elsasserovho čísla táto závislosť stráca.

Z tretieho grafu c) vidíme, ako BM anizotropia ovplyvňuje γ_c - uhol medzi osou roliek a magnetickým poľom. Na prvý pohľad vidno, že anizotropia nemení kvalitu kriviek, s nárastom anizotropie sa ale krivky posúvajú smerom k menším hodnotám Λ , čo je dôsledok toho, že anizotropia ovplyvňuje hodnotu Λ , pri ktorej dochádza k prechodu z kolmých na šikmé rolky. Uhol roliek sa postupne pre všetky uvažované prípady anizotropie (rôzne hodnoty α) začne z pôvodných 90° znižovať a asymptoticky sa blížiť k nulovej hodnote. Celkovo môžeme uzavrieť, že BM anizotropia znižuje uhol γ_c a pre veľké hodnoty magnetického poľa je vplyv anizotropie na tento uhol náklonu zanedbateľný.



Obr. 4: Porovnanie oboch typov anizotropií. Závislosť a) kritického Rayleighovho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a c) kritického uhla medzi roľkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade stratifikačnej SA anizotropie a anizotropie podľa Braginského a Meytlisa. Rolky kolmé na magnetické pole - prerušované krivky, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu - plné krivky (SA), bodkované krivky (BM).

Ďalší obrázok (obr. 4) vzájomne porovnáva obidva typy anizotropie, pričom aj v prípade anizotropie typu BM aj v stratifikačnej anizotropii sú zobrazené len tri rôzne hodnoty parametra anizotropie $\alpha = 1, 0.5, 0.1$, teda len tri rôzne prípady daných anizotropií. Krivky opäť rozdeľujeme podľa toho, či súvisia s roľkami kolmými na magnetické pole (prerušované krivky), alebo šikmými vzhľadom na magnetické pole (plné pre SA anizotropiu a bodkované pre BM anizotropiu). Ako už bolo povedané, kolmé rolky sú ovplyvnené jedine SA anizotropiou a v prípade BM anizotropie máme len jeden prípad kolmých roliek, stotožnený

s krivkou $\alpha = 1$. Kolmými rolkami sa ďalej zaoberať v tomto opise nebudeme a pozornosť sústredíme na šikmé rolky, a teda na dvojice plných a bodkovaných kriviek s hodnotami anizotropného parametra $\alpha = 0.5$ a $\alpha = 0.1$.

Z kriviek prvého grafu a) môžeme hneď uzavrieť, že SA anizotropia napomáha vzniku konvekcie viac ako BM anizotropia, lebo kritické Rayleighove čísla v prípade SA anizotropie sú menšie ako v prípade BM anizotropie. Tento rozdiel je najväčší pre hodnoty Elsasserovho čísla $\Lambda = \mathcal{O}(1)$ a pre veľké hodnoty sa tento rozdiel znižuje. Ďalej vidíme, že k prechodu z kolmých na šikmé rolky dôjde v prípade BM anizotropie pri menších hodnotách Elsasserovho čísla ako v prípade SA anizotropie.

Druhý graf b) opisujúci závislosť celkového kritického horizontálneho vlnového čísla a_c ukazuje, že rozdiel medzi oboma anizotropiami je veľmi malý, kritické celkové horizontálne vlnové číslo je v prípade BM anizotropie trochu väčšie ako v prípade SA anizotropie. Opäť pritom platí, že pre veľké hodnoty Λ sa aj tento malý rozdiel úplne stráca.

Z tretieho grafu c) najlepšie vidno, že najväčší rozdiel medzi oboma anizotropiami je v hodnotách Elsasserovho čísla Λ , pri ktorých dochádza k prechodu z kolmých na šikmé rolky. Napr. pre prípad anizotropie s hodnotou parametra anizotropie $\alpha = 0.1$ je tento rozdiel skoro o jeden rád, a preto môžeme uzavrieť, že kritický uhol γ_c je pri BM anizotropii menší ako pri SA anizotropii, pričom aj v prípade uhlu γ_c platí, že pre veľké Elsasserove čísla Λ sa rozdiel medzi BM a SA anizotropiami stráca.

5 Nestacionárna konvekcia

Z geofyzikálneho hľadiska je zaujímavejšie preštudovať nestability, ktoré sú na čase závislé, a ktoré nazývame nestacionárnou konvekciou (v literatúre sa to niekedy označuje ako overstabilita resp. periodická nestabilita). Nestacionárna konvekcia má v tomto modeli tvar vlny, šíriacej sa určitým smerom vzhľadom na základné magnetické pole (orientované v smere osi y), pričom uhol medzi magnetickým poľom a smerom šírenia vlny, označovaným γ_c , je jedným z výstupov nášho štúdia. Vlna je v našom prípade popísaná dvoma vlnovými číslami v horizontálnych smeroch x a y a frekvenciou σ_1 .

Aj magnetické pole aj rotácia majú stabilizujúci účinok na kvapalinu, lebo môžu fungovať ako vratná sila pôsobiaca na vychýlenú kvapalnú časticu, čím poskytujú základ pre možný vlnový pohyb v kvapaline. Preto môžeme očakávať, že vlnový pohyb je dôležitý v rotujúcich MHD systémoch ako napr. zemské jadro, Slnko, hviezdy, ... Z meraní magnetického poľa Zeme na povrchu a z modelovania magnetického poľa na povrchu jadra je viacero dôkazov o vlnovom charaktere pohybov. Vlny teda môžeme považovať za prirodzenú reakciu kvapalných systémov na poruchu.

Z matematického hľadiska sa hľadanie kritického Rayleighoveho čísla R_1 skomplikuje, pretože sa uvažuje nenulová frekvencia σ_c . Celá procedúra hľadania bude oveľa zložitejšia a časovo náročnejšia. Vychádzame z rovnice (28)

$$\begin{aligned} (A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \left\{ A [(A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{y}]^2 + T_1(A + i\sigma_1)^2 \right\} = \\ = R_1(A - 1)(A + i\sigma_1) \{ (A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{y} \}, \end{aligned}$$

čo je predpis pre Rayleighove číslo. Tento zložitý výraz má reálnu aj imaginárnu časť, čo je vlastne hlavný dôvod zložitosti oproti stacionárnemu prípadu. V stacionárnom prípade sme frekvenciu σ_1 položili rovnú nule, čím sa z výrazu odstránila komplexnosť, lebo imaginárna jednotka je vždy násobená práve frekvenciou. Rayleighove číslo R_1 má teda tvar zlomku, v ktorom sú aj čitateľ aj menovateľ komplexné výrazy s nenulovou reálnou aj imaginárnou časťou. Ak reálnu a imaginárnu časť čitateľa, resp. menovateľa označíme C_1 a C_2 , resp. M_1 a M_2 , môžeme aj Rayleighove číslo rozdeliť na reálnu a imaginárnu časť v nasledujúcom symbolickom zápise

$$R_1 = \Re(R_1) + i \Im(R_1) = \frac{C_1 \cdot M_1 + C_2 \cdot M_2}{M_1^2 + M_2^2} + i \frac{C_2 \cdot M_1 - C_1 \cdot M_2}{M_1^2 + M_2^2}, \quad (32)$$

