

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Vplyv anizotropných difuzívít na hydromagnetické nestability
v podmienkach zemského jadra

DIZERTAČNÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2010

RNDr. Tomáš Šoltis

Vplyv anizotropných difuzív na hydromagnetické nestability v podmienkach zemského jadra

DIZERTAČNÁ PRÁCA

RNDr. Tomáš Šoltis

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

11-45-9 Geofyzika

Školiteľ: Doc. RNDr. Jozef Brestenský, CSc.

Bratislava 2010

PodĎakovanie

Za priateľský prístup, odborné uvedenie do problematiky a cenné rady počas doktorandského štúdia ďakujem môjmu školiteľovi doc. RNDr. Jozefovi Brestenskému, CSc.

Osobitné podĎakovanie patrí všetkým, ktorí priamo alebo nepriamo pomáhali pri riešení problematiky predkladanej práce, a to hlavne kolegom a priateľom doc. RNDr. Ľubomírovi Ševčíkovi, CSc., RNDr. Alexandrovi Marseničovi a RNDr. Petrovi Pažákovi. Ďakujem aj kolegom z Katedry astronómie, fyziky Zeme a meteorológie FMFI a Geofyzikálneho ústavu SAV za podporu a diskusie a za vytvorenie tvorivého prostredia.

Abstrakt

RNDr. Tomáš Šoltis

Vplyv anizotropných difuzívít na hydromagnetické nestability
v podmienkach zemského jadra

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Školiteľ: Doc. RNDr. Jozef Brestenský, CSc.

Bratislava 2010

122 strán

Turbulentný stav vo vonkajšom zemskom jadre je dôvodom pre uváženie anizotropných difúzných koeficientov, a to hlavne viskozity a tepelnej difuzivity. Preto v nekonečnej rovinatej vrstve sú študované 4 modely rotujúcej magnetokonvekcie, v ktorých izotropný prípad difúzných koeficientov je porovnávaný s tromi rôznymi anizotropnými prípadmi.

Sú odvodené matematické vyjadrenia anizotropného koeficientu tepelnej difuzivity a viskozity v cylindrickej aj kartézskej geometrii, a to v najjednoduchšej forme, t.j. vo forme diagonálneho tenzora, ktorý má dve z troch zložiek rovnaké, ale rôzne od tretej zložky. Rôzne typy anizotropie súvisia teda s tým, ktoré dve zložky sú rovnaké, resp. či hodnota u dvojice je väčšia alebo menšia ako u tretej zložky. Dôležitým pojmom je horizontálna izotropia, ktorá znamená rovnaké difúzne koeficienty práve v horizontálnych smeroch. Anizotropiu, pri ktorej je zachovaná horizontálna izotropia, nazývame stratifikačná anizotropia (*SA*). Ak je difuzivita v horizontálnych smeroch väčšia ako vo vertikálnom smere, hovoríme o stratifikačnej anizotropii oceánskeho typu a označujeme ju *So*; ak platí opak, t.j. difuzivita vo vertikálnom smere je väčšia, ako v horizontálnych smeroch, hovoríme o stratifikačnej anizotropii atmosférického typu a označujeme ju *Sa*. Podľa Braginského a Meytlisa je vďaka lokálnej turbulencii v zemskom jadre zvýšená difúzia v smere osi rotácie a v smere magnetického poľa. Základný stav modelu III nám umožňuje zaviesť anizotropiu tak, že difúzne koeficienty sú v smeroch *y* a *z* rovnaké a väčšie, ako v smere *x*, teda $\nu_{yy} = \nu_{zz} > \nu_{xx}$. Túto anizotropiu nazývame anizotropiou podľa Braginského a Meytlisa. Táto *BM* anizotropia, definovaná v modeli III, je jediný vyšetrovaný prípad, pri ktorom je porušená horizontálna izotropia.

4 modely rotujúcej magnetokonvekcie (I-IV) sa odlišujú hlavne konfiguráciou základného magnetického poľa, orientáciou osi rotácie a súradnicovou sústavou, v ktorej sú dané modely riešené. Lineárnou stabilitnou analýzou je vyšetrovaný vplyv anizotropií na základné parametre, opisujúce časovú a priestorovú štruktúru konvekcie (kritické Rayleighove číslo, kritické vlnové čísla a kritická frekvencia) v priestore vstupných parametrov, popisujúcich základný stav (Ekmanove, Elsasserove, Robertsove, magnetické Prandtlove, Rossbyho číslo, a parameter anizotropie,...).

Vo všetkých skúmaných modeloch bol objavený viac alebo menej výrazný vplyv anizotropií difúzných koeficientov na vznikajúcu magnetokonvekciu, pričom boli anizotropiou ovplyvnené nielen podmienky nástupu konvekcie (kritické Rayleighove číslo), ale aj priestorové a časové vlastnosti konvekcie (kritické vlnové čísla a kritická frekvencia). *So* anizotropia má vo všeobecnosti stabilizujúci účinok na vrstvu a zväčšuje horizontálne rozmery

konvektívnych útvarov. *Sa* anizotropia má opačný účinok, teda uľahčuje vznik konvekcie a znižuje horizontálne rozmery konvektívnych roliek. V každom z modelov I-IV je možné nájsť také hodnoty anizotropného parametra $\alpha \neq 1$, ktoré dávajú mnohé charakteristiky vznikajúcich nestabilit bližšie k reálnym hodnotám, ako v izotropnom prípade $\alpha = 1$.

V modeli I sa študuje vplyv anizotropie nielen na tepelne, ale aj na magneticky hnané nestability, pretože vďaka nehomogénemu základnému magnetickému poľu tie druhé vznikajú len tu. V prípade dokonca slabšej *So* anizotropie vznikajú módy, ktoré v izotropnom prípade nemajú obdobu. Sú to východným smerom sa šíriace magneticky hnané MAC módy.

Lineárna analýza modelu II v cylindrickej súradnej sústave s vertikálnym základným magnetickým poľom umožnila aspoň indikovať, že nestacionárna osovosymetrická konvekcia môže aj bez horizontálnej zložky magnetického poľa vybudíť nestability, ktoré z kinematického hľadiska môžu mať charakter torzných oscilácií zemského jadra. Model II (podobne ako model IV) sa využíva aj na štúdium vplyvu *BM* anizotropie, avšak zachováva ju horizontálnu izotropiu, čím vlastne *BM* je tu, ako aj v modeli IV súčasne i *SA* (tu *So* a v modeli IV *Sa*) anizotropiou.

Model III umožňuje ukázať, ako *BM* anizotropiou difúzných koeficientov narušená horizontálna izotropia výrazne ovplyvní vznikajúce nestability. Jedine v tomto modeli sa účinne môžu porovnať dôsledky *SA* i *BM* anizotropie.

Vplyv anizotropie v modeli IV s ležatou rotačnou osou je odlišný, lebo anizotropia má rôzny vplyv na stacionárnu a na nestacionárnu konvekciu. Teda rovnaký, ako v modeloch I–III so zvislou rotačnou osou na stacionárnu konvekciu, ale opačný na nestacionárnu konvekciu. U ležatej osi rotácie, modelujúcej rovníkové oblasti jadra, nestacionárna konvekcia ľahšie (ťažšie) nastupuje a horizontálne rozmery roliek má menšie (väčšie) pri *So* (*Sa*) anizotropii, ako v izotropnom prípade. Predkladané štúdium modelov so zvislou a ležatou osou rotácie umožňuje vysvetliť prečo podobné (ale jednoduchšie) modely v zložitejšej sférickej geometrii sa v niečom odlišujú vo výsledkoch od modelov v horizontálnej vrstve, ale so zvislou rotačnou osou.

klúčové slová: anizotropné difúzne koeficienty, rotujúca magnetokonvekcia, turbulencia, zemské jadro, geomagnetické pole

Abstract

RNDr. Tomáš Šoltis

The influence of anisotropic diffusivities on hydromagnetic instabilities
in the Earth's core conditions

Comenius University Bratislava
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department of Astronomy, Physics of the Earth and Meteorology

Supervisor: Doc. RNDr. Jozef Brestenský, CSc.

Bratislava 2010

122 pages

The turbulent state in the Earth's outer core is the reason for the anisotropic diffusive coefficients, in particular the viscosity and thermal diffusivity. Therefore, in infinite planar layer 4 models of rotating magnetoconvection are studied with comparing of isotropic case and three various anisotropic cases of diffusive coefficients.

Mathematical formulas of anisotropic coefficients of thermal diffusivity and viscosity in cylindrical and cartesian geometry are derived in the most possibly simple form, i.e. in the form of diagonal tensor which has two of its three components the same, but different from the third component. Various types of anisotropy correspond to the choice of two equal components. The notion of horizontal isotropy is important, which means the same diffusive coefficients in the horizontal directions. Anisotropy, for which the horizontal isotropy is preserved, we call stratification anisotropy (*SA*). If the diffusivity in horizontal directions is greater than the diffusivity in vertical direction, we call it stratification anisotropy of oceanic type and label it *So*. If the opposite is valid, i.e. the diffusivity in vertical direction is greater than in horizontal ones, we call it stratification anisotropy of atmospheric type or *Sa*. By Braginsky and Meytlis the diffusivity is enhanced in the direction of rotation axis and magnetic field due to local turbulence in the Earth's core. The basic state of the model III allows us to introduce anisotropy in the sense, that the diffusion coefficients are equal in the *y* and *z* directions, but greater than the coefficient in the *x* direction, i.e. $\nu_{yy} = \nu_{zz} > \nu_{xx}$. We call it the anisotropy by Braginsky and Meytlis. This *BM* anisotropy defined in the model III is the single investigated case, in which the horizontal isotropy is broken.

4 models of rotating magnetoconvection (I-IV) differ mostly in configuration of basic magnetic field, orientation of rotation axis and coordinate system in which the models are studied. Linear stability analysis was used for investigating of the influence of anisotropy on basic parameters describing the temporal and spatial structure of the convection (critical Rayleigh number, critical wave numbers and critical frequency) in the space of input parameters of basic state (Ekman, Elsasser, Roberts, magnetic Prandtl and Rossby numbers and anisotropic parameter, . . .).

More or less significant effect of anisotropy of diffusive coefficients on arising convection was found in all investigated models. The anisotropy affects not only the conditions of the onset of the convection (critical Rayleigh number), but also spatial and temporal features of the convection (critical wave numbers and critical frequency). In general *So* anisotropy has stabilizing effect on the layer and increases the horizontal size of the convective cells.

The effect of Sa anisotropy is opposite, i.e. it facilitates the onset of the convection and decreases the horizontal size of the convective cells. In each of the models I-IV it is possible to find such values $\alpha \neq 1$ of anisotropic parameter, α , for which the properties of arising instabilities are closer to the realistic ones than for isotropic case, $\alpha = 1$.

In model I the influence of anisotropy is studied on thermal, as well as on magnetically driven instabilities, which arise due to the nonhomogeneous basic magnetic field (only here in the model I). Even in weak So anisotropy case the modes arise, which have no analogy in isotropic case. They are magnetically driven MAC modes propagating eastward.

In cylindrical coordinates, linear analysis of the model II with vertical basic magnetic field allows at least to indicate, that nonstationary axisymmetric convection can excite instabilities even without horizontal component of the magnetic field, which can have the form of torsional oscillations of the Earth's core from the kinematic point of view. Model II (as well as model IV) is used to study the influence of BM anisotropy, however, preserving horizontal isotropy, too. Thus, here as well as in model IV, the BM is simultaneously SA anisotropy (So and Sa in II and IV, respectively).

Model III enables to show how BM anisotropy of diffusive coefficients, non-preserving horizontal isotropy, strongly affects arising instabilities. Only here the effective comparison of BM and SA anisotropy results is possible.

The influence of anisotropy in the model IV with lying rotation axis is different, because the anisotropy has various effects on steady and nonstationary convection. Thus, by the same way like in models I-III, with vertical rotation axis, in stationary convection, but oppositely on overstability. In case of lying rotation axis modelling the core equatorial regions, the overstability arises more easily (heavily) and horizontal sizes of rolls are smaller (greater) in the So (Sa) case than in the isotropic case. The presented study of models with vertical and lying axis of rotation allows to explain why similar (but simpler) models in the more complex spherical geometry are different in any results from the models in horizontal planar layer, but with vertical rotation axis.

key words: anisotropic diffusive coefficients, rotating magnetoconvection, turbulence, Earth's core, geomagnetic field

Obsah

1 Terminológia a použité skratky	1
2 Úvod	5
2.1 Ciele práce	7
2.2 Štruktúra práce	8
3 Všeobecné rovnice v Boussinesqovej aproximácii	10
3.1 Poruchové rovnice a linearizácia	11
3.2 Zbezrozmernenie a bezrozmerné parametre	12
4 Modely rotujúcej magnetokonvekcie	14
4.1 Základné stavy	14
4.2 Módy konvekcie	15
5 Anizotropie difúzných koeficientov	17
5.1 Stratifikačná anizotropia (<i>SA</i>)	18
5.2 Anizotropia podľa Braginského a Meytlisa (<i>BM</i>)	18
6 Model I	19
6.1 Model s azimutálnym magnetickým poľom	19
6.2 Základné rovnice	20
6.3 Minimalizácia; určenie kritických čísel R_c , k_c a σ_c u MAC módov	22
6.4 Nulová stratifikácia $R = 0$; určenie k a σ u MC módov	26
6.5 Numerické výsledky	28
6.5.1 Nestabilná stratifikácia; MAC módy	29
6.5.2 Nulová stratifikácia; MC módy	31
6.5.3 Stabilná stratifikácia; magneticky hnané MAC módy	36
6.6 Závěry - model I	45
7 Model II	47
7.1 Model s homogénnym vertikálnym magnetickým poľom	47
7.2 Základné rovnice	48
7.3 Energetické úvahy	52
7.4 Numerické výsledky	54
7.5 Závěry – model II	60
8 Model III	63
8.1 Model s homogénnym horizontálnym magnetickým poľom	63
8.2 Základné rovnice	63
8.3 Metóda riešenia	65
8.4 Módy konvekcie vo forme roliek	66
8.4.1 Základné módy konvekcie v prípadoch <i>SA</i> a <i>BM</i> anizotropie	68
8.4.2 Určenie hraníc medzi módmi P, SC a SO	69
8.5 Numerické prístupy a výsledky	70
8.5.1 Stacionárna konvekcia; ΛE_z diagram	71
8.5.2 Stacionárna konvekcia; kritické čísla R_c , a_c a γ_c	73
8.5.3 Nestacionárna konvekcia; Λq_z režimové diagramy	74
8.5.4 Nestacionárna konvekcia; závislosť R_c , a_c , σ_c a γ_c na Λ	77

8.5.5	Nestacionárna konvekcia; závislosti R_c , a_c , σ_c a γ_c na E_z	79
8.6	Záver - model III	80
9	Model IV	82
9.1	Model s homogénnym horizontálnym magnetickým poľom	82
9.2	Základné rovnice	82
9.3	Stacionárna a nestacionárna konvekcia vo forme roliek	85
9.3.1	Stacionárne módy	85
9.3.2	Nestacionárne módy	88
9.3.3	Nestacionárne módy; limita $E_z \rightarrow 0$	89
9.3.4	Nestacionárne módy; izotropný prípad	90
9.4	Izotropný prípad v limite $E = 0$ a pre $E \ll 1$	92
9.4.1	Stacionárna konvekcia, SO módy	92
9.4.2	Stacionárna konvekcia, SC módy	94
9.4.3	Nestacionárna konvekcia; OO módy, $E = 0$	97
9.4.4	Nestacionárna konvekcia; OO módy, $E \ll 1$	99
9.4.5	Nestacionárna konvekcia; OC' módy, $E \ll 1$	100
9.5	Numerické výsledky	101
9.5.1	Izotropný prípad a porovnanie s modelom s vertikálnou rotačnou osou	101
9.5.2	Stacionárna konvekcia v prípade anizotropie	104
9.5.3	Nestacionárna konvekcia v prípade anizotropie	111
9.6	Záver - model IV	113
10	Záver	115
10.1	Zhrnutie	116
	Literatúra	118
	Príspevky na konferenciách	121
11	Príloha 1: Odoveď na otázku Prof. RNDr. Daniela Ševčoviča, DrSc.	123
12	Príloha 2: Poster SEDI 2010, Santa Barbara	125

1 Terminológia a použité skratky

Rozmerové veličiny

$\tilde{\mathbf{B}}_0$	základné magnetické pole [T]
B_M	magnitúda charakteristického základného magnetického poľa [T]
$\tilde{\mathbf{b}}$	porucha magnetického poľa [T]
$\tilde{\mathbf{u}}$	porucha rýchlostného poľa [ms^{-1}]
d	hrúbka rovinnej vrstvy [m]
\mathbf{g}	gravitačné zrýchlenie [ms^{-2}]
$\tilde{T}_0(\tilde{z})$	vertikálny teplotný profil [K]
\tilde{s}	vzdialenosť od osi rotácie, radiálna súradnica v cylindrickej geometrii [m]
\tilde{z}	vertikálna kartézska a cylindrická súradnica [m]
α_T	koeficient teplotnej rozťažnosti [K^{-1}]
ΔT	teplotný rozdiel medzi dolnou a hornou hranicou vrstvy [K]
η	koeficient magnetickej difúzie [m^2s^{-1}]
κ	koeficient (molekulárnej) tepelnej difuzivity [m^2s^{-1}]
$\boldsymbol{\kappa}$	koeficient (turbulentnej) tepelnej difuzivity so zložkami $\kappa_{ss}, \kappa_{\varphi\varphi}, \kappa_{zz}$ (modely I a II) [m^2s^{-1}]
$\boldsymbol{\kappa}$	koeficient (turbulentnej) tepelnej difuzivity so zložkami $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$ (modely III a IV) [m^2s^{-1}]
ν	kinematická viskozita [m^2s^{-1}]
$\boldsymbol{\nu}$	kinematická (turbulentná) viskozita so zložkami $\nu_{ss}, \nu_{\varphi\varphi}, \nu_{zz}$ (modely I a II) [m^2s^{-1}]
$\boldsymbol{\nu}$	kinematická (turbulentná) viskozita so zložkami $\nu_{xx}, \nu_{yy}, \nu_{zz}$ (modely III a IV) [m^2s^{-1}]
$\boldsymbol{\Omega}$	vektor uhlovej rýchlosti [s^{-1}]
Ω_0	veľkosť vektora uhlovej rýchlosti [s^{-1}]

Bezrozmerné veličiny

a	horizontálne vlnové číslo $a = (l^2 + m^2)^{1/2}$
a_c	kritické horizontálne vlnové číslo
\mathbf{b}	porucha magnetického poľa so zložkami b_s, b_φ, b_z (modely I a II)
\mathbf{b}	porucha magnetického poľa so zložkami b_x, b_y, b_z (modely III a IV)
b	skalárna funkcia, určujúca poloidálnu zložku poruchy magnetického poľa (29, 45, 80, 120)
B	reprezentačná funkcia poloidálnej zložky poruchy magnetického poľa
B_0^0, B_0^1	amplitúdy poloidálnej zložky poruchy magnetického poľa (model II)
\mathbf{B}_0	základné magnetické pole
E_{kin}	kinetická energia (model II)
E_{mag}	magnetická energia (model II)
E_{kin}^{tor}	azimutálna časť kinetickej energie (model II)
E_{kin}^{mer}	meridionálna časť kinetickej energie (model II)
E_{mag}^{tor}	azimutálna časť magnetickej energie (model II)
E_{mag}^{mer}	meridionálna časť magnetickej energie (model II)
j	skalárna funkcia, určujúca toroidálnu zložku poruchy magnetického poľa (29, 45, 80, 120)
J	reprezentačná funkcia toroidálnej zložky poruchy magnetického poľa
\bar{J}	komplexne združená hodnota reprezentačnej funkcie J

J_0	amplitúda toroidálnej zložky poruchy magnetického poľa
J_m	Besselova funkcia 1. druhu rádu m ; častokrát použité J_0 a J_1 pre $m = 0$ a 1
k	radiálne vlnové číslo, bezrozmerné horizontálne vlnové číslo v smere x (model II)
l	horizontálne vlnové číslo v smere x (modely III a IV)
m	azimutálne vlnové číslo (modely I a II)
m	horizontálne vlnové číslo v smere y (modely III a IV)
\mathbf{u}	porucha rýchlostného poľa so zložkami u_s, u_φ, u_z (modely I a II)
\mathbf{u}	porucha rýchlostného poľa so zložkami u_x, u_y, u_z (modely III a IV)
w	skalárna funkcia, určujúca poloidálnu zložku poruchy rýchlosti (29, 45, 80, 120)
W	reprezentačná funkcia poloidálnej zložky poruchy rýchlosti
W_0	amplitúda poloidálnej zložky poruchy rýchlosti
x	horizontálna kartézska súradnica, horizontálny smer
$\hat{\mathbf{x}}$	jednotkový vektor v horizontálnom smere x
y	horizontálna kartézska súradnica, horizontálny smer
$\hat{\mathbf{y}}$	jednotkový vektor v horizontálnom smere y
z	vertikálna kartézska a cylindrická súradnica, vertikálny smer
$\hat{\mathbf{z}}$	jednotkový vektor vo vertikálnom smere z
γ	uhol medzi osou roliek a magnetickým poľom \mathbf{B}_0 (modely III a IV)
γ_c	kritický uhol medzi osou roliek a magnetickým poľom \mathbf{B}_0 (modely III a IV)
λ	komplexná frekvencia $\lambda = i\sigma$ ($= \lambda_r + i\lambda_i$)
λ_r	rýchlosť rastu (growth rate); $\lambda_r = \Re(\lambda)$ (pozri λ)
λ_i	frekvencia; $\lambda_i = \Im(\lambda) = \sigma$ (pozri λ)
σ	frekvencia (reálna); $\sigma = \lambda_i$ (pozri λ)
ϑ	porucha teplotného poľa (29, 45, 80, 120)
Θ	reprezentačná funkcia teplotnej poruchy
φ	uhlová súradnica v cylindrickej geometrii
$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$	jednotkový vektor v azimutálnom smere φ
ω	skalárna funkcia, určujúca toroidálnu zložku poruchy rýchlosti (29, 45, 80, 120)
Ω	reprezentačná funkcia toroidálnej zložky poruchy rýchlosti
$\bar{\Omega}$	komplexne združená hodnota reprezentačnej funkcie Ω
Ω_0	amplitúda toroidálnej zložky poruchy rýchlosti (model II)

Bezrozmerné čísla

E	Ekmanove číslo; $E = \nu/2\Omega_0 d^2$
E_z	Ekmanove číslo v smere z ; $E_z = \nu_{zz}/2\Omega_0 d^2$
E_s	Ekmanove číslo v smere s ; $E_s = \nu_{ss}/2\Omega_0 d^2$
p	obrátené magnetické Prandlove číslo; $p = \eta/\nu_{zz} = R_o/E_z$
q	Robertsove číslo; $q = \kappa/\eta$
q_z	Robertsove číslo v smere z ; $q_z = \kappa_{zz}/\eta$
q_s	Robertsove číslo v smere s ; $q_s = \kappa_{ss}/\eta$
q_α	anizotropné modifikované Robertsove číslo; $q_\alpha = q_z l_\alpha$
Q	Chandrasekharove číslo; $Q = \Lambda/E_z$
R	modifikované Rayleighove číslo; $R = \alpha_T g \Delta T d / 2\Omega_0 \kappa$
R_a	klasické Rayleighove číslo; $R_a = R/E_z$
R_o	modifikované Rossbyho číslo; $R_o = \eta/2\Omega_0 d^2$
T_a	Taylorove číslo; $T_a = E_z^{-2}$
α	parameter anizotropie; $\alpha = \kappa_{ss}/\kappa_{zz} = \nu_{ss}/\nu_{zz}$ alebo $\alpha = \kappa_{xx}/\kappa_{zz} = \nu_{xx}/\nu_{zz}$
α_ν	parameter anizotropie viskozity
α_ϑ	parameter anizotropie tepelnej difúzie

Λ	Elsasserove číslo; $\Lambda = B_M^2/2\Omega_0\rho_l\mu\eta$
ζ	obrátené Robertsove číslo; $\zeta = \eta/\kappa_{zz} = q_z^{-1}$

Pomocné premenné

\tilde{a}	$\tilde{a} = \beta/\pi^2$ (model II), alebo $\tilde{a} = \tilde{l} + \tilde{m}$ (modely II, III a IV)
A	$A = 1 + \tilde{a}$ (modely II, III a IV)
A_α	$A_\alpha = 1 + \alpha\tilde{l} + \tilde{m}$ alebo $A_\alpha = 1 + \alpha\tilde{a}$ (modely II, III a IV)
c_α	$c_\alpha = E_z K K_\alpha^2/\pi$ (model IV)
C_α	$C_\alpha = \pi^2 E_z A^{3/2} + \Lambda\tilde{m}A^{-1/2}$ (model IV)
K^2	$K^2 = a^2 + \pi^2$ (modely III a IV)
K_α^2	$K_\alpha^2 = \alpha l^2 + m^2 + \pi^2$ alebo $K_\alpha^2 = \alpha a^2 + \pi^2$ (modely III a IV)
\tilde{l}	$\tilde{l} = l^2/\pi^2$ (modely III a IV)
l_α	$l_\alpha(\tilde{a}, \alpha) = (1 + \alpha\tilde{a})/(1 + \tilde{a})$ (modely II a IV)
\tilde{m}	$\tilde{m} = m^2/\pi^2$ (model III)
Q	$Q = (q + 1)/\Lambda$ (model IV)
R^o	predpis pre Rayleighove číslo nestacionárnej konvekcie (model IV)
R^s	predpis pre Rayleighove číslo stacionárnej konvekcie (model IV)
\tilde{R}	$\tilde{R} \sim R^o$ (model IV)
β	štvorec radiálneho (resp. horizontálneho) vlnového čísla; $\beta = k^2$ (model II)
ϕ	$\phi = \Lambda m^2/\pi K$ (model IV)
ε	$\varepsilon = \pi^2 E/\Lambda$ (model IV)
σ_1	preškálovaná frekvencia; $\sigma_1 = \sigma/\pi^2$
π_l	$\pi_l = l\pi$
ψ	$\psi = \phi l_\alpha/(q_z + l_\alpha)$ model (IV)
Q_1	preškálované Chandrasekharove číslo; $Q_1 = Q/\pi^2$
R_1	preškálované Rayleighove číslo; $R_1 = R_a/\pi^4$
T_1	preškálované Taylorove číslo; $T_1 = T_a/\pi^4$

Symbody a skratky

A	Archimedova (vztlaková) sila
C	Coriolisova sila
M	magnetická (Lorentzova) sila
MAC	MAC módy, MAC vlny, MAC rovnováha
MC	MC módy, MC vlny
IR	indukčná rovnica
NS	Navier-Stokesova rovnica
BM	anizotropia podľa Braginského a Meytlisa (modely III a IV)
SA	stratifikačná anizotropia
SA	stratifikačná anizotropia atmosférického typu
So	stratifikačná anizotropia oceánskeho typu
OC	mód nestacionárnej konvekcie v tvare horizontálnych roliek kolmých na magnetické pole \mathbf{B}_0 (modely III a IV)
OC'	mód nestacionárnej konvekcie v tvare horizontálnych roliek takmer kolmých na magnetické pole \mathbf{B}_0 (model IV)
OO	mód nestacionárnej konvekcie v tvare horizontálnych roliek šikmých na magnetické pole \mathbf{B}_0 (modely III a IV)
SC	mód stacionárnej konvekcie v tvare horizontálnych roliek kolmých na magnetické pole \mathbf{B}_0 (modely III a IV)
SO	mód stacionárnej konvekcie v tvare horizontálnych roliek šikmých

P na magnetické pole \mathbf{B}_0 (modely III a IV)
 mód stacionárnej konvekcie v tvare horizontálnych roliek rovnobežných
 s magnetickým poľom \mathbf{B}_0 (modely III a IV)

Operátory

Diferenciálne operátory

D	$D = d/dz$
D^2	$D^2 = d^2/dz^2$
\mathcal{D}_α	$\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha l^2 - m^2$ alebo $\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha l^2 - \alpha m^2 = D^2 - \alpha\beta$
\mathcal{D}_β	$\mathcal{D}_\beta = D^2 - \beta^2$
\mathcal{D}_λ	$\mathcal{D}_\lambda = D^2 - a^2 - \lambda$
∂_s	$\partial_s = \partial/\partial s$
∂_t	$\partial_t = \partial/\partial t$
∂_φ	$\partial_\varphi = \partial/\partial\varphi$
$\partial_{\varphi\varphi}^2$	$\partial_{\varphi\varphi}^2 = \partial^2/\partial\varphi^2$
∂_{zz}^2	$\partial_{zz}^2 = \partial^2/\partial z^2$
∂_{xx}^2	$\partial_{xx}^2 = \partial^2/\partial x^2$
∂_{zs}^2	$\partial_{zs}^2 = \partial^2/\partial z\partial s$
∇^2	štandardný izotropný Laplaceov operátor
∇_α^2	anizotropný Laplaceov operátor (74–76, 117, 118)

Integrálne operátory (model II, str. 53)

$\langle \rangle_z$	ustredňovanie vo vertikálnom smere
$\langle \rangle_s$	ustredňovanie v radiálnom smere
$\langle \rangle_t$	ustredňovanie v čase
$\langle \rangle_{zs}$	ustredňovanie vo vertikálnom a radiálnom smere
$\langle \rangle_{zst}$	ustredňovanie vo vertikálnom a radiálnom smere a v čase

2 Úvod

Pri súčasných poznatkoch o vnútre Zeme sa verí, že konvekcia v zemskom jadre je primárnym zdrojom dynamo procesu a teda je zodpovedná za geomagnetické pole. Vonkajšie tekuté jadro Zeme je premiešavané tepelnou a kompozičnou konvekciou. Pri tepelnej konvekcii je vztlak zabezpečovaný tepelnými fluktuáciami a teplotným gradientom a v prípade kompozičnej konvekcie je to uvoľňovaním ľahšieho (s menšou hustotou) materiálu pri procese solidifikácie vnútorného jadierka [24]. Konvekcia je vysoko nadkritická a je výrazne ovplyvňovaná magnetickým poľom a rotáciou.

Vďaka vysoko rozvinutej konvekcii sú toky v jadre turbulentné a difúzne procesy prebiehajú v efektívnejšom turbulentnom režime. Na rozdiel od molekulárnej difúzie (ktorá je vlastnosťou materiálu) je turbulentná difúzia veľmi závislá na charakteristických tokoch. Turbulentné difúzne koeficienty sú o niekoľko rádov väčšie ako molekulárne difúzne koeficienty (viskozita ν , koeficient tepelnej a magnetickej difúzie κ a η)¹. Je to spôsobené tým, že prenášačmi (napr. tepla pri tepelnej difúzii, alebo hybnosti pri viskozite) sú máloškálové turbulentné víry s charakteristickým časom výrazne kratším, ako charakteristický čas u molekulárnych difúzných procesov.

Pri štúdiu lokálnej turbulencie v jadre Zeme Braginsky a Meytlis [5] ukázali, že nestabilná hustotná stratifikácia môže viesť k maloškálovej vysoko nadkritickej nestabilite lokálneho charakteru, dôsledkom ktorej vzniká maloškálová turbulencia². Táto turbulencia je vysoko anizotropná vďaka vplyvu rotácie Zeme a magnetického poľa. Turbulentné víry sa vplyvom Lorentzovej a Coriolisovej sily deformujú do tvaru, ktorý minimalizuje účinok týchto síl. To znamená, že Coriolisova sila \mathbf{C} ($\sim \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$) a magnetická sila \mathbf{M} ($M \sim |\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$) sú veľmi malé a môžu byť v tomto smere zanedbateľné. Víry majú tvar palacínok predĺžených v smere osi rotácie a v smere magnetického poľa. Dôsledkom toho je zvýšená difuzivita v týchto smeroch. V geofyzikálnych tokoch bez vplyvu rotácie, či magnetického poľa samotná hustotná stratifikácia, určená smerom gravitácie \mathbf{g} , môže takisto ovplyvniť tvar vírov. Pri uvažovaní turbulentného stavu je preto vhodnejšie pracovať s difúznym koeficientom nie ako so skalárnou veličinou, ale ako so zložitejšou tenzorovou veličinou.

Táto práca teda okrajovo súvisí s dvoma zaujímavými a stále otvorenými problémami - problémom turbulencie v zemskom jadre a paradoxom geodynamy. Pri probléme turbulencie ide v dnešnej dobe hlavne o využitie poznatkov o turbulencii v jadre na správnu parametrizáciu, ktorá by sa dala úspešne využiť pri numerických modeloch geodynamy³ (ale aj iných tečení v zemskom telese). Súčasné počítače stále nedosahujú dostatočný výkon na to, aby mali numerické modely dostatočne veľkú rozlišovaciu schopnosť a mohli úspešne zahrnúť turbulentné procesy. Aj najlepšie modely geodynamy pracujú s najmenšou priestorovou škálou stále o niekoľko rádov väčšou ako sú priestorové škály spojené s turbulentnými vírmi. Preto je žiadúce vyšetrovať lokálne vlastnosti turbulencie a skúmať jej globálnejší vplyv na veľkoškálové procesy - parametrizovať turbulenciu.

Posledné počítačové simulácie geodynamy poskytli modely geomagnetického poľa, ktoré dávajú reálny obraz so všetkými dôležitými vlastnosťami pozorovaného poľa s jeho seku-

¹V ďalšom texte nebudeme v značení rozlišovať, či ide o turbulentné alebo molekulárne difuzivity, napr. ν , ak sa ináč nezdôrazní, bude reprezentovať viskozitu všeobecne, t.j. iba na základe jej hodnoty bude možné usúdiť, o akú viskozitu ide. V prípade turbulentnej viskozity ν bude znamenať jej charakteristickú hodnotu.

²Sústredili pozornosť na iný zdroj ako u klasickej turbulencie, a to na vztlakovú silu pôsobiacu v nestabilne stratifikovaných tekutinách. V tejto tzv. konvektívne budenej turbulencii vznikajú víry vo všetkých priestorových škálach, ale ich životnosť je výrazne ohraničená. Na rozdiel od klasickej turbulencie budenej šmykovými napätiami, u ktorej sa energia prenáša od väčších ku stále menším vírom, tu vďaka vztlakovým silám vznikajú víry všetkých možných rozmerov; žijú si krátko samy o sebe nestíhajúc pritom ovplyvniť víry iných rozmerov.

³Problematike numerického modelovania geodynamy v sférickej geometrii sa od r. 2008 venuje Ján Šimkanin, bývalý doktorand na našej katedre [46].

lárnymi variáciami. Problém paradoxu geodynamy spočíva v tom, že tieto úspešné modely kvôli počítačovým obmedzeniam používajú nerealisticky vysoké difúzne koeficienty (napr. viskozita). Dokonca aj s uvážením turbulentných difúzií zemského jadra sú hodnoty používané v týchto simuláciách výrazne väčšie. K úspešnému zníženiu viskozity, t.j. k priblíženiu jej hodnoty ku reálne odhadovanej turbulentnej hodnote zaviedli Glatzmaier a Roberts [22] hyperviskozitu, čím hlavne z numerických dôvodov formálne vniesli do počítačových simulácií geodynamy anizotropiu viskozity takú, že v horizontálnych smeroch (na sférickej ploche) bola viskozita väčšia ako vo vertikálnom (radiálnom) smere, čo zhruba pripomína anizotropiu difúzných koeficientov v oceánskych povrchových vodách, v ktorých však hodnoty v horizontálnych smeroch prevyšujú tieto vo vertikálnom až o niekoľko rádov. Tým však zaviedli iný typ anizotropie, ako zaviedli Braginsky a Meytlis [5], ktorých (nami pomenovaný [49]) *BM* typ anizotropie difúzných koeficientov znamená, že koeficienty tepelnej difúzivity a viskozity prevažujú v smeroch magnetického poľa (aziutálny smer φ) a osi rotácie (os z).

K riešeniu naznačených problémov, a to turbulentného stavu jadra a paradoxu geodynamy môže výrazne pomôcť fakt, že od r. 2000 sa rýchlo hromadia laboratórne experimenty a ďalšie misie magnetických družíc (Oersted, CHAMP, SWARM...) [25, 41]. Družice zabezpečujú celoplanetárne spojitú pozorovanie geomagnetického poľa, ktoré sa úspešne zahájilo družicou Magsat, ktorá síce pracovala len v priebehu roka 1980, ale dala najnovším a budúcim dátam nevyhnutný základ. Obrovské množstvo údajov pri dosiahnutej vysokej sofistikovanej úrovni ich spracovania dáva šancu výrazne detailnejšie modelovať stav a časový vývin magnetického poľa na povrchu jadra. Na základe rozumných predpokladov sa modelujú toky na povrchu jadra s vysokou priestorovou a časovou rozlíšiteľnosťou (už niečo menej ako 10 km a 1 rok). Získali sa [1] informácie o anizotropnej magnetickej difúzivitě (typu silnej *SA*; pozri kapitolu 5), ktorú v našich modeloch kvôli vysokej elektrickej vodivosti jadra stále predpokladáme izotropnú. Prístupy DNS a LES v počítačových simuláciách [21] a zamerané aj na vlastnosti turbulencie pri rovnováhe \mathbf{M} , \mathbf{A} a \mathbf{C} síl [26] sú takisto veľmi sľubné.

V problematike geodynamy, napriek dominantnému prínosu numerických simulácií a prudkému nárastu družícami získavaných dát, majú stále svoju nezastúpiteľnú a dôležitú úlohu klasické prístupy, významne reprezentované asymptotickými metódami. Pekným príkladom je napr. magnetohydrodynamika stredných polí [40], práve ktorej jazyku je dávaná prednosť pri interpretácii výsledkov simulácií. Je to napriek tomu, že simulácie riešia rovnice s uvážením takmer všetkých nelineárnych členov, a pritom v interpretáciách sú používané pojmy, ktoré častokrát súvisia iba s viac, či menej presnými priblíženiami reality. Tieto pojmy MHD stredných polí však dávajú najlepšiu šancu pochopiť zložité mechanizmy, zabezpečujúce činnosť geodynamy. Veľmi efektívne sú zjednodušenia, keď zložitosti sférickej geometrie aproximujeme modelmi v rovinných vrstvách. Práve dynamika je takto modelovaná dosť spoľahlivo. Preto v zložitej dynamickej rovnováhe základných \mathbf{M} , \mathbf{A} a \mathbf{C} síl, ktorá je citlivo závislá na rozmanitom súperení rôznych difúzných javov, je tvorba modelov v planárnej geometrii dostatočne heuristická, aj keď chceme rozumieť procesom v sférickej geometrii. Rovinná geometria na rozdiel od sférickej nemá výrazné numerické obmedzenia, pretože v nej sa netreba zaoberať konvektívnymi štruktúrami veľmi malých rozmerov, ak sa zvolia vhodné hraničné podmienky. Preto v nej možno sústrediť pozornosť na menej preskúmané aspekty problémov bez výrazných ohraničení na hodnoty difúzných koeficientov.