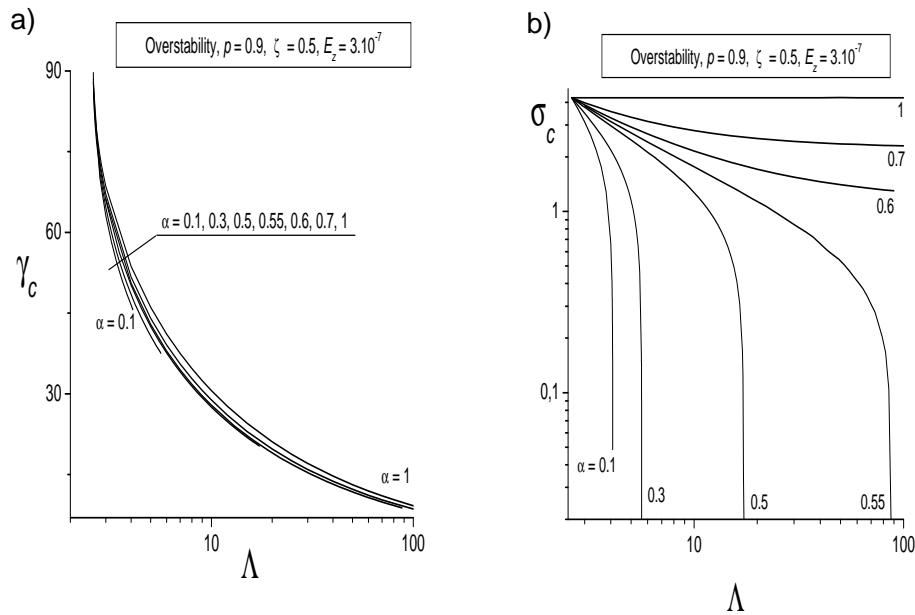
kde pomocné premenné C_1 , C_2 , M_1 a M_2 majú zložitú a neprehľadnú vyjadrenia, ktoré nemá zmysel tu uvádzať, ale ktoré sú uvedené v prílohe B a čitateľ si ich tiež môže veľmi ľahko vyjadriť napríklad pomocou softvéru Mathematica. Skutočné fyzikálne reálne Rayleighove číslo nám dáva len reálna časť $\Re(R_1)$, preto musíme imaginárnu časť $\Im(R_1)$ položiť rovnú nule. Takto vzniknutá rovnica $\Im(R_1) = 0$ sa dá po jednoduchých algebraických úpravách previesť na polynomiálnu rovnicu siedmeho stupňa pre neznámu frekvenciu σ_1 . Riešenie tejto rovnice je jedným z dôležitých krokov pri hľadaní kritického Rayleighoveho čísla, lebo dáva do vzťahu frekvenciu a vlnové čísla. Táto polynomiálna rovnica siedmeho stupňa má nulový absolútny člen a preto sa dá zjednodušiť na polynomiálnu rovnicu šiesteho stupňa (jeden koreň $\sigma_1 = 0$ teda poznáme presne, ale ten je tentokrát nezaujímavý, lebo je to prípad stacionárnej konvekcie). Navyše táto už zjednodušená rovnica má nenulové koeficienty len pri párnych mocninách σ_1 , čo nám opäť umožní znížiť rád polynómu na tri, kde neznáma už nebude frekvencia σ_1 , ale jej druhá mocnina. Riešením tejto rovnice získame v princípe

tri frekvencie, z ktorých pri predpokladanej marginálnej (neutrálnej) konvekcií potom vyberieme len fyzikálne prijateľné, to znamená len reálne. Ďalším krokom je dosadenie tejto frekvencie spolu s vlnovými číslami do výrazu $\Re(R_1)$, čo je už skutočné fyzikálne Rayleighove číslo. Ak je fyzikálne prijateľných frekvencií viac, tak vyberieme tú, ktorá nám dá najmenšiu hodnotu Rayleighovho čísla. Úlohou numerickej minimalizácie je potom nájsť také vlnové čísla, pri ktorých je Rayleighove číslo najmenšie možné. Ak také číslo existuje, tak ho nazývame kritickým Rayleighovym číslom R_c a jemu odpovedajúce vlnové čísla a frekvencie tiež nazývame kritickými. Frekvenciu označujeme σ_c , samotné kritické vlnové čísla l a m nie sú až také dôležité, dôležitejšia rovnako ako v prípade stacionárnej konvekcie, je hodnota kritického celkového horizontálneho vlnového čísla $a_c = (l^2 + m^2)^{1/2}$ a uhol $\gamma_c = \arctg(m/l)$, uhol medzi osou konvektívnej rolky a orientáciou základného magnetického poľa.

V tejto práci je vyšetřovaný vplyv BM anizotropie na nestacionárnu konvekciu, pri ktorej sú difúzne koeficienty väčšie v smere osi rotácie a magnetického poľa oproti koeficientom v smere osi x . Pre viskozitu teda platí $\nu_{zz} = \nu_{yy} > \nu_{xx}$ (rovnaký vzťah medzi koeficientami platí aj pre tepelnú difúziu) a pomocná premenná A_α má v tomto prípade tvar $A_\alpha = \alpha\tilde{x} + \tilde{y}$, kde α je parameter anizotropie definovaný ako $\alpha = \nu_{xx}/\nu_{zz} = \kappa_{xx}/\kappa_{zz}$, ktorý z fyzikálnych dôvodov nemôže nadobúdať hodnotu väčšiu ako jedna. Ak predpokladáme, že výsledky Braginského a Meytlisa, ktorí študovali turbulenciu v zemskom jadre, sú správne, to znamená, že turbulentné víry sú deformované do tvaru palacínok pretiahnutých v smere osi rotácie a v smere magnetického poľa, a tým pádom aj difúzne procesy v týchto smeroch sú efektívnejšie (v našom prípade $\nu_{yy} = \nu_{zz} > \nu_{xx}$), tak pri našej definícii parametra anizotropie α je tento parameter menší ako jedna, nanajvýš rovný jednej v izotropnom prípade.

5.1 Numerické výsledky

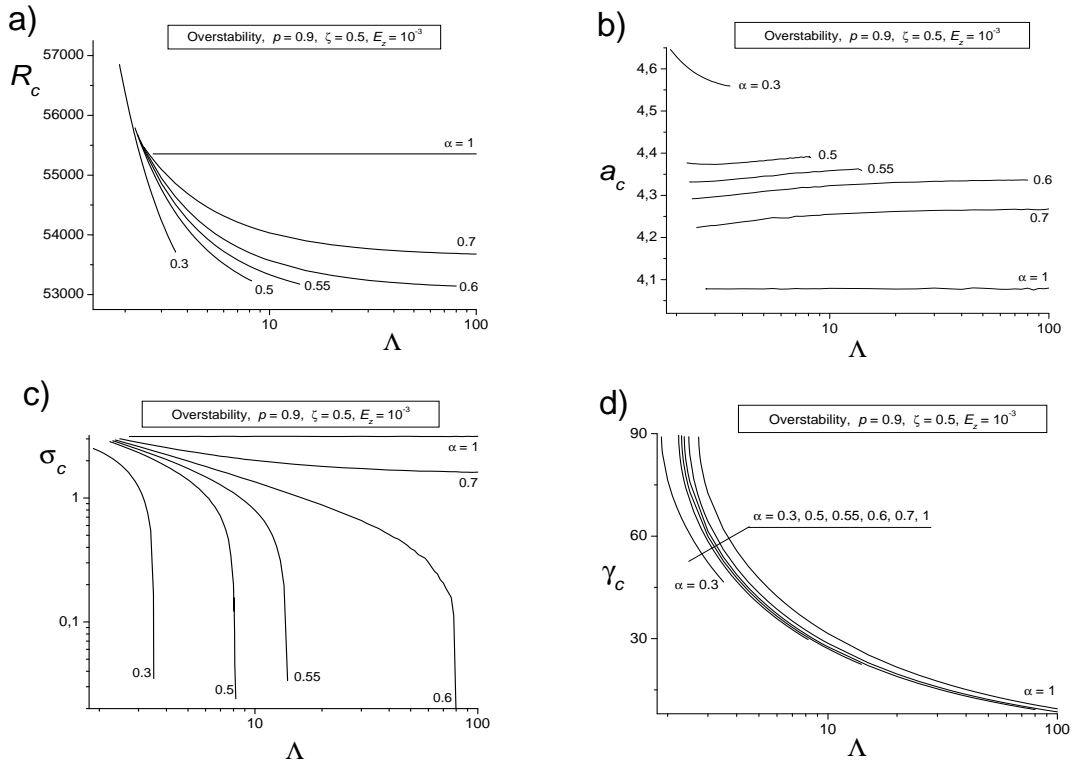
Podobne ako pri vyšetovaní vplyvu anizotropie na stacionárnu konvekciu, aj teraz sú v centre nášho záujmu závislosti základných parametrov opisujúcich nestabilitu (kritické Rayleighove číslo R_c , kritické horizontálne vlnové číslo a_c , kritický uhol γ_c a kritická frekvencia σ_c) na vstupných parametroch charakterizujúcich základný stav (Elsasserove číslo Λ , Ekmanove číslo E_z , koeficient anizotropie α). Numerické výsledky sú prezentované vo forme grafov, ktoré vyjadrujú závislosti R_c , a_c , σ_c a γ_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle E_z , alebo na Ekmanovom čísle pri konštantnom Elsasserovom čísle. Viaceré krivky na grafoch súvisia s rôznymi hodnotami parametra anizotropie α , čo je pre nás najdôležitejším výstupom numerického vyšetovania, lebo preskúmať vplyv anizotropie na vznikajúce nestability je hlavným cieľom tejto práce.



Obr. 5: Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c a b) kritickej frekvencie σ_c a na Elsasserovom čísle pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$.

Prvý obrázok (obr. 5) venovaný nestacionárnej konvekcií obsahuje dva grafy, ktoré vyjadrujú závislosť kritického uhla γ_c a kritickej frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle pri hodnote Ekmanovho čísla (v smere z) $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Grafy obsahujú 7 kriviek pre sedem rôznych hodnôt parametra anizotropie $\alpha = 1; 0,7; 0,6; 0,55; 0,5; 0,3; 0,1$. Krivka s označením $\alpha = 1$ je izotropný prípad a zmenšovaním parametra prechádzame k silnejšej anizotropii. Hneď na prvý pohľad môžeme vidieť výrazný vplyv anizotropie, a to hlavne v ohraničení intervalu Elsasserovho čísla, na ktorom môže daná nestabilita existovať. Zvyšovaním anizotropie sa tento interval zmenšuje smerom od vyšších hodnôt Elsasserovho čísla. Ľavá hranica tohto intervalu existencie je na anizotropii nezávislá, a to znamená že nami vyšetovaná nestacionárna konvekcia nemôže existovať pre malé hodnoty Elsasserovho čísla (a teda magnetického poľa) a ani extrémne silná anizotropia to neovplyvní. Prvý graf a) ukazuje, že pri daných vstupných parametroch začne pri určitej hodnote Elsasserovho čísla existovať nestacionárna konvekcia, ktorej konvektívne rolky sú orientované kolmo na magnetické

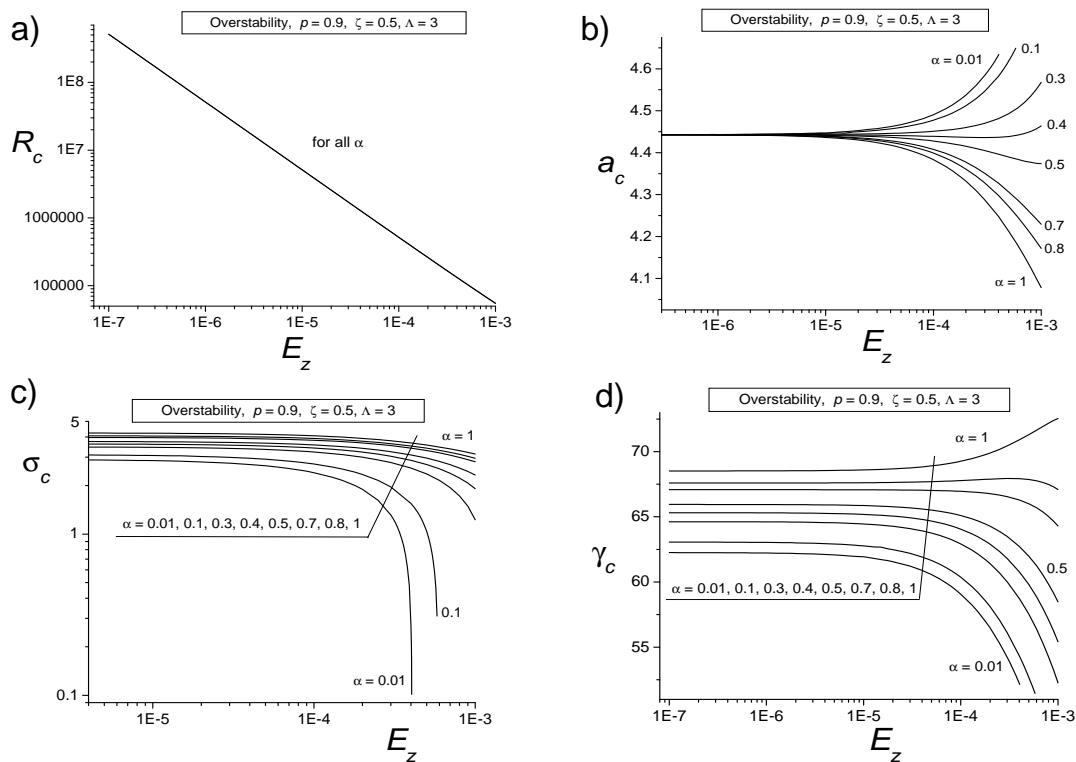
pole ($\gamma_c = 90^\circ$) a postupným zvyšovaním Elsasserovho čísla sa rolky nakláňajú k smeru magnetického poľa. Z grafu b) vidno, že zatiaľ čo frekvencia nestability v izotropnom prípade je konštantná a na Elsasserovom čísle nezávislá, pri anizotropných prípadoch je už frekvencia klesajúcou funkciou a na uvažovanom intervale hodnôt Elsasserovho čísla Λ sa od určitej anizotropie objavuje prechod nestacionárnej konvekcie na stacionárnu prudkým poklesom frekvencie na nulu. Hodnota Λ , pri ktorej dôjde k prechodu nestacionárnej frekvencie na stacionárnu, závisí na anizotropii a platí, že čím väčšia anizotropia (čím menšie α), tým menšie Λ prechodu. Toto ohraňovanie existencie nestacionárnej konvekcie môžeme ľahko vidieť aj na grafe a), ako náhly koniec kriviek pri určitých hodnotách Λ . Toto je jeden z dôležitých vplyvov anizotropie na nestacionárnu konvekciu, lebo v izotropnom prípade nie je ani náznak po takomto správaní. Tento obrázok neobsahuje grafy závislostí R_c vs Λ a a_c vs Λ , lebo vplyv anizotropie na tieto závislosti je minimálny. Kritické Rayleighove číslo má pri všetkých hodnotách parametra anizotropie hodnotu $R_c \doteq 1,7095 \cdot 10^8$ a rovnako je to s celkovým horizontálnym vlnovým číslom a_c , ktoré má hodnotu $a_c \doteq 4,44$. Na grafe by to boli prekrývajúce sa úsečky s rôznou dĺžkou (súvisí to s vplyvom anizotropie na interval hodnôt Λ , na ktorom existuje nestacionárna konvekcia, teda jednotlivé krivky by boli nerozoznateľné).



Obr. 6: Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického Rayleighovho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , c) kritickej frekvencie σ_c a d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$.