V tejto práci vyšetrujeme marginálnu stabilitu rovinnej vrstvy, pričom apriórne zavádzame rôzne typy anizotropie viskozity a tepelnej difúzivity. Lineárnou stabilitnou analýzou skúmame vplyv anizotropie na podmienky nástupu stacionárnej aj nestacionárnej

konvekcie ako aj vplyv na priestorovú a časovú štruktúru konvekcie. V probléme rotujúcej magnetokonvekcie, ktorý je riešený v tejto práci, je dynamika riadená tromi základnými silami: magnetická (Lorentzova), vztlaková (Archimedova) a Coriolisova sila. Táto MAC rovnováha je ovplyvňovaná difúznymi procesmi (ktoré môžu oslabovať jednotlivé sily), preto štúdium difúzných nestabilit ako aj anizotropie difúzných koeficientov je žiadúce. Nami zavedená anizotropia má najjednoduchší možný tvar, pri ktorom majú koeficienty tepelnej difuzivity a viskozity tvar diagonálneho tenzora so zložkami rovnakými v dvoch smeroch, ale odlišnými od zložky v treťom smere (pre konkrétne definície anizotropie pozri popis jednotlivých modelov v nasledujúcich kapitolách).

2.1 Ciele práce

- definovať základné pojmy (anizotropia difúzných koeficientov, anizotropný parameter, typy anizotropie SA a BM)
- lineárnou stabilitnou analýzou vyšetriť vplyv anizotropie difúzných koeficientov na 4 modely rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve (viď kap. 4)
 - model I $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \tilde{s}/d \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
 - model II $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \hat{\mathbf{z}}$
 - model III $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \hat{\mathbf{y}}$
 - model IV $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 \hat{\mathbf{x}}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \hat{\mathbf{y}}$
- porovnať vplyv anizotropií na viaceré módy a formy konvekcie
- geofyzikálna diskusia pre podmienky v zemskom jadre.

Našou stratégiou je modifikovať niektoré vybrané modely, prípadne vytvoriť nové modely rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve zavedením viacerých typov anizotropie difúzných koeficientov a preskúmať ich vplyv na vznikajúce nestability. Pri voľbe modelov nám išlo o využitie našich rozpracovaných problémov, a takisto o upriamenie sa na tie otvorené problémy geodynamy a rotujúcej magnetokonvekcie, kde interpretácia výsledkov počítačových simulácií je voľnejšia kvôli zásadným numerickým obmedzeniam, neumožňujúcim priblížiť sa k fyzikálne reálnym malým hodnotám difúzných koeficientov, napr. viskozity.

V modeli I nám išlo o lepšie chápanie „viskózných“ západným smerom sa šíriacich MC módov s azimutálnym vlnovým číslom $m = 1$, ktorých existencia si vyžaduje vyššie hodnoty viskozity ($E = O(10^{-3})$) a magnetického poľa ($A = O(10^3)$) tak, že $AE \doteq 1$ [9, 47]. Dúfali sme, že isté pravdepodobné typy anizotropie zrealnia tieto viskózne MC(W) módy v zemskom jadre.

Model II nás pritiahol klasickou predlohou v [13] a nami objavenou možnosťou riešiť ju v cylindrickej geometrii [63, 66, 67], čím sa otvorila možnosť skúmať vzájomnú interakciu inerciálnych oscilácií s konvekciou v zemskom jadre. Navyše torzné oscilácie ako výstup počítačových simulácií geodynamy možno konfrontovať s jednými najspoľahlivejšie určenými sekulárnymi variáciami geomagnetického poľa.

V modeli III sa ukazovala možnosť využiť fakt, že súperenie stacionárnej a nestacionárnej konvekcie je veľmi citlivé na hodnotách difúzných koeficientov, a to práve tých, ktoré môžu odpovedať turbulentnému stavu zemského jadra. Práve preto poznať dôsledky anizotropných difúzných koeficientov veľmi prirodzene spojených s turbulenciou v zemskom jadre, dynamicky určenou vplyvom práve \mathbf{M} , \mathbf{A} a \mathbf{C} síl, bolo veľmi lákavé.

Model IV nebol len prirodzeným rozvinutím modelu III. Motiváciu preň sme získali zo zaujímavých výsledkov kolegov z univerzity v Sydney [33, 34], ktorých výsledná konvekcia v sférickej vrstve, ovplyvnená anizotropnými difúznymi koeficientami, mala iné vlastnosti, ako dávali naše dovtedajšie výsledky. Naše modely so zvislou rotačnou osou v horizontálnej vrstve, vhodné hlavne pre pripolárne oblasti jadra sme práve cez model III preonačili prostredníctvom modelu IV na konvekciu v horizontálnej vrstve, ale s ležatou osou rotácie, čo dobre vystihuje rovníkové oblasti jadra.

2.2 Štruktúra práce

Práca je členená nasledujúcim spôsobom. Po zozname symbolov, skratiek a operátorov použitých v práci (kapitola 1) a úvodnej kapitole 2 nasleduje diskusia o základných rovniciach, opisujúcich procesy v zemskom jadre. Rovnice sú najprv formulované v najvšeobecnejšom tvare a ďalej sa na ne aplikujú užitočné zjednodušujúce operácie ako linearizácia a prechod na bezrozmerný tvar s definíciami bezrozmerných čísel (kapitola 3). Štvrtá kapitola v stručnosti opisuje a porovnáva štyri modely rotujúcej magnetokonvekcie, študované v tejto práci a ich geofyzikálne opodstatnenie. V kľúčovej piatej kapitole je matematická formulácia anizotropie difúzných koeficientov v cylindrickej a kartézskej geometrii a zavedenie dôležitého parametra anizotropie α , ktorý je mierou anizotropie. Podľa toho, či je v horizontálnych smeroch zachovaná alebo porušená izotropia difúzných koeficientov, rozdeľujeme zavedenú anizotropiu na stratifikačnú anizotropiu (*SA*; horizontálna izotropia je zachovaná), alebo anizotropiu podľa Braginského a Meytlisa (*BM*; horizontálna izotropia môže byť porušená). V nasledujúcich štyroch kapitolách (6–9) je už detailne študovaný vplyv anizotropie na štyri rôzne modely rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve. Každá kapitola je pritom písaná dosť samonosne, aby sa čitateľ vracal k predchádzajúcim kapitolám iba minimálne.

V kapitole 6 je študovaný vplyv anizotropie na model so základným azimutálnym magnetickým poľom lineárne rastúcim so vzdialenosťou od osi rotácie. Vznikajúce nestability majú tvar vlny šíriacej sa v azimutálnom smere pozdĺž magnetického poľa západným alebo východným smerom. Pri tejto konfigurácii poľa môžu vznikáť okrem tepelne hnaných nestabilít typu MAC vln (pri nestabilnej stratifikácii) aj magneticky hnané MC módy (pri nulovej stratifikácii) a magneticky hnané MAC módy (pri stabilnej stratifikácii), a to preto, lebo samotné magnetické pole, ktoré je krivočiare a nehomogénne, je zdrojom nestabilít. Všetky nestability, študované v tomto modeli I, sú osovosymetrické a sú ovplyvnené anizotropiou difúzných koeficientov, pričom pre niektoré módy je anizotropia nutnou podmienkou ich existencie (v izotropnom prípade nemôžu existovať). Osovosymetrické nestability v tomto modeli nemôžu vznikáť, preto sme sa na tieto nestability zamerali v nasledujúcom modeli s homogénnym vertikálnym magnetickým poľom.

V kapitole 7 je pozornosť sústredená hlavne na také módy tepelnej konvekcie, ktoré môžu ovplyvniť inerciálne oscilácie, ktoré sú v zemskom jadre typickým prejavom rotácie Zeme. Vyšetrované osovosymetrické nestability majú z kinematického hľadiska charakter torzných oscilácií. Z dominancie magnetickej nad kinematickou energiou sú však tieto nestability tepelnou konvekciou na pozadí magnetického poľa a rotácie systému, a nie Alfvénove vlny, s ktorými sú spájané torzné oscilácie v zemskom jadre. V tomto modeli II môžu byť študované aj osovosymetrické nestability, ako aj nestability v tvare horizontálnych roliek (študované v kartézskej geometrii), lebo sa ukázalo, že sú opísané úplne rovnakými rovnicami a navyše aj kritické Rayleighove číslo všetkých uvažovaných typov nestabilít je rovnaké.

Základný stav v modeli III, vyšetrovanom v kapitole 8, umožňuje zaviesť a porovnávať

BM aj SA anizotropiu a preskúmať teda prípady, keď horizontálna izotropia je porušená s prípadmi, keď je zachovaná. Pozornosť je venovaná hlavne vyšetrovaniu preferencie rôzne orientovaných stacionárnych a nestacionárnych roliek v priestore vstupných parametrov a z toho vyplývajúcej diskusie o vplyvoch základných síl na tvar konvekcie.

Model IV s ležatou (horizontálnou) rotačnou osou je skúmaný v kapitole 9, pričom v tomto prípade má už štúdium izotropného prípadu svoju dôležitosť, keďže tento model ešte nebol skúmaný ani v izotropnom prípade. Základný stav, pri ktorom magnetické pole a na neho kolmá os rotácie ležia v horizontálnej rovine, pri súčasnom pôsobení gravitácie vo vertikálnom smere, je dobrá analógia podmienok v rovníkových oblastiach zemského jadra. Práve v tomto modeli IV je prezentácia analytického odvodenia mnohých vlastností, získaných numerickými výpočtami, dotiahnutá najďalej, preto je veľká časť kapitoly 9 venovaná analytickému (často asymptotickému) prístupu k riešeniu problému.

Výsledky, získané v tejto práci, sú diskutované a zhrnuté v poslednej kapitole 10.

3 Všeobecné rovnice v Boussinesqovej aproximácii

Pohyb elektricky vodivej nestlačiteľnej kvapaliny v systéme, ktorý rotuje konštantnou uhlovou rýchlosťou Ω , je preniknutý základným magnetickým poľom \mathbf{B} a v gravitačnom poli \mathbf{g} , je opísaný nasledujúcou sústavou štyroch rovníc.

Pohybová Navier-Stokesova rovnica opisujúca časový vývoj rýchlostného poľa \mathbf{U} , má nasledujúci tvar

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{1}{\mu \rho_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\rho \mathbf{g}}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (1)$$

Táto rovnica je v tzv. Boussinesqovej aproximácii, pri ktorej sa uvažuje konštantná hustota ρ_0 vo všetkých členoch, okrem člena $\rho \mathbf{g}$, vyjadrujúceho vztlakovú Archimedovu silu.

Prvé dva členy vyjadrujú totálnu (materiálovú) deriváciu $D\mathbf{U}/Dt$ a opisujú zmenu rýchlostného poľa v čase a pozdĺž prúdočiar. Tretí člen $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$ vyjadruje Coriolisovu silu. Tlak P , vystupujúci v prvom člene na pravej strane rovnice, obsahuje okrem hydrostatického tlaku aj odstredivú silu $\rho/2|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2$, preto ho nazývame modifikovaným tlakom. ρ je hustota a \mathbf{r} je polohový vektor. Vplyv magnetického poľa na rýchlostné pole je zabezpečený Lorentzovou silou, ktorá je vyjadrená členom $(1/\mu\rho_0)(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ na pravej strane rovnice, kde μ je magnetická permeabilita. Tepelná konvekcia kvapaliny je umožnená Archimedovou vztlakovou silou, ktorá je v rovnici opísaná členom $\rho \mathbf{g}/\rho_0$. Posledný člen $\nu \nabla^2 \mathbf{U}$ opisuje viskózne sily, ktoré aj keď sú oproti ostatným silám zanedbateľne malé, sú veľmi dôležité hlavne v hraničných vrstvách, ν je koeficient kinematickej viskozity [$m^2 s^{-1}$].

Najdôležitejšou rovnicou magnetohydrodynamiky je indukčná rovnica, ktorá opisuje časový vývoj magnetického poľa v pohybujúcej sa kvapaline a jeho interakciu s rýchlostným poľom. Dá sa odvodiť z Maxwellových rovníc v kvázistacionárnej aproximácii (bez posuvných prúdov) a z Ohmovho zákona pre pohybujúce sa prostredie. Jej najvšeobecnejší tvar je

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2)$$

Člen $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})$, ktorý nazývame generačným členom, opisuje interakciu magnetického poľa s rýchlostným poľom. Vo všeobecnosti je neznáme ako rýchlostné, tak aj magnetické pole a generačný člen je nelineárny. Posledný člen $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ opisuje rozpad magnetického poľa ohmickou disipáciou, pričom mierou tohto rozpadu je koeficient magnetickej difúzie $\eta = 1/\mu\sigma$ [$1m^2 s^{-1}$].

Ak platí $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, možno generačný člen zapísať podľa známej vektorovej identity v tvare

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{U},$$

kde prvý člen reprezentuje advekciu (unášanie) indukčných čiar rýchlosťou, druhý člen reprezentuje vyťahovanie a deformáciu indukčných čiar magnetického poľa rýchlostným poľom.

V problémoch magnetohydrodynamiky sa často uvažuje nestlačiteľná kvapalina, ktorej hustota sa môže meniť jedine v závislosti na teplote vďaka teplotnej rozťažnosti (zmena hustoty v dôsledku tlaku sa neuvažuje). V takom prípade stavovú rovnicu, popisujúcu závislosť hustoty od termodynamických veličín, reprezentuje jednoduchá závislosť hustoty ρ na teplote T

$$\rho = \rho_l[1 - \alpha_T(T - T_l)] = \rho_l[1 - \alpha_T\delta T], \quad (3)$$

kde ρ_l je hustota pri teplote T_l (obyčajne na niektorej z hraníc), $\delta T = T - T_l$ je teplotný rozdiel a α_T je koeficient teplotnej rozťažnosti. Práve teplotná rozťažnosť je veľmi dôležitá, lebo je zodpovedná za vznik Archimedovských vztlakových síl, ktoré sú „motorom“ konvekcie (v zemskom jadre je dôležitejšia kompozičná konvekcia, ktorá sa však vo väčšine modelov simuluje tepelne hnanou konvekciou).

Ďalšou dôležitou rovnicou je rovnica vedenia tepla, ktorá má v Boussinesqovej aproximácii takýto tvar

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)T = \kappa \nabla^2 T + \epsilon', \quad (4)$$

kde κ je koeficient tepelnej difuzivity [$m^2 s^{-1}$] a ϵ' sú tepelné zdroje, ktoré sa vo väčšine modeloch neuvažujú. K týmto štyrom základným rovnicam musíme ešte pridať dve dôležité rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

ktoré vyjadrujú nezhriedlosť magnetického poľa \mathbf{B} a rýchlostného poľa \mathbf{U} .

3.1 Poruchové rovnice a linearizácia

Z pohybovej rovnice vidíme, že časový vývoj rýchlostného poľa \mathbf{U} je vďaka Lorentzovej sile ovplyvnený aj magnetickým poľom \mathbf{B} a podobne z indukčnej rovnice vyplýva, že časový vývoj magnetického poľa \mathbf{B} je cez indukčný člen ovplyvnený rýchlostným poľom \mathbf{U} . Vo všeobecnosti je aj magnetické aj rýchlostné pole neznámou a členy $(1/\mu\rho_0)(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ a $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})$, ktoré túto previazanosť zabezpečujú (ale aj člen $(\mathbf{U} \cdot \nabla)T$ v rovnici vedenia tepla) sú nelineárne, čo robí z rovníc analyticky ťažko riešiteľný problém.

Jeden spôsob, ako tieto nelinearity obísť, je vyšetovanie problému rotujúcej magneto-konvekcie lineárnou stabilitnou analýzou, pri ktorej sa uvažujú nekonečne malé poruchy, ktoré sa naložia na základný stav, ktorý je charakterizovaný v čase nemenným rýchlostným, magnetickým a teplotným poľom. V tejto práci budeme ďalej uvažovať model nekonečnej horizontálnej vrstvy hrúbky d , ktorá rotuje uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ (v jednom z modelov študovaných v tejto práci rotuje vrstva okolo horizontálnej osi rotácie platí $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{x}}$) a je vyplnená elektricky vodivou kvapalinou zohrievanou zospodu, pričom sa v kvapaline udržiava lineárny teplotný profil $T_0 = T_l - \Delta T(z/d + 1/2)$. Gravitačné pole má vertikálny smer, $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}$.

Na základný časovo nemenný stav $(\widetilde{\mathbf{B}}_0, \widetilde{\mathbf{U}}_0, \widetilde{T}_0, \widetilde{P}_0)$ naložíme poruchy magnetického a rýchlostného poľa a poruchy teploty a tlaku. Potom celkové veličiny môžeme napísať nasledovne

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{U}}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \text{väčšinou sa uvažuje } \widetilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{B} &= \widetilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{b}}, \\ T &= \widetilde{T}_0 + \tilde{\vartheta}, \\ P &= \widetilde{P}_0 + \tilde{p}. \end{aligned}$$

Ak takéto celkové veličiny dosadíme do rovníc, a odčítame od nich rovnice pre základný stav a zenedbáme nelineárne členy

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{b}} \cdot \widetilde{\nabla} \tilde{\mathbf{b}}, \quad \widetilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}}) \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\nabla} \tilde{\vartheta},$$

dostaneme linearizovaný systém rovníc pre poruchy $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\vartheta}$ a \tilde{p}

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho_l} \widetilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\mu \rho_l} [(\widetilde{\nabla} \times \widetilde{\mathbf{B}}_0) \times \tilde{\mathbf{b}} + (\widetilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{b}}) \times \widetilde{\mathbf{B}}_0] - \alpha \tilde{\vartheta} \mathbf{g} + \nu \widetilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial \tilde{t}} = \widetilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \widetilde{\mathbf{B}}_0) + \eta \widetilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{b}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\nabla}) \tilde{T}_0 = \kappa \widetilde{\nabla}^2 \tilde{\vartheta}, \quad (8)$$

$$\widetilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (9)$$

$$\widetilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = 0. \quad (10)$$

3.2 Zbezrozmernenie a bezrozmerné parametre

Rovnice môžeme zbezrozmerniť použitím nasledujúcich substitúcií⁴,

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= dz, & \text{a podobne } \tilde{s} &= ds \quad (\text{resp. } \tilde{x} = dx, \tilde{y} = dy), \\ \tilde{t} &= \frac{d^2}{\eta} t, & \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{\eta}{d} \mathbf{u}, & \tilde{p} &= 2\Omega_0 \eta \rho_l p, & \widetilde{\mathbf{B}}_0 &= B_M \mathbf{B}_0, & \tilde{\mathbf{b}} &= B_M \mathbf{b}, & \tilde{\vartheta} &= \frac{\eta \Delta T}{\kappa_{zz}} \vartheta, \end{aligned}$$

kde vlnkované veličiny sú s rozmerom, zatiaľ čo ich nevlnkované verzie sú už bezrozmerné, pričom sa už v nasledujúcich rovniciach objavujú len bezrozmerné veličiny. ρ_0 a p sú hustota a tlak (s príspevkom od odstredivej sily). Napríklad $[\tilde{z}] = 1 m$, $[z] = 1$, pretože $[d] = 1 m$. Podobne $[\tilde{t}] = 1 s$, $[t] = 1$, pretože $[d^2/\eta] = 1 s \dots$ Z typických hodnôt pre jadro $B_M = 0,5 \text{ mT}$ je charakteristická hodnota azimutálneho magnetického poľa na povrchu jadra. Využije sa v modeloch I, III a IV. V modeli II je B_M zhruba viac ako 100krát menšie, teda $\leq 5 \mu\text{T}$, pretože azimutálne pole je R_m krát, teda 100 až 1000krát väčšie ako poloidálne (R_m je magnetické Reynoldsovo číslo). Ďalej hrúbka vrstvy d v modeloch sa mlčky predpokladala 2200 km, teda hrúbky vonkajšieho jadra. Pri väčších hodnotách E táto hrúbka by mohla súvisieť napr. so stabilne stratifikovanou podvrstvou hrúbky 70 až 1000 km (nižšia hodnota je pravdepodobnejšia), alebo ešte tenšou vrstvou pri povrchu jadra, ktorej by mohli odpovedať zdroje sekulárnych variácií menších períód (menej ako 100 rokov); pozri Tabuľku v Prílohe MH. Systém zbezrozmernených lineárnych rovníc má nasledujúci tvar

$$R_o \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda [(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{b} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0] + R \vartheta \hat{\mathbf{z}} + E \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \nabla^2 \vartheta, \quad (13)$$

⁴špeciálny tvar škálovania teplotnej poruchy $\tilde{\vartheta} = \frac{\eta \Delta T}{\kappa} \vartheta$ sa použil preto, aby malo modifikované Rayleighove číslo ako aj rovnica vedenia tepla bežne používaný tvar. Pri použití jednoduchšieho škálovania $\tilde{\vartheta} = \Delta T \vartheta$ by malo modifikované Rayleighove číslo tvar $R = \alpha T g \Delta T d / 2 \Omega_0 \eta$ a rovnica vedenia tepla tvar $\frac{1}{q} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{q} \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \vartheta$.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (15)$$

V rovniciach sa objavujú bezrozmerné parametre, vyjadrujúce pomery veličín s rovnakým rozmerom, napr. jednotlivých síl, resp. jednotlivých difúzných koeficientov

$$R_o = \frac{\eta}{2\Omega_0 d^2}, \quad \Lambda = \frac{B_M^2}{2\Omega_0 \rho_l \mu \eta}, \quad E = \frac{\nu}{2\Omega_0 d^2}, \quad R = \frac{\alpha_T g \Delta T d}{2\Omega_0 \kappa}, \quad q = \frac{\kappa}{\eta}, \quad (16)$$

kde

R_o – modifikované Rossbyho číslo je mierou pomeru periódy rotácie a magnetického difúzneho času (klasické Rossbyho číslo $R_o = U/\Omega_0 d$ je mierou pomeru periódy rotácie a času d/U , za ktorý charakteristický tok v systéme s rýchlosťou U prejde charakteristickú dĺžku systému d);

Λ – Elsasserovo číslo dáva do pomeru magnetickú silu a Coriolisovu silu;

E – Ekmanove číslo je mierou viskózných síl vzhľadom ku Coriolisovej sile;

R – modifikované Rayleighove číslo meria efektívnu vztlakovú silu vzhľadom ku Coriolisej sile (kde α_T je koeficient teplotnej rozťažnosti);

q – Robertsove číslo je definované ako pomer magnetického a teplotného difúzneho času.

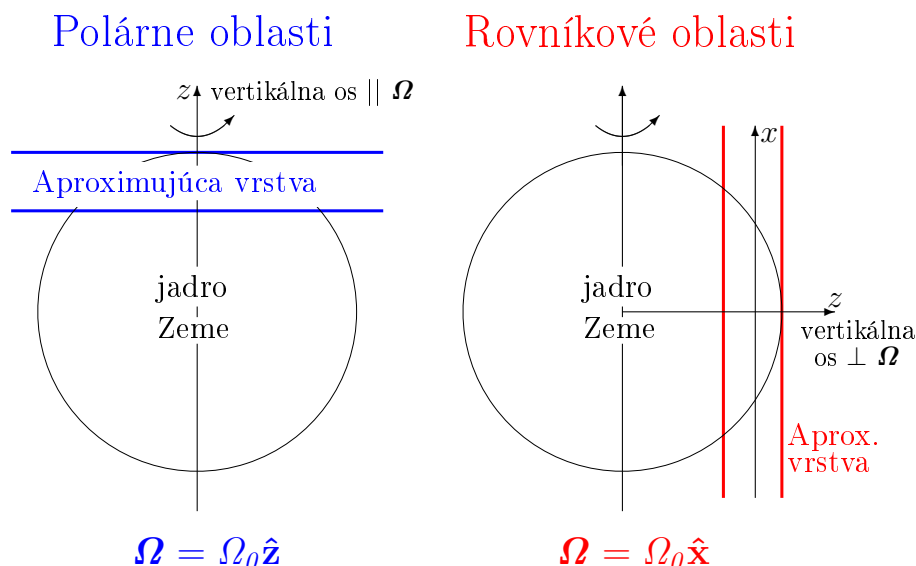
4 Modely rotujúcej magnetokonvekcie

Vplyv anizotropie difúzných koeficientov bol v tejto práci vyšetřovaný v štyroch modeloch rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve. Jednotlivé modely sa líšia hlavne konfiguráciou základného magnetického poľa $\widetilde{\mathbf{B}}_0$, orientáciou osi rotácie $\boldsymbol{\Omega}$ a súradnicovou sústavou, v ktorej je daný model riešený.

4.1 Základné stavy

Prvé dva modely (model I a model II) sú osovosymetrické vzhľadom na os rotácie, a boli riešené v cylindrickej súradnicovej sústave. Modely III a IV boli riešené v kartézskej súradnicovej sústave. Vo všetkých vyšetřovaných modeloch pôsobí gravitačná sila kolmo na horizontálnu vrstvu, teda v smere vertikály $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ a vrstva je zohrievaná zospodu a chladená zvrchu⁵ a vo vrstve je udržiavaný rovnomerný teplotný gradient. V modeloch I, II a III má os rotácie takisto vertikálny smer $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0\hat{\mathbf{z}}$. V modeli IV je os rotácie horizontálna $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0\hat{\mathbf{x}}$. Základné magnetické pole $\widetilde{\mathbf{B}}_0$ je jedine v modeli I nehomogénne a krivočiare ($\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M s/d\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ - azimutálne a lineárne rastúce od osi rotácie). V modeli II je základné magnetické pole homogénne v smere osi z ($\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M\hat{\mathbf{z}}$) a v modeloch III a IV je homogénne v smere osi y ($\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M\hat{\mathbf{y}}$). V nasledujúcej tabuľke sú prehľadne opísané základné vlastnosti modelov riešených v tejto práci.

model I	–	$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0\hat{\mathbf{z}},$	$\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M\hat{\boldsymbol{\varphi}}/d$
model II	–	$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0\hat{\mathbf{z}},$	$\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M\hat{\mathbf{z}}$
model III	–	$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0\hat{\mathbf{z}},$	$\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M\hat{\mathbf{y}}$
model IV	–	$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0\hat{\mathbf{x}},$	$\widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M\hat{\mathbf{y}}$



Obr. 1: Aproximácia polárnych alebo rovníkových oblastí nekonečnou rovinnou vrstvou.

⁵V modeli I vyšetřujeme aj prípady neutrálnej (s nulovým teplotným gradientom) a stabilnej stratifikácie.

Každý z týchto modelov má v istých oblastiach zemského jadra svoje geofyzikálne opodstatnenie a detailný opis jednotlivých modelov je v nasledujúcich kapitolách práce. Pri vyšetrowaní procesov v zemskom jadre sa veľmi často využíva rozklad geomagnetického poľa na toroidálnu a poloidálnu časť. V podmienkach jadra Zeme je toroidálna časť reprezentovaná azimutálnym poľom a poloidálna časť napr. dipólovým poľom.

Model I je hrubou analógiou podmienok v polárnych oblastiach zemského jadra, nie príliš blízko pólu s dominantným azimutálnym magnetickým poľom. Model II je takisto pre polárne oblasti jadra, pričom pozornosť je sústredená na homogénne vertikálne pole, ktoré je hrubou analógiou dipólového magnetického poľa v najvrchnejších častiach jadra Zeme. Model III môžeme považovať za aproximáciu podmienok v polárnych oblastiach jadra, dostatočne vzdialených od osi rotácie a teda od pólu, kde je už homogénne horizontálne pole dobrým priblížením azimutálneho magnetického poľa. Posledný model IV, v ktorom je smer gravitácie kolmý na rotačnú os, je aproximáciou podmienok v rovníkových oblastiach jadra Zeme. Vďaka dostatočnej vzdialenosti od stredu Zeme, je homogénne horizontálne magnetické pole takisto dobrou aproximáciou dominantného azimutálneho magnetického poľa.

4.2 Módy konvekcie

Vo všetkých modeloch I–IV vznikajúce poruchy \mathbf{u} , \mathbf{b} a ϑ môžu byť osobité, ale aj veľmi podobné. Ak poruchy rýchlosti a magnetického poľa \mathbf{u} a \mathbf{b} , pretože sú to bezžriedlové polia, rozložíme na poloidálne a toroidálne zložky (pritom a je horizontálne vlnové číslo poruchy)

$$\mathbf{u} = a^{-2}[\nabla \times (\nabla \times w\hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \omega\hat{\mathbf{z}}] \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = a^{-2}[\nabla \times (\nabla \times b\hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times j\hat{\mathbf{z}}], \quad (17)$$

čím ako \mathbf{u} , tak aj \mathbf{b} môžeme vyjadriť dvojicami skalárnych funkcií w , ω a b , j , tak poruchy \mathbf{u} , \mathbf{b} a ϑ , kde ϑ je porucha teploty, môžeme reprezentovať 5-icou skalárnych reálnych funkcií w , ω , b , j , ϑ , resp. 5-icou komplexných funkcií W , Ω , B , J , Θ , a to pri $f = w$, ω , b , j , ϑ a $F = W$, Ω , B , J , Θ takto

$$f(x, y, z, t) = \Re[F(z)\Phi(x, y) \exp(\lambda t)] \quad \text{a} \quad f(s, \varphi, z, t) = \Re[F(z)\Phi(s, \varphi) \exp(\lambda t)], \quad (17a)$$

kde $\lambda = i\sigma$, pričom σ je frekvencia. Tým poruchy \mathbf{u} , \mathbf{b} a ϑ v jednotlivých modeloch I–IV možno rozlíšiť formou skalárnej reálnej funkcie $f(x, y, z, t)$, resp. $f(s, \varphi, z, t)$, teda formou reprezentovanou rovinnou komplexnou funkciou $\Phi(x, y)$, resp. $\Phi(s, \varphi)$. Postupne rozlišujeme osovosymetrické a osovonesymetrické poruchy v cylindrickej geometrii, alebo horizontálne rolky v kartézskej geometrii. Pritom môžu byť stacionárne (na čase nezávislé) alebo nestacionárne, teda $\lambda = 0$ alebo $\lambda \neq 0$.

U každého jednotlivého modelu, charakterizovaného základnými poľami, má konvekcia svoj osobitý charakter a formu, ktoré sme postupne predpokladali

- model I – azimutálne sa šíriace vlny buď západne alebo východne ($\sigma > 0$ alebo $\sigma < 0$)
- model II – nestacionárne osovosymetrické módy, teda kinematicky ako torzné oscilácie
 - stacionárne osovosymetrické módy, teda azimutálne dýzové prúdenia - jets
 - horizontálne rolky s osami orientovanými v smere y (pritom ako v modeli I osovonesymetrické módy, teda západné a východné vlny sme nevyšetrovali)
- model III – horizontálne rolky, ktorých orientácia osí je určená vstupnými parametrami
- model IV – horizontálne rolky, ktoré podobne ako v modeli III rozlišujeme v smere mag. poľa, kolmo a šikmo naň.

Ak v modeli I išlo len o nestacionárne poruchy, tak v ostatných modeloch II–IV podľa vstupných parametrov môžu byť preferované stacionárne alebo nestacionárne poruchy.

Postupne v jednotlivých modeloch máme

$$\begin{aligned}
\text{model I} & - f(s, \varphi, z, t) = \Re[F(z)J_m(ks) \exp(im\varphi) \exp(\lambda t)], m = 1, 2, 3, \dots \\
\text{model II} & - f(s, \varphi, z, t) = \Re[F(z)J_m(ks) \exp(im\varphi + \lambda t)], m = 1, 2, 3, \dots \text{ (ako v I)} \\
& - f(s, \varphi, z, t) = \Re[F(z)J_m(ks) \exp(im\varphi + \lambda t)], m = 0 \\
& - f(x, y, z, t) = \Re[F(z) \exp(ikx + \lambda t)] \\
\text{model III} & - f(x, y, z, t) = \Re[F(z) \exp(ilx + imy + \lambda t)] \\
\text{model IV} & - f(x, y, z, t) = \Re[F(z) \exp(ilx + imy) \exp(\lambda t)] \text{ (teda ako v modeli III),}
\end{aligned} \tag{17b}$$

kde $J_m(ks)$ je Besselova funkcia 1. druhu rádu m .

Konvekcia vo forme stacionárnych a nestacionárnych horizontálnych roliek, vyšetovaná v modeloch III a IV, je jednoznačne popísaná dvoma zložkami l a m horizontálneho vlnového čísla. Pár l a m môže byť nahradený iným párom

$$a = (l^2 + m^2)^{1/2} \quad \text{a} \quad \gamma = \arctg(m/l), \tag{18}$$

kde veľkosť a horizontálneho vlnového čísla zjednodušene voláme horizontálne vlnové číslo a γ je uhol sklonu roliek vzhľadom na orientáciu základného magnetického poľa v smere osi y . Vektor (l, m) určuje orientáciu konvektívnych roliek (rolky sú kolmé na vektor) a v prípade nestacionárnej konvekcie tento vektor určuje tiež smer šírenia vlny [56, 55]; pozri obr. 29 na str. 67.

Treba poznamenať, že podobné rolky predpokladáme aj v modeli II, ale ich orientácia v horizontálnej vrstve je ľubovoľná, a preto ich zjednodušene orientujeme v smere osi y pri $a = k$ v (17ab).

5 Anizotropie difúzných koeficientov

Anizotropia difúzných koeficientov má v tejto práci kľúčový význam, keďže hlavným cieľom tejto práce je zaviesť anizotropiu do modelov rotujúcej magnetokonvekcie a preskúmať vplyv tejto anizotropie na rôzne vznikajúce módy konvekcie. Na fakt, že turbulentné difúzne koeficienty sú charakterizované anizotropiou, prvýkrát upozornili Braginsky a Meytlis [5]. Vo vonkajšom zemskom jadre predpokladali rozvinutú turbulenciu budenú konvektívne a pokúsili sa ju popísať modelom rotujúcej magnetokonvekcie. Nesústredili sa však na marginálne nestability, ale na tie, ktoré majú najrýchlejší exponenciálny rast amplitúdy. Odvodili rozmery vírov, ktoré boli výrazne ovplyvnené základnými silami \mathbf{M} a \mathbf{C} , a tým dostali anizotropiu turbulentných difúzných koeficientov s hodnotami výrazne zvýšenými v smeroch magnetického poľa a rotačnej osi.

Náš prístup ku štúdiu anizotropie difúzných koeficientov je zásadne iný, ako doteraz prevládali. Napr. v [16] je príklad vplyvu anizotropných difúzných koeficientov na činnosť dynama a v [32] analogicky ako u [5] sa odvádzajú vlastnosti turbulentných difúzných koeficientov z modelu rotujúcej magnetokonvekcie. Zatiaľ čo podmienky nástupu konvekcie s najrýchlejším exponenciálnym rastom amplitúdy sa u [5] študovali v nekonečne rozľahlom prostredí, tak v [32] je to v kvádriku (box) na guli, čím nehladiac na priestorovú ohraničenosť bolo možné študovať závislosti od zemepisnej šírky. Hlavný rozdiel nášho prístupu nie je v geometrii, teda v našich rovinných vrstvách oproti už spomenutým zjednodušeniam (neohraničený priestor, resp. kvádrík na guli), resp. oproti pokusom o sférickú geometriu [34]. Nie je ani v našom dôraze na marginálne módy. My a priori predpokladáme anizotropné difúzne koeficienty (podobne ako v [16] v prípade dynama), a potom študujeme podmienky nástupu konvekcie s tým, že vstupné parametre, teda napr. charakteristické hodnoty difuzívít predpokladáme už ovplyvnené turbulenciou, a nie ako v iných, napr. vyššie spomenutých štúdiách rotujúcej magnetokonvekcie s východiskovými izotropnými difuzivítami a s molekulárnymi hodnotami.

Aj keď sú difúzne členy v základných rovniciach zanedbateľne malé oproti ostatným členom, ich vplyv na správanie sa systému je zásadne dôležitý, keďže sú to členy s najvyšším stupňom derivácie. Uvážením turbulentného stavu sa charakter difúzných procesov mení, lebo difúzia už neprebíha na molekulárnej úrovni, ale je zabezpečovaná turbulentnými vírmi. Difúzia už teda primárne nezávisí od typu tekutiny, ale je skôr funkciou tečení. Turbulentné víry, ako difúzne prenášače, môžu byť veľmi výrazne ovplyvnené rôznymi silami (napr. v prípade geofyzikálnych tokov hlavne Lorentzovou, Coriolisovou, Archimedovou, ...). To vedie k deformácii vírov a v konečnom dôsledku k zvýšenej difúzii v určitých smeroch. Turbulencia a sily pôsobiace na turbulentné toky môžu teda spôsobovať anizotropiu difúzných procesov.

V modeloch, prezentovaných v tejto práci, sme vďaka týmto argumentom uvažovali anizotropnú viskozitu a tepelnú difuzivitu⁶. Koeficienty viskozity a tepelnej difuzivity sme do modelov zaviedli v najjednoduchšej forme, a to vo forme diagonálneho tenzora

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \begin{pmatrix} \nu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

ktorý má dve z troch zložiek rovnaké, ale rôzne od tretej zložky. Rôzne typy anizotropie súvisia teda s tým, ktoré dve zložky sú rovnaké.

⁶Koeficient magnetickej difúzie nechávame naďalej izotropný, pretože jeho molekulárna hodnota kvôli vysokej vodivosti jadra je aspoň tak veľká, ako odpovedajúca turbulentná hodnota.

Pomer dvoch rôznych zložiek nazývame parameter anizotropie, ktorý je jednoduchou mierou anizotropie a označujeme ho α . V modeloch I a II, resp. v modeloch III a IV je parameter anizotropie definovaný⁷ nasledovne

$$\alpha = \kappa_{ss}/\kappa_{zz} = \nu_{ss}/\nu_{zz}, \quad \text{resp.} \quad \alpha = \kappa_{xx}/\kappa_{zz} = \nu_{xx}/\nu_{zz}. \quad (20)$$

Dôležitý je pojem horizontálnej izotropie, ktorý označuje stav, pri ktorom uvažujeme difúzne koeficienty v horizontálnych smeroch rovnaké ($\nu_{\varphi\varphi} = \nu_{ss}$ alebo $\nu_{xx} = \nu_{yy}$).

5.1 Stratifikačná anizotropia (*SA*)

Ak je horizontálna izotropia zachovaná, teda ak sú difúzne koeficienty v horizontálnych smeroch rovnaké (ale rôzne od koeficientu vo vertikálnom smere z), nazývame takúto anizotropiu stratifikačná anizotropia. Označujeme ju aj *SA* anizotropia. V *SA* prípade má na dynamiku vírov dominantný vplyv hustotná stratifikácia, určená vertikálnym smerom gravitácie, resp. Archimedovej vztlakovej sily. Môžeme definovať dva typy stratifikačnej anizotropie podľa toho, či sú koeficienty v horizontálnych smeroch väčšie alebo menšie od koeficientu vo vertikálnom smere. Ak sú koeficienty v horizontálnych smeroch väčšie ako vo vertikálnom smere ($\nu_{\varphi\varphi} = \nu_{ss} > \nu_{zz}$ a $\nu_{xx} = \nu_{yy} > \nu_{zz}$), hovoríme o stratifikačnej anizotropii oceánskeho typu, ktorá je analogická stavu najvrchnejších vrstiev oceánu, ktorý je vďaka zohrievaniu zvrchu stratifikovaný stabilne, čo má za následok zhoršený turbulentný prenos vo vertikálnom smere a označujeme ju *So*. Parameter anizotropie je v tomto prípade väčší ako jedna ($\alpha > 1$).