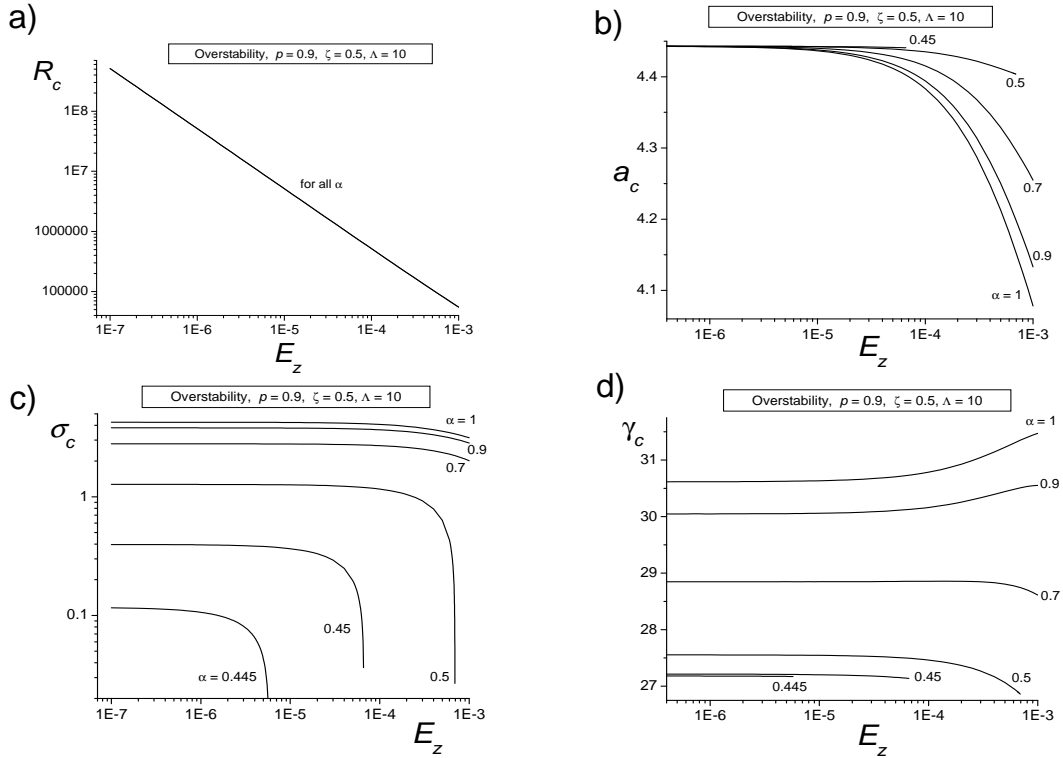
Ďalší obrázok opisuje rovnaké závislosti ako predchádzajúci (teraz už aj vrátane R_c vs Λ a a_c vs Λ), pričom jedinou zmenou (čo sa týka vstupných parametrov) je hodnota Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$. Rôzna anizotropia je opäť charakterizovaná rôznymi hodnotami

parametra anizotropie α , ktorý teraz nadobúda hodnoty $\alpha = 1; 0,7; 0,6; 0,55; 0,5$ a $0,3$. Hneď prvý pohľad na štyri grafy ukazuje rozdiel medzi izotropným prípadom $\alpha = 1$ a ostatnými anizotropnými prípadmi, kde sa tento rozdiel zväčšuje pre zväčšujúcu sa anizotropiu. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, z istého pohľadu pôsobí anizotropia nepriaznivo na vznik nestacionárnej konvekcie, lebo zužuje interval hodnôt Elsasserovho čísla, na ktorom môžu nestability existovať. Z prvého grafu a) vidíme, že zvyšovaním anizotropie sa hodnota Λ , pri ktorej začne nestabilita existovať, mierne znižuje, ale kritické Rayleighove číslo sa mierne zvyšuje. Porovnaním numerických hodnôt R_c pre rôzne anizotropie vidíme, že sú ovplyvnené minimálne, aj keď znižovanie R_c pre zvyšujúcu sa anizotropiu je zrejme. Podobné správanie má aj kritické celkové horizontálne číslo a_c na grafe b). Zvyšovaním anizotropie sa hodnota tohto čísla mierne zvyšuje a závislosť tohto celkového horizontálneho čísla na Elsasserovom čísle je tiež veľmi slabá. Kritické frekvencie σ_c sú pre všetky uvažované anizotropie malé, pričom sú klesajúcou funkciou Elsasserovho čísla. Pre všetky anizotropné prípady postupne klesnú frekvencie na nulovú hodnotu a nestacionárna konvekcia tak prestane existovať. Hodnota Elsasserovho čísla Λ , pri ktorej k tomuto poklesu dôjde, závisí na koeficiente anizotropie a platí, že čím menšie α , tým menšie Λ . Graf d) ukazuje, že nestacionárna konvekcia pre všetky vyšetované prípady anizotropie má pri hodnotách Λ , zodpovedajúcich vzniku rolky, orientované presne kolmo na magnetické pole ($\gamma_c = 90^\circ$) a postupne sa pre vyššie hodnoty Λ nakláňajú smerom k magnetickému pólu.



Obr. 7: Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického Rayleighovho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , c) kritickej frekvencie σ_c a d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Ekmanovom čísle pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 3$.

Nasledujúce obrázky obsahujú grafy závislosti R_c , a_c , σ_c a γ_c na Ekmanovom čísle E_z ,

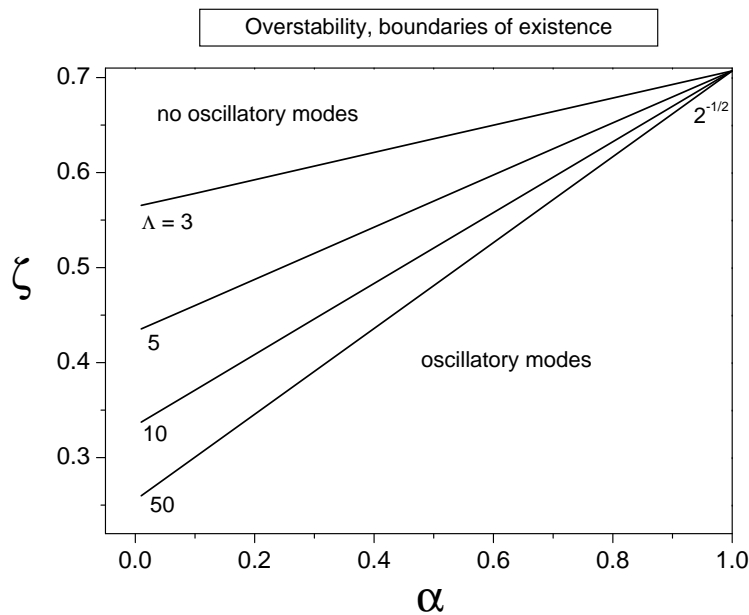


Obr. 8: Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť a) kritického Rayleighoveho čísla R_c , b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , c) kritickej frekvencie σ_c a d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Ekmanovom čísle pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 10$.

pričom hodnota Elsasserovho čísla je teraz konštantná a to $\Lambda = 3$ pre obrázok 7 a $\Lambda = 10$ na obrázku 8. Graf a) na obrázku 7 ukazuje, že anizotropia neovplyvňuje kritické Rayleighove číslo R_c , ktoré je klesajúcou funkciou Ekmanovho čísla E_z , a teda nemení preferenciu módov. Z druhého grafu b) vidíme, že pre malé hodnoty Ekmanovho čísla anizotropia nevlýva na kritické celkové horizontálne vlnové číslo a_c a ani samotné Ekmanove číslo nemá vplyv. Avšak, pre hodnoty $E_z = O(10^{-5})$ sa už začína vplyv anizotropie a horizontálne vlnové číslo sa správa ako rastúca funkcia na Ekmanovom čísle pre silnú anizotropiu ($\alpha = 0,01$), ako aj klesajúca funkcia pre izotropný prípad ($\alpha = 1$), pričom je postupný prechod medzi týmito dvoma rôznymi správaniami. Podobné správanie vidíme aj na grafe d), kde uhol natočenia γ_c je pre malé E_z závislý na anizotropii, ale nezávislý na samotnom Ekmanovom čísle. Pre väčšie hodnoty E_z sa už objavuje aj závislosť na Ekmanovom čísle a vplyv anizotropie sa zväčšuje ako kvantitatívne, tak aj kvalitatívne. V izotropnom prípade sa nárastom Ekmanovho čísla E_z uhol sklonu roliek zväčšuje a rolky sa nakláňajú do kolmého smeru vzhľadom na magnetické pole, ale anizotropia toto správanie zmení na opačné a rolky sa pre väčšie Ekmanove čísla nakláňajú viac do smeru magnetického poľa, teda uhol γ_c sa znižuje. Tretí graf c) ukazuje vplyv anizotropie na kritickú frekvenciu σ_c , kde najvýznamnejšou črtou tohto vplyvu je pokles celkovo malých frekvencií k nulovej hodnote pre prípad silnejšej anizotropie, čo teda znamená, že nestacionárna konvekcia neexistuje pri hodnotách Ekmanovho čísla väčších ako hodnota, pri ktorej dosiahne frekvencia nulovú hodnotu (táto hodnota je pre rôzne parametre anizotropie α rôzna). Anizotropia typu BM teda znevý-

hodňuje nestacionárnu konvekciu oproti stacionárnej v zmysle, že znižuje rozsah hodnôt Ekmanovho čísla, na ktorom nestacionárna konvekcia existuje, podobne ako je to v prípade Elsasserovho čísla Λ .

Nasledujúci obrázok 8 obsahuje grafy rovnakých závislostí ako predchádzajúci, ale hodnota Elsasserovho čísla je v tomto prípade $\Lambda = 10$. Rôzna anizotropia (rôzne krivky) opäť súvisí s rôznymi hodnotami parametra anizotropie α . V tomto prípade sme uvažovali tieto prípady anizotropie $\alpha = 1; 0,9; 0,7; 0,5; 0,45$ a $0,445$. Porovnaním týchto grafov s grafmi na predchádzajúcom obrázku 7 vidíme, že kvalitatívne sú veľmi podobné. Najpodstatnejší rozdiel je v obmedzení na možné hodnoty anizotropie, kde v tomto prípade nemôže existovať nestacionárna konvekcia pri anizotropných koeficientoch menších ako $\alpha = 0,445$, čo súvisí práve s už spomínaným znevýhodňovaním konvekcie v anizotropných prípadoch (hodnota Elsasserovho čísla $\Lambda = 10$ je už vysoká, aby pri nej existovala nestacionárna konvekcia pri silnej anizotropii).



Obr. 9: Vplyv anizotropie typu BM na podmienky existencie nestacionárnej konvekcie. Závislosť maximálnej hodnoty $\zeta = q_z^{-1}$ na parametri anizotropie α , pri ktorej existuje nestacionárna konvekcia pre štyri rôzne hodnoty Elsasserovho čísla $\Lambda = 3, 5, 10$ a 50 . Nestacionárna konvekcia neexistuje pre parametre nad uvedenými úsečkami a môže existovať pre parametre pod týmito úsečkami.

I. Eltayeb (1975) ukázal analyticky, že v prípade modelu rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve s horizontálnym základným magnetickým poľom je nutnou podmienkou existencie nestacionárnej konvekcie hodnota Robertsoveho čísla $q = \kappa/\eta$ väčšia ako $\sqrt{2}$. Navrhovaný model vyšetroval v prípade, keď Taylorove číslo T a Chandasekharove číslo Q sú veľké, pričom vzťah medzi týmito číslami je vo všeobecnosti $T = KQ^\alpha$, kde K a α sú kladné konštanty. V tejto predkladanej rigoróznnej práci boli ako hlavné bezrozmerné čísla (analogické k T a Q) použité Elsasserove číslo Λ a Ekmanove číslo E , ktoré s predchádzajúcimi súvisia nasledovne: $Q = \Lambda/E$ a $T = 1/E^2$. Podobne namiesto Robertsoveho čísla q používame jeho obrátenú hodnotu, ktorú označíme $\zeta = q_z^{-1}$. Pretože uvažujeme anizotropiu difúzných koeficientov, máme aj dve hodnoty Robertsoveho čísla, pričom ζ súvisí práve s hodnotou v z -ovom smere q_z . Eltayebova podmienka v izotropnom prípade $q > \sqrt{2}$

je vzhľadom na definíciu ζ ekvivalentná s podmienkou $\zeta < 1/\sqrt{2}$. Táto relatívne jednoduchá podmienka sa zavedením anizotropie difúzných koeficientov značne skomplikuje, čo ukazuje nasledujúci obrázok (9). Maximálna hodnota ζ , pri ktorej ešte môže existovať nestacionárna konvekcia, závisí nielen na hodnote parametra anizotropie, ale už aj na hodnote Elsasserovho čísla. Na grafe vidíme štyri úsečky, vyjadrujúce závislosť ζ na parametri anizotropie α pre štyri rôzne hodnoty Elsasserovho čísla $\Lambda = 3, 5, 10$ a 50 . Každá z týchto úsečiek v podstate oddeľuje oblasť existencie nestacionárnej konvekcie od oblasti neexistencie. Pre ľubovoľnú úsečku (ľubovoľná hodnota Elsasserovho čísla) platí, že pre parametre ζ a α nad úsečkou nestacionárna konvekcia nemôže existovať, ale pre parametre pod úsečkou už existovať môže (ale nemusí, je to len nutná podmienka, ale nie postačujúca; existenciu nestacionárnej konvekcie ešte ovplyvňujú aj iné vstupné parametre, napr. Ekmanove číslo E_z), čo je na obrázku aj symbolicky naznačené. Táto hranica existencie je rôzna pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla Λ a táto vlastnosť je pre väčšiu anizotropiu (pre menšie hodnoty parametra anizotropie) výraznejšia, pričom sa ale úplne stráca pri približovaní sa k izotropnému prípadu. V izotropnom prípade ($\alpha = 1$) majú všetky úsečky spoločný bod s hodnotou $\zeta = 1/\sqrt{2}$, čo je presne hodnota, ktorú analyticky spočítal Eltayeb.

6 Závery

V tejto práci bol preskúmaný vplyv anizotropie difúzných koeficientov na jeden model rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rotujúcej vrstve elektricky vodivej tekutiny. Vrstva rotuje okolo vertikálnej osi, je v nej udržiavaný rovnomerný teplotný profil, pričom je vrstva zohrievaná zospodu a chladená z vrchu a je preniknutá základným horizontálnym homogénnym magnetickým poľom. Tento model vychádza z prác I. A. Eltayeba (1972, 1975), v ktorých urobil stabilitnú analýzu vrstvy pri rôznych relatívnych orientáciách osi rotácie a základného magnetického poľa. Podobne ako Eltayeb, aj v tejto práci sme hľadali nestability v tvare horizontálnych roliek, a to buď na čase nezávislých (stacionárna konvekcia), alebo v čase premenných (overstabilita). Do modelu boli zavedené dva základné typy anizotropie difúzných koeficientov (koeficient tepelnej difúzie a koeficient viskozity) v zmysle rôznych hodnôt týchto koeficientov v rôznych základných smeroch kartézskej geometrie. Boli uvažované dva základné typy anizotropie: stratifikačná anizotropia (SA) a anizotropia podľa Braginského a Meytlisa (BM). V prípade stratifikačnej anizotropie sú difúzne koeficienty v horizontálnych smeroch x a y rovnaké, ale iné ako vo vertikálnom smere z . Podľa toho či je difúzny koeficient vo vertikálnom smere väčší alebo menší, ako v horizontálnych smeroch, rozlišujeme ešte dva typy SA anizotropie a to o typ, pre ktorý platí $\nu_{zz} < \nu_{xx} = \nu_{yy}$ a a typ pre ktorý platí $\nu_{zz} > \nu_{xx} = \nu_{yy}$. Pre anizotropiu typu BM je charakteristické, že difúzne koeficienty sú väčšie v smere magnetického poľa a v smere v rotácie, čo v našom prípade vertikálnej rotačnej osi a horizontálneho základného magnetického poľa v horizontálnom smere y znamená $\nu_{zz} = \nu_{yy} > \nu_{xx}$. V prípade stacionárnej konvekcie bol vyšetrovaný vplyv SA anizotropie aj BM anizotropie, zatiaľ čo v prípade overstability len vplyv anizotropie podľa Braginského a Meytlisa.