Ak platí opak, t.j. koeficient vo vertikálnom smere je väčší, ako v horizontálnych smeroch ($\nu_{\varphi\varphi} = \nu_{ss} < \nu_{zz}$ a $\nu_{xx} = \nu_{yy} < \nu_{zz}$), hovoríme o stratifikačnej anizotropii atmosférického typu a označujeme ju *Sa*. Tentokrát ide o analógiu s najspodnejšou vrstvou atmosféry, v ktorej je vďaka rozvinutej konvekcií uľahčený turbulentný prenos vo vertikálnom smere. Parameter anizotropie má hodnoty $\alpha < 1$. V modeloch I, II a IV je horizontálna izotropia vždy zachovaná, a preto uvažujeme len stratifikačnú anizotropiu ((aj keď *Sa* alebo *So* formálne môže byť chápaná ako *BM*; pozri nižšie).

5.2 Anizotropia podľa Braginského a Meytliisa (*BM*)

Model III umožňuje okrem *SA* anizotropie zaviesť aj anizotropiu, pri ktorej sú difúzne koeficienty rovnaké v smeroch y a z , ale väčšie od koeficientu v smere x . V tomto prípade je horizontálna izotropia porušená ($\nu_{yy} = \nu_{zz} > \nu_{xx}$), a túto anizotropiu nazývame anizotropiou Braginského a Meytliisa a označujeme ju *BM*.

Táto *BM* anizotropia korešponduje záverom štúdie [5] lokálnej turbulencie zemského jadra, že rotácia a azimutálne magnetické pole zvyšujú difúziu v smeroch rotačnej osi a magnetického poľa, teda vo vertikálnom smere z a v azimutálnom smere φ , čo vlastne definuje anizotropiu difúzných koeficientov v nasledujúcom tvare: $\nu_{zz} \sim \nu_{\varphi\varphi} \gg \nu_{ss}$ a $\kappa_{zz} \sim \kappa_{\varphi\varphi} \gg \kappa_{ss}$ (v cylindrických súradniciach). V základnom stave modelu III je magnetické pole orientované v smere y a os rotácie v smere z a podľa [5] je zvýšená difúzia práve v týchto smeroch. Podľa týchto argumentov môžeme v modeli II formálne stotožniť *Sa* anizotropiu s *BM* anizotropiou, lebo aj os rotácie aj magnetické pole sú orientované vo vertikálnom smere z . Podobne aj v modeli IV môžeme formálne stotožniť *So* anizotropiu s *BM* anizotropiou, lebo aj os rotácie aj magnetické pole ležia v horizontálnych smeroch a horizontálna izotropia je zachovaná.

⁷Pri zavedení anizotropie sme využili nasledujúce zjednodušenia. Anizotropia je zadaná len dvoma koeficientami, lebo dva z troch koeficientov sú vždy rovnaké. Anizotropia viskozity aj tepelnej difúzivity je rovnaká, t.j. parameter anizotropie α pre viskozitu aj pre tepelnú difúzivitu je rovnaký.

6 Model I

6.1 Model s azimutálnym magnetickým poľom

Model vychádza z práce Sowarda [50], v ktorej skúmal stabilitu systému s azimutálnym magnetickým poľom a našiel analytické riešenie v tvare periodických tepelne alebo magneticky hnaných nestabilití. Tieto tepelne hnané nestability nazývame nestability typu MAC vln, pretože vznikajú ako dôsledok základnej rovnováhy troch dominantných síl, Lorentzovej (magnetickej), Archimedovej (vztlakovej) a Coriolisovej, a ku svojmu vzniku potrebujú nestabilnú stratifikáciu (Rayleighove číslo je kladné). Magnetickými nestabilitami označujeme buď nestability typu MC vln, ktoré môžu vznikáť v nestratifikovanom prostredí (Rayleighove číslo je nulové), alebo magneticky hnané MAC vlny, ktoré existujú v stabilne stratifikovanom prostredí (Rayleighove číslo je záporné). Tepelné aj magnetické nestability sú osovo nesymetrické vlny šíriace sa v azimutálnom smere pozdĺž siločiar magnetického poľa západným alebo východným smerom. Tieto nestability môžu byť dôležitou súčasťou generačných procesov a môžu byť dôležité pri chápaní niektorých sekulárnych variácií. Magneticky hnané nestability čerpajú energiu ku svojmu vzniku z magnetického poľa, čím ho oslabujú, a preto môžu slúžiť ako regulátor, ktorý zabraňuje extrémnemu nárastu magnetického poľa a môžu byť dôležité pri inverziách magnetického poľa [20].

Pôvodný Sowardov model bol na našom pracovisku vo viacerých krokoch modifikovaný s uvážením niektorých ďalších zložítostí lepšie modelujúcich reálne podmienky. Problém bol riešený nielen s rovnomernou ale aj s nerovnomernou stratifikáciou [2], [42], bol študovaný z hľadiska magnetohydrodynamiky stredných polí [6], [7], [44], uvažovali sa rôzne kombinácie mechanických a elektrických hraničných podmienok a ich vplyv na vlastnosti vznikajúcich nestabilití [7], [8], [44], [43], [45]. Ďalej boli uvažované viskózne sily, ktoré sú oproti trom základným silám zanedbateľne malé, ale napriek tomu výrazne ovplyvňujú výsledné riešenia [43], čo viedlo napr. k objavu nových módov typu MC vln, ktoré ku svojej existencii potrebujú práve viskozitu [9]. V posledných rokoch sa pri riešení tohto problému použili nové matematické (hlavne asymptotické postupy), ktoré potvrdili a vysvetlili mnohé vlastnosti nestabilití, ktoré boli zistené v predchádzajúcich numerických postupoch [47]. V prípadoch jednoduchších hraničných podmienok bola aplikovaná aj slabo nelineárna analýza [36].

V modeli I (a neskôr aj v modeli II) používame cylindrickú geometriu, v ktorej máme horizontálne smery (azimutálny φ – smer a radiálny s – smer) a vertikálny z – smer. Anizotropiu zavádzame do problému v takom zmysle (najjednoduchšia možná forma), že tepelná difuzivita má v horizontálnych smeroch inú hodnotu (κ_{ss} , $\kappa_{\varphi\varphi}$) ako vo vertikálnom smere (κ_{zz}), pričom predpokladáme, že v horizontálnych smeroch uvažujeme izotropnú difuzivitu (tepelná difuzivita je vo φ – smere rovnaká ako v s – smere, $\kappa_{ss} = \kappa_{\varphi\varphi}$) [10, 71, 72]. Uvažovaním anizotropných difuzív sa s koeficientom difúzie ďalej narába ako s diagonálnym tenzorom (19)

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \kappa_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{zz} \end{pmatrix}$$

a difúzny člen má potom nasledujúci tvar

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \tilde{\vartheta}) = \nabla \cdot \left[\kappa_{zz} (\partial_z \tilde{\vartheta}) \hat{\mathbf{z}} + \kappa_{ss} (\partial_s \tilde{\vartheta}) \hat{\mathbf{s}} + \kappa_{\varphi\varphi} s^{-1} (\partial_\varphi \tilde{\vartheta}) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right].$$

Ak predpokladáme, že $\kappa_{ss} = \kappa_{\varphi\varphi}$, tak po vykonaní príslušných derivácií dostaneme difúzny

člen do tvaru

$$\kappa_{zz}\partial_{zz}^2\tilde{\vartheta} + \kappa_{ss}s^{-1}\partial_s(s\partial_s\tilde{\vartheta}) + \kappa_{ss}s^{-2}\partial_{\varphi\varphi}^2\tilde{\vartheta}.$$

Ďalej vyberieme pred zátvorku koeficient κ_{zz} , v zátvorke sa nám tak objaví podiel koeficientov κ_{ss}/κ_{zz} a výraz napíšeme v tvare

$$\kappa_{zz}\left[\partial_{zz}^2\tilde{\vartheta} + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa_{zz}}\left(s^{-1}\partial_s(s\partial_s\tilde{\vartheta}) + s^{-2}\partial_{\varphi\varphi}^2\tilde{\vartheta}\right)\right].$$

Tento podiel κ_{ss}/κ_{zz} označíme symbolom α_ϑ a budeme ho ďalej nazývať koeficientom anizotropie, lebo udáva mieru anizotropie, t.j. odchýlku od izotropného prípadu ($\alpha_\vartheta = 1$). Konečný tvar difúzneho člena po jednoduchých algebraických úpravách v anizotropnom prípade vyzerá nasledovne

$$\kappa_{zz}\left[(1 - \alpha_\vartheta)\partial_{zz}^2 + \alpha_\vartheta\nabla^2\right]\tilde{\vartheta}. \quad (21)$$

Ľahko môžeme overiť, že v izotropnom prípade ($\alpha_\vartheta = 1$) sa difúzny člen zmení na známy tvar $\kappa\nabla^2\tilde{\vartheta}$. Úplne rovnaký postup použijeme na odvodenie viskózneho člena pre anizotropný prípad, pričom koeficient anizotropie je teraz podiel koeficientov viskozity ν_{ss}/ν_{zz} a označujeme ho α_ν . Viskózný člen môžeme potom napísať v tvare

$$\nu_{zz}\left[(1 - \alpha_\nu)\partial_{zz}^2 + \alpha_\nu\nabla^2\right]\mathbf{u}. \quad (22)$$

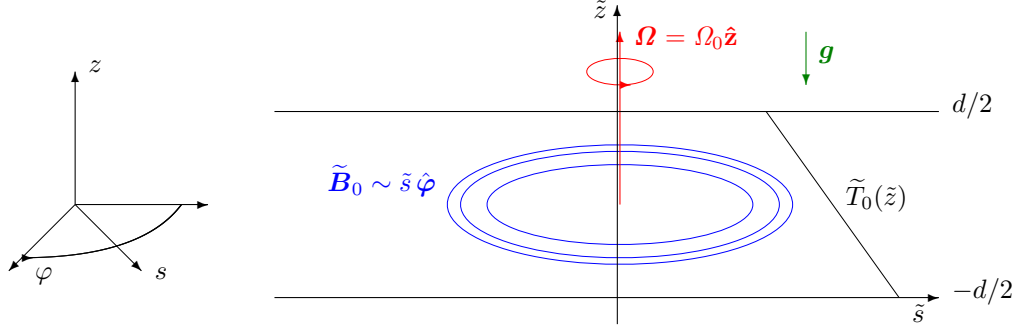
Ďalej budeme predpokladať, že obidva koeficienty anizotropie sú rovnaké, t.j. $\alpha_\nu = \alpha_\vartheta = \alpha$, ale v rovniciach ich budeme rozlišovať, aby bolo zrejmé, ktorý koeficient korešponduje svojej difúzii.

Pojem anizotropie difúzných koeficientov je v tejto práci kľúčový. Preto opakujeme, že podľa hodnoty, ktorú nadobúda koeficient anizotropie α , rozlišujeme dva prípady anizotropie: v prípade, keď je difuzivita vo vertikálnom smere väčšia ako v horizontálnom smere ($\kappa_{zz} > \kappa_{ss}$, $\alpha < 1$), hovoríme o anizotropii atmosférického typu (alebo o *Sa* anizotropii); naopak, keď je difuzivita vo vertikálnom smere menšia ako v horizontálnom smere ($\kappa_{zz} < \kappa_{ss}$, $\alpha > 1$), hovoríme o anizotropii oceánskeho typu (alebo o *So* anizotropii). Názvy oceánska a atmosférická anizotropia súvisia s analogickými prípadmi anizotropií, ktoré sa predpokladajú v povrchových vrstvách oceánu, resp. v najspodnejšej časti atmosféry. Oceány (cez deň) sú zahrievané zvrchu, a preto sú sťažené podmienky pre konvekciu, prípadne turbulentné premiešavanie vo vertikálnom smere. Avšak vďaka ďalším efektom (napr. tečeniami indukovanými vetrami, slapovými javmi, prídavnými tečeniami, ...) premiešavanie v horizontálnych smeroch je výrazné. Molekulárna viskozita vody je $\nu \sim 10^{-6} m^2s^{-1}$. Hodnoty turbulentných viskozít sú silne závislé na charaktere tečení v oceánoch, a preto ich hodnoty sú uvádzané v širokých intervaloch. Máme $\nu_{zz} \in (10^{-5}, 10^{-1})$ a $\nu_{ss} \in (10, 10^5)$ v jednotkách m^2s^{-1} , čo jednoznačne naznačuje, že anizotropný koeficient $\alpha \gg 1$ pre povrchové vody oceánov; pozri napr. [14]. Najspodnejšia časť atmosféry je zahrievaná zo spodu, a preto na základe analogických úvah ako pre oceány máme pre spodnú atmosféru $\alpha \ll 1$. Takže môžeme rozlišovať „silnú“, resp. „slabú“ anizotropiu, podľa toho, ako veľmi sa líšia koeficienty κ_{zz} a κ_{ss} . Pre silnú anizotropiu platí $\alpha \gg 1$ alebo $\alpha \ll 1$ a pre slabú anizotropiu platí $\alpha = O(1)$, ale $\alpha \neq 1$.

6.2 Základné rovnice

V tomto modeli uvažujeme nasledujúci základný stav

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \frac{\tilde{s}}{d} \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \tilde{T}_0 = T_l - \Delta T \frac{\tilde{z} + d/2}{d}, \quad (23)$$



Obr. 2: Model rotujúcej magnetokonvekcie s azimutálnym základným magnetickým poľom lineárne rastúcim so vzdialenosťou od osi rotácie v nekonečnej horizontálnej nestabilne stratifikovanej vrstve s vertikálnym teplotným profilom $\tilde{T}_0(\tilde{z})$.

kde \tilde{U}_0 je rýchlosť, $\tilde{\mathbf{B}}_0$ je azimutálne magnetické pole, lineárne rastúce so vzdialenosťou \tilde{s} od z -ovej osi rotácie a $\tilde{T}_0(\tilde{z})$ je vertikálny teplotný profil.

Vďaka predpokladu nekonečne malých amplitúd porúch môžeme základné rovnice zlinearizovať a zbezrozmerniť na takýto tvar, pričom už uvažujeme anizotropný koeficient viskozity a tepelnej difuzivity

$$\begin{aligned} [R_o \partial_t \mathbf{u} +] \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \\ = -\nabla p + \Lambda [(\nabla \times s \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \times \mathbf{b} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times s \hat{\boldsymbol{\varphi}}] + R \vartheta \hat{\mathbf{z}} + E_z [(1 - \alpha_v) \partial_{zz}^2 + \alpha_v \nabla^2] \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times s \hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (25)$$

$$(1/q_z) \partial_t \vartheta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + [(1 - \alpha_\vartheta) \partial_{zz}^2 + \alpha_\vartheta \nabla^2] \vartheta, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (27)$$

V rovniciach sa objavujú bezrozmerné čísla (16), pričom anizotropia spôsobila, že Ekmanove aj Robertsove číslo majú dve varianty, vertikálnu a horizontálnu. Máme teda dve Ekmanove čísla $E_z = \nu_{zz}/2\Omega_0 d^2$, $E_s = \nu_{ss}/2\Omega_0 d^2$ a dve Robertsove čísla $q_z = \kappa_{zz}/\eta$, $q_s = \kappa_{ss}/\eta$. Vďaka vhodne zavedeným koeficientom anizotropie $\alpha_\vartheta = \kappa_{ss}/\kappa_{zz}$ a $\alpha_v = \nu_{ss}/\nu_{zz}$ v rovniciach priamo vystupujú len vertikálne zložky týchto bezrozmerných čísel. Ostatné bezrozmerné čísla sú štandardné už opísané bezrozmerné čísla: R - modifikované Rayleighove číslo, Λ - Elsasserove číslo a R_o - Rossbyho číslo.

Rozdelením porúch rýchlosti \mathbf{u} a porúch magnetického poľa \mathbf{b} na poloidálnu a toroidálnu časť

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= k^{-2} [\nabla \times (\nabla \times w \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \omega \hat{\mathbf{z}}], \\ \mathbf{b} &= k^{-2} [\nabla \times (\nabla \times b \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times j \hat{\mathbf{z}}], \end{aligned} \quad (28)$$

s neznámymi funkciami (w, ω, b, j) , ktoré majú tvar

$$f(z, s, \varphi, t) = \Re e [F(z) J_m(ks) \exp(im\varphi + \lambda t)], \quad (29)$$

sú poruchy \mathbf{u} , \mathbf{b} reprezentované funkciami $W(z)$, $\Omega(z)$, $B(z)$, $J(z)$. Pre skalárne teplotné poruchy ϑ a ich funkciu $\Theta(z)$, ktorá ich reprezentuje, takisto platí vzťah (29). Teda symboly f , F znamenajú v (29) všetky odpovedajúce dvojice ϑ , Θ ; w , W ; ω , Ω ; b , B a j , J .

Pritom w , W a b , B reprezentujú poloidálne, zatiaľčo ω , Ω a j , J toroidálne zložky vektorov \mathbf{u} a \mathbf{b} (rovnako je to aj v nasledujúcich modeloch v tejto práci). $J_m(k s)$ je Besselova funkcia, celé číslo m a reálne k sú azimutálne a radiálne vlnové číslo, λ je komplexná frekvencia v zmysle $\lambda = i\sigma$ pri reálnej frekvencii σ .

Reprezentujúce funkcie w , ω , b , j a ϑ pre nestability, t.j. poruchu rýchlosti \mathbf{u} , poruchu magnetického poľa \mathbf{b} a poruchu teploty ϑ , sa riadia nasledujúcim systémom lineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc

$$0 = DW - \Lambda(2DB - imJ) + [E_z(D^2 - \alpha_\nu k^2) - R_o\lambda]\Omega, \quad (30)$$

$$k^2 R\Theta = -D\Omega + \Lambda[2DJ + im(D^2 - k^2)B] + (D^2 - k^2)[E_z(D^2 - \alpha_\nu k^2) - R_o\lambda]W, \quad (31)$$

$$\lambda B = (D^2 - k^2)B + imW, \quad (32)$$

$$\lambda J = (D^2 - k^2)J + im\Omega, \quad (33)$$

$$\frac{\lambda}{q_z}\Theta = W + (D^2 - \alpha_\vartheta k^2)\Theta, \quad (34)$$

kde $D = d/dz$.

Kvôli matematickej zvládnuteľnosti zavedenia anizotropie difúzných koeficientov sme zvolili najjednoduchšie možné hraničné podmienky na $z = \pm 1/2$, t.j. mechanicky voľné, a tepelne i elektricky nekonečne vodivé

$$W = D^2W = D\Omega = B = DJ = \Theta = 0. \quad (35)$$

Elimináciou funkcií Ω , J , B a Θ z rovníc (30–34) a uvažovaním riešenia $W = W_0 \cos(\pi_l z)$, kde $\pi_l = (2l-1)\pi$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) je vertikálne vlnové číslo, dostávame disperznú rovnicu, resp. vzťah pre Rayleighove číslo v tvare

$$Rk^2 \frac{K^2 + \lambda}{K_\alpha^2 + \zeta\lambda} = \frac{\pi^2(K^2 + \lambda - 2mi\Lambda)^2 + K^2 [E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda]^2}{E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda}, \quad (36)$$

kde $\zeta = 1/q_z$, $K^2 = \pi_l^2 + k^2$ a $K_\alpha^2 = \pi_l^2 + \alpha k^2$. Pritom sme predpokladali, že Rossbyho číslo $R_o = 0$. Ďalej v podkapitole 6.5 Numerické výsledky u MAC módov sú výpočty prezentované len pre vertikálne vlnové číslo $\pi_l = \pi$, pretože MAC módy s práve najmenším π_l sú preferované, teda práve ony majú šancu mať najmenšie Rayleighove číslo. U MC módov je v 6.5 takisto len $\pi_l = \pi$, a to hlavne kvôli stručnosti a jednoduchosti.

6.3 Minimalizácia; určenie kritických čísel R_c , k_c a σ_c u MAC módov

Pri lineárnej stabilitnej analýze v problémoch rotujúcej magnetokonvekcie sa pri zadaných vstupných parametroch hľadajú také základné charakteristiky nestability (vlnové čísla a frekvencia), ktoré určia najľahšie sa vybuditeľnú poruchu.

K najľahšiemu vybudeniu nestability sa pristupuje dvoma rôznymi spôsobmi. Prvý - známy ako určenie marginálnej nestability, resp. konvekcie, a ktorý je využívaný v tejto práci, sústreďuje pozornosť na Rayleighove číslo, a to na určenie jeho minimálnej hodnoty pri a priori daných vstupných parametroch, vedúce k jeho minimalizácii pri uvážení jeho závislosti na vlnových číslach a frekvencii vznikajúcej nestability. Marginálna konvekcia je pomenovaná podľa toho, že amplitúdy vznikajúcich porúch v čase ani nerastú, ani neklesajú. Pri predpokladanom časovom exponenciálnom vývine, teda pri poruchách úmerných $\exp \lambda t$ sa pre $\lambda = \lambda_r + i\sigma$ požaduje $\lambda_r = 0$.

V druhom prístupe určenia najľahšie vybudenej nestability sa dôraz kladie na komplexnú frekvenciu λ s tým, že „rýchlosť rastu“ (growth rate) nestabilit λ_r , závislé od

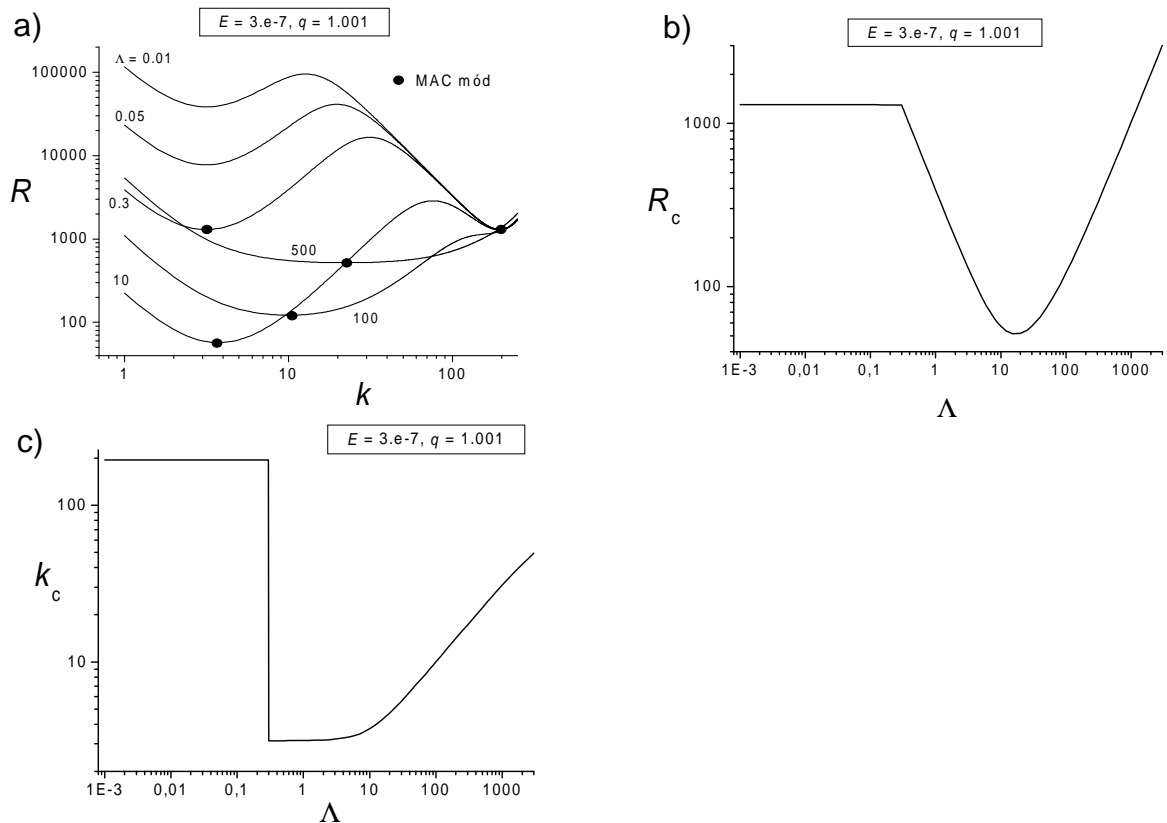
vlnových čísel, sa maximalizuje. Teda pri a priori daných vstupných parametroch (tentoraz aj Rayleighove číslo) je najľahšie vybudená tá nestabilita, ktorej amplitúdy porúch v čase exponenciálne najvýraznejšie rastú. Rast je dôležitý, a preto musí byť splnená podmienka $\lambda_r \geq 0$.

Ďalej už pozornosť sústreďme len na prvý spôsob určenia „najľahšie vybudených módov nestability“ - na marginálnu nestabilitu s $\lambda_r = 0$. Znamená to aj, že hľadáme takú poruchu, ktorá vznikne pri najmenšom možnom Rayleighovom čísle. Toto Rayleighove číslo už nazývame kritickým Rayleighovým číslom R_c , jemu odpovedajúce kritické radiálne vlnové číslo k_c a kritickú frekvenciu σ_c . Pri hľadaní kritických čísel sa vychádza z výrazu (36) pre Rayleighove číslo, ktorý má tvar komplexného čísla. Teda sa dá napísať vo všeobecnosti v tvare $R = \Re(R) + i\Im(R)$. Rayleighove číslo je bezrozmerné číslo vhodne poskladané zo základných fyzikálnych veličín, a teda je to reálne číslo. Preto môžeme položiť imaginárnu časť výrazu (36) rovnú nule ($\Im(R) = 0$), čo nám dá dôležitú rovnicu pre výpočet frekvencie σ v tvare polynómu piateho stupňa. Reálna časť nám dá predpis pre výpočet hodnoty Rayleighovho čísla. Teda postup na výpočet Rayleighovho čísla je taký, že pri zadaných vstupných parametroch (Elsasserove číslo A , Ekmanove čísla E_z a E_s , Robertsove čísla q_z a q_s , parameter anizotropie α , vertikálne vlnové číslo π_l a azimutálne vlnové číslo m)⁸ si zvolíme radiálne vlnové číslo k , spočítame korene polynómu $\Im(R) = 0$, z ktorých vyberieme fyzikálne vhodný koreň (kladný alebo záporný reálny koreň podľa toho, či vyšetrujeme západné alebo východné módy). Takto vypočítanú frekvenciu spolu s k nej prislúchajúcim radiálnym vlnovým číslom a ostatné vstupné parametre dosadíme do výrazu $\Re(R)$ a spočítame Rayleighove číslo. Úlohou je nájsť také radiálne vlnové číslo a jemu odpovedajúcu frekvenciu, ktoré pri všetkých ostatných konštantných vstupných parametroch dávajú najmenšie Rayleighove číslo. Nasledujúce obrázky objasňujú postup hľadania kritického Rayleighovho čísla ako aj základné vlastnosti MAC módov [61].

V prezentácii numerických výsledkov pomocou kriviek a grafov na obrázkoch a podobrázkoch budeme používať systematicky nasledujúce pomenovania. Obrázky budú mať bežne používaný význam a značené budú prirodzeným číslom (napr. obrázok 3, resp. obr. 3). Podobrázky na nich pomenujeme grafy a ich značenie bude číslo odpovedajúce obrázku, ale s indexom - malým písmenom abecedy (napr. graf 3c alebo grafy 3ab). Krivky na obrázkoch, resp. grafoch budú špecifikované plnosťou, bodkovaním, prípadne farbou a často k nim bude pridaná hodnota parametra alebo veličiny, na ktoré sa vzťahujú.

Na grafe 3a vidíme závislosť Rayleighovho čísla na radiálnom vlnovom čísle, kde jednotlivé krivky súvisia s rôznymi hodnotami Elsasserovho čísla A , pričom všetky ostatné vstupné parametre sú konštantné. Ďalšie dva grafy 3b a 3c opisujú závislosť kritického Rayleighovho čísla R_c a kritického radiálneho vlnového čísla k_c na Elsasserovom čísle pre jeden konkrétny MAC mód v izotropnom prípade. Všimnime si najprv krivku s $A = 0,01$ na grafe 3a. Rayleighove číslo ako funkcia radiálneho vlnového čísla k má dve lokálne minimá. Prvé minimum sa dosahuje pri hodnote radiálneho vlnového čísla približne $k \sim 3$ a Rayleighove číslo v ňom má hodnotu $R \sim 40000$. Druhé minimum je pri hodnote $k \sim 200$ a Rayleighove číslo v tomto minime má hodnotu $R \sim 1300$. Druhé minimum teda dáva menšiu hodnotu Rayleighovho čísla R , a keďže sa zaujíname o najmenšie možné Rayleighove číslo, práve toto druhé minimum je hľadané kritické Rayleighove číslo R_c . Z fyzikálneho hľadiska to znamená, že sú možné dva nezávislé módy spojené s dvoma lokálnymi minimami, pričom je preferovaný druhý mód, ktorý nazývame aj viskóznym mód

⁸Takto postupujeme, ak máme dôvod predpokladať, že niektoré pevne dané zložky vlnového čísla, napr. ako v práve riešenom probléme $\pi_l = \pi$ a $m = 1$, garantujú minimálne Rayleighove číslo, ktoré vnímame aj ako funkciu všetkých zložiek vlnového čísla. Môže byť aj iný dôvod sústrediť záujem len na vybrané zložky vlnových čísel.

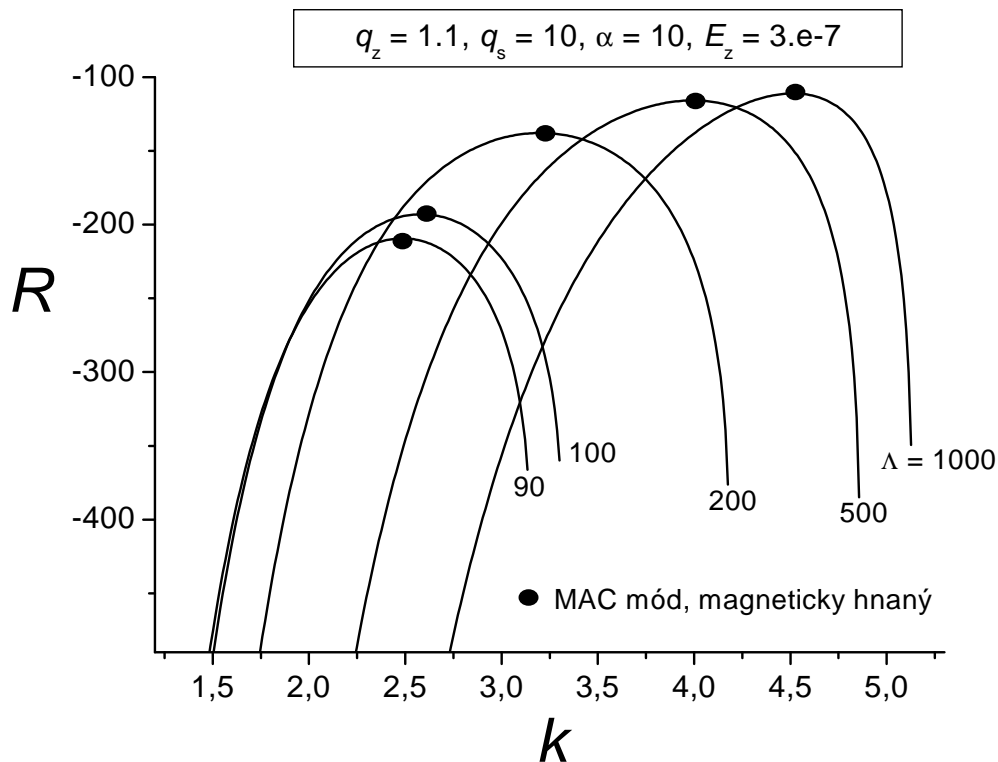


Obr. 3: (a) Rayleighove číslo R v závislosti na radiálnom vlnovom čísle k pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla Λ . Lokálne minimum dáva hľadané kritické Rayleighove číslo R_c (b) a kritické radiálne vlnové číslo k_c (c).

(lebo v neviskóznom prípade neexistuje)⁹. Prvý nepreferovaný mód nazývame hydromagnetický MAC mód. Na grafoch 3b a 3c vidíme, že pri hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 0,01$ (teda pri relatívne slabom magnetickom poli) je kritické Rayleighove číslo $R_c \sim 1300$ a kritické radiálne vlnové číslo $k_c \sim 200$. Ak sa na grafe 3a pozrieme na krivku s $\Lambda = 0,05$, vidíme, že má opäť dve minimá, pričom prvé minimum už dáva menšiu hodnotu Rayleighovho čísla R ako v prípade prvej krivky s $\Lambda = 0,01$. Druhé minimum sa zvýšením hodnoty Λ nezmenilo a hlavne dáva stále menšiu hodnotu Rayleighovho čísla ako prvé minimum. Teda aj pri $\Lambda = 0,05$ je viskózný mód preferovaný pred hydromagnetickým. Z grafov 3b a 3c vidieť, že aj pri hodnote $\Lambda = 0,05$ je kritické Rayleighove číslo $R_c \sim 1300$ a kritické radiálne vlnové číslo $k_c \sim 200$. Viskózný mód, ktorý je na magnetickom poli nezávislý, je stále preferovaný. Podobné správanie je až po hodnotu $\Lambda \sim 0,3$, pri ktorej (ako vidno na krivke 0,3 na prvom grafe) sa prvé minimum vyrovná druhému. Obidve minimá, ktoré sa dosahujú pri rôznych hodnotách radiálneho vlnového čísla k , dávajú rovnakú hodnotu Rayleighovho čísla R . Znamená to, že existuje istá hodnota Elsasserovho čísla Λ , pri ktorej sú viskózný a hydromagnetický mód rovnako preferované. Na krivke grafu 3b je táto rovnaká preferencia v mieste, kde sa mení charakter krivky z takmer konštantnej na krivku podobnú parabole. Graf 3c ukazuje túto vlastnosť nespojitou

⁹Sakuraba [38] mal rozumný dôvod pomenovať tento mód ako geostrofický mód; napriek tomu, že geostrofická rovnováha uvažuje len 2 sily, a to Coriolisovu a gradient tlaku. U tohoto geostrofického, resp. viskózneho módu ešte základná rovnováha nie je určená silami M , A a C , ktoré zabezpečujú dynamickú rovnováhu u MAC módov. U MAC módov, či u „geostrofického módu“ síce základnú rovnováhu určujú sily M , A a C , či sily od ∇p a C , ktoré svojou veľkosťou prevažujú nad ostatnými silami, ale tým, že ich súčet je blízky nule, sa dáva šanca prejavíť sile aj keď zanedbateľnej veľkosti (u nás viskózna sila), ale najvýznamnejším spôsobom dorovnáujúcej takmer nulový súčet $M+A+C$, resp. $\nabla p+C$.

a skokom z hodnoty $k \sim 200$ na hodnotu $k \sim 3$. Ďalším zvyšovaním Elsasserovho čísla je už prvé minimum (dosahované pri radiálnom vlnovom čísle $k \sim 3$) menšie ako druhé minimum ($k \sim 200$), čo znamená, že hydromagnetický mód je už preferovaný pred viskóznym módom. Ak si všimneme krivku $\Lambda = 10$, tak vidíme, že minimum hydromagnetického módu je už výraznejšie menšie ako minimum viskózneho módu. Pre vyššie hodnoty Λ už druhé minimum prestáva existovať, čo vidíme napr. na krivke $\Lambda = 100$, kde je už len akýsi zákmit, ale už tam nie je lokálne minimum. Pre ešte vyššie hodnoty Λ (napr. $\Lambda = 500$) už existuje jediné lokálne minimum súvisiace s hydromagnetickým módom a zvyšovaním hodnoty Λ sa toto minimum dosahuje pri väčších hodnotách radiálneho vlnového čísla k a Rayleighove číslo v tomto minime sa tiež postupne zväčšuje. Na grafoch 3b a 3c je to potom zrejme z rastúcej závislosti ako R_c na Λ , tak aj k_c na Λ .



Obr. 4: Určenie R_c a k_c pre magneticky hnaný MAC mód; Rayleighove číslo R v závislosti na radiálnom vlnovom čísle k pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla Λ . Lokálne maximum dáva hľadané kritické Rayleighove číslo R_c a kritické radiálne vlnové číslo k_c .

Pre úplnosť ešte schematicky opíšeme postup hľadania kritických čísel magneticky hnaných MAC módov, ktoré vznikajú v stabilne stratifikovanom prostredí (Rayleighove číslo je záporné). V takomto prípade v podstate už nejde o minimalizáciu Rayleighovho čísla R vzhľadom na radiálne vlnové číslo k a frekvenciu σ , ale o maximalizáciu, keďže sa zameriavame na MAC módy so záporným Rayleighovým číslom [61]. V absolútnej hodnote však opäť hľadáme minimálne Rayleighove číslo, preto sa postup v ničom neodlišuje od postupu hľadania R_c , k_c a σ_c v nestabilne stratifikovanom prostredí (kladné Rayleighove čísla). Na obrázku 4 máme krivky závislosti R vs k pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla Λ . Všetky krivky majú rovnaký tvar podobný obrátenej parabole s lokálnym maximom, ktoré dáva hľadanú hodnotu kritického Rayleighovho čísla R_c a radiálne vlnové číslo, pri ktorom sa toto maximum dosahuje, je hľadané kritické radiálne vlnové číslo k_c s ktorým tiež súvisí kritická frekvencia σ_c . Z polohy lokálnych maxím vidíme, že sa nárastom Elsasserovho

čísla Λ posúvajú smerom k nižším hodnotám R_c (v absolútnej hodnote) a dosahujú sa pri väčších radiálnych vlnových číslach k .

6.4 Nulová stratifikácia $R = 0$; určenie k a σ u MC módov

Ak sa zaoberáme magneticky hnanými módmi typu MC vln, tak základné charakteristiky týchto módov, radiálne vlnové číslo k a frekvenciu σ už hľadáme iným spôsobom ako minimalizáciou. Pre MC módy je charakteristické, že existujú v nestratifikovanom prostredí, teda pri nulovom Rayleighovom čísle ($R = 0$) [47, 61]. Zatiaľ čo pri minimalizácii a hľadaní kritického Rayleighovho čísla bola úloha taká, že sme mali nájsť mód s takým radiálnym vlnovým číslom a frekvenciou, ktorý vznikne najľahšie (teda pri najmenšom lokálnom minime z existujúcich lokálnych miním R), v tomto prípade hľadáme mód s takým radiálnym vlnovým číslom k a frekvenciou σ , ktorý vznikne pri presne nulovom Rayleighovom čísle. Takže odpadá uprednostňovanie módov s najmenším $|R|$ (vo všeobecnosti nenulovým R) a ak si pripomenieme, že u preferovaných MAC módov malo vertikálne vlnové číslo π_l zo všetkých možných prirodzených násobkov π práve najmenšiu hodnotu $\pi_l = \pi$, tak teraz u MC módov všetky hodnoty $\pi_l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ sú rovnocenné. Kvôli jednoduchosti a hlavne pri dôraze na štúdium vplyvu anizotropie difúzných koeficientov naďalej budeme predpokladať, že $\pi_l = \pi$, hoci ostatné π_l s celočíselnými násobkami π práve u MC módov majú výrazné fyzikálne opodstatnenie [47].