Najdôležitejšie výsledky štúdia stacionárnej konvekcie môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov, obidva typy anizotropie, SA (anizotropia typu a) aj BM, uľahčujú nástup konvekcie znížením kritického Rayleighovho čísla (na vznik nestability je pri silnejšej anizotropii potrebný menší teplotný rozdiel medzi spodnou a hornou hranicou vrstvy); SA anizotropia uľahčuje nástup konvekcie efektívnejšie ako anizotropia typu BM, je to hlavne sklonom roliek vzhľadom na magnetické pole, pričom pre SA typ anizotropie sú rolky od smeru magnetického poľa viac odklonené, ako je to pri type BM, najväčšie rozdiely medzi oboma typmi anizotropií sú pre hodnoty Elsasserovho čísla najrelevantnejšie pre podmienky jadra Zeme; pre silné magnetické polia konvekcia stráca závislosť na anizotropii (na type anizotropie aj na samotnej anizotropii – hodnote parametra anizotropie α), rolky sú v oboch prípadoch anizotropie takmer rovnobežné s magnetickým poľom (asymptoticky sa uhol náklonu blíži k nulovej hodnote), a teda aj vplyv magnetického poľa na konvekciu sa znižuje.

Dôležité výsledky štúdia vplyvu anizotropie na nestacionárnu konvekciu sú zhrnuté do nasledujúcich bodov: nestacionárna konvekcia je rovnako preferovaná ako stacionárna konvekcia v izotropnom prípade (hodnoty kritického Rayleighovho čísla sú rovnaké); anizotropia nemení preferenciu nestacionárnej konvekcie (silnejšia anizotropia nedáva ľahšie vybudenie nestability, hodnota kritického Rayleighovho čísla je na anizotropii nezávislá); pri veľkých magnetických poliach a pri veľkej viskozite nestacionárna konvekcia neexistuje, lebo plynule prechádza do stacionárnej konvekcie (frekvencia dosiahne nulovú hodnotu); nestacionárna konvekcia neexistuje ani pri slabom magnetickom poli, teda existuje len interval hodnôt magnetického poľa (resp. hodnôt Elsasserovho čísla, ktoré je mierou magnetického poľa), v ktorom existuje nestacionárna konvekcia a veľkosť tohto intervalu závisí od anizotropie a platí, že pri silnejšej anizotropii je interval existencie nestacionárnej konvekcie

menší. Toto obmedzenie súvisí s nutnou podmienkou existencie nestacionárnej konvekcie, a to s minimálnou hodnotou Robertsoveho čísla q , pri ktorej už nestacionárna konvekcia môže existovať. V izotropnom prípade je to hodnota $\sqrt{2}$, pričom vyšetovaná BM anizotropia túto hodnotu ovplyvňuje v zmysle, že pre silnejšiu anizotropiu táto hodnota narastá. Anizotropia mení aj vplyv Elsasseroveho čísla na túto nutnú podmienku, lebo nárastom Elsasserovho čísla sa zväčšuje aj minimálne "vhodné" Robertsove číslo a tento vplyv je výraznejší pre silnejšiu anizotropiu (menšie α).

7 PodĎakovanie

Moje poďakovanie patrí môjmu školiteľovi (v rámci PhD štúdia) doc. RNDr. Jozefovi Brestenskému, CSc. za priateľský prístup, odborné uvedenie do problematiky a cenné rady pri vypracovaní rigorózneho práce.

Osobitné poďakovanie patrí všetkým, ktorí priamo alebo nepriamo pomáhali pri riešení problematiky predkladanej práce, a to hlavne kolegom a priateľom doc. RNDr. Sebastiánovi Ševčíkovi, CSc., RNDr. Alexandre Marsenić a RNDr. Petrovi Pažákovi.

Táto práca bola finančne podporená Vedeckou grantovou agentúrou VEGA (grant č. 1/3069/06) a Univerzitou Komenského (grant č. UK/377/2007)

8 Literatúra

- Braginsky S. I., "Magnetohydrodynamics of the Earth's Core", *Geomag. Aeron.* **4**, 898 – 916 (1964). English Translation 698 – 712.
- Braginsky S. I. a Meytlis V. P., "Local turbulence in the Earth's core", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **55**, 71 - 87 (1990).
- Braginsky S. I., "Dynamics of the stably stratified ocean at the top of the core", *Phys. Earth Planet. Inter.* **111**, 21 – 24 (1999).
- Brestenský J. a Rädler K.-H., "Mean electromotive forces resulting from instabilities in a stratified rapidly rotating fluid layer permeated by a magnetic field", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, **49**, 57 – 70 (1989).
- Brestenský J. a Ševčík S., "Mean electromotive force due to magneto- convection in rotating horizontal layer with rigid boundaries", In: M.R.E. Proctor, ed., *Geodynamo Modelling*, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, **77** (1-4): 191–208 (1994).
- Brestenský J., Ševčík S. a Šimkanin J., "The boundary conditions influence on a magnetoconvection of a rapidly rotating horizontal fluid layer stratified either uniformly or non-uniformly (mathematical approaches)", In: Proc. of the 1st conference of Slovak geophysicists, ed(s). I. Túnyi et al., Geophys. Inst. of SAS, Bratislava, 80–85 (1995).
- Brestenský J., Ševčík S. a Šimkanin J., "Rotating magnetoconvection in dependence on stratification, diffusive processes and boundary conditions", In: *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, eds. P. Chossat, D. Armbuster and I. Oprea, NATO Science Series **26**, 133 – 144, Kluwer Academic Publishers (2001).
- Brestenský J., Šoltis T. a Ševčík S., "Linear Rotating magnetoconvection with anisotropic diffusive coefficients", *Proceedings of the Riga Pamir conference, Fundamental and Applied MHD* **1**, 101 – 104 (2005).
- Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Clarendon press, Oxford (1961).
- Donald J.T. a Roberts P.H., "The effect of Anisotropic heat transport in the Earth's core on the geodynamo", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **98**, No. 5, 367 – 384 (2004).
- Eltayeb I.A., "Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer", *Proc. R. Soc. Lond. A* **326**, 229 – 254 (1972).
- Eltayeb I.A., "Overstable hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer", *J. Fluid Mech.* **71**, 161 – 179 (1975).
- Fearn D.R., "Hydromagnetic flow in planetary cores", *Rep. Prog. Phys.*, **61**, 175 – 235 (1998).
- Hide R., "Free Hydromagnetic Oscillations of the Earth's Core and the Theory of the Geomagnetic Secular Variations", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **259**, 615 – 650 (1966).
- Jones C.A. a Roberts P.H., "The Onset of Magnetoconvection at large Prandtl Number in a rotating Layer II. small magnetic Diffusion" *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **93**, 173 – 226 (2000).
- Kono M. a Roberts P.H., "Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field", *Reviews of Geophysics*, **40**, 1–53 (2002).
- Matsushima M., Nakajama T. a Roberts P.H., "The anisotropy of local turbulence in the Earth's core", *Earth Planet Space* **51**, 277 – 286 (1999).
- Phillips C.G. a Ivers D.J., "Spherical anisotropic diffusion models for the Earth's core", *Phys. Earth Planet. Inter.* **117**, 209 – 223 (2000).

- Phillips C.G. a Ivers D.J., "Spectral interactions of rapidly anisotropic turbulent viscous and thermal diffusion in the Earth's core", *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 93 – 107 (2001).
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. a Vetterling W.T., *Numerical recipes*, Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- Proctor M.R.E., "Convection and Magnetoconvection in a Rapidly Rotating Sphere", *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, eds. M.R.E. Proctor and A.D. Gilbert, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- Revallo M., Ševčovič D., Ševčík S. a Brestenský J., "Viscously controlled nonlinear magnetoconvection in a non-uniformly stratified horizontal layer", *Phys. Earth Planet. Inter.*, **111**, 83-92 (1999).
- Roberts P.H. a Jones C.A., "The Onset of Magnetoconvection at large Prandtl Number in a rotating Layer I. finite magnetic Diffusion" *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **92**, 289 – 325 (2000).
- Roberts P.H., "Dynamics of the core, geodynamo", *Reviews of Geophysics* 443 – 450 (1995).
- Siso-Nadal F. a Davidson P.A., "Anisotropic evolution of small isolated vortices within the core of the Earth", *Phys. Fluids*, **19** 1242 – 1254 (2004).
- Šimkanin J., Brestenský J. a Ševčík S., "Dependence of rotating magnetoconvection in horizontal layer on boundary conditions and stratification", In: J. Brestenský and S. Ševčík, eds., *Stellar and Planetary Magnetoconvection, Acta Astron. et Geophys. Univ. Comeniana*, **19** 195 – 220 (1997).
- Ševčík S., Brestenský J. a Šimkanin J., "MAC waves and related instabilities influenced by viscosity in dependence on boundary conditions", *Phys. Earth Planet. Inter.* **122** (3-4), 161 – 174 (2000).
- Šoltis T., "Hydromagnetické nestability v podmienkach zemského jadra", *Diplomová práca*, FMFI UK, Bratislava (2004).
- Soward A. M., "Thermal and magnetically driven convection in a rapidly rotating fluid layer", *J. Fluid Mech.* **90**, 669 – 684 (1979).
- St. Pierre M. G., "On the local turbulence in the Earth's core", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **83**, 293 – 306 (1992)

9 Príspevky na domácich a zahraničných konferenciách

- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S. "Influence of thermal conductivity anisotropy on rotating magnetoconvection", SEDI 2004, Garmisch – Partenkirchen (2004)
- Brestenský J., Šoltis T. a Ševčík S. "Rotating Magnetoconvection With Thermal Diffusivity Anisotropy", 7th MHD – Days, Ilmenau (2004)
- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S. "Magnetic instabilities influenced by anisotropic viscosity in the Earths core", EGU – General Assembly, Vienna (2005)
- Brestenský J., Šoltis T. a Ševčík S., "Linear Rotating magnetoconvection with anisotropic diffusive coefficients", Riga Pamir conference, Riga (2005)
- Brestenský J., Šoltis T. a Ševčík S., "Difúzne magnetické nestability v stabilne stratifikovanej kvapalnej vrstve", 6. Slovenská geofyzikálna konferencia, Bratislava (2005)
- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S., "Diffusive MC-modes in the fluid layer with anisotropic viscosity", IAGA – Scientific Assembly, Toulouse, (2005)

- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S., "Influence of anisotropic transport coefficients on the diffusive modes in the rotating magnetoconvection", 8th MHD – Days, Potsdam (2005)
- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S., "Axisymmetric hydromagnetic instabilities in rotating planar layer permeated by vertical magnetic field influenced by anisotropic viscosity of fluid", EGU – General Assembly, Vienna (2006)
- Brestenský J., Marsenić A., Šoltis T. a Ševčík S., "Rotating magnetoconvection in planar layer fluid with anisotropic viscosity and thermal diffusivity", EGU – General Assembly, Vienna (2006)
- Brestenský J., Marsenić A., Šoltis T. a Rameshwar Y., "The influence of anisotropic viscosity and thermal diffusivity on convection in a fluid planar layer", SEDI Prague (2006)
- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S., "Axisymmetric hydromagnetic instabilities and their possible relation to torsional oscillations in the Earth's core", SEDI Prague (2006)
- Šoltis T., Brestenský J. a Ševčík S. " MAC/MC – modes in variously stratified fluid layer with anisotropic diffusive coefficients", EGU – General Assembly, Vienna (2007)
- Šoltis T., Brestenský J. a Marsenić A., "Earthlike hydromagnetic instabilities influenced by various types of anisotropic diffusive coefficients", VII. Slovenská geofyzikálna konferencia, Bratislava (2007)
- Šoltis T. a Brestenský J., "Hydromagnetic instabilities in the Earth's core influenced by various types of anisotropic diffusive coefficients" IUGG Perugia (2007)

10 Príloha A

V tejto prílohe chcem uviesť podrobnejší postup odvodenia rovníc (12 - 16). Najprv odvodím dve rovnice, ktoré vzniknú použitím ďalej popísanej procedúry z pohybovej Navier-Stokesovej rovnice. Členy Navier-Stokesovej rovnice symbolicky označíme poradovým číslom rastúcim zľava do prava, pričom člen $-\nabla p$ nečísľujeme, lebo budeme aplikovať operátor rotácie, ktorý tento výraz vynuluje.

$$R_o \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda(\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{y}} + R\tilde{\vartheta}\hat{\mathbf{z}} + E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}.$$

{1}
{2}
{3}
{4}
{5}

Na jednotlivé členy postupne aplikujeme operáciu rotácie (samozrejme s uvážením rozkladu magnetického a rýchlostného poľa na toroidálnu a poloidálnu časť) a po dosadení porúch (\tilde{w} , $\tilde{\omega}$, \tilde{b} , \tilde{j} a $\tilde{\vartheta}$) vo všeobecnom tvare

$$\tilde{f}(x, y, z, t) = \Re [F(z) \exp(ilx + imy) \exp(\lambda t)],$$

uvážime len zložku vo vertikálnom smere $\hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{1\} &= R_o \lambda \tilde{\omega} \rightarrow R_o \lambda \Omega, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{2\} &= -\partial_z \tilde{w} \rightarrow -DW, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{3\} &= \Lambda(im\tilde{j}) \rightarrow \Lambda(imJ), \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{4\} &= 0 \rightarrow 0, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{5\} &= E_z \mathcal{D}_\alpha \tilde{\omega} \rightarrow E_z \mathcal{D}_\alpha \Omega, \end{aligned}$$

z čoho dostaneme prvú dôležitú rovnicu pre neznáme funkcie $F(z) = W(z)$, $\Omega(z)$, $B(z)$, $J(z)$ a $\Theta(z)$ v tvare

$$[E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] \Omega + DW + im\Lambda J = 0.$$

Ďalej na tie isté členy aplikujeme postupne dvakrát operáciu rotácie a opäť uvažujeme len $\hat{\mathbf{z}}$ zložky, čo nám dá

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \nabla \times \{1\} &\rightarrow -R_o \lambda (D^2 - a^2) W, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \nabla \times \{2\} &\rightarrow -D\Omega, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \nabla \times \{3\} &\rightarrow -im\Lambda (D^2 - a^2) B, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \nabla \times \{4\} &\rightarrow Ra^2 \Theta, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \nabla \times \{5\} &\rightarrow -E_z \mathcal{D}_\alpha (D^2 - a^2) W. \end{aligned}$$

Dostaneme tak druhú dôležitú rovnicu

$$(D^2 - a^2) [E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] W - D\Omega + im\Lambda (D^2 - a^2) B = a^2 R\Theta.$$