Disperznú rovnicu (36) pri $R = 0$ a $\lambda = i\sigma$ môžeme vnímať ako systém dvoch rovníc pre dve neznáme σ a k , pretože z nulovej hodnoty komplexného čísla sú rovné nule i jeho reálna a imaginárna časť. Pri $K^2 = k^2 + \pi_l^2$, $K_\alpha^2 = \alpha k^2 + \pi_l^2$, $\pi_l = \pi l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) a $A = K^2/\pi^2$ máme

$$(E_z \sigma l_\alpha)^2 A = 1 \quad \text{a} \quad \sigma = \frac{2m\Lambda}{1 + \mu l_\alpha A(1 + \varepsilon_l l_\alpha A^2)}. \quad (37)$$

Pritom $l_\alpha = K_\alpha^2/K^2$, $\mu = m^2 E_z \Lambda$, $\varepsilon_l = (\pi_l^4 E_z)/(m^2 \Lambda)$, kde $\pi_l = \pi$ je vertikálne vlnové číslo.

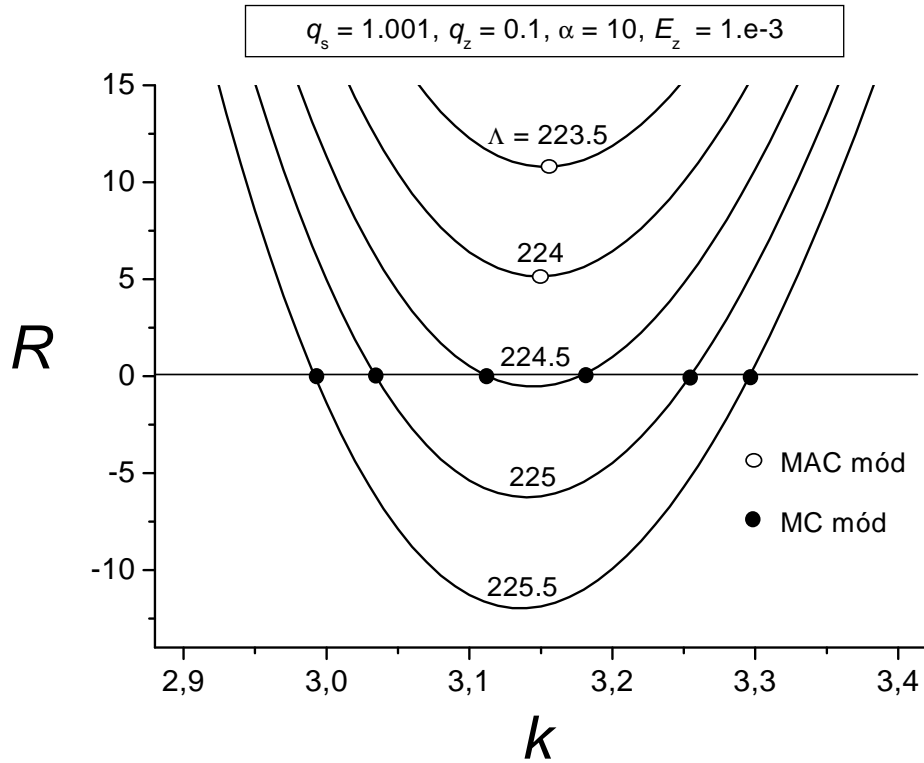
Osobitý význam, a to často v prechodoch MAC módov na MC módy a opačne má prípad nulového radiálneho vlnového čísla $k = 0$, kedy $K^2 = \pi^2$ a $A = 1$. Ďalej $l_\alpha = 1$, a práve tento vzťah dokazuje, že pri $k = 0$ anizotropný koeficient α stráca svoj vplyv na (37), a teda na MC módy. Pritom z (37) vyplýva dôležitý a jednoduchý vzťah

$$\Lambda E_z = 1 + \pi^4 E_z^2 l^4, \quad (38)$$

kde uvažujeme $l = 1$ a pri $E_z \ll 1$ máme $\Lambda E_z \doteq 1$ pre všetky α , čo sa často využíva v časti 9.5.2 v numerických výsledkoch. Izotropná verzia (37) s $\alpha = 1$ a $l_\alpha = 1$ spolu s (38) boli odvodené v [47].

Vzhľadom na zadané vstupné parametre sa vyčlenili dva rôzne prípady hľadania MC módov. Rozhodujúci je typ anizotropie (hodnota α) a hodnota Ekmanovho čísla E_z , ktorá cez podmienku $\Lambda E_z = 1$ dáva hodnotu Elsasserovho čísla $\Lambda = 1/E_z$, ktorá určí, či existujú dva MC módy ($\Lambda < 1/E_z$), alebo len jeden MC mód $\Lambda > 1/E_z$. V oboch prípadoch dochádza pri veľkých hodnotách Elsasserovho čísla Λ a Ekmanovho čísla E_z k poklesu kritického Rayleighovho čísla R_c MAC módu k nulovej hodnote. Rozdiel je v tom, ako sa správa krivka $R = R(k)$, dôležitá pri minimalizácii. Najprv sa pozrieme na prípad $\Lambda < 1/E_z$, keď existujú dva MC módy. Tento prípad môže nastať jedine v prípade S_0 anizotropie, teda pri $\alpha > 1$.

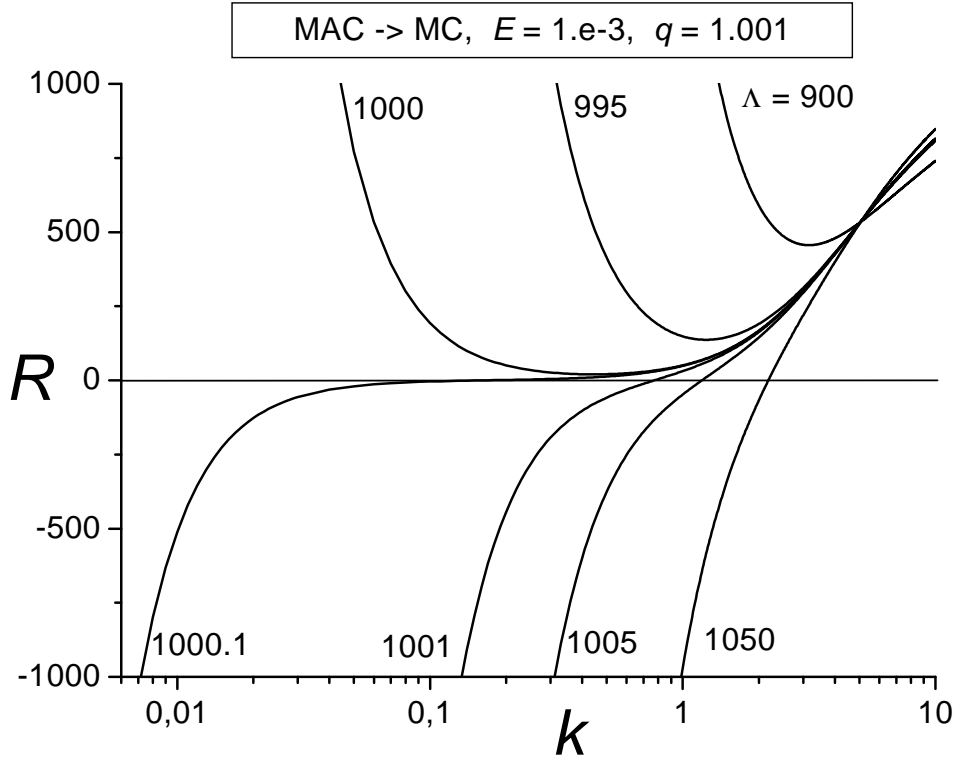
Na obrázku 5, vyjadrujúcom závislosť $R = R(k)$ v anizotropnom prípade $\alpha = 10$, sa jednotlivé krivky líšia rôznou hodnotou Elsasserovho čísla Λ . Všimnime si najprv krivku



Obr. 5: Prechod MAC módu na dva MC módy pri rastúcom Λ v anizotropnom prípade $\alpha = 10$; Rayleighove číslo R v závislosti na radiálnom vlnovom čísle k pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla Λ . Priesečníky kriviek s priamkou $R = 0$ dávajú radiálne vlnové čísla MC módov.

označenú $\Lambda = 223,5$. Lokálne minimum je spojené s kritickým Rayleighovým číslom MAC módu. Pre väčšie hodnoty Λ sa toto minimum posúva k ešte menším hodnotám R_c (viď krivku $\Lambda = 224$). Existuje hodnota Λ_o , pri ktorej sa lokálne minimum dotkne priamky $R = 0$ (na grafe to nie je nakreslené). Takému módu hovoríme MC mód, lebo Archimedova (vztlaková) sila je nulová, a teda systém je bez stratifikácie. Ďalším zvyšovaním Λ sa lokálne minimum posúva do záporných hodnôt R a krivka $R = R(k)$ teda pretne priamku $R = 0$ v dvoch bodoch. Znamená to, že pri určitej hodnote Λ existujú dva rôzne MC módy s rôznymi radiálnymi vlnovými číslami k a frekvenciami σ . Platí pritom, že MC mód s menším radiálnym vlnovým číslom má vyššiu frekvenciu a naopak. MC mód s vyššou frekvenciou pomenujeme rýchly, a ten druhý pomalý MC mód. Postupným zvyšovaním Elsasserovho čísla Λ sa krivka $R = R(k)$ posúva k stále menším hodnotám a priesečníky tejto krivky v nulovej hodnote sa od seba stále viac vzdiaľujú (viď napr. krivku $\Lambda = 225,5$). To znamená, že zvyšovaním magnetického poľa (zvyšovaním Λ) sa dva vznikajúce MC módy od seba stále viac odlišujú v radiálnych vlnových číslach a aj vo frekvenciách.

Teraz sa môžeme pozrieť na druhý prípad $\Lambda > 1/E_z$, kde existuje vždy len jeden MC mód. V izotropnom prípade a v prípade *Sa* anizotropie môže nastať len tento prípad. To znamená, že pre $\alpha \leq 1$ môže existovať len jeden MC mód, pre ktorý je nutnou podmienkou existencie práve $\Lambda > 1/E_z$, bez ohľadu na hodnotu parametra anizotropie α . Znovu sú dôležité krivky závislosti $R = R(k)$, ktoré sú nakreslené na obrázku 6. Rôzne krivky opäť súvisia s rôznou hodnotou Elsasserovho čísla Λ . Ak sa pozrieme na krivku $\Lambda = 900$, vidíme, že tiež obsahuje lokálne minimum, ktoré nám dáva kritické Rayleighove číslo pre MAC mód. Zväčšením Λ na hodnotu 995 sa toto minimum dosahuje pri menšej hodnote radiálneho vlnového čísla k a kritické Rayleighove číslo spojené s týmto



Obr. 6: Prechod MAC módu na MC mód pri rastúcom Λ v izotropnom prípade $\alpha = 1$; Rayleighove číslo R v závislosti na radiálnom vlnovom čísle k pre rôzne hodnoty Elsasserovho čísla Λ . Priesečníky kriviek s priamkou $R = 0$ dáva radiálne vlnové čísla MC módu.

minimum je tiež menšie. Ďalším zvyšovaním Λ sa minimum približuje k nulovej hodnote a pre $\Lambda > 1000$ sa tvar krivky úplne mení¹⁰. Krivka už nemá žiadne lokálne minimum, ale je už rastúcou, pričom rastie zo záporných hodnôt cez nulu až ku kladným. Keďže sa zaoberáme vlastnosťami MC módov, zaujímavý je pre nás priesečník krivky s priamkou $R = 0$, teda hodnota radiálneho vlnového čísla k a frekvencie σ , pri ktorých dochádza k tomuto priesečníku. Ďalším postupným zvyšovaním Elsasserovho čísla Λ vznikajú MC módy s vyššími radiálnymi vlnovými číslami k a s nižšou frekvenciou σ .

6.5 Numerické výsledky

V tomto modeli rotujúcej magnetokonvekcie v nekonečnej horizontálnej vrstve preniknutej azimutálnym základným magnetickým poľom, rastúcim so vzdialenosťou od osi rotácie má vznikajúca konvekcia tvar postupnej vlny, šíriacej sa pozdĺž magnetického poľa. Táto periodická nestabilita sa môže šíriť buď západným, alebo východným smerom. Vrstva je nestabilne stratifikovaná (zohrievaná zospodu a chladená zvrchu) a pri lineárnej stabilitej analýze hľadáme takú nestabilitu, ktorá ku svojmu vzniku potrebuje minimálnu stratifikáciu. Jej odpovedajúce Rayleighove číslo nazývame kritickým Rayleighovým číslom R_c a nestabilita s práve takým číslom súvisí s konkrétnym radiálnym vlnovým číslom a frekvenciou, ktoré tiež nazývame kritickými a označujeme ich k_c a σ_c . Nasledujúce obrázky obsahujú závislosti týchto kritických čísel na vstupných parametroch, a to na Elsasserovom čísle Λ , Ekmanových číslach E_z a E_s a parametri anizotropie $\alpha = q_s/q_z = E_s/E_z$.

¹⁰Keďže obrázok 6 je pri hodnote Elsasserovho čísla $E_z = 10^{-3}$, tak práve $\Lambda > 1000$ je tou dôležitou podmienkou $\Lambda > 1/E_z$ existencie MC módov.

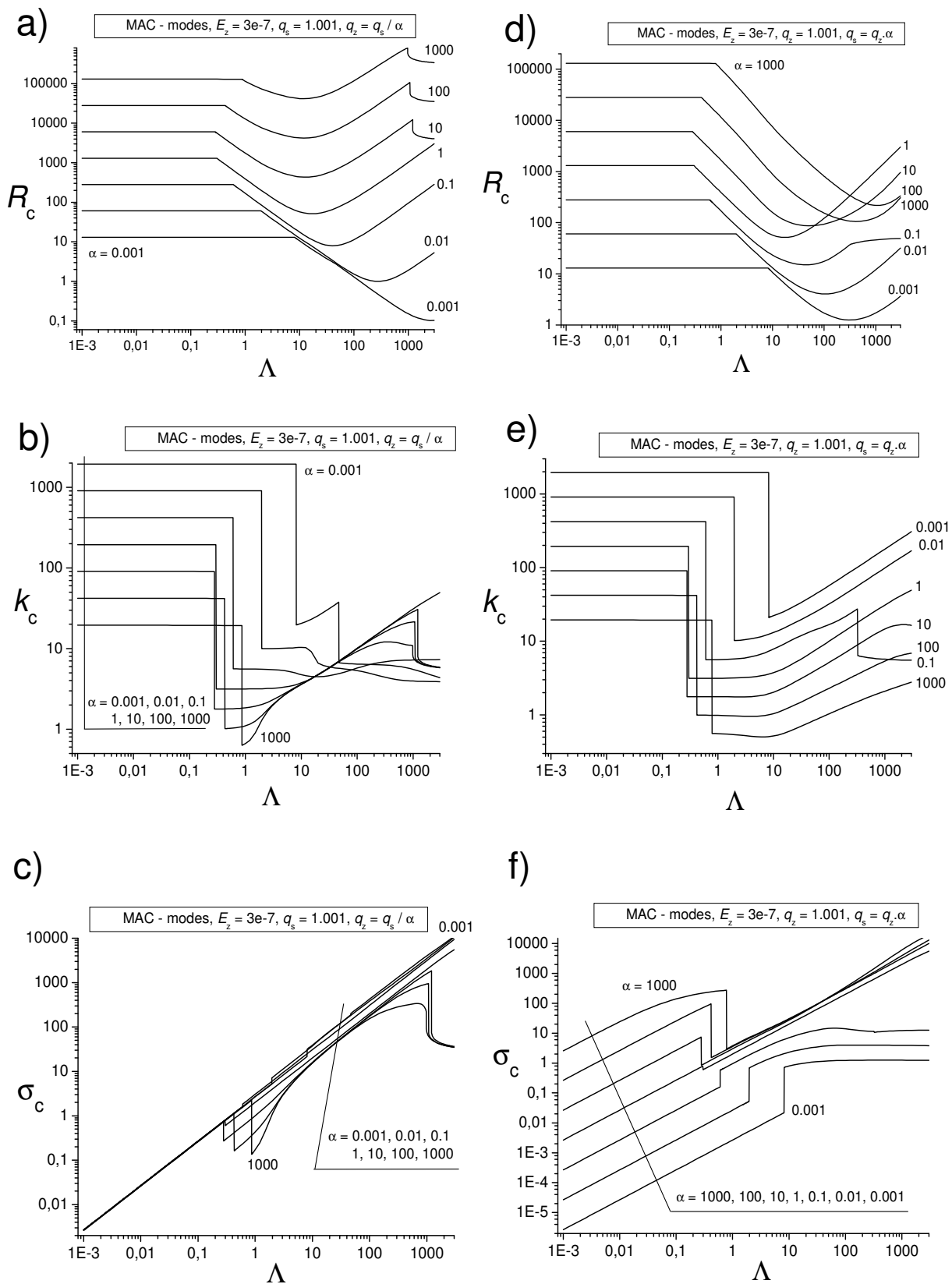
Zaujímavým prípadom vznikajúcich nestabilit sú magnetické nestability typu MC módov, ktoré ku svojmu vzniku nepotrebujú stratifikáciu ($R = 0$), ale len dostatočne silné magnetické pole, lebo energiu ku svojmu vzniku berú práve z magnetického poľa. Tieto nestability sa nazývajú aj magneticky hnané nestability, na rozdiel od doteraz uvažovaných MAC módov, ktoré sú tepelne hnané (neskôr sa budeme venovať MAC módom, ktoré sú magneticky hnané). Pri opise týchto MC módov naďalej sledujeme závislosť čísel k a σ na vstupných parametroch; pritom k a σ nie sú kritické a závislosť nulového Rayleighovho čísla R na vstupných parametroch však zrejme stráca zmysel ($R = 0$ pri nulovom teplotnom gradiente). V tomto modeli sa hlavne zameriavame na vplyv anizotropie difúzných koeficientov, ktorú sme zaviedli do systému tak, že uvažujeme tepelnú difuzivitu a viskozitu inú vo vertikálnom smere, ako v horizontálnych smeroch ($\kappa_{zz} \neq \kappa_{ss} = \kappa_{\varphi\varphi}$), kde je uvažovaná izotropia. Rozlišujeme dva typy anizotropie, a to *Sa* anizotropiu, pri ktorej je difuzivita vo vertikálnom z -smere väčšia ako v horizontálnych smeroch, teda $\kappa_{zz} > \kappa_{ss}$, v druhom type *So* anizotropie je to naopak, $\kappa_{zz} < \kappa_{ss}$. Parameter anizotropie α je definovaný ako pomer koeficientu v horizontálnom smere ku koeficientu vo vertikálnom smere. Predpokladáme, že rovnaký pomer platí pre tepelnú difuzivitu aj pre viskozitu, a teda že platí $\alpha = \kappa_{ss}/\kappa_{zz} = \nu_{ss}/\nu_{zz}$. Potom pre *Sa* anizotropiu platí $\alpha < 1$ a pre *So* anizotropiu platí $\alpha > 1$.

Pripomíname, že u všetkých nasledujúcich obrázkoch pomenúvame ich podobrázky jednoducho grafy, ktoré takmer vždy obsahujú viac kriviek. Číslovanie a značenie grafov je určované obrázkom, ktorého sú súčasťou, napr. grafy 7ad alebo 7def.

6.5.1 Nestabilná stratifikácia; MAC módy

Obrázok 7 obsahuje 3 dvojice grafov, opisujúcich závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c na Elsasserovom čísle Λ (7ad), kritického radiálneho vlnového čísla k_c na Λ (7be) a kritickej frekvencie σ_c na Λ (7cf). Na prvý pohľad vidieť, rôzne krivky pri rôznych parametroch anizotropie α predstavujú dva odlišné módy, z ktorých MAC mód je až pri väčších Λ . Keďže je parameter anizotropie zadaný až dvoma koeficientami, napr. q_z a q_s , existuje teoreticky nekonečné množstvo výberov dvoch koeficientov pre jednu konkrétnu hodnotu parametra α . Na grafoch 7abc je jedno Robertsove číslo, konkrétne q_s fixované na hodnote $q_s = 1,001$ a rôzna anizotropia je daná rôznou hodnotou druhého Robertsovho čísla q_z , daného vzťahom¹¹ $q_z = q_s/\alpha$. Druhá trojica grafov 7def má fixovanú hodnotu Robertsovho čísla $q_z = 1,001$ a anizotropia je daná rôznymi hodnotami q_s . U oboch módov bola uvažovaná silná aj slabá *So* anizotropia aj *Sa* anizotropia ($\alpha \gg 1$ a $\alpha \ll 1$ pre silné; $\alpha \sim 1$ pre slabé anizotropie). Jednotlivé módy sú na všetkých grafoch rozoznateľné úplne odlišne sa správajúcimi časťami. Prvej časti odpovedá viskózný mód, ktorý existuje pri malých hodnotách Elsasserovho čísla Λ . Kritické Rayleighove číslo tohto módu je kvázi-konštantné vzhľadom na Elsasserove číslo Λ a výrazne závisí od anizotropie, pričom platí, že čím väčšia *So* anizotropia, tým väčšie R_c a naopak, čím väčšia *Sa* anizotropia, tým menšie R_c . Nárastom hodnoty Λ dochádza k prechodu na druhý mód, ktorého kritické Rayleighove číslo je už funkciou Λ , a ktorý nazývame hydromagnetickým módom a je už našim MAC módom. Závislosť R_c na Λ má v tomto prípade tvar podobný parabole s lokálnym minimom. Hodnoty Elsasserovho čísla Λ , pri ktorých dochádza ku prechodu viskózneho módu na hydromagnetický a pri ktorých sa dosahuje lokálne minimum, závisia na anizotropii, pričom táto závislosť je výraznejšia pri *Sa* anizotropii, ako pri *So* anizot-

¹¹Táto koncepcia pre rôzne prípady anizotropie bola použitá len v tomto modeli I. V ďalších študovaných modeloch II, III a IV už bola anizotropia zadaná koeficientom anizotropie α a konštantnou hodnotou vertikálneho Robertsovho čísla q_z , lebo práve vertikálna zložka koeficientu tepelnej difuzivity vstupuje do definície modifikovaného Rayleighovho čísla R .

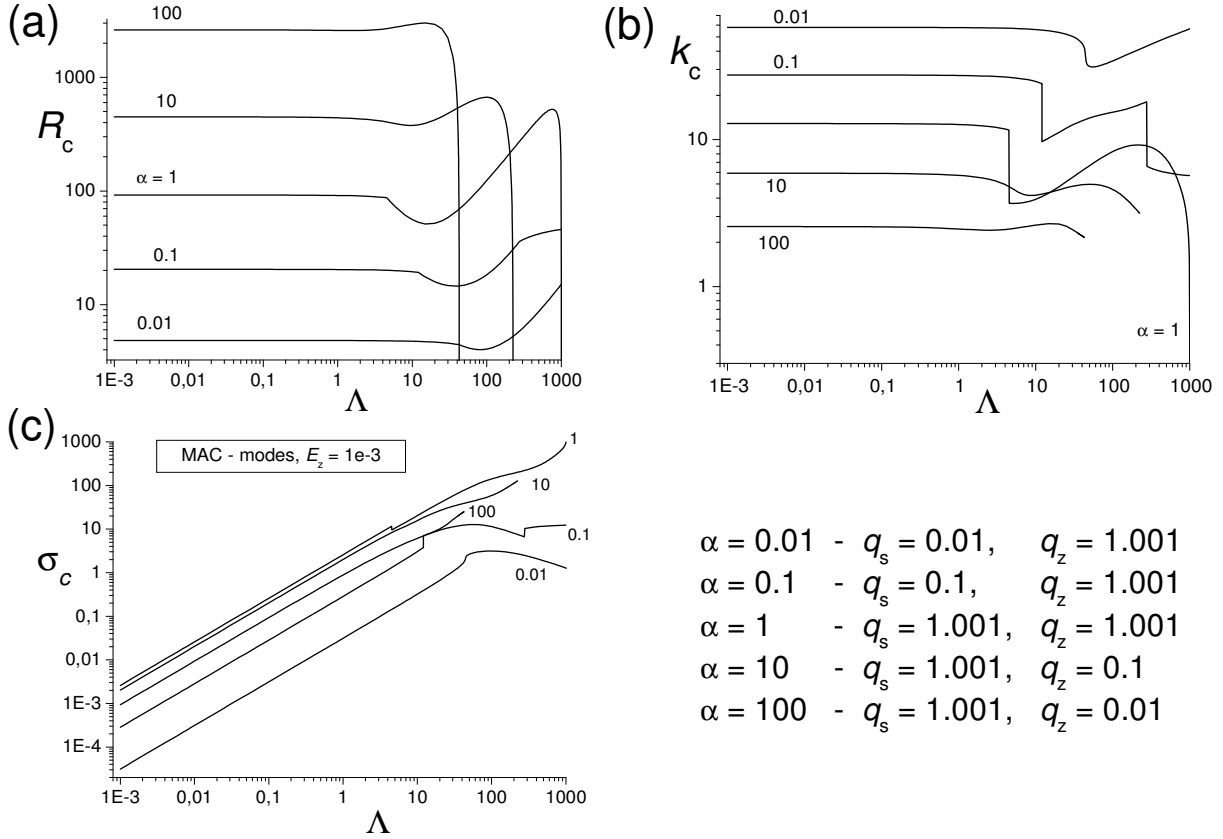


Obr. 7: Prechody módov rastom Λ - viskózneho na MAC a MAC na iný MAC mód; závislosť kritického Rayleighovho čísla R_c (a, d), kritického radiálneho vlnového čísla k_c (b, e) a kritickej frekvencie σ_c (c, f) v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre rôzne prípady anizotropie.

ropii. *Sa* anizotropia posúva Λ prechodu a Λ minima smerom k vyšším hodnotám. Pri vyšších hodnotách Elsasserovho čísla Λ ($\Lambda = O(1000)$) a jedine pri *So* anizotropii ($\alpha > 1$) dochádza ku prechodu na ďalší MAC mód, ktorého kritické Rayleighove číslo klesá s nárastom Λ . Druhý graf 7b ukazuje veľmi zložitú závislosť kritického radiálneho vlnového čísla k_c na Elsasserovom čísle Λ pri rôznych anizotropiach. Na prvý pohľad vidno značný rozdiel medzi viskóznymi módmi s takmer konštantnou hodnotou k_c a hydromagnetickým módom, kde už k_c výrazne závisí na Λ . Prechod medzi viskóznym a hydromagnetickým módom je tu spojený so skokom kritického vlnového čísla na hodnoty o niekoľko rádov menšie. Pre viskózne módy platí, že *Sa* anizotropia zvyšuje hodnotu kritického radiálneho vlnového čísla a *So* anizotropia ju znižuje. O hydromagnetických módoch sa to nedá povedať, lebo pri vyšších hodnotách Λ sa objavujú zložitosti spojené s prechodmi na iné módy, čo možno vidieť ako nespojitosti a skoky. V prípade *So* anizotropie ide už o opísané skoky na ďalší mód pri veľkých hodnotách Λ . Ku prechodu na iný mód však dochádza aj pri silnej *Sa* anizotropii ($\alpha = 0,001$), kde sa hodnota k_c skokom zmení na nižšiu hodnotu. Podobné správanie naznačuje už prípad slabšej *Sa* anizotropie ($\alpha = 0,01$), tu ale nedochádza k nespojitému skoku, ale k spojitému prechodu na ďalší mód. Každopádne pre veľké hodnoty Elsasserovho čísla Λ už anizotropia nemá výraznejší vplyv na kritické radiálne vlnové číslo k_c . Tretí graf 7c ukazuje veľmi slabý vplyv anizotropie na kritickú frekvenciu σ_c , kde sa rozdiely prejavajú akurát pri prechodoch z viskózneho na hydromagnetický mód a pri prechode z jedného hydromagnetického módu na iný v prípade *So* anizotropie. Obe dva typy prechodov sú spojené so skokom kritickej frekvencie na iné (menšie v prípade *So* anizotropie a väčšie v prípade *Sa* anizotropie) hodnoty. Ako vidíme, na skoro celom uvažovanom intervale Λ je kritická frekvencia rastúcou funkciou Λ a pre viskózny mód nezávisí od anizotropie. Ďalšia trojica grafov opisuje módy pri „rovnakých“ vstupných parametroch, akurát Robertsove čísla q_s a q_z si vymenili úlohu, teda na grafoch 7def je $q_z = 1,001$ a rôzna anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovho čísla q_s , pričom sa vyberú tak, aby boli preskúvané rovnaké typy anizotropie ako u predchádzajúcej trojice. Aj na týchto trojiciach sú módy rozdelené na viskózny a hydromagnetický. Kvalitatívne sú tie prechody rovnaké, ako na predchádzajúcej trojici. Hneď si všimneme, že v prípade *So* anizotropie nedochádza k prechodom na nový mód pri veľkých hodnotách Elsasserovho čísla Λ . Objavil sa však prechod na nový mód pri relatívne vysokej hodnote Λ a pri slabšej *Sa* anizotropii ($\alpha = 0,1$). Na grafe 7d sa tento prechod prejaví v zmene nárastu krivky, ktorá začne byť menej strmá. Graf 7e ukazuje, že prechod je spojený so skokom kritického radiálneho vlnového čísla k_c na menšiu hodnotu, pričom sa aj monotónnosť mení z rastúcej na klesajúcu. Z grafu 7f vidno, že na rozdiel od prípadu na grafe 7c teraz je už kritická frekvencia σ_c značne závislá od uvažovanej anizotropie. Frekvencia viskózneho módu sa nárastom *So* anizotropie zväčšuje (oproti izotropnému prípadu $\alpha = 1$) a nárastom *So* anizotropie znižuje. Podobne je to aj v prípade hydromagnetického módu, kde to ale nie je až také výrazné. Prechod medzi viskóznym a hydromagnetickým módom sa kvalitatívne líši pre prípad $\alpha \geq 1$ (teda *So* anizotropia) a $\alpha < 1$ (*Sa* anizotropia). V prípade *So*-anizotropie je prechod spojený so skokom frekvencie na menšie hodnoty a v prípade *Sa*-anizotropie na väčšie hodnoty. V oboch prípadoch sa rozdiel medzi frekvenciami viskózneho a hydromagnetického módu zväčšuje s nárastom anizotropie. Najmenší je teda v izotropnom prípade.

6.5.2 Nulová stratifikácia; MC módy

Ďalší obrázok 8 obsahuje trojicu grafov závislostí R_c vs Λ , k_c vs Λ a σ_c vs Λ pri rôznych anizotropiach, ktoré sú zadané rôznymi kombináciami Robertsových čísel q_z a q_s .

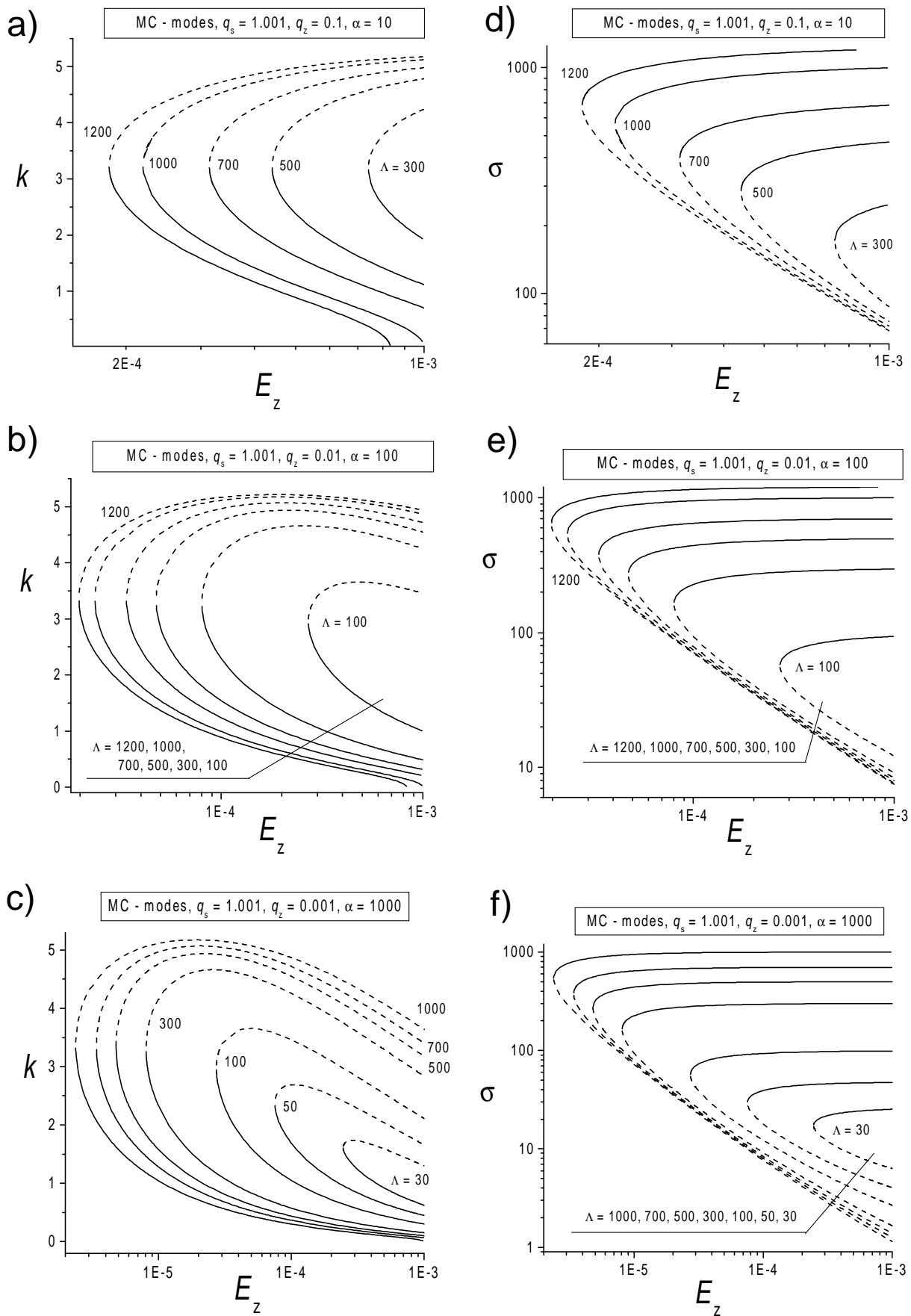


Obr. 8: Prechody módom rastom Λ - viskózneho na MAC a MAC na MC mód; závislosť kritického Rayleighovho čísla R_c (a), kritického radiálneho vlnového čísla k_c (b) a kritickej frekvencie σ_c (c) v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre rôzne prípady anizotropie.

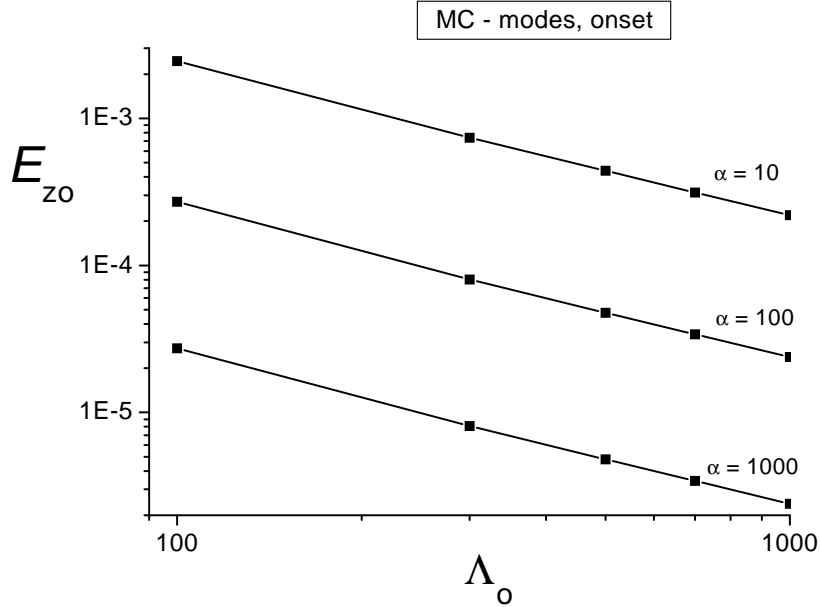
Ekmanove číslo E_z sa tentokrát zvolilo veľké ($E_z = 10^{-3}$). Na predchádzajúcom obrázku malo hodnotu $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Netreba zabúdať, že ak uvažujeme anizotropiu difúzných koeficientov, tak potom máme dve Ekmanove čísla E_z a E_s , medzi ktorými platí rovnaký vzťah ako medzi ostatnými veličinami, ktoré súvisia s difúznymi koeficientami, a teda s anizotropiou, teda platí $\alpha = E_s/E_z$. Takú veľkú hodnotu Ekmanovho čísla sme zvolili preto, lebo už v izotropnom prípade sa ukázalo, že pri $\Lambda E \sim 1$ kritické Rayleighove číslo R_c dosahuje nulovú hodnotu, čo znamená, že existuje nová trieda nestabilit, ktoré nazývame MC módy. Tieto módy nepotrebujú ku svojmu vzniku stratifikáciu a energiu čerpajú z magnetického poľa [61]. Je preto žiaduce prešetriť, ako tieto módy ovplyvní anizotropia difúzných koeficientov. Tieto grafy sa venujú vlastnostiam MAC módom až po prechod na MC módy. Na prvom grafe 8a si môžeme všimnúť, že krivky s $\alpha \geq 1$ pri určitých dosť veľkých hodnotách Λ prudko zmenia monotónnosť a z rastúcej závislosti prejdú na klesajúcu, pričom dôjde k prechodu na záporné hodnoty R_c (kvôli prehľadnosti grafu už nie je táto časť krivky vykreslená). V prípade $\alpha < 1$ je prechod na záporné kritické Rayleighove číslo nespojitý jav, kde podmienka prechodu je $\Lambda E_z = 1$, a ktorá je nezávislá od parametru anizotropie. Ako už bolo opísané na obrázku 6, pre $\alpha < 1$ je prechod MAC módu na MC mód spojený so zmenou správania sa závislosti $R = R(k)$, ktorá sa pre $\Lambda > 1/E_z$ mení z krivky s lokálnym minimumom na rastúcu krivku, ktorá s nárastom k rastie zo záporných na kladné hodnoty (a nepredchádza mu pokles kritického Rayleighovho čísla MAC módu k nulovým hodnotám, ako je to v prípade $\alpha \geq 1$, lebo teraz už lokálne minimum a s ním spojený MAC mód neexistuje). Keďže obrázok 8 má maximálne zobrazené $\Lambda = 1000$, čo

je pri $E_z = 10^{-3}$ a podmienke $\Lambda > 1/E_z$ tiež hraničné Λ pre MAC módy, tak prechod na MC módy pre $\alpha < 1$ nie je zobrazený. Predmetom nášho záujmu je špecifický prípad, keď $R = 0$. Vtedy hovoríme o magneticky hnaných MC módoch. Z grafu tiež vidno, že čím je So anizotropia väčšia (čím je väčšia hodnota α), tým menšia je hodnota Elsasserovho čísla Λ , pri ktorom dôjde k prechodu MAC módov na MC módy. Druhý graf 8b ukazuje, že prechodu MAC na MC tak isto predchádza zmena monotónnosti kritického radiálneho vlnového čísla k_c z rastúcej závislosti na klesajúcu závislosť na Λ . Nedosahuje sa však nulová hodnota, ako je to u R_c , ale MC mód jednoducho začne existovať pri takom radiálnom vlnovom čísle, pri akom skončí MAC mód. Podobne sa správa aj kritická frekvencia σ_c ; nedochádza tu však k poklesu na menšie hodnoty, ale jednoducho MAC mód prejde na MC mód pri rovnakej frekvencii.

Nasledujúci obrázok 9 sa už venuje vlastnostiam MC módov (nesie však informáciu aj o prechodovom MAC móde; pozri ďalej) a obsahuje šesť grafov závislosti k a σ na E_z , treba zdôrazniť nekritických čísel k a σ (nie k_c a σ_c). Prečo nekritických je vysvetlené nižšie. Grafy 9abc vyjadrujú závislosť radiálneho vlnového čísla k na Ekmanovom čísle E_z a jednotlivé krivky súvisia s rôznou hodnotou Elsasserovho čísla Λ . Ďalšia trojica grafov 9def vyjadruje závislosť frekvencie σ na Ekmanovom čísle E_z . Tri dvojice grafov (napr. 9ad) máme preto, lebo uvažujeme tri prípady So anizotropie, $\alpha = 10; 100$ a 1000 . Rôzne krivky teraz súvisia s rôznymi hodnotami Elsasserovho čísla Λ . Každá krivka má dve vetvy, teda krivka opisuje vlastnosti dvoch MC módov - rýchleho a pomalého. Rýchly mód je znázornený plnou čiarou a pomalý prerušovanou čiarou. Rýchly mód je pri rastúcej hodnote Ekmanovho čísla E_z charakterizovaný poklesom radiálneho vlnového čísla k a nárastom frekvencie σ . Pre pomalý mód je to naopak. Rovnaké správanie týchto módov je u všetkých uvažovaných typov anizotropie. Ako si možno všimnúť na grafoch s vyššou anizotropiou ($\alpha = 100; 1000$), rastúce radiálne vlnové čísla (pomalý mód s prerušovanou krivkou) dosiahnu lokálne maximum a s nárastom E_z začnú klesať. Zvyšovanie anizotropie podporuje takéto správanie. Frekvencie MC módov sa v závislosti na Ekmanovom čísle E_z správajú odlišne, kde frekvencia pomalého módu je stále klesajúca, zatiaľ čo frekvencia rýchleho módu postupne konverguje ku konštantnej hodnote. Na grafoch 9ad môžeme vidieť zánik rýchleho MC módu (plná krivka). Tento zánik nastane pre väčšie hodnoty Elsasserovho čísla Λ a pri väčších hodnotách Ekmanovho čísla E_z . Radiálne vlnové číslo pri určitej hodnote E_z klesne až k nulovej hodnote a takéto módy pre väčšie E_z už neexistujú. Ekmanove čísla, pri ktorých dochádza k zániku rýchleho MC módu, závisia od anizotropie a od Elsasserovho čísla Λ . Pravdepodobne rovnakým spôsobom by zanikli všetky rýchle MC módy, ale pri hodnotách vstupných parametrov, ktoré sú už mimo uvažovaného rozsahu. Omnoho zaujímavejšie sú však podmienky, pri ktorých MC módy vznikajú. MC módy vznikajú pri podmienkach, keď kritické Rayleighove číslo R_c dosiahne nulovú hodnotu a ďalšou zmenou jedného zo vstupných parametrov klesá do záporných hodnôt. V takom prípade existujú dve dvojice parametrov k a σ , pri ktorých je Rayleighove číslo rovné presne nule, tieto čísla už nenazývame kritickými číslami, lebo nesúvisia s lokálnym minimom R_c Rayleighovho čísla R , pre ktoré teraz platí $R = 0$ (R nie je R_c). Prechod MAC módu na MC mód vidíme na grafoch ako spojenie plných a prerušovaných kriviek (vrchol „kvázi-paraboly“). Pre danú konkrétnu anizotropiu (napr. grafy 9ad pre prípad $\alpha = 10$) existuje pre každú uvažovanú hodnotu Elsasserovho čísla Λ (každú dvojicu plnej a prerušovanej krivky) jednoznačné Ekmanove číslo E_z , pri ktorom začnú existovať MC módy. Samozrejme platí, že pre každé Ekmanove číslo E_z existuje Elsasserove číslo Λ , pri ktorom začnú existovať MC módy. Takéto dvojice budeme označovať E_{zo} a Λ_o a nazývať ich nástupnými hodnotami. Z grafov vidieť, že čím väčšie Elsasserove číslo Λ_o , tým menšia hodnota E_{zo} .



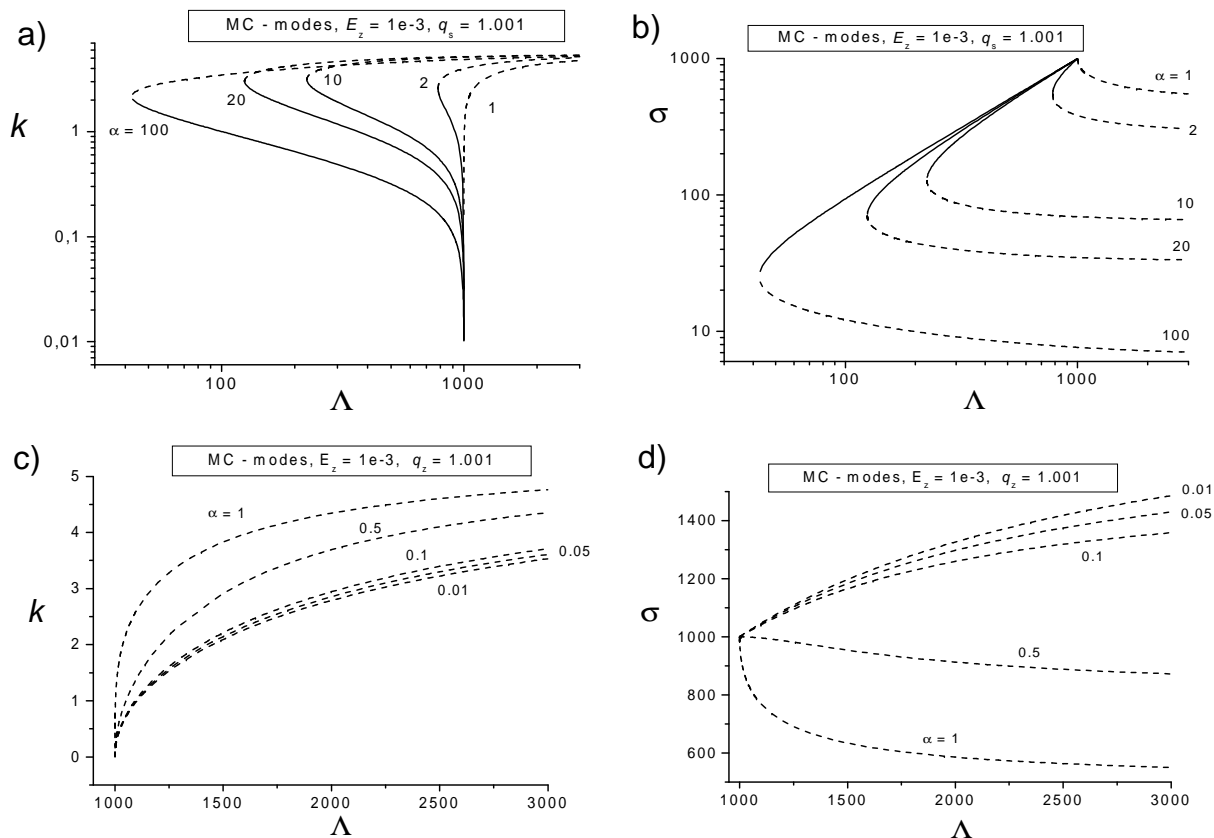
Obr. 9: Rýchle a pomalé MC módy; závisť radiálneho vlnového čísla k (abc) a frekvencie σ (def) na Ekmanovom čísle E_z pre rôzne prípady hodnoty Elsasserovho čísla Λ a pre rôzne prípady anizotropie: $\alpha = 10$ (ad); $\alpha = 100$ (be); $\alpha = 1000$ (cf).



Obr. 10: Nástup MC módov; závislosť nástupového Ekmanovho čísla E_{zo} na nástupovom Elsasserovom čísle Λ_o pre tri prípady anizotropie, $\alpha = 10; 100; 1000$.

Z nástupných hodnôt E_{zo} a Λ_o a ich vzájomnej závislosti je zostavený nasledujúci obrázok (obr. 10). Vyjadruje závislosť E_{zo} vs Λ_o pre tri rôzne anizotropie So typu. Každá z troch kriviek na tomto grafe tvorí hranicu existencie MC módov, kde MC módy existujú pre parametre E_z a Λ nad krivkou a neexistujú pod krivkou. Pri uvažovanom rozsahu nástupného Elsasserovho čísla $\Lambda_o \in \langle 100, 1000 \rangle$ sa zvyšovaním anizotropie (zvyšovaním parametra α) posúvajú nástupové Ekmanove čísla E_{zo} k menším a teda geofyzikálnejším hodnotám.

Posledný obrázok 11, venovaný MC módom, obsahuje dva grafy 11ac závislosti k vs Λ a dva grafy 11bd σ vs Λ . Na horných dvoch grafoch 11ab sú znázornené vlastnosti MC módov pri konštantnom Robertsovom čísle $q_s = 1,001$ a rôzne krivky súvisia s rôznou anizotropiou So typu ($\alpha > 1$) danou rôznymi hodnotami druhého Robertsovho čísla q_z . Robertsove čísla na dolnej dvojici grafov majú vymenenú úlohu. To znamená, že konštantné je Robertsove číslo $q_z = 1,001$ a rôzna anizotropia (tentokrát už Sa typu) je daná rôznou hodnotou Robertsovho čísla q_s . Na grafe 11a vidíme opäť dvojice kriviek (plné a prerušované) dvoch MC módov. Pri uvažovanej konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$ môžeme vidieť, že nárastom anizotropie sa nástupová hodnota Elsasserovho čísla Λ posúva k menším hodnotám. Zaujímavosťou sa správajú MC módy s klesajúcim radiálnym vlnovým číslom k (plné krivky), ktoré zanikajú pri hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 1000$. Izotropný prípad ($\alpha = 1$), pre ktorý platí (dá sa to ukázať analyticky), že začne existovať pre vstupné parametre splňajúce podmienku $\Lambda E \sim 1$, túto vetvu MC módu nemá. Druhá vetva MC módu s rastúcim radiálnym vlnovým číslom (prerušované krivky) existuje aj pri hodnotách $\Lambda > 1000$, pričom radiálne vlnové číslo je už málo citlivé ako na Λ , tak aj na anizotropii. Graf 11b, opisujúci závislosť σ vs Λ , ukazuje zánik jednej vetvy MC módov pri $\Lambda = 1000$ a pri konkrétnej hodnote frekvencie σ , ktorá je pre všetky uvažované prípady anizotropie rovnaká. Pomalé MC módy druhej vetvy s klesajúcou frekvenciou existujú aj pre $\Lambda > 1000$ a frekvencia klesá s nárastom anizotropie dosť výrazne. Na ďalších dvoch grafoch 11cd sú opísané vlastnosti MC módov pri hodnotách Elsasserovho čísla $\Lambda > 1000$ a pri anizotropii Sa typu. Vidíme, že existuje len vetva poma-



Obr. 11: MC módy; závislosť radiálneho vlnového čísla k (a, c) a frekvencie σ (b, d) na Elsasserovom čísle Λ pre rôzne prípady anizotropie a rôzne hodnoty Robertsových čísel $q_s = 1,001$ (a, b); $q_z = 1,001$ (c, d).

ých MC módov s rastúcim radiálnym vlnovým číslom k (prerušované krivky). Nástupná hodnota Λ_o už nie je závislá na anizotropii a všetky uvažované módy začnú existovať pri $\Lambda_o = 1000$, pri frekvencii $\sigma = 1000$ a hodnote radiálneho vlnového čísla $k = 0$. Radiálne vlnové čísla sú relatívne malé a na anizotropii nie veľmi citlivé. Frekvencie sú na anizotropii citlivejšie viac, dokonca sa prechodom od izotropného prípadu na anizotropný mení závislosť na Elsasserovom čísle Λ z klesajúcej na rastúcu.

6.5.3 Stabilná stratifikácia; magneticky hnané MAC módy

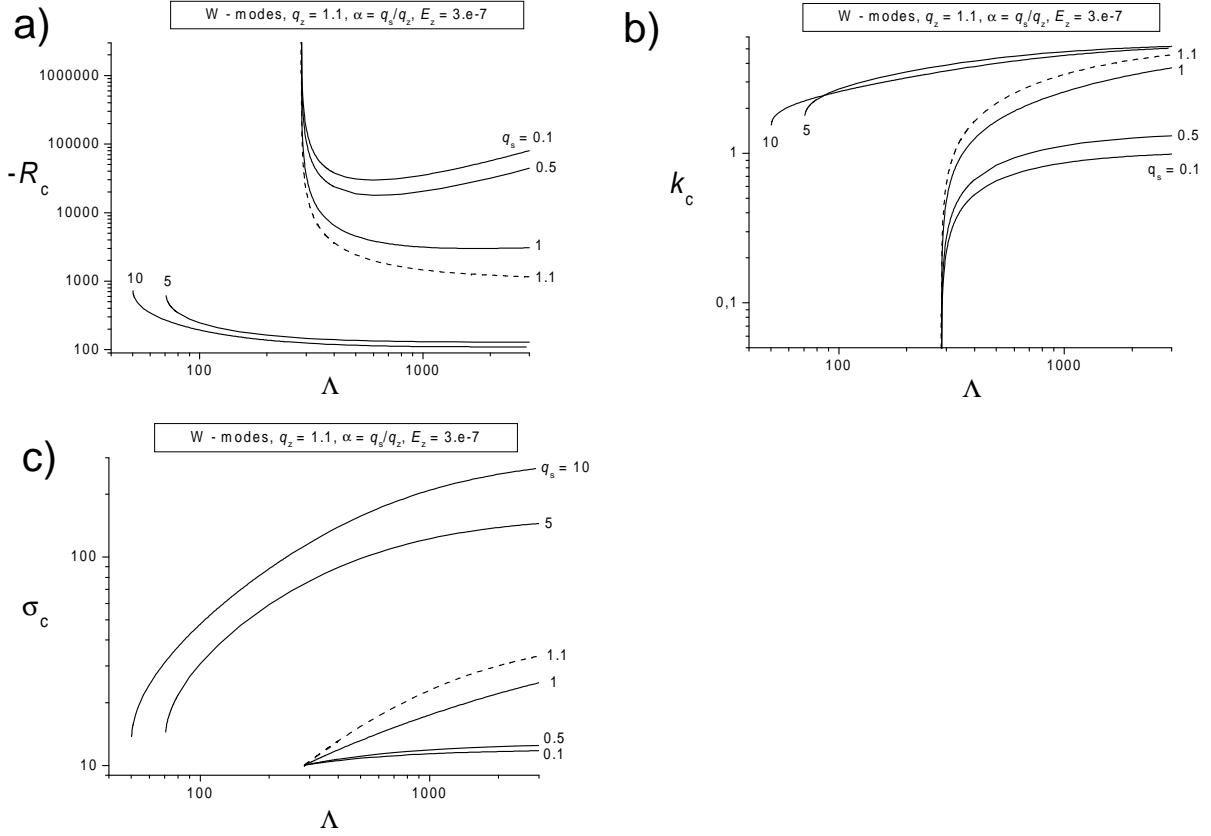
Tesne pod plášťom v najvrchnejších častiach jadra sa nachádza vrstva hrúbky asi 100 km elektricky vodivej kvapaliny, ktorá s vysokou pravdepodobnosťou je hustotne stabilne stratifikovaná. Existencia tejto podvrstvy menšej hustoty, ako je hustota ostatného jadra, je indikovaná úbytkom rýchlosti seizmických vln o 1%, avšak spoľahlivosť týchto informácií je nízka kvôli zložitej štruktúre najspodnejšej D" vrstvy zemského plášťa. Z hľadiska štruktúry Zeme a jej vývinu je však všeobecne prijímaný fakt, že pri tuhnutí jadierka do jeho zloženia nevstupuje ľahšia prímes jadra. Tá, ostávajúc v kvapalnom jadre, vsplýva nahor a má tendenciu hromadiť sa tesne pod plášťom, čím vzniká spomínaná stabilne stratifikovaná podvrstva podľa Braginského [4] „stabilne stratifikovaný oceán zemského jadra“ (SSOZJ) s „dnom“ na hranici jadra a plášťa (CMB) a s „prechodom do atmosféry“ v hĺbke ~ 3000 km. Je zrejme, že v dôsledku vysokej elektrickej vodivosti jadra sa detailné informácie o štruktúre magnetického poľa týkajú len najpovrchových oblastí jadra. Preto rozumieť dynamike a procesom v SSOZJ je veľmi dôležité. Pritom je tu zau-

jímavá analógia v bohatosti procesov v povrchových oceánoch. Navyše procesy v SSOZJ sú výrazne ovplyvnené magnetickým poľom. Najmä však v procesoch spojených s MAC módmí študovanými v prezentovanom modeli [61, 69].

Preto v študovanom modeli sústredíme pozornosť na magneticky (nie tepelne) hnané MAC módy, ktoré, ako ukážeme, vznikajú v stabilne stratifikovanej vrstve, teda vo vrstve so záporným Rayleighovým číslom, resp. so záporným teplotným gradientom (vrstva je chladená zdola a zohrievaná zhora, teplota s výškou narastá). Teda, ak sme doteraz študovali tepelne hnané MAC módy a magneticky hnané MC módy, tak k nim pridáme i magneticky hnané MAC módy. Vznikajúce nestability majú aj v prípade stabilnej stratifikácie tvar postupnej vlny, šíriacej sa pozdĺž azimutálneho magnetického poľa, a to buď západným smerom ($\sigma > 0$), alebo východným smerom ($\sigma < 0$). Pri lineárnej stabilitnej analýze sa pri daných vstupných parametroch hľadajú také nestability, ktoré vznikajú najľahšie, ktoré potrebujú najmenší teplotný rozdiel, a teda najmenšie Rayleighove číslo (nazývame ho kritické Rayleighove číslo R_c). V prípade stabilnej stratifikácie sú Rayleighove čísla záporné, a preto kritické Rayleighove číslo je najväčšie (ale minimálne v absolútnej hodnote). Kritické Rayleighove číslo R_c sa pri daných vstupných parametroch (Elsasserove číslo Λ , Ekmanove číslo E_z , parameter anizotropie $\alpha = \nu_{ss}/\nu_{zz} = \kappa_{ss}/\kappa_{zz}$) dosiahne pri jemu odpovedajúcej hodnote kritického radiálneho vlnového čísla (k_c) a kritickej frekvencie (σ_c). Nasledujúce obrázky obsahujú grafy, ktoré opisujú závislosť týchto kritických čísel na Elsasserovom čísle Λ , ktoré je mierou magnetického poľa. Rôzne krivky v rámci jedného grafu súvisia s rôznymi anizotropiami, pričom je anizotropia určená parametrom anizotropie, definovaným pomerom dvoch Robertsových čísel v dvoch základných smeroch ($\alpha = q_s/q_z$). Pri danej trojici grafov (R_c vs Λ , k_c vs Λ a σ_c vs Λ) je hodnota jedného Robertsovho čísla vždy fixovaná (povedzme q_s) a rôzna anizotropia súvisí s rôznymi hodnotami druhého Robertsovho čísla (v tomto prípade q_z).

Nasledujúce obrázky budú rozdelené do dvoch hlavných skupín, a to podľa toho, či bude uvažovaná slabá alebo silná anizotropia (t.j. či je rozdiel medzi q_s a q_z malý alebo veľký). Ďalej každá z týchto skupín bude ešte rozdelená podľa smeru šírenia nestabilit, t.j. na západné ($\sigma_c > 0$) W - módy, alebo východné ($\sigma_c < 0$) E - módy.

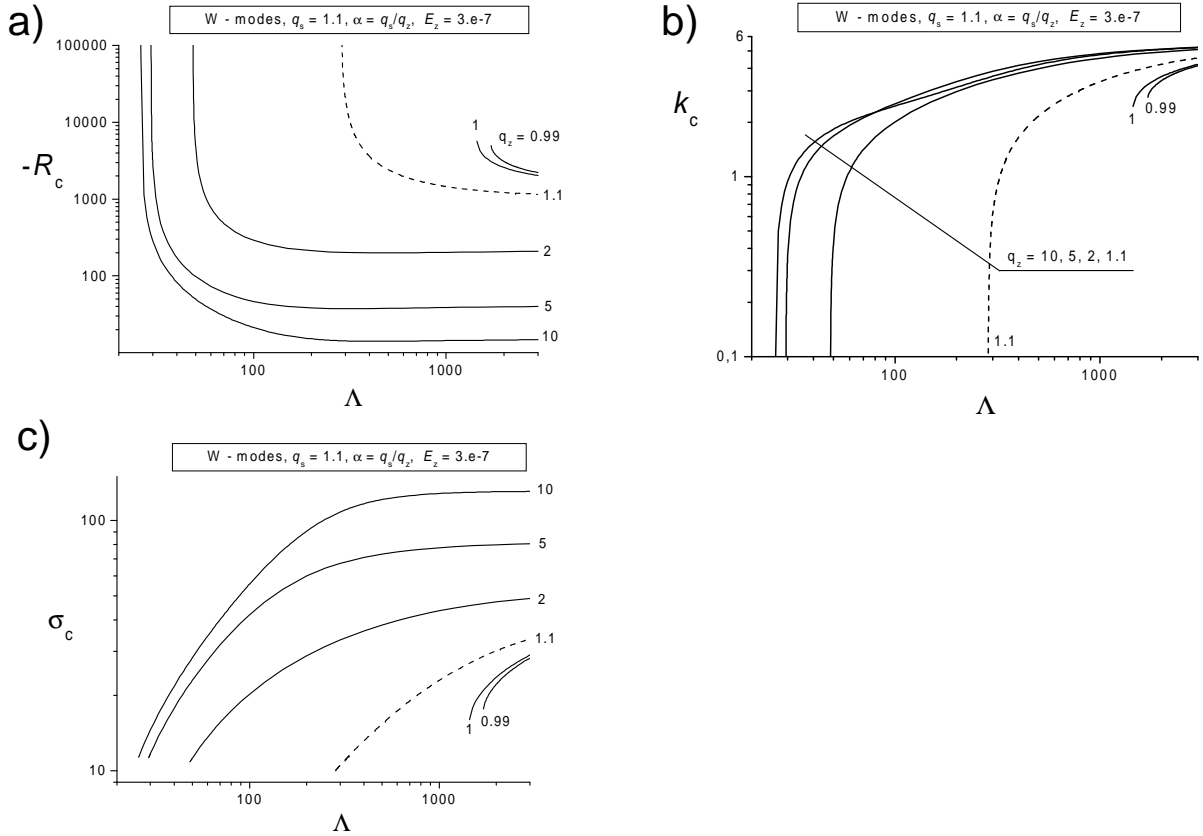
Na prvom obrázku (obr. 12), obsahujúcom tri grafy R_c vs Λ , k_c vs Λ a σ_c vs Λ , sú opísané vlastnosti magneticky hnaných MAC módov, šíriacich sa západným smerom pri slabej anizotropii. V tomto prípade je fixovaná hodnota Robertsovho čísla v z -ovom smere $q_z = 1,1$ a rôzne krivky súvisia s rôznymi hodnotami q_s , a teda s rôznou anizotropiou ($q_s = 0,1; 0,5; 1; 1,1; 5; 10$). Vidíme, že západné módy s hodnotou $q_z = 1,1$ existujú aj pri anizotropii oceánskeho typu ($q_s > 1,1$), aj pri anizotropii atmosférického typu ($q_s < 1,1$). Krivka izotropného prípadu ($q_s = q_z = 1,1$) je prerušovaná. Zo všetkých troch grafov hneď vidno, že anizotropia rozdeľuje krivky do dvoch kvalít, čo sa týka nástupovej hodnoty Elsasserovho čísla Λ , pri ktorom začínajú dané módy existovať. Určujúca je hodnota parametra anizotropie $\alpha = q_s/q_z$. V prípade $\alpha \leq 1$, teda v prípade Sa anizotropie nezávisí nástupové Λ od anizotropie a všetky krivky začínajú prakticky pri jednej konkrétnej hodnote Λ (konkrétne $\Lambda \doteq 285$ pre tento prípad). Naopak, pri So anizotropii je už táto hodnota nástupového Λ závislá od zvolenej anizotropie a platí, že čím väčšia anizotropia (čím väčšia hodnota α , resp. q_s), tým menšia hodnota nástupového Elsasserovho čísla Λ . Z fyzikálneho hľadiska to znamená, že anizotropia oceánskeho typu uľahčuje vznik magneticky hnaných MAC módov pri menšom magnetickom poli. Na prvom grafe 12a môžeme vidieť, že kritické Rayleighove číslo R_c je citlivé na hodnotu q_s , a teda na anizotropný parameter α . Anizotropia So typu kritické Rayleighove číslo zväčšuje (v absolútnej hodnote znižuje, ďalej už budeme uvažovať vždy absolútnu hodnotu R_c), u Sa anizotropie je to presne naopak. To znamená, že vznikajúce módy nepotrebujú



Obr. 12: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa západným smerom pri slabej anizotropii. Robertsove číslo $q_z = 1,1$ a anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovo čísla ($q_s = 0,1; 0,5; 1; 1,1; 5; 10$).

ku svojmu vzniku v prípade *So* anizotropie takú silnú stratifikáciu, ako v prípade *Sa* anizotropie. Platí pritom, že čím väčšia *So* anizotropia, tým menšie kritické Rayleighove číslo a opačne pre *Sa* anizotropiu. Kritické Rayleighove číslo s nárastom Elsasserovho čísla Λ pri *So* anizotropii postupne klesá a blíži sa ku kvázikonštantnej hodnote. V prípade *Sa* anizotropie sa dosahuje určité minimum a R_c začne znova mierne rásť. Z grafu 12b môžeme vidieť, že kritické radiálne vlnové čísla k_c vo všetkých uvažovaných prípadoch anizotropie sú relatívne malé (maximálne $O(10)$). S nárastom Elsasserovho čísla Λ aj kritické radiálne vlnové čísla k_c veľmi mierne rastú, pričom najvýraznejší nárast je v prípade *Sa* anizotropie pri hodnotách Elsasserovho čísla spojeného s nástupom týchto módov, kritické radiálne vlnové čísla na začiatku prudko rastú z veľmi malých hodnôt na hodnoty $O(1)$, kde sa tento prudký nárast zmierni. Anizotropia typu *Sa* znižuje hodnotu kritického radiálneho vlnového čísla k_c . Na grafe 12c vidíme jednoznačne fakt, že *So* anizotropia zvyšuje a *Sa* anizotropia znižuje kritickú frekvenciu σ_c . Ďalej môžeme vidieť, že čím väčšia *Sa* anizotropia, tým menšia citlivosť kritickej frekvencie na Elsasserovom čísle Λ .

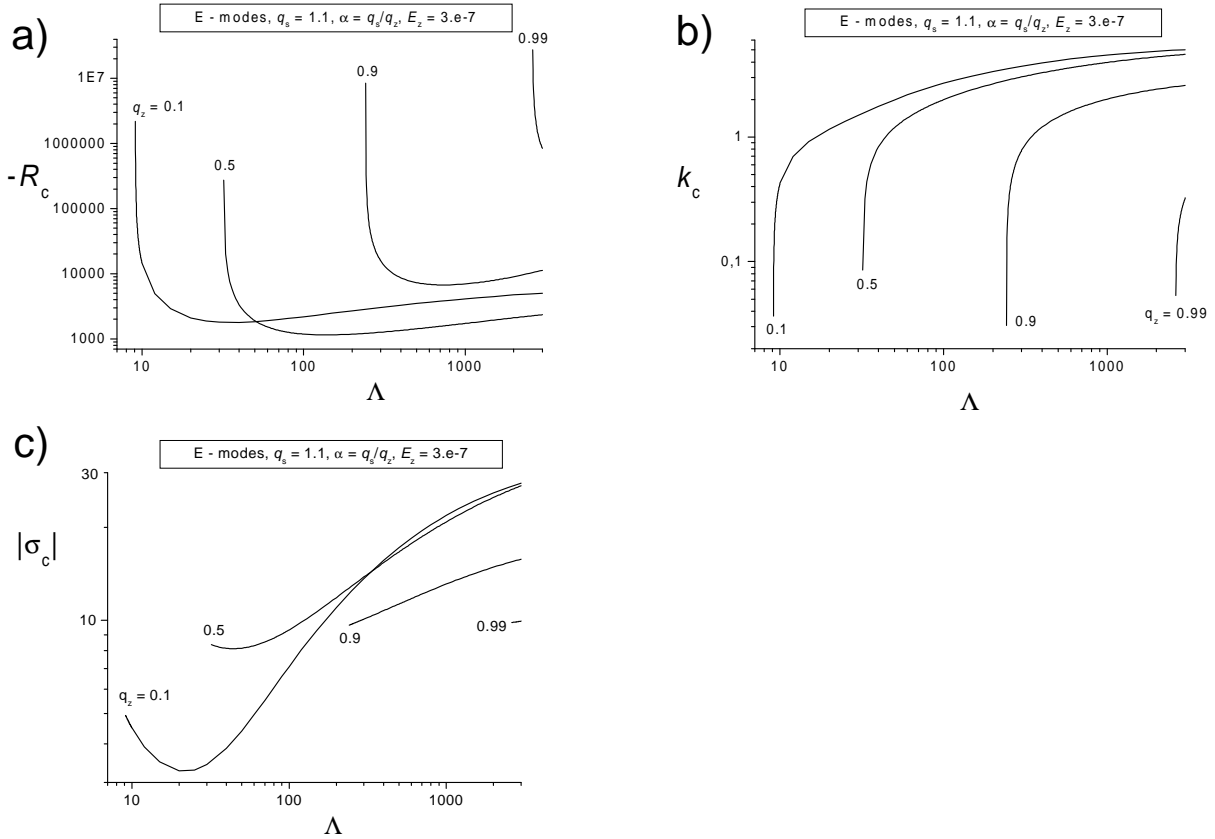
Na druhom obrázku 13 sú opísané základné charakteristiky západných MAC módov pri fixovanej hodnote Robertsovo čísla $q_s = 1,1$, pričom rôzna anizotropia súvisí s rôznou hodnotou druhého Robertsovo čísla q_z . Teda krivky s $q_z > 1,1$ predstavujú *Sa* anizotropiu a krivky s $q_z < 1,1$ *So* anizotropiu. Izotropný prípad je znázornený prerušovanou krivkou. Zo všetkých troch grafov vidno, že hodnota Elsasserovho čísla Λ , pri ktorej začínajú jednotlivé krivky existovať, závisia od hodnoty q_z , a to tak, že čím je q_z väčšie, tým menšie je nástupné Λ . V tomto prípade to znamená, že výraznejšia *Sa* anizotropia umožňuje vznik



Obr. 13: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa západným smerom pri slabej anizotropii. Robertsove číslo $q_s = 1,1$ a anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovho čísla ($q_z = 0,99; 1; 1,1; 2; 5; 10$).

západných MAC módov pri menšej hodnote Elsasserovho čísla Λ a naopak tieto módy potrebujú ku svojmu vzniku v *So* anizotropii vysoké hodnoty Λ . Preto pri danom rozsahu Λ existujú len módy pri slabej *So* anizotropii. Na grafe 13a vidieť, že čím je hodnota q_z väčšia, tým je kritické Rayleighove číslo R_c menšie a pri zväčšovaní Elsasserovho čísla Λ sa postupne stráca závislosť R_c na Λ . Druhý graf 13b ukazuje, že kritické radiálne vlnové čísla k_c týchto módov sú relatívne malé a anizotropia ich veľmi neovplyvňuje (aj keď je zrejmé, že *Sa* anizotropia kritické radiálne vlnové číslo k_c oproti izotropnému prípadu mierne zväčšuje a *So* anizotropia mierne znižuje), pričom sa jej vplyv s nárastom Λ znižuje (krivky konvergujú ku konkrétnej hodnote). Z tretieho grafu 13c vidieť, že kritická frekvencia σ_c dosť výrazne závisí na hodnote q_z a teda na anizotropii, pričom platí, že *Sa* anizotropia zvyšuje kritickú frekvenciu a *So* anizotropia ju znižuje a frekvencia u všetkých tu uvažovaných prípadov anizotropie rastie s nárastom Elsasserovho čísla Λ .

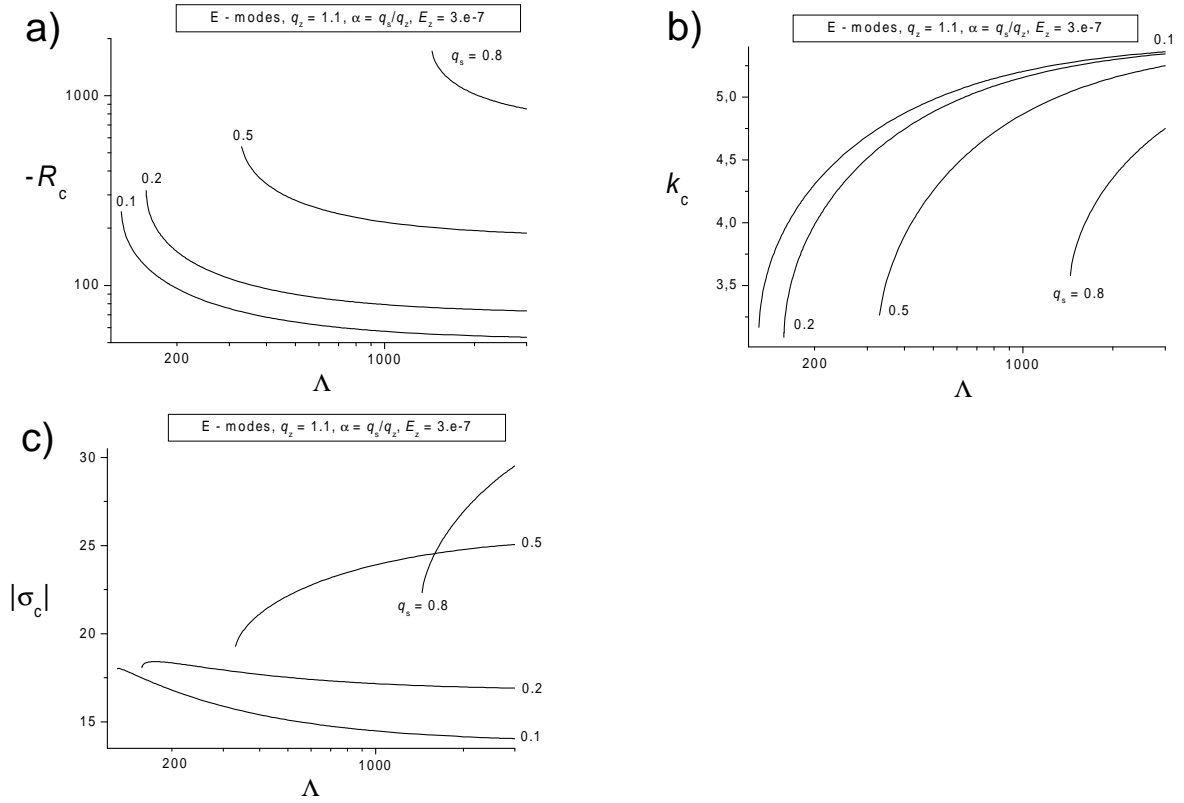
Nasledujúci obrázok 14 opisuje závislosti R_c vs Λ , k_c vs Λ a σ_c vs Λ východných MAC módov ($\sigma_c < 0$) pri fixovanej hodnote Robertsovho čísla $q_s = 1,1$. Rôzne krivky súvisia s rôznymi hodnotami Robertsovho čísla $q_z = 0,99; 0,9; 0,5; 0,1$, a teda rôznymi anizotropiami oceánskeho typu. Nástupová hodnota Elsasserovho čísla je veľmi citlivá na anizotropii, pričom v izotropnom prípade tento mód pri danom rozsahu Λ ani neexistuje. Čím silnejšia *So* anizotropia, tým menšia hodnota nástupového Λ . Charakter kriviek na grafe 14a je kvalitatívne rovnaký, kritické Rayleighove číslo najprv s nárastom Λ prudko klesá z veľkých hodnôt, dosahuje minimum a potom pozvoľna rastie. Krivka s $q_z = 0,99$ sa správa úplne rovnako, ale minimum sa dosahuje pri hodnotách Λ , ktoré sú už mimo



Obr. 14: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy, šíriace sa východným smerom pri slabej anizotropii. Robertsove číslo $q_s = 1,1$ a So anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovho čísla ($q_z = 0,99; 0,9; 0,5; 0,1$).