Ak poruchy v požadovanom tvare dosadíme do rovnice vedenia tepla a opäť uvažujeme len $\hat{\mathbf{z}}$ zložku zo všetkých troch členov tejto rovnice

$$\frac{1}{q_z} \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \tilde{\vartheta},$$

tak dostaneme tretiu požadovanú dôležitú rovnicu

$$q_z^{-1} \lambda \tilde{\vartheta} = \tilde{w} + \mathcal{D}_\alpha \tilde{\vartheta} \quad \rightarrow \quad (\mathcal{D}_\alpha - \zeta \lambda) \Theta + W = 0$$

Posledná rovnica, ktorú podobným spôsobom využijeme, je indukčná rovnica s troma nasledujúcimi členmi

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{y}}) + \nabla^2 \mathbf{b}.$$

{1}
{2}
{3}

Dosadením porúch do týchto členov a opäť uvážením len zložiek v $\hat{\mathbf{z}}$ smere dostaneme ďalšiu hľadanú rovnicu v nasledujúcom tvare

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \{1\} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \{2\} + \hat{\mathbf{z}} \cdot \{3\} \quad \rightarrow \quad (D^2 - a^2 - \lambda)B + imW = 0.$$

Poslednú rovnicu získame aplikáciou operátora rotácie na tri členy tejto rovnice a uvážením $\hat{\mathbf{z}}$ zložiek postupne dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{1\} &= \lambda \tilde{j} \quad \rightarrow \lambda J, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{2\} &= im\tilde{\omega} \quad \rightarrow im\Omega, \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \{3\} &= (\partial_{zz} - a^2)\tilde{j} \rightarrow (D^2 - a^2)J, \end{aligned}$$

čo nám dá rovnicu

$$(D^2 - a^2 - \lambda)J + im\Omega = 0.$$

11 Príloha B

V tejto prílohe je odvodených niekoľko zložitejších a veľmi veľkých algebraických výrazov, ktoré sú dôležité pre napísanie programu na numerické hľadanie kritických Rayleighových čísel. V hlavnom texte práce nemá zmysel tieto výrazy písať, lebo ich presné vyjadrenie nie je pre pochopenie procedúry hľadania kritických Rayleighových čísel dôležité a stačí to preto popísať symbolicky. Pre úplnosť a pre zostavenie počítačového programu je ale žiadúce poznať toto vyjadrenie presne. Vychádzame z rovnice (28), ktorá je vyjadrením predpisu pre Rayleighove číslo a ktorá sa dá ľahko upraviť na tvar zlomku

$$R_1 = \frac{(A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \left\{ A [(A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{y}]^2 + T_1(A + i\sigma_1)^2 \right\}}{(A - 1)(A + i\sigma_1) \left\{ (A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{y} \right\}}$$

v ktorom je aj čitateľ aj menovateľ komplexný výraz. Úlohou je rozdeliť Rayleighove číslo na reálnu a imaginárnu časť. Ak si posledný výraz napíšeme symbolicky do tvaru, kde aj čitateľ aj menovateľ bude už rozdelený na reálnu a imaginárnu časť,

$$R_1 = \frac{C_1 + iC_2}{M_1 + iM_2},$$

potom použitím základných pravidiel práce s komplexnými číslami môžeme Rayleighove číslo R_1 napísať v tvare

$$R_1 = \Re(R_1) + i\Im(R_1) = \frac{C_1 \cdot M_1 + C_2 \cdot M_2}{M_1^2 + M_2^2} + i \frac{C_2 \cdot M_1 - C_1 \cdot M_2}{M_1^2 + M_2^2},$$

kde pomocné premenné C_1 , C_2 , M_1 a M_2 majú nasledujúce zložité vyjadrenia

$$\begin{aligned} C_1 = & AA_\alpha \left[A(AA_\alpha^2 + T_1) + 2AA_\alpha Q_1\tilde{y} + Q_1^2\tilde{y}^2 \right] - \\ & \left\{ A_\alpha \left[T_1 + A(A_\alpha^2 + 4AA_\alpha p + p(A^2 p + 2Q_1\tilde{y})) \right] + \right. \\ & \left. 2A \left[T_1 + (A_\alpha + Ap)(AA_\alpha + Q_1\tilde{y}) \right] \zeta \right\} \sigma_1^2 + Ap \left[A_\alpha p + 2(A_\alpha + Ap)\zeta \right] \sigma_1^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & \left\{ 2AA_\alpha \left[T_1 + (A_\alpha + Ap)(AA_\alpha + Q_1\tilde{y}) \right] + A \left[A(AA_\alpha^2 + T_1) + 2AA_\alpha Q_1\tilde{y} + Q_1^2\tilde{y}^2 \right] \zeta - \right. \\ & \left. \left[2AA_\alpha p(A_\alpha + Ap) + (T_1 + A(A_\alpha^2 + 4AA_\alpha p + p(A^2 p + 2Q_1\tilde{y}))) \right] \zeta \right\} \sigma_1^2 + Ap^2 \zeta \sigma_1^4 \sigma_1 \end{aligned}$$

$$M_1 = (A - 1) \left[A(AA_\alpha + Q_1\tilde{y}) - (A_\alpha + 2Ap)\sigma_1^2 \right],$$

$$M_2 = (A - 1)\sigma_1(2AA_\alpha + A^2 p + Q_1\tilde{y} - p\sigma_1^2).$$

Z fyzikálnych dôvodov kladieme imaginárnu časť Rayleighoveho čísla R_1 rovnú nule, pričom takto zadefinovaná rovnica nám dáva dôležitý vzťah medzi vlnovými číslami l a m a medzi frekvenciou σ_1 . Môžeme teda rovnicu $\Im(R_1) = 0$ zjednodušiť na tvar $C_2 \cdot M_1 - C_1 \cdot M_2 = 0$, ktorý sa dá po dosadení za premenné C_1 , C_2 , M_1 a M_2 a po niekoľkých algebraických úpravách previesť na polynóm siedmeho rádu. Tento polynóm sa dá po rôznych zjednodušeníach (matematických aj fyzikálnych, opísaných v hlavnom texte práce) previesť na polynóm tretieho rádu,

$$K_4 S^3 + K_3 S^2 + K_2 S + K_1 = 0,$$

kde $S = \sigma_1^2$ a jednotlivé koeficienty možno vyjadriť ako $K_i = (A - 1)K'_i$, kde

$$K'_4 = AA_\alpha p^2(p + \zeta)$$

$$K'_3 = \left\{ A^2 p^2 Q_1 \tilde{y} \zeta + A_\alpha T_1 (\zeta - p) + 2A^3 A_\alpha p^2 (p + \zeta) + AA_\alpha \left[A_\alpha^2 (p + \zeta) - p Q_1 \tilde{y} (3p + 2\zeta) \right] \right\}$$

$$K'_2 = \left\{ A_\alpha Q_1 T_1 \tilde{y} + A^4 p^2 Q_1 \tilde{y} \zeta + A^5 A_\alpha p^2 (p + \zeta) + A Q_1 \tilde{y} \left[T_1 \zeta + A_\alpha Q_1 \tilde{y} (3p + \zeta) - A_\alpha^3 \right] + A^3 A_\alpha \left[2A_\alpha^2 (p + \zeta) - p Q_1 \tilde{y} (3p + 2\zeta) \right] + A^2 \left[2A_\alpha T_1 (\zeta - p) - 2p Q_1^2 \tilde{y}^2 \zeta + A_\alpha^2 Q_1 \tilde{y} (2p + 3\zeta) \right] \right\}$$

$$K'_1 = A \left\{ A_\alpha (A^2 p - Q_1 \tilde{y}) (A^2 A_\alpha^2 - A T_1 + 2A A_\alpha Q_1 \tilde{y} + Q_1^2 \tilde{y}^2) + A (A A_\alpha + Q_1 \tilde{y}) \left[A (A A_\alpha^2 + T_1) + 2A A_\alpha Q_1 \tilde{y} + Q_1^2 \tilde{y}^2 \right] \zeta \right\}$$