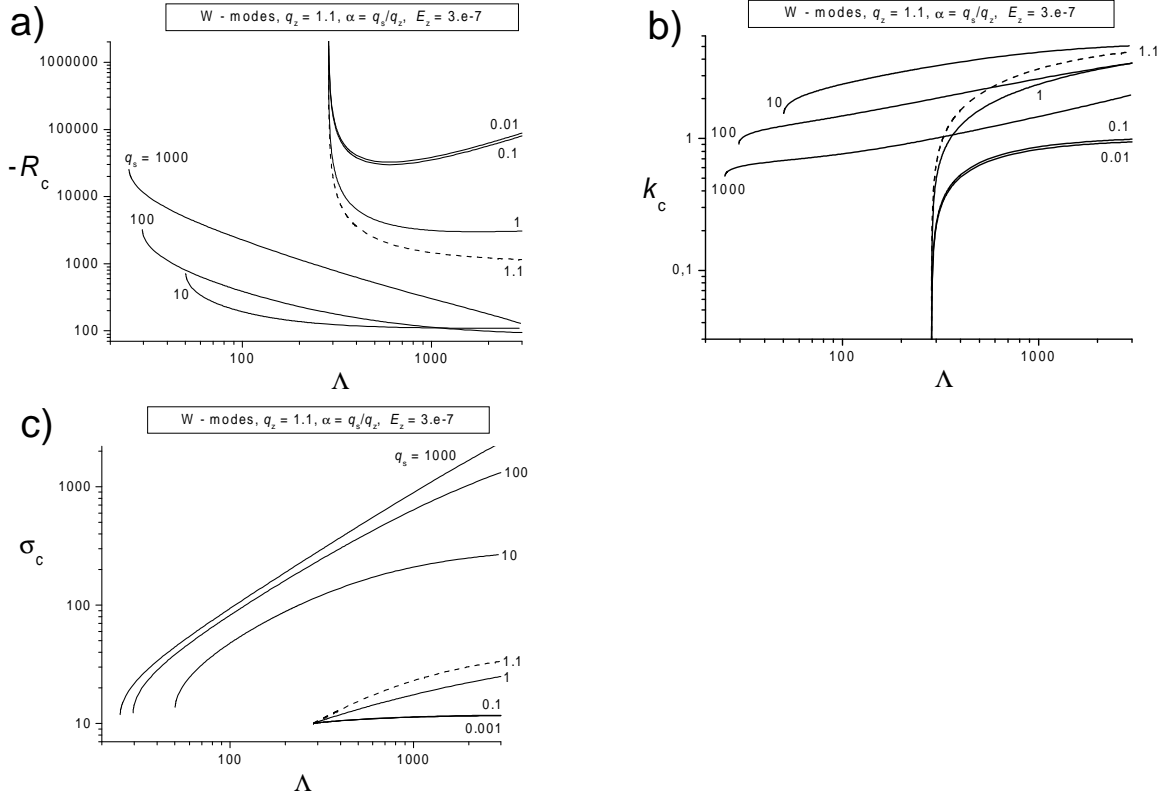
uvažovaného intervalu. Z grafu 14b vidno, že kritické radiálne vlnové čísla sú relatívne malé a väčšia So anizotropia (menšie q_z) dáva menšie kritické radiálne vlnové číslo k_c . Zaujímavá je závislosť kritickej frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle Λ . So zväčšovaním anizotropie sa charakter kriviek postupne mení, pri $q_z = 0,1$ má krivka pri určitej hodnote Λ lokálne minimum, čo sa pri veľmi slabej anizotropii ($q_z = 0,9; 0,99$) nepozoruje. Pri väčších hodnotách Λ platí, že nárastom Λ sa kritická frekvencia zväčšuje a platí tiež, že So anizotropia zvyšuje hodnotu kritickej frekvencie.

Posledný obrázok 15 venovaný MAC módom pri slabej anizotropii obsahuje grafy závislosti kritických čísel na Elsasserovom čísle Λ . Opisované sú vlastnosti východných MAC módom pri fixovanej hodnote Robertsovho čísla $q_z = 1,1$ a rôzne krivky súvisia s rôznou Sa anizotropiou (s rôznymi hodnotami Robertsovho čísla $q_s = 0,8; 0,5; 0,2; 0,1$). Opäť platí, že čím väčšia anizotropia, tým menšia hodnota nástupného Elsasserovho čísla Λ . Izotropný prípad pri zvolenom rozsahu Λ neexistuje. Z prvého grafu 15a vidíme, že Sa anizotropia znižuje hodnotu kritického Rayleighovho čísla R_c a klesá s nárastom Elsasserovho čísla Λ . Druhý graf 15b ukazuje, že anizotropia zvyšuje kritické radiálne vlnové čísla k_c a s nárastom Λ pozvoľne klesajú, pričom sa aj znižujú rozdiely v hodnotách k_c pre rôzne anizotropie. Graf 15c ukazuje veľmi zaujímavé správanie sa kritických frekvencií σ_c . Nárastom Sa anizotropie (poklesom q_s) sa postupne mení závislosť σ_c vs Λ z rastúceho správania na mierne klesajúce, pri ktorom vplyv Elsasserovho čísla Λ je už veľmi slabý. Z grafu 15c tiež vidieť, že silnejšia Sa anizotropia dáva menšie hodnoty kritickej frekvencie σ_c .



Obr. 15: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa východným smerom pri slabšej anizotropii. Robertsove číslo $q_z = 1,1$ a Sa anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovho čísla ($q_s = 0,8; 0,5; 0,2; 0,1$).

Nasledujúcim obrázkom (obr. 16) sa začína druhá skupina, opisujúca vlastnosti magneticky hnaných MAC módov pri uvažovaní aj silných anizotropií, kde rozdiel medzi dvoma Robertsovými číslami q_s a q_z uvažujeme aj viac ako dva rády ($\alpha > 100$ alebo $\alpha < 0,01$). Grafy opisujúce závislosti R_c vs Λ , k_c vs Λ a σ_c vs Λ západných MAC módov ukazujú, že pri fixovanej hodnote Robertsovho čísla $q_z = 1,1$ existujú tieto módy v oboch prípadoch anizotropie (Sa anizotropia s $q_s = 1; 0,1; 0,01$ a So anizotropia s $q_z = 10, 100, 1000$). Izotropný prípad $q_s = q_z = 1,1$ je znázornený prerušovane. Rovnako ako v prípade obrázku 15, vidno rozdiel v kvalite kriviek s $q_s \leq 1,1$ a s $q_s > 1,1$ (v podstate ide o ten istý obrázok, ktorý je obohatený o krivky súvisiace so silnou anizotropiou, preto sa ďalej sústreďíme na opis práve týchto kriviek). Na prvom grafe 16a môžeme vidieť, že kritické Rayleighove čísla R_c sú v prípade So anizotropie menšie a v prípade Sa anizotropie väčšie v porovnaní s izotropným prípadom. Čo je však zaujímavé, že v oboch prípadoch so vzrastajúcou anizotropiou sa kritické Rayleighove číslo R_c zväčšuje. V prípade Sa anizotropie však vidíme určité nasýtenie, kde zvyšovaním anizotropie (zmenšovaním hodnoty q_s) sa kvalita kriviek už výrazne nemení. Pri So anizotropii kritické Rayleighove číslo R_c nárastom Elsasserovho čísla Λ mierne klesá, zatiaľ čo pri Sa anizotropii dosahuje kritické Rayleighove číslo lokálne minimum. Graf 16b ukazuje, že kritické radiálne vlnové číslo k_c v oboch prípadoch anizotropie s ich nárastom klesajú a sú rastúcimi funkciami Elsasserovho čísla Λ . Závislosť kritickej frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle Λ opísaná grafom 16c ukazuje výrazný vplyv anizotropie, pričom So anizotropia frekvenciu zvyšuje a Sa anizotropia ju znižuje. S rastom Elsasserovho čísla Λ kritická frekvencia pri všetkých prípadoch anizotropie rastie, ale pre prípad silnej Sa anizotropie už vplyv Elsasserovho čísla nie je taký

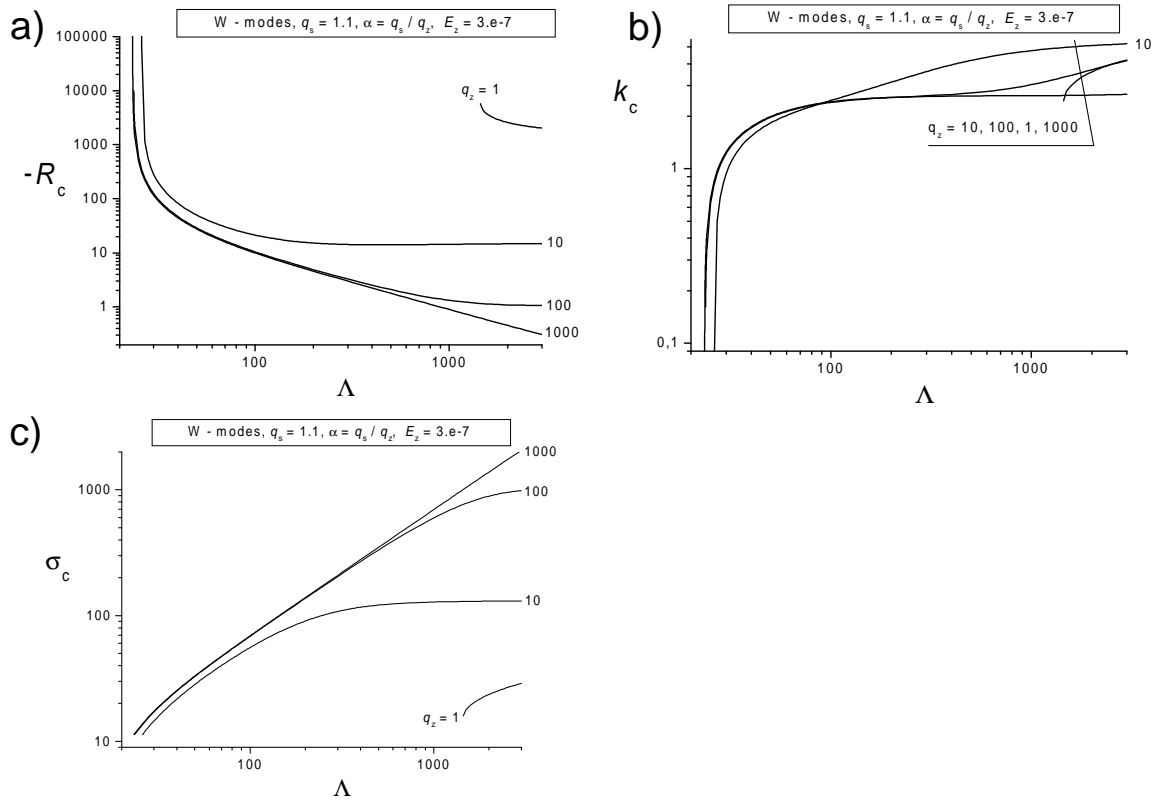


Obr. 16: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa západným smerom pri slabej a silnej anizotropii. Robertsove číslo $q_z = 1,1$ a anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovo čísla ($q_s = 0,01; 0,1; 1; 1,1; 10; 100; 1000$).

významný (krivky s $q_s < 0,1$ už nie sú také strmé).

Obrázok 17 opisuje vlastnosti západných MAC módov pri fixovanej hodnote Robertsovo čísla $q_s = 1,1$ a pozornosť je sústredená na silnú Sa anizotropiu ($q_z = 100; 1000$). Zo všetkých troch grafov vidieť, že čo sa týka nástupových hodnôt Elsasserovho čísla Λ , pri ktorých začínajú vyšetované módy existovať, dochádza tu k istému nasýteniu, lebo ďalším zvyšovaním (aj extrémnym) anizotropie, sa tieto hodnoty Elsasserovho čísla Λ už veľmi zmenšovať nebudú. Krivky grafu 17a ukazujú, že väčšia Sa anizotropia dáva menšie hodnoty kritického Rayleighovho čísla R_c a rozdiely medzi jednotlivými prípadmi anizotropie sú výraznejšie pri väčších hodnotách Elsasserovho čísla Λ . Aj rozdiely kritických radiálnych vlnových čísel k_c pre rôzne prípady anizotropie sa prejaví až pri väčších hodnotách Elsasserovho čísla Λ , ako ukazuje graf 17b, stále však predstavujú relatívne malé hodnoty. Prípád veľmi silnej Sa anizotropie ($q_z = 1000$) vykazuje veľmi zaujímavú závislosť na Λ , po počiatočnom prudkom náraste z veľmi malých hodnôt sa postupne ustáli na kvázi-konštantnej hodnote a teda kritické radiálne vlnové číslo k_c je už na Elsasserovom čísle (a teda na magnetickom poli) skoro nezávislé. Vplyv anizotropie na kritické frekvencie σ_c je zobrazený na treťom grafe 17c. Frekvencia s nárastom Elsasserovho čísla rastie a silnejšia anizotropia dáva aj väčšie frekvencie, čo však výraznejšie začína platiť až pri veľkých hodnotách Λ .

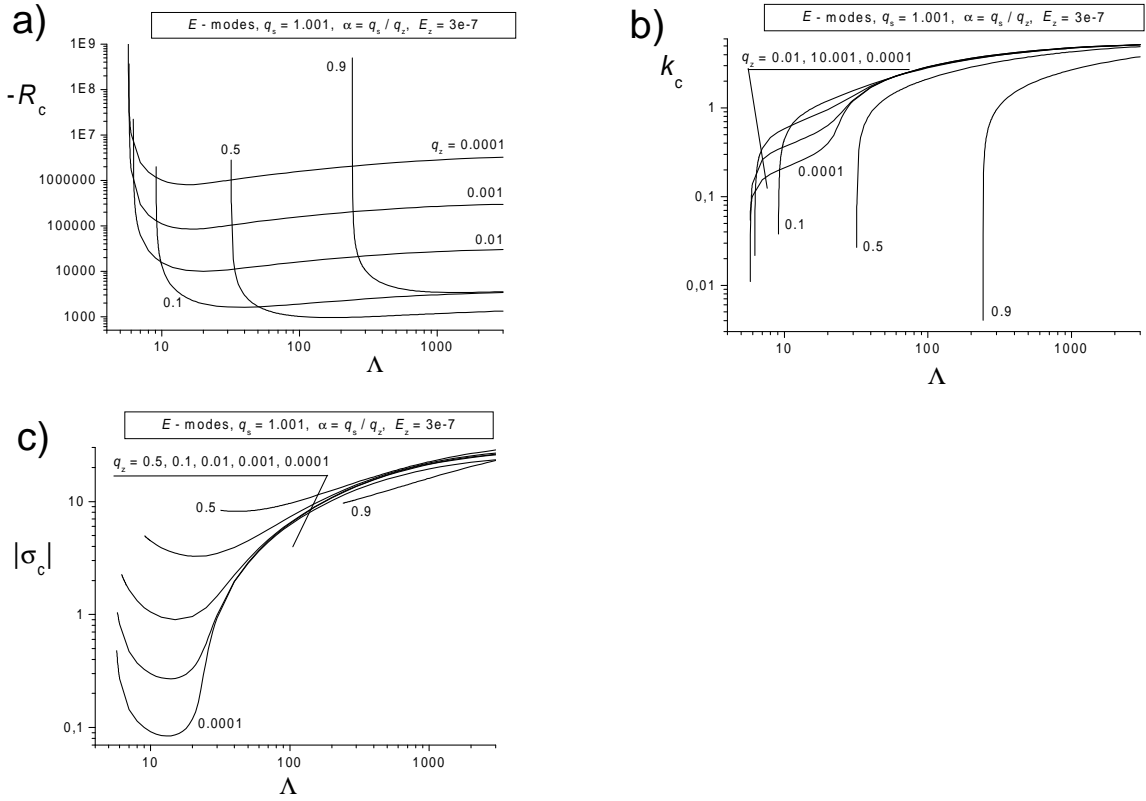
Na ďalšom obrázku (obr. 18) je vyšetovaný vplyv So anizotropie na východné MAC módy. Robertsove číslo q_s má konštantnú hodnotu $q_s = 1,001$ a rôzna anizotropia je daná rôznymi hodnotami Robertsovo čísla q_z . Pozornosť sústredíme na silnú anizotropiu s $q_z = 0,01; 0,001$ a $0,0001$. Nástupné hodnoty Λ sa s nárastom anizotropie posúvajú



Obr. 17: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa západným smerom pri slabej a silnej anizotropii. Robertssove číslo $q_s = 1,1$ a anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovoho čísla ($q_z = 1, 10, 100, 1000$).

k nižším hodnotám, pričom sa však vplyv anizotropie postupne znižuje, čo znamená že ani uvažovaním extrémne veľkej anizotropie sa nemôžeme dostať k ľubovoľne malej hodnote Λ . Z grafu 18a vidíme, že čím je väčšia anizotropia (čím je menšia hodnota q_z) tým je kritické Rayleighove číslo väčšie. Kvalitatívne sa tu všetky krivky správajú rovnako, t.j. po počiatočnom prudkom poklese v oblasti nástupových Λ sa dosahuje lokálne minimum a nasleduje mierny nárast. Graf 18b ukazuje, že kritické radiálne vlnové čísla k_c dosahujú vo všetkých uvažovaných prípadoch anizotropie relatívne malé hodnoty. Radiálne vlnové čísla nárastom Λ tiež rastú a zaujímavý je úsek hodnôt $\Lambda \sim 10$, na ktorom je najvýraznejší kvantitatívny rozdiel medzi jednotlivými prípadmi anizotropie. Pre väčšie hodnoty Elsasserovho čísla sa vplyv anizotropie na kritické radiálne vlnové číslo znižuje (krivky postupne konvergujú ku konštantnej hodnote). Aj tretí graf 18c ukazuje, že najväčší rozdiel v kritických frekvenciách σ_c je v oblasti hodnôt $\Lambda \sim 10$, kde je veľmi zreteľne vidieť, že tu So anizotropia výrazne znižuje hodnotu kritickej frekvencie. Pre väčšie hodnoty Λ sa opäť rozdiel medzi rôznymi anizotropiami stráca.

Veľmi zaujímavé je trochu viac rozanalyzovať kritické frekvencie a ich vzťah ku geofyzikálnym procesom, v tomto prípade hlavne v tenkej stabilne stratifikovanej vrstve. Výsledné (bezrozmerné) frekvencie σ_c (resp. odpovedajúce periódami $\tau_c = 2\pi\sigma_c^{-1}$) vznikajúcich MAC módov, prezentované na grafe 18c, odpovedajú typickým periódam sekulárnych variácií. Ukážeme to nasledujúcimi odhadmi v nasledujúcej tabuľke, ktorá ukazuje typické periódami MAC módov (τ_c^{dim} tentokrát už s rozmerom, teda v rokoch) pri rôznych hodnotách parametra anizotropie $\alpha = q_s/q_z$. Pri zbezrozmernovaní sme použili charakteristický čas magnetickej difúzie $\tau = d^2/\eta \doteq (10^5 m)^2/3m^2s^{-1} \doteq 3 \cdot 10^9 s \doteq 100$ rokov, čo dáva



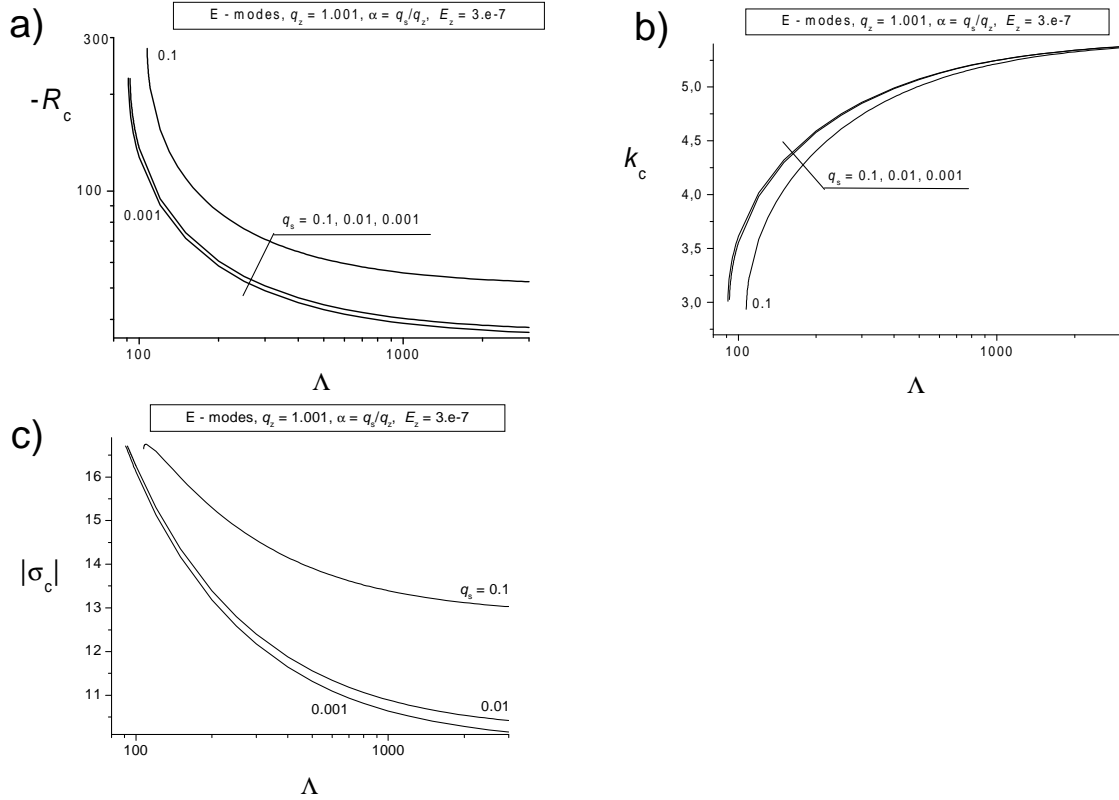
Obr. 18: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa východným smerom pri slabej a silnej anizotropii. Robertsove číslo $q_s = 1,001$ a So anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovo čísla ($q_z = 0,9; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$).

α	σ_c	τ_c	τ_c^{dim} [roky]
2	10	0,6	60
10	4	1,5	150
100	1	6	600
1000	0,4	15	1500
10000	0,1	60	6000

Tabuľka 1: Typické periódy východným smerom sa šíriacich magneticky hnaných MAC módov pre rôzne hodnoty parametra anizotropie α .

$\tau_c^{dim} = \tau \tau_c$ v rokoch. Pritom sme predpokladali charakteristickú hrúbku stabilne stratifikovanej vrstvy $d = 100$ km.

Posledný obrázok 19 z tejto série opisuje východné MAC módy pri konštantnej hodnote Robertsovo čísla $q_z = 1,001$ a pri rôznej Sa anizotropii danej hodnotami Robertsovo čísla $q_s = 0,1; 0,01$ a $0,001$. Podobne, ako v predchádzajúcich prípadoch, aj z týchto grafov vidno, že hodnota nástupového Elsasserovho čísla Λ sa s nárastom anizotropie posúva k menším hodnotám, ale postupne sa tento vplyv oslabuje a nemožno dosiahnuť existenciu daných módov pri ľubovoľne malom Elsasserovom čísle len zvyšovaním anizotropie. Graf 19a ukazuje, že kritické Rayleighove číslo R_c je klesajúcou funkciou Λ a anizotropia znižuje jeho hodnotu. Presne opačne sa správa kritické radiálne vlnové číslo k_c , ktoré je rastúcou funkciou Λ a s nárastom anizotropie sa jeho hodnota veľmi slabo zvyšuje. Charakter kriviek závislosti σ_c vs Λ na grafe 19c je veľmi podobný krivkám z grafu 19a.



Obr. 19: Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre magneticky hnané MAC módy šíriace sa východným smerom pri slabej a silnej anizotropii. Robertsove číslo $q_z = 1,001$ a anizotropia je daná rôznymi hodnotami druhého Robertsovo čísla ($q_s = 0,001; 0,01; 0,1$).

6.6 Závěry - model I

Lineárnou stabilitnou analýzou bol vyšetřovaný vplyv anizotropie difúzných koeficientov na model rotujúcej magnetokonvekcie v rovinnej horizontálnej vrstve. Vrstva je preniknutá azimutálnym magnetickým poľom lineárne rastúcim so vzdialenosťou od osi rotácie.

Tepelne a magneticky hnané nestability. Vyšetřované nestability majú tvar postupnej vlny šíriacej sa pozdĺž magnetického poľa západným alebo východným smerom. V prípade nestabilne stratifikovanej vrstvy vznikajú nestability typu MAC vĺn, ktoré sú tepelne hnané. Vďaka základnému magnetickému poľu, ktoré je krivočiare a nehomogénne, môžu vznikať aj iné typy nestabilit. Nazývame ich magneticky hnané nestability, lebo vznikajú v nestratifikovanom, alebo v stabilne stratifikovanom prostredí. Energiu ku svojmu vzniku berú z magnetického poľa, ktoré práve vďaka zakrivenosti a nehomogénosti môže byť nestabilné. Nestability vznikajúce v nestratifikovanom prostredí nazývame MC módy, ktoré ku svojmu vzniku nepotrebuje vztlakovú silu. Nestability, vznikajúce v stabilne stratifikovanom prostredí, nazývame magneticky hnané MAC módy.

Tepelný MAC mód. Anizotropia difúzných koeficientov, zavedená v tomto modeli, zachováva horizontálnu izotropiu. Uvažujeme teda Sa aj So anizotropiu, pričom je anizotropia zadaná dvoma rôznymi hodnotami dvoch uvažovaných Robertsových čísel q_z a q_s . Vplyv anizotropie na tepelne hnané MAC módy úzko súvisí s definíciou anizotropie (obr. 7). V prípade malých hodnôt Elsasserovho čísla ($\Lambda \leq O(10)$) So anizotropia stabilizuje vrstvu (zvyšuje kritické Rayleighove čísla) a zväčšuje radiálny rozmer módov (zmenšuje kritické radiálne vlnové číslo). Sa anizotropia má presne opačný účinok. Pre väčšie hod-

noty Λ je vplyv anizotropie na konvekciu zložitejši, lebo vznikajú nové módy konvekcie (obr. 7def).

Viskózný MC(W) mód. Pri dostatočne veľkej hodnote Ekmanovho čísla E_z dochádza k prechodu tepelne hnaného a západným smerom sa šíriaceho MAC módu s azimutálnym vlnovým číslom $m = 1$ na magneticky hnaný „viskózný“ MC(W) mód s $m = 1$ (kritické Rayleighove číslo R_c dosiahne nulovú hodnotu). V prípade *So* anizotropie vznikajú dva MC módy, pričom existencia MC módu v anizotropnom prípade je obmedzená podmienkou $\Lambda E_z < 1$ (obr. 9). *So* anizotropia zvyhodňuje nástup MC módov, lebo pre väčšie α sa nástupové E_{zo} (minimálne Ekmanove čísla) posúva smerom k menším a teda geofyzikálnejším hodnotám (obr. 10). V izotropnom prípade a v prípade *Sa* anizotropie už existuje len jeden MC mód, ktorý existuje pre $\Lambda E_z > 1$ (obr. 11). Tieto viskózne MC(W) módy pri anizotropných difúzných koeficientoch môžu byť bližšie k realite, teda môžu vznikáť pri menších magnetických poliach. Azimutálne pole vo vrstve je symetrické vzhľadom na strednú rovinu $z = 0$, čo odpovedá veľmi stabilnému poľu Q-symetrie (Q, D- kvadrupólová a dipólová). Na základe prezentovaných výsledkov tu v modeli I pre pole Q-symetrie, ale aj na základe štúdií [31] s oveľa menej stabilným poľom D-symetrie možno očakávať významnú úlohu viskózných MC(W) módov pri regulovaní veľkosti magnetického poľa v zemskom jadre.

Magnetický MAC mód. Oba typy anizotropie ovplyvňujú aj vlastnosti magneticky hnaných MAC módov, pričom vplyv *Sa* alebo *So* anizotropie súvisí s definíciou anizotropie, t.j. s tým, ktoré Robertsove číslo je konštantné a ktoré sa mení (čím sa mení aj anizotropia). V prípade západných MAC módov môže aj *So* anizotropia (obr. 12) aj *Sa* anizotropia (obr. 13) pôsobiť destabilizujúco, t.j. znižovať kritické Rayleighove číslo, a teda umožniť vznik nestabilít aj pri slabšej stratifikácii. Rovnako obe anizotropie majú vplyv aj na kritické radiálne vlnové čísla a kritické frekvencie v zmysle, že anizotropia, ktorá znižuje kritické Rayleighove číslo, tak zvyšuje kritické radiálne vlnové číslo a zvyšuje aj frekvenciu. Ak pôsobí anizotropia destabilizujúco, tak posúva tiež hranicu existencie západných MAC módov smerom k menším Elsasserovým číslam. Východné magneticky hnané MAC módy sú ovplyvnené anizotropiou ešte výraznejšie, lebo anizotropia je nutnou podmienkou ich existencie (skúmané módy v izotropnom prípade neexistujú). Aj v tomto prípade môže mať destabilizujúci efekt aj *So* (obr. 14) aj *Sa* anizotropia (obr. 15), pričom opäť platí, že čím silnejšia anizotropia, tým širší interval Elsasserovho čísla Λ existencie východných MAC módov (obr. 18, 19).

7 Model II

7.1 Model s homogénnym vertikálnym magnetickým poľom

Vychádzame z modelu prezentovaného v Chandrasekharovej knihe [13], pričom problém riešime aj v cylindrickej súradnicovej sústave. Ako časovú jednotku používame magnetický difúzny čas d^2/η (Chandrasekhar uvažoval difúzny čas odvodený od viskozity d^2/ν) a v cylindrickej geometrii rozlíšime osovosymetrické ($\partial_\varphi = 0$) a osovosymetrické nestability ($\partial_\varphi \neq 0$). Budeme sa zaoberať oboma prípadmi ($\partial_\varphi = 0, \neq 0$). Ukážeme, že vzťahy (60, 61), odvodené v cylindrickej geometrii, sú ako v anizotropných, tak aj v izotropných prípadoch totožné s analogickými vzťahmi, odvodenými v kartézskej geometrii pre Rayleighove čísla a frekvencie v tvare horizontálnych roliet.

V cylindrickej geometrii v modeli I sme študovali vplyv základného azimutálneho magnetického poľa len na osovosymetrické nestability. V tejto kapitole však vyšetríme vplyv homogénneho vertikálneho magnetického poľa tak ako na osovosymetrické, tak aj na osovosymetrické nestability [65, 63].

Tu v modeli II je motivácia pre cylindrickú geometriu iná, ako v modeli I. Sústredíme sa na tie módy tepelnej konvekcie, ktoré môžu efektívne ovplyvniť inerciálne oscilácie systému s nižšou frekvenciou, teda s periódami výrazne väčšími od periódy rotácie - 1 dňa a výrazne menšími od zvoleného charakteristického času - času magnetickej difúzie $\sim 10^4$ rokov. V modeli I s azimutálnym magnetickým poľom sme z nášho štúdia vylúčili inerciálne oscilácie jednoduchým neuvážením inerciálneho člena v Navier-Stokesovej rovnici, resp. v bezrozmerných rovniciach uvážením $R_o = 0$, t.j. nulového Rossbyho čísla; pozri (24, 30, 31) a napokon (36). Pozornosť sa tam sústredila na MAC a MC módy, šíriace sa pozdĺž azimutálneho magnetického poľa, čomu odpovedal tvar (29) pre osovosymetrické poruchy ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Inerciálne oscilácie v zemskom jadre sú typickým prejavom rotácie Zeme a sú to vlastne vlastné kmity rotujúcej tekutiny [23, 41]. Čiarové spektrum týchto oscilácií obsahuje minimálnu periódu 12 hodín, ďalšie periódami sú hlavne v rozmedzí 12 až 24 hodín, ostatné periódami z nízkofrekvenčnej časti spektra sú možné a teoreticky idú až do nekonečne veľkých hodnôt. Niektoré nízkofrekvenčné inerciálne oscilácie môžu mať periódami blízke základným a typickým periódam činnosti geodynamy. Z historického hľadiska riešeniu rovníc, spojených s geodynamom, veľmi pomáhalo priblíženie splnenosti tzv. Taylorovej podmienky¹², ktorá sa oprávňovala zanedbaním viskózných a inerciálnych síl (až na Coriolisovu). Ešte pred rozbehnutím úspešných počítačových simulácií geodynamy sa ukazovali problémy splniť Taylorovu podmienku. Jej modifikácie s pripustením viskózných síl, resp. inerciálnych síl sa ukázali ako rozumné, čo potvrdili a potvrdzujú geodynamové simulácie. Ešte Braginský [3] upozornil na tzv. torzné oscilácie - špecifický typ osovosymetrických inerciálnych oscilácií, kde „elastická tuhosť“ pre tieto torzné oscilácie sa zabezpečuje radiálnymi zložkami geomagnetického poľa, kolmými na os rotácie. Takisto podal (teraz všeobecne prijímané) vysvetlenie korelácie zmeny dĺžky dňa a niektorých módov geomagnetických sekulárnych variácií. Torzné oscilácie, ktoré súvisia v súčasnosti s najspoľahlivejšie určenými geomagnetickými sekulárnymi variáciami, a ktoré možno študovať aj v rámci numerických geodynamových simulácií, významným spôsobom zabezpečujú prechody medzi stavmi, keď Taylorova podmienka je splnená, a stavmi, keď nie je splnená.

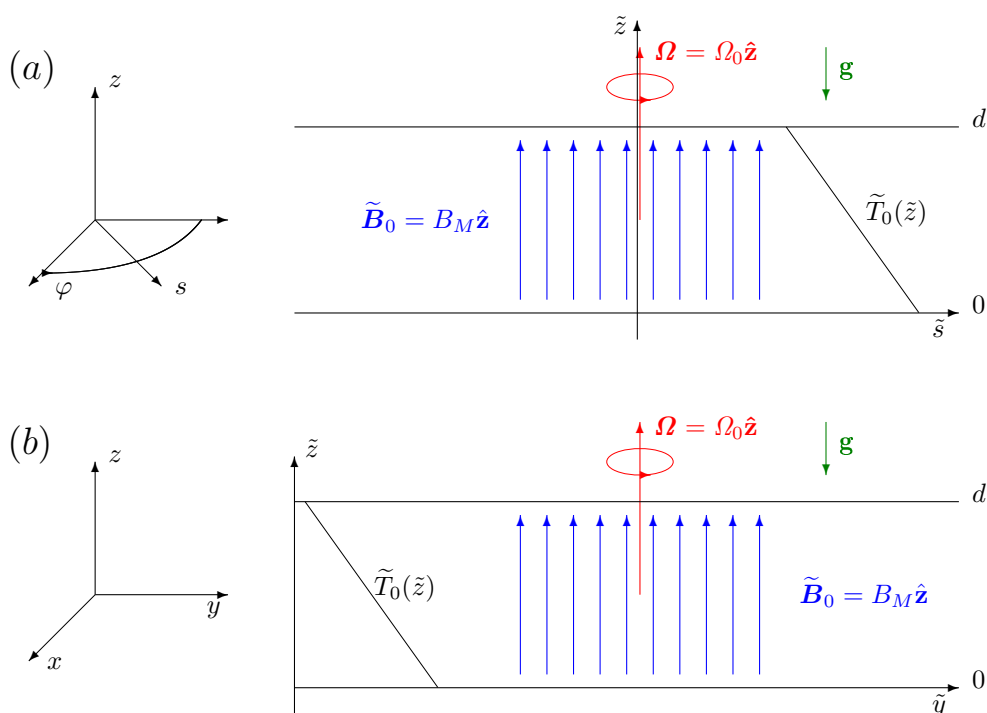
Ostáva však otvorený problém. Čo budí a čo udržiava torzné oscilácie v rotujúcich systémoch? Tento problém nie je zaujímavý len pre Zem, ale aj pre planéty, Slnko a hviezdy.

¹²Ustrednený moment Lorentzovej sily v zemskom jadre cez cylindrické povrchy rovnobežné s osou rotácie je nulový. Je to silná podmienka, podmieňujúca priestorový priebeh magnetického poľa v jadre.

V prípade zemského jadra by torzné oscilácie mali byť utlmené viskozitou a magneticou difúziou po ich niekoľkých oscilačných periódach (jedna perióda ~ 60 rokov), teda v čase výrazne kratšom ako je magnetický difúzny čas zemského jadra. Budiť a udržiavať ich môže tepelná konvekcia [30]. Významnú úlohu pritom môžu zohrávať Reynoldsove napätia, ktorých príspevok k turbulentnej viskozite zrejme zabezpečí aj jej anizotropiu. Preto v modeli II v rámci zvládnuteľného analytického prístupu študujeme nástup tepelnej konvekcie v prítomnosti magnetického poľa. Toto vertikálne pole má síce nulovú radiálnu zložku, ale napriek tomu získame cenné informácie o osovosemtrických a osovonesymetrických módoch tepelnej konvekcie, ktoré prispievajú k chápaniu torzných oscilácií či už planét alebo hviezd aspoň z kinematického hľadiska (keď už nie z dynamického).

7.2 Základné rovnice

Sústredíme sa teraz v prípade homogénneho vertikálneho poľa na poruchy vyjadrené v cylindrickej geometrii (29, 45), čo, ako sa ukáže, bude aplikovateľné aj na poruchy v kartézskej geometrii, teda na horizontálne rolky v smere napr. y [13]. Uvažujeme nekonečnú horizontálnu vrstvu, ktorá rotuje okolo vertikálnej osi, je tepelne stratifikovaná a preniknutá homogénnym vertikálnym magnetickým poľom. Uvažujeme nasledujúci základný



Obr. 20: Model rotujúcej magnetokonvekcie s homogénnym vertikálnym základným magnetickým poľom v nekonečnej horizontálnej nestabilne stratifikovanej vrstve s vertikálnym teplotným profilom $\tilde{T}_0(\tilde{z})$ v cylindrickej geometrii (a) a v kartézskej geometrii (b).

stav

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \hat{\mathbf{z}}, \quad \tilde{T}_0 = T_l - \Delta T \frac{\tilde{z}}{d}, \quad (39)$$

kde $\tilde{\mathbf{U}}_0$ je rýchlosť, $\tilde{\mathbf{B}}_0$ je homogénne vertikálne magnetické pole a $\tilde{T}_0(\tilde{z})$ je vertikálny teplotný profil. Uvažovaním nekonečne malých porúch môžeme základné rovnice zlineariť

a zbezrozmerniť na nasledujúci tvar

$$R_o \partial_t \mathbf{u} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda (\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{z}} + R \vartheta \hat{\mathbf{z}} + E_z \left[(1 - \alpha_\nu) \partial_{zz}^2 + \alpha_\nu \nabla^2 \right] \mathbf{u}, \quad (40)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (41)$$

$$\frac{1}{q_z} \partial_t \vartheta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \left[(1 - \alpha_\vartheta) \partial_{zz}^2 + \alpha_\vartheta \nabla^2 \right] \vartheta, \quad (42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (43)$$

V rovniciach sa objavujú rovnaké bezrozmerné čísla, ako v prípade, keď základným magnetickým poľom je azimutálneho pole. Bezrozmerné poruchy rýchlosti a magnetického poľa \mathbf{u} a \mathbf{b} môžeme rozložiť (rovnako ako (28) v prípade modelu I) na poloidálnu a toroidálnu časť

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= k^{-2} [\nabla \times (\nabla \times w \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \omega \hat{\mathbf{z}}], \\ \mathbf{b} &= k^{-2} [\nabla \times (\nabla \times b \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times j \hat{\mathbf{z}}], \end{aligned} \quad (44)$$

kde w, ω reprezentujú poruchy rýchlosti \mathbf{u} a b, j poruchy magnetického poľa \mathbf{b} a ϑ je porucha teploty. Neznáme funkcie ($w, \omega, b, j, \vartheta$) majú tvar

$$f(z, s, \varphi, t) = \Re e [F(z) J_m(ks) \exp(im\varphi + \lambda t)], \quad (45)$$

kde $F(z) = W(z), \Omega(z), B(z), J(z)$ a $\Theta(z)$, J_m je Besselova funkcia 1. druhu rádu m , k je radiálne vlnové číslo. Azimutálne vlnové číslo m svojimi hodnotami $m = 0$ a $m \neq 0$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) rozdeľuje vznikajúce nestability na osovosymetrické a na osovo nesymetrické. Osovosymetrické nestability korešpondujú torzným osciláciám, zatiaľ čo osovo nesymetrické predstavujú vlnové poruchy, šíriace sa azimutálne a rovnako preferovane východným i západným smerom. V prípade horizontálnych roliek v smere y treba $J_m(ks) \exp(im\varphi + \lambda t)$ v (45) nahradiť $\exp(ikx + \lambda t)$, resp. z funkcie $J_m(ks) \exp(im\varphi)$ prejsť na funkciu $\exp(ikx)$. Neznáme funkcie $F(z)$ sa tak, ako v prípadoch osovosymetrických a osovo nesymetrických porúch, tak aj v prípade horizontálnych roliek, riadia nasledujúcim systémom obyčajných diferenciálnych rovníc

$$0 = [E_z(D^2 - \alpha k^2) - R_o \lambda] \Omega + DW + \Lambda DJ, \quad (46)$$

$$k^2 R \Theta = (D^2 - k^2) [E_z(D^2 - \alpha k^2) - R_o \lambda] W - D\Omega + \Lambda(D^2 - k^2) DB, \quad (47)$$

$$0 = (D^2 - k^2 - \lambda) J + D\Omega, \quad (48)$$

$$0 = (D^2 - k^2 - \lambda) B + DW, \quad (49)$$

$$0 = (D^2 - \alpha k^2 - q_z^{-1} \lambda) \Theta + W. \quad (50)$$

Uvažujeme najjednoduchšie hraničné podmienky u $z = 0; 1$, t.j. mechanicky voľné, tepelne dokonale vodivé a dokonale elektrické izolanty

$$W = D^2 W = D\Omega = \Theta = J = 0.$$

Elimináciou všetkých premenných okrem premennej W dostaneme diferenciálnu rovnicu pre W

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{D}_\beta \left\{ (\mathcal{D}_\beta - \lambda) (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) - QD^2 \right\}^2 + T_a (\mathcal{D}_\beta - \lambda)^2 D^2 \right] (\mathcal{D}_\alpha - \zeta\lambda) W = \\ \beta R_a \left\{ (\mathcal{D}_\beta - \lambda) (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) - QD^2 \right\} (\mathcal{D}_\beta - \lambda) W, \end{aligned} \quad (51)$$

kde $\mathcal{D}_\beta = D^2 - \beta$ a $\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha\beta$ sú diferenciálne operátory 2. rádu, pritom používame $\beta = k^2$ pre štvorec horizontálneho vlnového čísla. Ďalej $T_a = E_z^{-2}$, $Q = A/E_z$, $R_a = R/E_z$, $p = R_o/E_z = \eta/\nu_{zz}$ a $\zeta = q_z^{-1} = \eta/\kappa_{zz}$, sú bezrozmerné čísla (Taylorove, Chandrasekharove, klasické Rayleighove, p^{-1} je magnetické Prandtlove a q_z je Robertsove číslo). Keďže náš záujem je sústredený na vzájomný vzťah tepelnej konvekcie a inerciálnych oscilácií, tak v nasledujúcich výpočtoch R_o a p uvažujeme nenulové na rozdiel od modelu I, kde sme predpokladali $p = 0$.

Zo systému diferenciálnych rovníc (46–50) a z hraničných podmienok predpokladáme nasledujúce riešenia pre funkcie $F(z)$, t.j.

$$W(z) = W_0 \sin l\pi z, \quad (52)$$

$$\Theta(z) = \Theta_0 \sin l\pi z, \quad (53)$$

$$\Omega(z) = \Omega_0 \cos l\pi z, \quad (54)$$

$$B(z) = B_0^0 \cos l\pi z + B_0^1 \times \text{chk}z, \quad (55)$$

$$J(z) = J_0 \sin l\pi z. \quad (56)$$

Do diferenciálnej rovnice (51) pre W dosadíme navrhované riešenie $W(z) = W_0 \sin l\pi z$ a po algebraických úpravách (a po substitúciách $R_1 = R_a/\pi^4$, $Q_1 = Q/\pi^2$, $T_1 = T_a/\pi^4$ a $i\sigma_1 = \lambda/\pi^2$) dostaneme vyjadrenie pre Rayleighove číslo v nasledujúcom tvare

$$R_1 = \frac{A}{A-1} \left\{ (A_\alpha + i\zeta\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1 \frac{A_\alpha + i\zeta\sigma_1}{A + i\sigma_1} + \frac{T_1}{A} \frac{(A_\alpha + i\zeta\sigma_1)(A + i\sigma_1)}{(A_\alpha + ip\sigma_1)(A + i\sigma_1) + Q_1} \right\}. \quad (57)$$

Pritom

$$A = 1 + \tilde{a} \quad \text{a} \quad A_\alpha = 1 + \alpha\tilde{a}, \quad \text{kde} \quad \tilde{a} = k^2/\pi^2. \quad (58)$$

Takéto vyjadrenie Rayleighovho čísla je komplexný výraz, preto ho musíme rozdeliť na reálnu a imaginárnu časť. Fyzikálny zmysel má len reálna časť Rayleighovho čísla, ktorú možno po zavedení pomocnej funkcie

$$l_\alpha = l_\alpha(\tilde{a}, \alpha) = \frac{1 + \alpha\tilde{a}}{1 + \tilde{a}} = \frac{A_\alpha}{A} \quad (59)$$

vyjadriť nasledovne

$$\Re(R_1) = \frac{A}{A-1} \left\{ AA_\alpha - p\zeta\sigma_1^2 + Q_1 \frac{AA_\alpha + \zeta\sigma_1^2}{A^2 + \sigma_1^2} + \frac{T_1}{A} \frac{[AA_\alpha - \zeta\sigma_1^2][AA_\alpha - p\sigma_1^2 + Q_1] + A^2(\zeta + l_\alpha)(p + l_\alpha)\sigma_1^2}{[AA_\alpha - p\sigma_1^2 + Q_1]^2 + A^2(p + l_\alpha)^2\sigma_1^2} \right\}. \quad (60)$$

Imaginárna časť, ktorá nám dáva dôležitú rovnicu pre výpočet frekvencie, má tvar

$$\Im(R_1) = \frac{T_1}{A} \frac{(\zeta - p)[A^2 + \sigma_1^2] + Q_1\zeta l_\alpha^{-1}}{[AA_\alpha - p\sigma_1^2 + Q_1]^2 + A^2(p + l_\alpha)^2\sigma_1^2} + \frac{Q_1}{l_\alpha} \frac{\zeta - l_\alpha}{A^2 + \sigma_1^2} + p + \zeta. \quad (61)$$

Rovnice (60, 61) sú modifikáciou odpovedajúcich vzťahov (65, 66) v kapitole V v [13]. Rozdiely nie sú len kvôli anizotropnému parametru $\alpha \neq 1$, ale aj v dôsledku zmenenej časovej škály d^2/η (a nie d^2/ν_{zz}). Je zaujímavé, že rovnice (60, 61) sú tie isté pre osovosymetrické a osovonesymetrické nestability v cylindrickej geometrii (tento model) a pre nestability v rovinnej vrstve v kartézskej geometrii [13]. \tilde{a} vo všetkých troch prípadoch reprezentuje štvorec horizontálneho vlnového čísla.

Z podmienky $\Im m(R_1) = 0$ dostaneme algebraickú rovnicu 3. stupňa pre neznámu σ_1^2 , čo je štvorec frekvencie nestability (pretože vo výraze (60) pre Rayleighove číslo sa frekvencia σ_1 vyskytuje vždy v druhej mocnine, nemusíme uvažovať algebraickú rovnicu 6. stupňa pre neznámu σ_1 , ale stačí nám algebraická rovnica 3. stupňa pre σ_1^2)

$$C_3(\sigma_1^2)^3 + C_2(\sigma_1^2)^2 + C_1(\sigma_1^2)^1 + C_0 = 0. \quad (62)$$

Koeficienty polynómu v algebraickej rovnici (62) majú po zavedení pomocnej premennej $A = 1 + \tilde{a}$ nasledujúce tvary

$$\begin{aligned} C_3 &= p^2(\zeta + p)A, \\ C_2 &= A \left\{ \zeta p^2 Q_1 l_\alpha^{-1} + (\zeta + p)A_\alpha^2 \right\} + (\zeta - p)T_1 - p(3p + 2\zeta)Q_1 A + 2p^2(p + \zeta)A^3, \\ C_1 &= l_\alpha^{-1} \left\{ \zeta Q_1 T_1 - 2p\zeta Q_1^2 A + p^2 \zeta Q_1 A^3 \right\} + (3\zeta + 2p)Q_1 A_\alpha A^2 - Q_1 A_\alpha^2 A + 2(\zeta + p)A_\alpha^2 A^3 + \\ &\quad + Q_1 T_1 + (\zeta + 3p)Q_1 A + 2(\zeta - p)T_1 A^2 - p(2\zeta + 3p)Q_1 A^3 + p^2(\zeta + p)A^5, \\ C_0 &= l_\alpha^{-1} \left\{ \zeta Q_1^3 A + \zeta Q_1 T_1 A^2 \right\} - Q_1^3 + Q_1 T_1 A + (3\zeta + p)Q_1^2 A^2 + (\zeta - p)T_1 A^3 - \\ &\quad - 2Q_1^2 A A_\alpha + (3\zeta + 2p)Q_1 A^3 A_\alpha - Q_1 A^2 A_\alpha^2 + (\zeta + p)A^4 A_\alpha^2. \end{aligned}$$

Máme teda predpis, ako vypočítať Rayleighove číslo R_1 . Pre zadané vstupné parametre (Elsasserove číslo A , Ekmanove číslo E_z , magnetické Prandtlove číslo p^{-1} a Robertsove číslo q_z) a pre vybrané konkrétne radiálne vlnové číslo k numericky vypočítame korene polynómu, čo sú vlastne štvorce frekvencie nestability σ_1^2 . Vyberieme fyzikálne vhodný koreň (reálny a nezáporný) a dosadíme ho (spolu so všetkými vstupnými parametrami A , E_z , p , q_z a s vybraným radiálnym vlnovým číslom k) do výrazu pre Rayleighove číslo R_1 . My ale chceme nájsť takú nestabilitu, ktorá sa pri daných vstupných parametroch vybudí najľahšie, t.j. hľadáme také radiálne vlnové číslo, ktorému odpovedá minimálne Rayleighove číslo. Také číslo nazývame kritické radiálne vlnové číslo k_c , jemu odpovedajúce Rayleighove číslo R_c kritické a frekvenciu σ_c nazývame tiež kritickou.

Program, ktorý počíta kritické Rayleighove čísla, pracuje nasledovne. Pri vstupných parametroch (E_z , A , q_z , p) si zoberieme počiatočný interval radiálnych vlnových čísel $k \in \langle 0, 01; 200 \rangle$, ktorý sa rozdelí na tisíc podintervalov, ktorých hranice nám dajú sadu radiálnych vlnových čísel. V každom z týchto čísel spočítame korene polynómu 3. stupňa a po vybratí fyzikálne vhodného koreňa (σ_1^2) vypočítame Rayleighove číslo. Z danej sady radiálnych vlnových čísel vyberieme také, ktorému odpovedá najmenšie Rayleighove číslo. Okolo tohto radiálneho vlnového čísla utvoríme nový interval (malé okolie), ktorý opäť rozdelíme na menšie podintervaly a predchádzajúce výpočty zopakujeme. Postupne delíme stále menšie a menšie intervaly až po požadovanú presnosť. Takto získané Rayleighove číslo, radiálne vlnové číslo a frekvencia sú už kritické. Týmto sme vlastne získali jeden bod jednej krivky na grafoch, vyjadrujúcich závislosť $R_c = R_c(A)$, $k_c = k_c(A)$ a $\sigma_c = \sigma_c(A)$, ak uvažujeme závislosť na Elsasserovom čísle A . Celú krivku získame, ak necháme predchádzajúce výpočty spraviť v cykle pre rôzne hodnoty A (prípadne Ekmanovho čísla E_z pri závislostiach $R_c = R_c(E_z)$, $k_c = k_c(E_z)$, a $\sigma_c = \sigma_c(E_z)$).

Na výpočet koreňov polynómu 3. stupňa sme použili procedúru *zroots*, ktorá je súčasťou balíka programov Numerical Recipes [35]. Táto procedúra počíta korene polynómu Laguerreovou metódou, ktorej konvergencia je veľmi zriedkavo porušená a je dostatočne rýchla aj v prípadoch, keď sú koeficienty polynómu rôznych rádov. Navyše Laguerreova metóda je univerzálne použiteľná metóda k výpočtu koreňov polynómov, pretože veľmi dobre konverguje v prípade ľubovoľných typov koreňov, či už reálnych, komplexných, jednoduchých alebo viacnásobných.

Treba pripomenúť, že všetky odvodené vzťahy pre Rayleighove čísla R a frekvencie σ v závislosti od vlnových čísel k sú rovnaké pre všetky vyšetované módy, či v cylindrickej alebo kartézskej geometrii. Podobne to platí aj pre kritické čísla R_c , k_c , σ_c . Dostávame tak rovnakú preferenciu (to isté R_c) pre osovovesymetrické módy (torzné oscilácie), pre osovovesymetrické azimutálne či západným alebo východným smerom šíriace sa vlnové nestability (nezávislé od hodnoty m v (45)), alebo napokon horizontálne rolky ľubovoľne orientované vo vrstve. Všetkým týmto rozdielnym módom popri rovnakom R_c prináležia aj ostatné kritické čísla, teda σ_c a k_c , a to s rovnakými hodnotami.

7.3 Energetické úvahy

Lineárna stabilitná analýza nám okrem určenia kritických čísel R_c , k_c a σ_c (teda určenie, pri akých vstupných parametroch sa rozhybe konvekcia), umožňuje vypočítať niektoré fyzikálne veličiny, ktoré súvisia s pomermi amplitúd jednotlivých porúch a dajú sa ďalej použiť pri niektorých energetických úvahach. Môžeme napríklad preskúmať, ako sa dodávaná energia (vrstvu zdola zohrievame) rozdelí medzi kinetickú a magnetickú, prípadne v akom pomere sú kinetické energie v azimutálnom a meridionálnom smere [63]. Na výpočet týchto pomerov bude potrebné ustredňovanie v priestore a v čase. V nasledujúcej časti tejto kapitoly je podrobný popis, ako sa k týmto ustredneným veličinám dospeje. Sústredíme sa však iba na osovovesymetrické „torzné oscilácie“, ktoré v našom modeli sú reprezentované nulovým azimutálnym vlnovým číslom $m = 0$, čomu odpovedá v (45) Besselova funkcia $J_0(ks)$. Nebol by však problém podobne postupovať aj v prípadoch osovovesymetrických nestabilit s $m \neq 0$.

Nájde sa riešenie rovnice (51) pre W , teda zo vstupných parametrov Λ , E_z , p , ζ a α sa určí Rayleighove číslo R , frekvencia σ a radiálne vlnové číslo k . V lineárnom probléme máme potom riešenie (51) v tvare $W = W_0 \sin \pi_l z$ ($\pi_l = l\pi$), pričom môžeme zjednodušené predpokladať, že všeobecne komplexná amplitúda W_0 je rovná 1. $W_0 = 1$ neprotirečí predpokladu, že amplitúdy nestabilit sú nekonečne malé. V lineárnom probléme nemôžeme totiž určiť skutočnú hodnotu amplitúdy a pri normovaní jednotlivých amplitúd bude výhodné normovanie práve vzhľadom na $W_0 = 1$. Potom z rovníc (50, 52, 53) určíme $\Theta = \Theta_0 \sin \pi_l z$, teda $\Theta_0 = W_0(\pi_l^2 + \alpha\beta + \zeta\lambda)^{-1}$. Ďalej zo (46, 48) a (54, 56) určíme $\Omega(z) = \Omega_0 \cos \pi_l z$ a $J(z) = J_0 \sin \pi_l z$. Pritom¹³ pre komplexné amplitúdy platí $\Omega_0 = \pi_l E_z^{-1}(\pi_l^2 + \beta + \lambda)W_0/det$, $J_0 = -\pi_l E_z^{-1}W_0/det$ pri $det = (\pi_l^2 + \beta + \lambda)(\pi_l^2 + \alpha\beta + p\lambda) + \pi_l^2 Q$. Riešenie $B(z) = B_0^0 \cos \pi_l z + B_0^1 \operatorname{ch} kz$ dostaneme z (49), teda riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice so špeciálnou pravou stranou. Na $B(z)$ sú zložitejšie hraničné podmienky, ako na predchádzajúce funkcie $W(z)$, $\Omega(z)$, $J(z)$ a $\Theta(z)$, a preto hľadané riešenie má všeobecný tvar (ako možno nájsť v hocktorej učebnici matematickej analýzy). Koniec koncov formálnym dosadením predpokladaných „trigonometrických“ riešení (52–56) do (46–50) dostaneme údaje o amplitúdach porúch W_0 , Ω_0 , B_0^0 , J_0 a Θ_0 . V linearizovanom probléme sú amplitúdy nekonečne malé. Ich skutočné hodnoty sú nezistiteľné. Dokážeme však určiť napr. pomery Ω_0/W_0 , B_0^0/W_0 , J_0/W_0 a Θ_0/W_0 , čo je typické pre riešenie získaného systému homogénnych algebraických rovníc. Je možné určiť fyzikálne veličiny, definované pomocou amplitúd W_0 , Ω_0 až Θ_0 , pre rôzne vstupné parametre. V lineárnej analýze zmysel však má porovnávať iba podiely takýchto veličín, napr. závislosť podielu kinetickej energie a magnetickej energie nestabilit na vybranom vstupnom parametre – Elsasserovom čísle Λ pri konštantných hodnotách iných parametrov. Napokon jednotlivé druhy energie bude rozumné spájať s ich ustrednenými hodnotami, či už v priestore alebo čase. Pri procedúre

¹³ J_0 častokrát reprezentuje amplitúdu „prúdovej hustoty“ $J(z)$, a nie Besselovu funkciu nultého rádu.

ustrednenia máme istú voľnosť, avšak musia byť splnené Reynoldsove pravidlá tak, ako je to typické v hydrodynamike [15, 39], resp. magnetohydrodynamike stredných polí [29, 21].

Pripomeňme si vzťahy pre jednotlivé zložky bezrozmerných porúch (nestabilit) magnetického poľa a rýchlosti v prípade ich osovej symetrie ($m = 0$)

$$\begin{aligned} b_\varphi &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{b} = -k^{-2} \partial_s j = J_1(ks) k^{-1} \Re \left\{ J(z) e^{\lambda t} \right\}, \\ b_z &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{b} = -k^{-2} (\partial_s + s^{-1}) \partial_s b = k^{-1} (\partial_s + s^{-1}) J_1(ks) \Re \left\{ B(z) e^{\lambda t} \right\}, \\ b_s &= \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{b} = \partial_{zs}^2 b = k^{-1} J_1(ks) \Re \left\{ DB(z) e^{\lambda t} \right\}, \\ u_\varphi &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{u} = -k^{-2} \partial_s \omega = k^{-1} J_1(ks) \Re \left\{ \Omega(z) e^{\lambda t} \right\}, \\ u_z &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} = -k^{-2} (\partial_s + s^{-1}) \partial_s w = k^{-1} (\partial_s + s^{-1}) J_1(ks) \Re \left\{ W(z) e^{\lambda t} \right\}, \\ u_s &= \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{u} = \partial_{zs}^2 w = -k^{-1} J_1(ks) \Re \left\{ DW(z) e^{\lambda t} \right\}. \end{aligned}$$

Rozumné bude porovnávať rôzne druhy energie v závislosti na vstupných parametroch. Napr. kinetická energia nestabilit E_{kin} je úmerná súčtu štvorcov všetkých zložiek rýchlosti, teda $E_{kin} \propto u_z^2 + u_s^2 + u_\varphi^2$. Rozlíšime jej azimutálnu časť $E_{kin}^{tor} \propto u_\varphi^2$ od meridiónej $E_{kin}^{mer} \propto u_z^2 + u_s^2$. Podobne pre magnetickú energiu nestabilit máme $E_{mag}^{tor} \propto b_\varphi^2$ a $E_{mag}^{mer} \propto b_z^2 + b_s^2$. Aby sme si uľahčili porovnávanie energií pre rôzne vstupné parametre, zavedieme si ustredňovanie, napr. $\langle E \rangle = \langle E \rangle_{zst}$, pričom $\langle E \rangle_z$, $\langle E \rangle_s$, resp. $\langle E \rangle_t$ znamená ustredňovanie vo vertikálnom smere z , v radiálnom smere s , resp. v čase t . Je zrejmé, že ustrednenie všetkých vektorových zložiek v čase, ktorý je oveľa väčší ako perióda nestabilit, je nula. Avšak ustrednenie štvorcov týchto zložiek dáva nenulovú hodnotu využívajúc fakt, že $1/2\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 1/2$. Podobne v smere z ustredňujeme hlavne trigonometrické funkcie. Ustrednenie v radiálnom smere s je trochu zložitejšie $\langle f(s) \rangle_s \equiv 1/(s_o - s_i) \int_{s_i}^{s_o} f(s) s ds$, kde súčin $f(s)$ a s v integrande je v dôsledku definície elementárneho objemu v cylindrickej geometrii. Integračné medze s_i a s_o môžu odpovedať napr. prvému a druhému koreňu rovnice $J_1'(x) = 0$, čím rozumne priblížime našu konečnú vrstvu v zmysle $s \in \langle 0, \infty \rangle$ geometrii reálneho konečného telesa, napr. cylindrickej vrstve s polomerami porovnateľnými s hrúbkou vrstvy d .

Takže vyjadríme si podiel ustrednených azimutálnej a meridiónej kinetickej energie. Máme

$$\frac{\langle u_\varphi^2 \rangle}{\langle u_z^2 + u_s^2 \rangle} = \frac{\langle J_1(ks) \rangle_s}{\langle \left\{ \left(\partial_s + \frac{1}{s} \right) J_1(ks) \right\}^2 + J_1^2(ks) \rangle_s} \Omega \cdot \bar{\Omega}, \quad (63)$$

kde

$$\Omega \cdot \bar{\Omega} = \frac{\pi_l^2 E_z^{-2} [(\pi_l^2 + \beta)^2 + \sigma^2]}{[(\pi_l^2 + \beta)^2 - p\sigma^2 + \pi_l^2 Q]^2 + \sigma^2 [\pi_l^2 + \alpha\beta + p(\pi_l^2 + \beta)]^2}. \quad (64)$$

Dá sa tušit a aj sa ukáže pre všetky geofyzikálne reálne vstupné parametre, že azimutálne energie, či už kinetická alebo magnetická dominujú nad ich meridióalnym doplnkom. Preto budeme porovnávať podiely azimutálnej kinetickej a magnetickej energie. Zrejme platí

$$\frac{\langle u_\varphi^2 \rangle}{\langle b_\varphi^2 \rangle} = \frac{\Omega \cdot \bar{\Omega}}{J \cdot \bar{J}} = \frac{(\pi_l^2 + \beta)^2 + \sigma^2}{\pi_l^2}, \quad (65)$$

pričom $\langle u_\varphi^2 \rangle / \langle b_\varphi^2 \rangle$ ešte nevyjadruje to, čo potrebujeme. Aby sme vyjadrili podiel kinetickej a magnetickej energie nestabilit, tak obidve energie musíme vyjadriť v ich jednotkách, t.j.

musíme urobiť transformácie z bezrozmerných veličín b_φ a u_φ na veličiny s rozmerom \tilde{b}_φ a \tilde{u}_φ , teda $\tilde{b}_\varphi = b_\varphi B_Z$ a $\tilde{u}_\varphi = u_\varphi(\eta/d)$. Pritom charakteristická rýchlosť $\eta/d = d/(d^2/\eta)$ je podiel charakteristickej dĺžky d a charakteristického času d^2/η , t.j. magnetického difúzneho času. Máme

$$\frac{\langle (b_\varphi B_Z)^2 \rangle / 2\mu_0}{\rho_0 / 2 \langle (u_\varphi \eta / d)^2 \rangle} = \frac{\langle b_\varphi^2 \rangle}{\langle u_\varphi^2 \rangle} \frac{B_Z^2 d^2}{\mu_0 \rho_0 \eta^2} = \frac{\langle b_\varphi^2 \rangle}{\langle u_\varphi^2 \rangle} \frac{Q}{p}, \quad (66)$$

kde

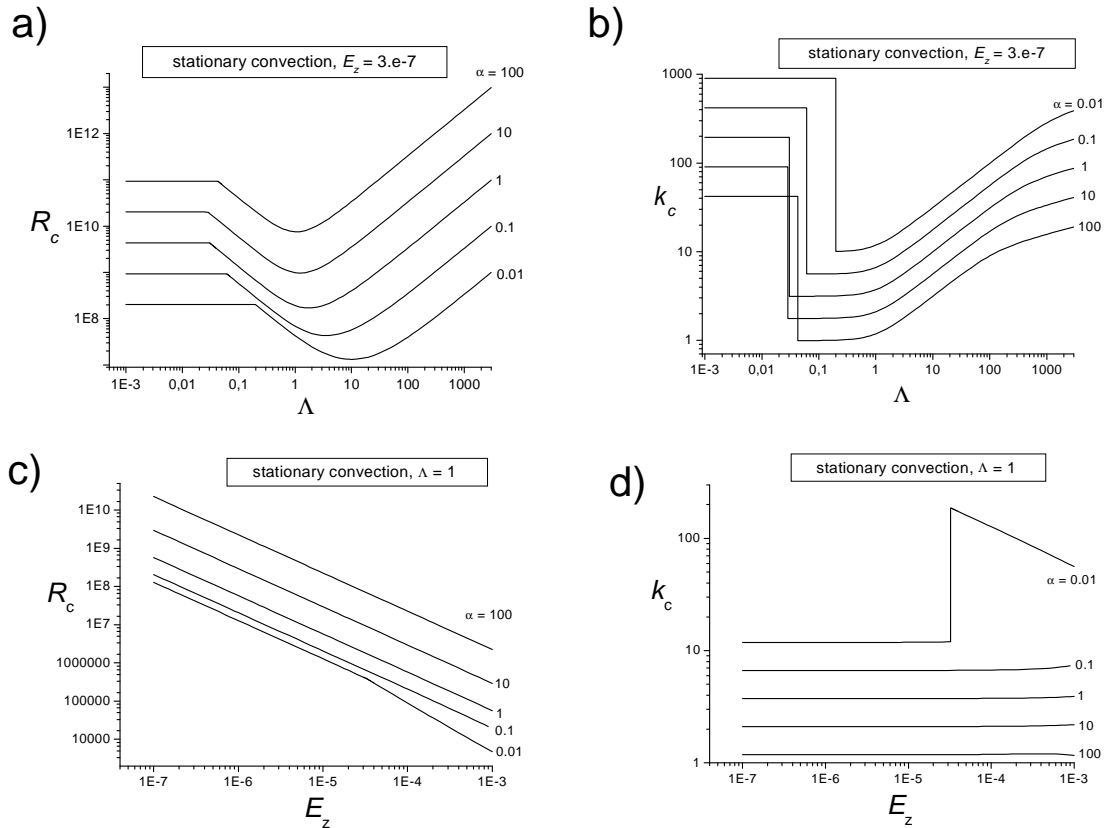
$$Q = \frac{\Lambda}{E_z} = \frac{B_Z^2 d^2}{\mu_0 \rho_0 \nu_{zz} \eta}.$$

Takže podiel ustrednených kinetickej a magnetickej energie osovosymetrických nestabilit, korešpondujúcich torzným osciláciám, je

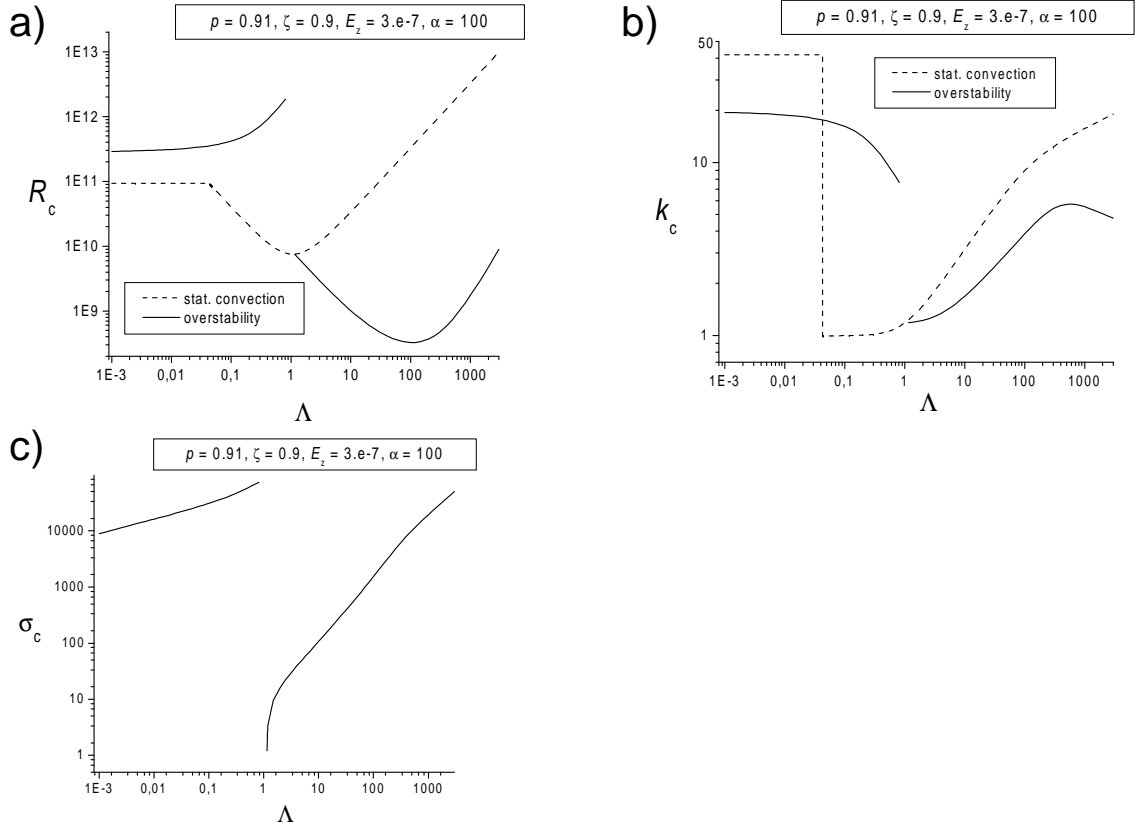
$$\frac{\langle E_{kin}^{tor} \rangle}{\langle E_{mag}^{tor} \rangle} = \frac{\langle u_\varphi^2 \rangle}{\langle b_\varphi^2 \rangle} \frac{p}{Q} = \frac{(\pi_l^2 + \beta)^2 + \sigma^2}{\pi_l^2} \frac{p}{Q}, \quad (67)$$

kde Q je Chandrasekharove číslo a $p = \eta/\nu_{zz}$ je prevrátená hodnota magnetického Prandtl-ovho čísla.

7.4 Numerické výsledky



Obr. 21: Vplyv anizotropie difúzných koeficientov na stacionárnu konvekciu. Závislosť kritického Rayleighovho čísla R_c a kritického radiálneho vlnového čísla k_c na Elsasserovom čísle Λ (a, b) a na Ekmanovom čísle E_z (c, d). Väčšie množstvo kriviek korešponduje rôznym hodnotám parametra anizotropie α .



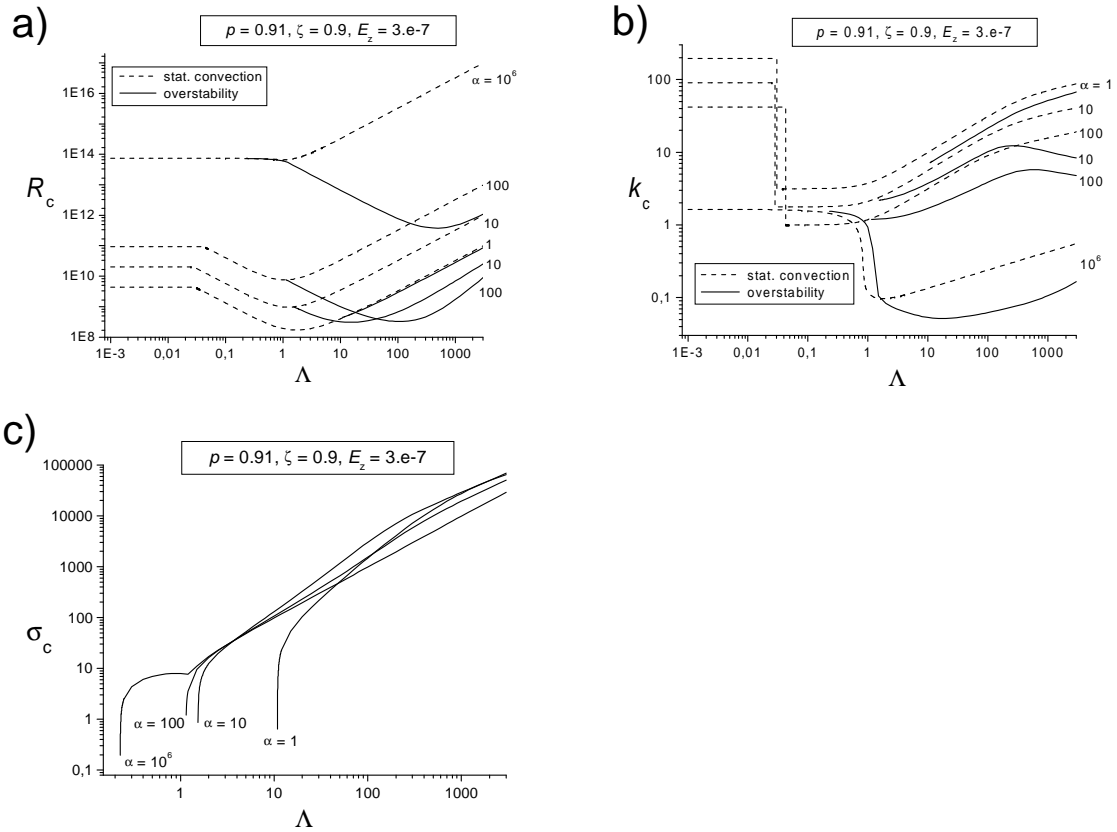
Obr. 22: Zmena preferencie medzi stacionárnou konvekciou a periodickou nestabilitou. Kritické čísla R_c , k_c a σ_c v závislosti na Elsasserovom čísle Λ pre parameter anizotropie $\alpha = 100$ pre prípad stacionárnej konvekcie (prerušovaná krivka) a pre prípad periodickej nestability (plná krivka).

Numerické výsledky môžeme rozdeliť do dvoch základných skupín pre {1} kritické čísla a {2} pomery energií. Pritom kritické čísla v skupine {1} sú analyzované pre všetky typy nestabilit, t.j. v cylindrickej geometrii pre osovosymetrické a nesymetrické a v kartézskej geometrii pre horizontálne rolky. Pomery energií v skupine {2} sú analyzované len pre osovosymetrické nestability s $m = 0$ v (45).

Prvá skupina {1} obsahuje grafy, opisujúce základné charakteristiky vznikajúcich nestabilit – kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického radiálneho vlnového čísla k_c a kritickej frekvencie σ_c a ich závislosti na vstupných parametroch, ktoré sú: Elsasserove číslo Λ (ktoré je mierou magnetického poľa), Ekmanove číslo v z-smere E_z (ktoré je mierou viskózneho odporu, pretože sme zaviedli anizotropiu viskozity, máme aj Ekmanove číslo v s smere $E_s = \alpha E_z$) a parameter anizotropie α , ktorý je mierou anizotropie (čím väčšia odchýlka tohto parametra od jednotky, tým výraznejšia anizotropia).

Druhá skupina {2} obsahuje grafy opisujúce závislosti niektorých energetických veličín daných nestabilit na vstupných parametroch Λ , E_z a α . Tieto energetické veličiny sú (a) $\langle u_\varphi^2 \rangle / \langle u_s^2 + u_z^2 \rangle$ – čo je podiel ustrednených azimutálnej a meridionálnej kinetickej energie, (b) E_{kin} / E_{mag} – podiel ustrednených kinetickej a magnetickej energie v azimutálnom smere.

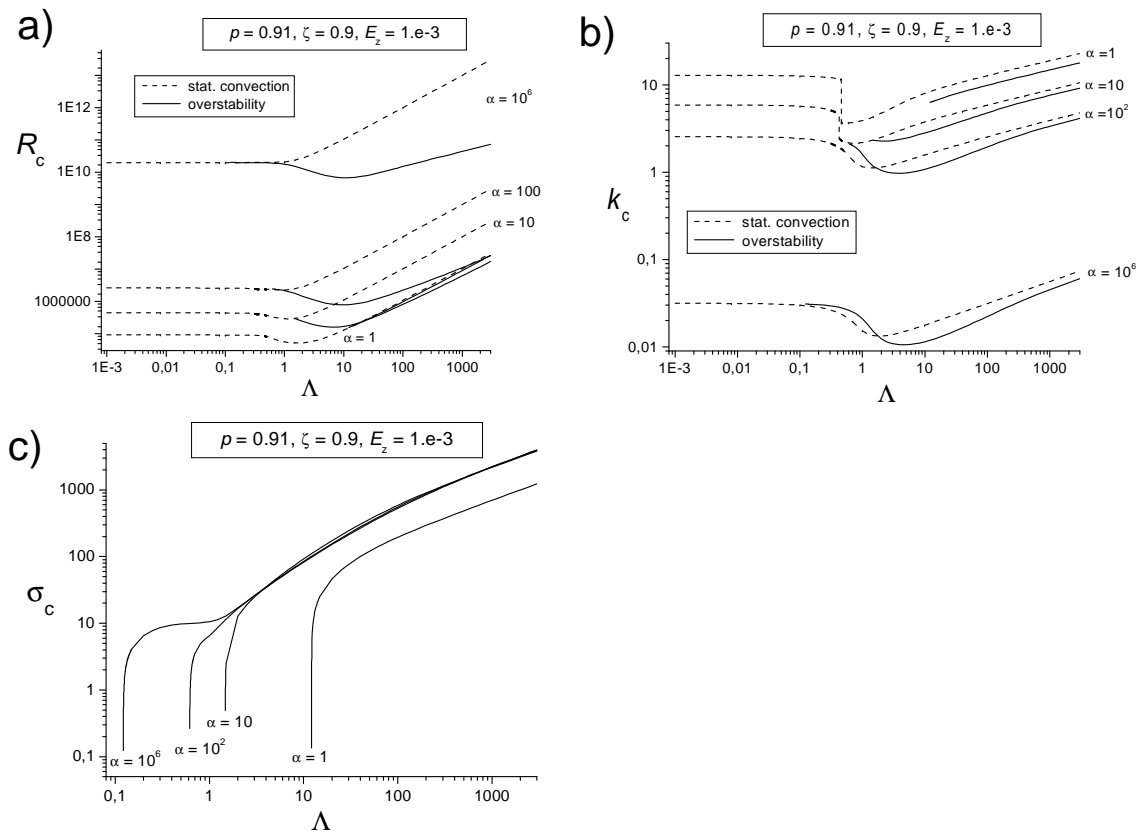
V tomto modeli rotujúcej magnetokonvekcie s homogénnym vertikálnym základným magnetickým poľom môžu vznikáť dva základné módy konvekcie: stacionárna konvekcia (frekvencia nestability $\sigma = 0$), ktorá má tvar stacionárneho driftujúceho toku, teda dife-



Obr. 23: Zmena preferencie medzi stacionárnou konvekciou a periodickou nestabilitou. Závislosť kritických čísel R_c , k_c a σ_c na Elsasserovom čísle Λ pre prípad stacionárnej konvekcie (prerušovaná krivka) a pre prípad periodickej nestability (plná krivka) pri Ekmanovom čísle $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Väčšie množstvo kriviek korešponduje rôznym hodnotám parametra anizotropie $\alpha = 1, 10, 100$ a 10^6 .

renciálnej rotácie, alebo je to periodická nestabilita (frekvencia σ je nenulová), ktorá má tvar torzných oscilácií. Tu nejde o torzné oscilácie, typické pre zemské jadro [3, 17, 25, 41], pretože základné pole nemá radiálnu s -zložku. Preto pre naše oscilácie, pre ktoré je typická osová symetria porúch \mathbf{u} a \mathbf{b} , upustíme od názvu torzné. Ostaneme pri osovo symetrických osciláciach, teda špecifických nestabilitách spojených s tepelnou konvekciou v rotujúcej vrstve preniknutej magnetickým poľom.

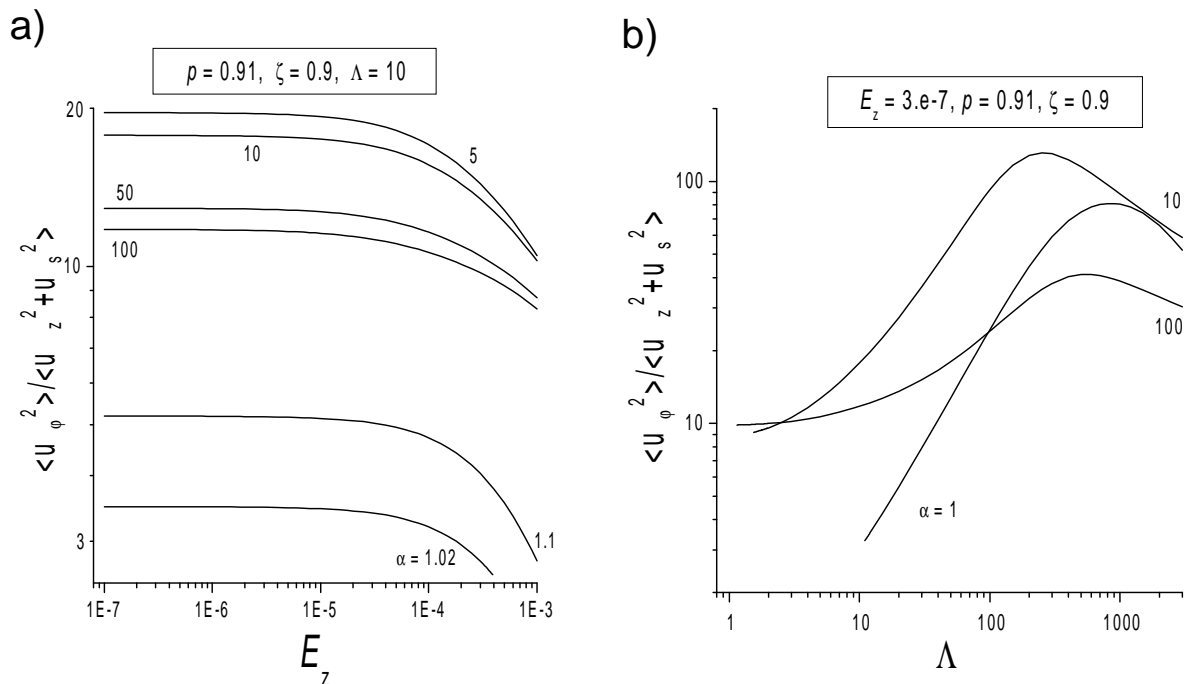
Obrázok 21 pozostáva zo štyroch grafov, pričom prvé dva (21ab) opisujú závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c a kritického radiálneho vlnového čísla k_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$, druhé dva (21cd) opisujú závislosti tých istých veličín, ale teraz na Ekmanovom čísle E_z pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 1$. Všetky krivky na tomto obrázku sa vzťahujú len na stacionárnu konvekciu ($\sigma = 0$). Rôzne krivky na jednotlivých grafoch korešpondujú rôznym hodnotám parametra anizotropie $\alpha = 0,01; 0,1; 1; 10$ a 100 . Z grafov 21ac vidieť, že anizotropia typu oceánu ($\alpha > 1$) zabraňuje konvekcií, lebo zvyšuje kritické Rayleighove čísla, zatiaľ čo anizotropia typu atmosféry zmenšovaním kritického Rayleighovho čísla konvekciu uľahčuje. Z grafov 21bd zase vidíme, že S_a anizotropia zväčšuje kritické radiálne vlnové čísla (zmenšuje horizontálny rozmer konvekčných buniek) a S_o anizotropia naopak kritické radiálne vlnové čísla zmenšuje (naťahuje horizontálny rozmer konvekčných buniek). Na grafe 21a môžeme vidieť, že krivky sú zložené z dvoch častí, a teda módov; prvá časť je charakterizovaná „kvázikonštantnou“ závislosťou na Λ , druhá časť má tvar paraboly s lokálnym



Obr. 24: Zmena preferencie medzi stacionárnou konvekciou a periodickou nestabilitou. Závislosť kritických čísel R_c , k_c a σ_c na Elsasserovom čísle Λ pre prípad stacionárnej konvekcie (prerušovaná krivka) a pre prípad periodickej nestability (plná krivka) pri Ekmanovom čísle $E_z = 10^{-3}$. Väčšie množstvo kriviek korešponduje rôznym hodnotám parametra anizotropie $\alpha = 1, 10, 100$ a 10^6 .

minimum. Hodnota Λ , pri ktorej sa dosahuje toto minimum, je pre rôzne krivky (teda rôzne hodnoty parametra anizotropie α) rôzna. Rôzne sú aj hodnoty, pri ktorých dochádza ku prechodu z jedného módu na druhý. Tomuto prechodu odpovedá skok v hodnote kritického radiálneho vlnového čísla k_c z hodnoty $k_c \gg 1$ na hodnotu $k_c = O(1)$. K takému prechodu dochádza pri daných vstupných parametroch $\Lambda = 1$ aj na grafoch 21cd, ale len v prípade silnej *Sa* anizotropie ($\alpha = 0,01$).

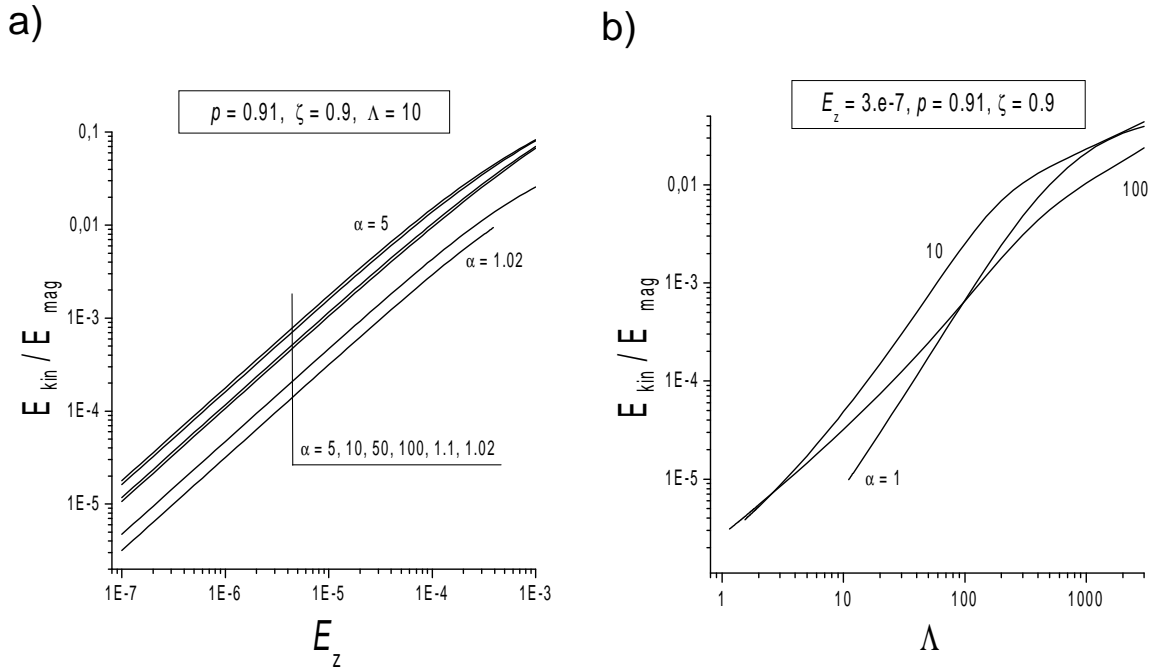
Grafy na obrázku 22 opisujú závislosti R_c , k_c a σ_c na Elsasserovom čísle Λ pri hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ v prípade silnej *So* anizotropie ($\alpha = 100$), kde prerušované krivky odpovedajú stacionárnej konvekcii a plné krivky periodickej nestability. Na grafe 22a vidíme dve plné krivky, ktoré odpovedajú dvom módom periodickej nestability. Prvý mód existuje len pri malých hodnotách Λ a nie je preferovaný, lebo jeho kritické Rayleighove čísla R_c sú väčšie ako R_c , odpovedajúce stacionárnej konvekcii (prerušovaná krivka). Druhý mód je už preferovaný pred stacionárnou konvekciou a existuje pre $\Lambda \gtrsim 1$. V prípade týchto dvoch módov nedochádza k prechodu jedného módu na druhý, lebo existuje interval hodnôt Λ , v ktorom neexistuje ani jeden mód periodickej nestability. Grafy 22bc ukazujú ďalšie odlišnosti týchto dvoch módo, napr. k_c prvého módu s nárastom Λ klesá, ale k_c druhého módu narastá až po určité maximum, a potom tiež klesá. Kritické frekvencie σ_c prvého módu nadobúdajú len veľké hodnoty, zatiaľ čo frekvencie druhého módu môžu nadobúdať aj relatívne malé (a geofyzikálne reálnejšie) hodnoty. Na grafe 22c nie je prerušovaná krivka, odpovedajúca stacionárnej konvekcii s nulovou frekvenciou.



Obr. 25: Podiel ustrednených azimutálnej a meridionálnej kinetickej energie nestabilití v závislostiach na Ekmanovom čísle E_z a Elsasserovom čísle Λ pri rôznych hodnotách anizotropného koeficientu $\alpha > 1$. Minimálne Λ na krivkách na pravom obrázku sú nástupové hodnoty vznikajúcich periodických nestabilití.

Trojica grafov na obrázku 23 opisuje tie isté závislosti ako grafy na obrázku 22 (závislosti R_c , k_c a σ_c na Λ), pričom je zobrazený len preferovaný mód periodickej nestability. Ten nepreferovaný u menších Λ už nie je zobrazený (ako ešte je na obr. 22). Rôzne dvojice kriviek (prerušovaná – stacionárna konvekcia a plná – preferovaná periodická nestabilita) korešpondujú rôznym hodnotám parametra anizotropie $\alpha = 1, 10, 100$ a aj extrémne veľkej hodnote 10^6 . Pre túto trojicu grafov boli použité tieto vstupné parametre: $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$, $p = 0,91$ a $\zeta = 0,9$, kde E_z je Ekmanove číslo, $p = \eta/\nu_{zz}$ a $\zeta = \eta/\kappa_{zz}$ (η je magnetická difuzivita, ν_{zz} je vertikálny koeficient kinematickej viskozity a κ_{zz} je vertikálna tepelná difuzivita). Numerická analýza ukázala, že periodická nestabilita nemôže existovať pre $\alpha < \zeta$, čo vylučuje prípad silnej *Sa* anizotropie. Na prvom grafe 23a môžeme opäť vidieť, že čím výraznejšia *So* anizotropia (čím väčšia hodnota α) tým väčšie hodnoty kritického Rayleighovho čísla R_c . Podobne druhý graf 23b ukazuje, že väčšia *So* anizotropia dáva menšie hodnoty kritického radiálneho vlnového čísla, t.j. konvektívne bunky sa v radiálnom smere naťahujú. Z tretieho grafu 23c vidíme, že nástupové hodnoty Λ_o (hodnoty, pri ktorých začína existovať periodická nestabilita, ktorá je preferovaná pred stacionárnou konvekciou) sa s narastajúcou hodnotou parametra anizotropie posúvajú k menším hodnotám Λ , t.j. čím väčšie α , tým menšie Λ_o . Kritické frekvencie σ_c sú pre $\Lambda \geq \Lambda_o$ najnižšie, a teda geofyzikálne najreálnejšie. Pre väčšie Λ už nie sú frekvencie veľmi citlivé na anizotropii.

Obrázok 24 opisujú tie isté závislosti, ako grafy na predchádzajúcom obrázku, ale pri väčšej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$. Porovnaním týchto dvoch obrázkov vidíme minimálne kvalitatívne zmeny. Čo sa týka kvantitatívnych zmien, tak zvýšenie Ekmanovho čísla spôsobilo zníženie všetkých troch sledovaných kritických čísel R_c , k_c aj σ_c a zmenšili sa aj hodnoty nábehových Λ_o . Na grafe 24c môžeme ešte zreteľnejšie vidieť, že väčšia *So* anizotropia umožňuje vznik periodickej nestability pri menších magnetických poliach

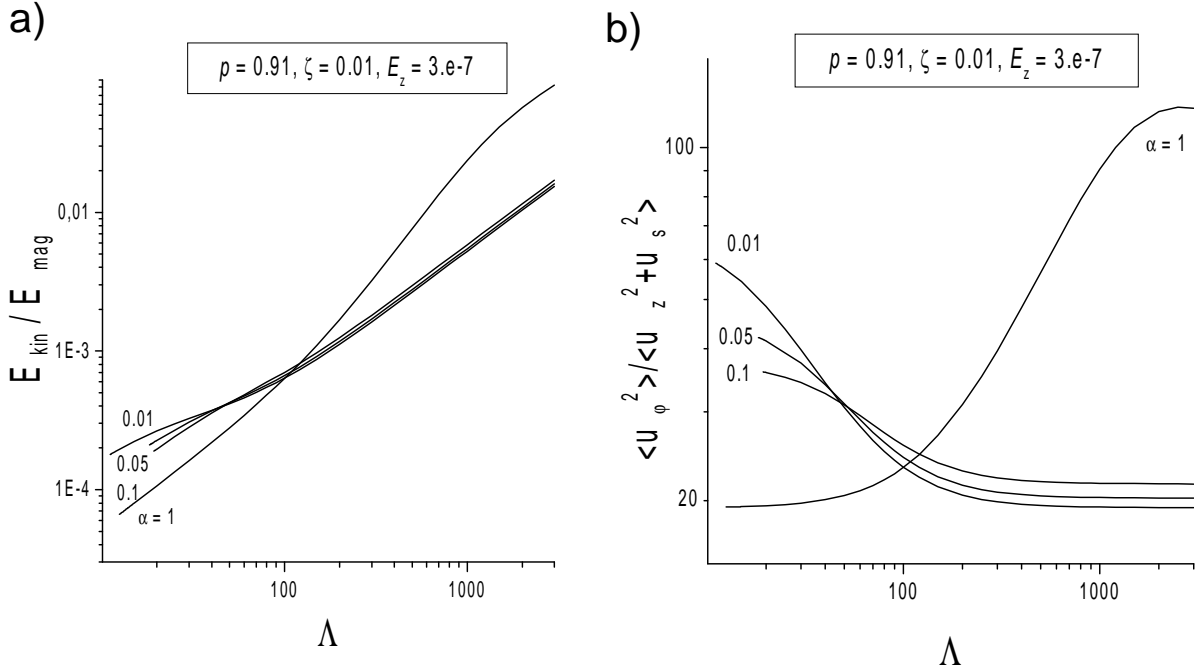


Obr. 26: Podiel ustrednených azimutálnych kinetickej a magnetickej energie nestabilití v závislostiach na Ekmanovom čísle E_z a Elsasserovom čísle Λ pri rôznych hodnotách anizotropného koeficientu $\alpha > 1$. Minimálne Λ na krivkách na pravom obrázku sú nástupové hodnoty vznikajúcich periodických nestabilití.

(menších hodnotách Λ) a s menšími frekvenciami, ktoré sú realistickejšie pre vysvetlenie dekadických variácií geomagnetického poľa.

Druhá časť numerických výsledkov začína obrázkom 25, ktorý pozostáva z dvoch grafov, vyjadrujúcich závislosť podielu azimutálnej a meridionálnej kinetickej energie $\langle u_\varphi^2 \rangle / \langle u_s^2 + u_z^2 \rangle$ na Ekmanovom čísle E_z (25a) pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $\Lambda = 10$, resp. na Elsasserovom čísle Λ (25b) pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Rôzne krivky odpovedajú rôznym prípadom So anizotropie (rôzne hodnoty parametra anizotropie α). Na grafe 25a môžeme vidieť, že azimutálna kinetická energia dominuje nad meridionálnou a táto dominancia je pre väčšiu anizotropiu výraznejšia. Podiel týchto dvoch kinetických energií s nárastom Ekmanovho čísla E_z klesá až pri väčších hodnotách E_z ; pri menších hodnotách je tento podiel skoro konštantný vzhľadom na E_z . Aj druhý graf 25b ukazuje, že azimutálna kinetická energia dominuje nad meridionálnou pre celý uvažovaný interval hodnôt Λ . Všetky tri krivky na tomto grafe majú podobný tvar, t.j. pri určitej hodnote Λ sa dosahuje lokálne maximum, v ktorom je azimutálna kinetická energia voči meridionálnej najväčšia. Poloha tohto maxima je pre rôzne prípady So anizotropie rôzna.

Ďalší obrázok 26 znázorňuje podiel ustrednených azimutálnej kinetickej a magnetickej energie v závislosti na Ekmanovom čísle E_z a Elsasserovom čísle Λ pre rôzne hodnoty koeficientu anizotropie α . Z prvého grafu 26a vidieť, že pre všetky $\alpha > 1$ logaritmus tohto podielu sa pre malé hodnoty E_z správa ako lineárna funkcia od logaritmu E_z . Pre väčšie hodnoty sa táto „linearita“ porušuje. Magnetickej energii na celom uvažovanom intervale E_z dominuje. Podobnú dominanciu magnetickej energie môžeme vidieť aj na grafe 26b, ale tu už nemôžeme hovoriť o lineárnej závislosti na logaritme Elsasserovho čísla Λ . Nárastom Ekmanovho E_z aj Elsasserovho čísla Λ sa kinetická energia postupne vyrovnáva magnetickej. Pri menších hodnotách E_z a Λ dominuje magnetickej energii, tak



Obr. 27: Podiel ustrednených azimutálnych kinetickej a magnetickej energie nestabilití v závislostiach na Ekmanovom čísle E_z a Elsasserovom čísle Λ pri rôznych hodnotách anizotropného koeficientu $\alpha < 1$. Minimálne Λ na krivkách na pravom obrázku sú nástupové hodnoty vznikajúcich periodických nestabilití.

ako je to typické pre nestability typu MAC vln v zemskom jadre, zatiaľčo pri väčších E_z a Λ sa dosahuje približná ekvipartičnosť kinetickej a magnetickej energie tak, ako je to typické pre Alfvénove vlny. Anizotropia typu *So* výrazne neovplyvňuje tieto závislosti.

Posledný obrázok 27 opisuje závislosti podielu ustrednených azimutálnej kinetickej a magnetickej energie $\langle E_{kin} \rangle / \langle E_{mag} \rangle$ a podielu azimutálnej a meridionálnej kinetickej energie $\langle u_\varphi^2 \rangle / \langle u_s^2 + u_z^2 \rangle$ na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Na rozdiel od predchádzajúcich obrázkov, tu skúmame vplyv anizotropie atmosférického typu ($\alpha < 1$). Pretože platí už spomínaná podmienka, že periodická nestabilita existuje len pre hodnoty koeficientu anizotropie $\alpha < \zeta$ (kde $\zeta = \eta / \kappa_{zz} = q_z^{-1}$, čo je obrátená hodnota Robertsovo čísla), zvolili sme hodnotu ζ veľmi malú, t.j. $\zeta = 0,01$. Z grafu 27a vidíme, že aj pri tomto type anizotropie dominuje magnetická energia nad kineticou a nárastom Elsasserovho čísla Λ sa kinetická energia vyrovnáva magnetickej. Ďalej je vidieť kvalitatívny rozdiel medzi izotropným prípadom $\alpha = 1$ a anizotropnými prípadmi $\alpha < 1$, u ktorých podiel energií je veľmi slabo citlivý na koeficiente anizotropie α . Krivky na grafe 27b ukazujú, že azimutálna kinetická energia dominuje nad meridionálnou kinetickou energiou. Na tomto grafe je rozdiel medzi izotropným prípadom a anizotropnými prípadmi ešte výraznejší. V izotropnom prípade podiel $\langle u_\varphi^2 \rangle / \langle u_s^2 + u_z^2 \rangle$ s nárastom Λ narastá, zatiaľ čo pri anizotropných prípadoch klesá. V oboch prípadoch až pri veľkých hodnotách $\Lambda \gtrsim O(1000)$ dosiahne kvázikonštantnú hodnotu ~ 20 , resp. ~ 100 v anizotropných, resp. v izotropnom prípade.

7.5 Závěry – model II

Lineárnou stabilitnou analýzou bol skúmaný vplyv anizotropie difúzných koeficientov na model rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve, preniknutej základným homogénnym vertikálnym magnetickým poľom.

Stacionárna a nestacionárna konvekcia. Rovnako, ako v prípade modelu I, bol systém riešený v cylindrickej súradnicovej sústave. Skúmali sa osovovesymetrické, resp. osovonesymetrické nestability, ktoré boli buď časovo nezávislé (stacionárna konvekcia), alebo časovo závislé (overstabilita). Uvažované boli dva typy anizotropie viskozity a tepelnej difuzivity; So stratifikačná anizotropia oceánskeho typu a Sa stratifikačná anizotropia atmosférického typu. V prípade stacionárnej konvekcie platí (obr. 21), že oproti izotropnému prípadu Sa anizotropia destabilizuje vrstvu (zmenšuje kritické Rayleighove číslo R_c) a zmenšuje radiálny rozmer konvektívnych buniek (zväčšuje kritické radiálne vlnové číslo k_c). So anizotropia má presne opačný účinok na stacionárnu konvekciu, teda stabilizuje vrstvu a zväčšuje radiálny rozmer konvekcie.

Nestacionárna konvekcia nemôže existovať pre $\alpha < \zeta$, čo vylučuje prípad silnej Sa anizotropie, kde $\zeta = \eta/\kappa_{zz}$ je obrátená hodnota Robertsovho čísla. So anizotropia zväčšuje radiálny rozmer aj nestacionárnej konvekcie a ovplyvňuje aj kritické Rayleighove číslo, ale stabilizujúci, resp. destabilizujúci účinok závisí aj od hodnoty Elsasserovho čísla Λ (obr. 23).

Inerciálne módy a magnetokonvekcia. V tomto modeli bol vyšetrovaný aj vplyv anizotropie na fyzikálne veličiny, definované pomermi amplitúd jednotlivých porúch, ktoré sme využili pri niektorých energetických úvahách. Napríklad, ako sa dodávaná energia rozdelí medzi kinetickú a magnetickú a v akom pomere sú kinetické energie v azimutálnom a meridionálnom smere. Azimutálna kinetická energia za každých okolností dominuje nad meridionálnou. Pri menších hodnotách Ekmanovho a Elsasserovho čísla magnetická energia výrazne dominuje nad kinetickou, ako je to typické pre nestability typu MAC vln v zemskom jadre, zatiaľ čo pri väčších hodnotách E_z a Λ sa dosahuje približná ekvipartičnosť kinetickej a magnetickej energie tak, ako je to typické pre Alfvénove vlny. Aj tak nestability nie sú MAC módy, ktoré podobne ako Alfvénove vlny sa šíria v smere magnetického poľa. Sa aj So anizotropia za určitých okolností výrazne ovplyvňujú oba vyšetrované pomery energií, pričom ale nezmenia dominanciu magnetickej resp. azimutálnej kinetickej energie (obr. 25 a 26).

Dominancia magnetickej nad kinetickou energiou osovovesymetrických nestabilití indikuje to, čo sa dalo čakať. Nestability sú tepelnou konvekciou na pozadí magnetického poľa a rotácie systému, a nie Alfvénove vlny, s ktorými sú spájané torzné oscilácie v zemskom jadre, založené na „elasticite“ jadra od radiálneho magnetického poľa. Z kinematického hľadiska však tieto nestability majú charakter torzných oscilácií. Takže máme aspoň indikáciu pre možný záver. Vybudená tepelná konvekcia, ktorej vlastnosti sú výrazne ovplyvnené vertikálnym magnetickým poľom, poľom v smere rotačnej osi, môže byť v rezonancii s vlastnými kmitmi rotujúceho systému. Pozoruhodné pritom je, že nástup tejto konvekcie je možný len od istých hodnôt magnetického poľa (pozri nástupové Λ_o na obr. 22-24), citlivých od iných parametrov systému, napr. α - anizotropného parametra.

Horizontálne rolky, osovovesymetrické a osovonesymetrické nestability. Na záver treba pripomenúť, že v študovanom modeli sme rozlíšili nestability v kartézskej a cylindrickej geometrii. V kartézskej geometrii študované rolky v horizontálnej vrstve kvapaliny poskytli očakávaný výsledok. Vznikajúce nestability citlivo závisia od anizotropie difúzných koeficientov. Na lineárnej úrovni stabilitej analýzy nevieme rozhodnúť, či rolky sú preferované pred nestabilitami iných tvarov, napr. s bunkami konvekcie štvorcovej alebo šesťuholníkovej základne. Posledne spomínané prípady s dvomi na seba kolmými rolkami, resp. s tromi rolkami zvierajúcimi $120^\circ (= 360^\circ/3)$ sme neštudovali. V prípade jediného systému roliek je zrejmé, že ich orientácia v horizontálnej vrstve je ľubovoľná, t.j. pri každom smere roliek je konvekcia budená pri rovnakom kritickom R_c .

V cylindrickej geometrii sme rozlíšili osovovesymetrické a osovonesymetrické nestability,

t.j. s $m = 0$ a $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Pre všetky m sme dostali rovnaké hodnoty kritických čísel, teda aj R_c , a to ešte s rovnakými hodnotami, ako pre rolky v kartézskej geometrii.

Je zrejmé, že z lineárnej stabilitnej analýzy nevieme rozhodnúť, či osovosymetrické nestability sú preferované. Avšak ich dominanciu nad osovonesymetrickými nestabilitami nemôžeme vylúčiť. V každom prípade zaujímavý výsledok, spájajúci naše nestability s $m = 0$ s torznými osciláciami v zemskom jadre treba brať opatrne, pokiaľ v študovanom modeli neuvážime nelinearity, napr. aspoň v slabo nelineárnej analýze.

8 Model III

8.1 Model s homogénnym horizontálnym magnetickým poľom

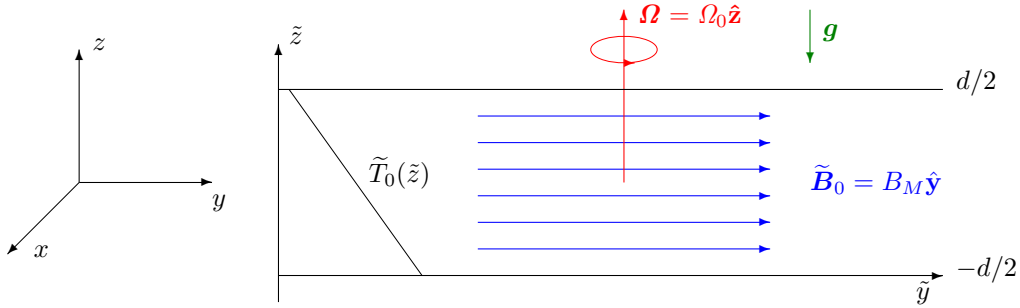
V tomto modeli je vyšetrovaná lineárna stabilita nekonečnej horizontálnej rovinnej vrstvy vodivej nestlačiteľnej kvapaliny hrúbky d . Vrstva je preniknutá homogénnym horizontálnym magnetickým poľom $\widetilde{\mathbf{B}}_0$ v smere osi y . Vrstva rotuje okolo osi vo vertikálnom smere z , gravitačné pole \mathbf{g} je v smere $-z$ a vrstva je zohrievaná zospodu a chladená zvrchu, pričom je udržiavaný lineárny teplotný profil T_0 .

8.2 Základné rovnice

Uvažujeme teda základný stav systému (rotujúci uhlovou rýchlosťou, $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{\mathbf{z}}$)

$$\widetilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{0}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}_0 = B_M \hat{\mathbf{y}}, \quad \widetilde{T}_0 = T_l - \Delta T \frac{\tilde{z} + d/2}{d}, \quad (68)$$

kde $\hat{\mathbf{y}}$ a $\hat{\mathbf{z}}$ sú jednotkové vektory v smeroch y a z . T_l je základná teplota na spodku vrstvy $\tilde{z} = -d/2$ a ΔT je základný teplotný rozdiel medzi spodkom a vrchom vrstvy. Stabilitu systému študujeme naložením porúch rýchlostného poľa $\tilde{\mathbf{u}}$, magnetického poľa $\tilde{\mathbf{b}}$ a teploty ϑ na systém základných rovníc. Tento systém je pre neznáme poruchy prerobený



Obr. 28: Model rotujúcej magnetokonvekcie s homogénnym horizontálnym základným magnetickým poľom v nekonečnej horizontálnej nestabilne stratifikovanej vrstve s vertikálnym teplotným profilom $\widetilde{T}_0(\tilde{z})$.

na bezrozmerný a linearizovaný tvar

$$R_o \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda (\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{y}} + R \vartheta \hat{\mathbf{z}} + E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}, \quad (69)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{y}}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (70)$$

$$\frac{1}{q_z} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \vartheta, \quad (71)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (72)$$

$$\text{a} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (73)$$

Na prvý pohľad môžeme vidieť v (69) a (71), že Laplaceov operátor ∇^2 je nahradený anizotropným Laplaceovým operátorom ∇_α^2 ; pozri (74–76). Prvá rovnica (69) je pohybová

Navier-Stokesova rovnica, ktorá opisuje časový vývin poruchového rýchlostného poľa \mathbf{u} . Druhá rovnica (70), opisujúca časový vývin poruchového magnetického poľa \mathbf{b} , je indukčná rovnica. Ďalšia rovnica (71), rovnica vedenia tepla, opisuje vývin poruchového teplotného poľa ϑ v čase. Posledné dve rovnice vyjadrujú solenoidálnosť rýchlostného a magnetického poľa. V Navier-Stokesovej rovnici uvažujeme dva rôzne tvary posledného členu $E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}$, opisujúceho viskózne sily, keďže uvažujeme dva typy anizotropie. V prípade stratifikačnej anizotropie (SA) má viskóznny člen tvar

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = E_z [(1 - \alpha_\nu) \partial_{zz}^2 + \alpha_\nu \nabla^2] \mathbf{u}, \quad (74)$$

a v prípade anizotropie podľa Braginského a Meytlisa (BM) je viskóznny člen nasledujúceho tvaru

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = E_z [(\alpha_\nu - 1) \partial_{xx}^2 + \nabla^2] \mathbf{u}. \quad (75)$$

Okrem anizotropného koeficientu viskozity uvažujeme tiež anizotropiu tepelnej difuzivity. V rovnici vedenia tepla preto tiež uvažujeme dva tvary difúzneho členu $\nabla_\alpha^2 \vartheta$. V prípade anizotropie SA , resp. BM sú tvary tohto členu nasledovné

$$\nabla_\alpha^2 \vartheta = [(1 - \alpha_\vartheta) \partial_{zz}^2 + \alpha_\vartheta \nabla^2] \vartheta \quad \text{a} \quad \nabla_\alpha^2 \vartheta = [(\alpha_\vartheta - 1) \partial_{xx}^2 + \nabla^2] \vartheta. \quad (76)$$

Veľmi ľahko v oboch prípadoch overíme, že položením anizotropných parametrov α_ν a α_ϑ jednotke (teda uvažovaním izotropného prípadu $\alpha = \alpha_\nu = \alpha_\vartheta = 1$) sa difúzne členy v rovniciach (69, 71) zmenia na bežne používané tvary $E \nabla^2 \mathbf{u}$, resp. $\nabla^2 \vartheta$. Čím viac sa α odlišuje od jednotky, tým väčšia je anizotropia. Bezrozmerné čísla v rovniciach sú rovnaké, ako v predchádzajúcich modeloch I a II, a teda zhodné s (16) vo všeobecnej kapitole 3. Kvôli anizotropii viskozity a tepelnej difuzivity máme opäť dve Ekmanove čísla a dve Robertsove čísla, pričom v rovniciach sa explicitne objavujú len bezrozmerné čísla, definované pomocou difúzných koeficientov vo vertikálnom smere z . Kvôli pohodlnému čítaniu je rozumné ešte raz zopakovať definície týchto čísel¹⁴

$$R_o = \frac{\eta}{2\Omega_0 d^2}, \quad \Lambda = \frac{B_M^2}{2\Omega_0 \rho_l \mu \eta}, \quad E_z = \frac{\nu_{zz}}{2\Omega_0 d^2}, \quad R = \frac{\alpha_T g \Delta T d}{2\Omega_0 \kappa_{zz}}, \quad q_z = \frac{\kappa_{zz}}{\eta}, \quad \alpha = \frac{\nu_{xx}}{\nu_{zz}} = \frac{\kappa_{xx}}{\kappa_{zz}}, \quad (77)$$

kde opakovaný zápis α je kvôli uvedeniu kompletnej sady bezrozmerných čísel, s ktorými budeme riešiť formulovaný problém. Pre úplnosť ešte uvedieme aj druhé Ekmanove číslo $E_x = \nu_{xx}/2\Omega_0 d^2$ a druhé Robertsove číslo $q_x = \kappa_{xx}/\eta$ (v predchádzajúcich modeloch I a II to boli čísla $E_s = \nu_{ss}/2\Omega_0 d^2$ a $q_s = \kappa_{ss}/\eta$).

Je tiež užitočné zaviesť päť ďalších bezrozmerných čísel

$$\zeta = \frac{\eta}{\kappa_{zz}} = q_z^{-1}, \quad p = \frac{\eta}{\nu_{zz}} = \frac{R_o}{E_z}, \quad Q = \frac{\Lambda}{E_z}, \quad T_a = E_z^{-2}, \quad R_a = \frac{R}{E_z}, \quad (78)$$

kde ζ a p sú dve Prandtlove čísla, bezrozmerné pomery difuzivít, ζ – obrátené Robertsove a p – obrátené magnetické Prandtlove číslo¹⁵. Ďalšie tri čísla, Q – Chandrasekharove, T_a – Taylorove a R_a – klasické Rayleighove číslo sú užitočné pre porovnanie odpovedajúcich výrazov tu a v [13, 18, 19].

¹⁴Modifikované Rayleighove číslo R , ktoré je mierou efektívnej vztlakovej sily vzhľadom ku Coriolisovej sile, je aj v tomto modeli definované pomocou κ_{zz} - vertikálnej zložky koeficientu tepelnej difuzivity.

¹⁵Symbol p použijeme pre jedno často používané bezrozmerné číslo $p = p_z$, pretože tlak už nebudeme uvažovať.

8.3 Metóda riešenia

Ďalší postup je v rozložení porúch rýchlostného \mathbf{u} a magnetického poľa \mathbf{b} na poloidálnu a toroidálnu časť (pre porovnanie pozri (28) a (44))

$$\mathbf{u} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times w\hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \omega\hat{\mathbf{z}}] \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times b\hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times j\hat{\mathbf{z}}]. \quad (79)$$

Všetky poruchy (w, ω, b, j a ϑ) majú tvar

$$f(x, y, z, t) = \Re e [F(z) \exp(ilx + imy) \exp(\lambda t)], \quad (80)$$

kde horizontálne zložky vlnového čísla l a m určujú $a^2 = l^2 + m^2$. Odmocnina a^2 je horizontálne vlnové číslo a a $\lambda = i\sigma$ je komplexná frekvencia. Ďalej aplikujeme na Navier-Stokesovu rovnicu operátor rotácie a dvojitej rotácie. To isté spravíme s indukčnou rovnicou a po dosadení porúch (w, ω, b, j a ϑ) do týchto rovníc a do rovnice vedenia tepla a uvážením $\hat{\mathbf{z}}$ -zložiek dostaneme nasledujúci systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $F(z) = W(z), \Omega(z), B(z), J(z)$ a $\Theta(z)$

$$[E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] \Omega + DW + im\Lambda J = 0, \quad (81)$$

$$(D^2 - a^2) [E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] W - D\Omega + im\Lambda(D^2 - a^2)B = a^2 R\Theta, \quad (82)$$

$$(D^2 - a^2 - \lambda)J + im\Omega = 0, \quad (83)$$

$$(D^2 - a^2 - \lambda)B + imW = 0, \quad (84)$$

$$(\mathcal{D}_\alpha - \zeta\lambda)\Theta + W = 0, \quad (85)$$

kde $D = d/dz$ a operátor \mathcal{D}_α má dva rôzne tvary, a to

$$\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha l^2 - m^2 \quad \text{a} \quad \mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha l^2 - \alpha m^2 = D^2 - \alpha a^2 \quad (86)$$

v prípade BM , resp. SA anizotropie. Pritom u SA je zachovaná, zatiaľčo u BM narušená horizontálna izotropia. Z týchto piatich rovníc (81–85) postupne eliminujeme 4 neznáme funkcie až na funkciu W a dostaneme obyčajnú diferenciálnu rovnicu 12-eho rádu pre W v nasledujúcom tvare

$$\begin{aligned} & \left[(\mathcal{D}_\alpha - \zeta\lambda) \left((D^2 - a^2) \left\{ \mathcal{D}_\lambda (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) + Qm^2 \right\}^2 + T_a \mathcal{D}_\lambda^2 D^2 \right) + \right. \\ & \left. + a^2 R_a \mathcal{D}_\lambda \left\{ \mathcal{D}_\lambda (\mathcal{D}_\alpha - p\lambda) + Qm^2 \right\} \right] W = 0, \end{aligned} \quad (87)$$

kde $\mathcal{D}_\lambda = D^2 - a^2 - \lambda$ a kde systém bezrozmerných parametrov (77) bol nahradený systémom (78).

Pre priame porovnanie s [13] a [18, 19] zavedieme tiež substitúcie

$$\tilde{l} = \frac{l^2}{\pi^2}, \quad \tilde{m} = \frac{m^2}{\pi^2}, \quad \sigma_1 = -\frac{i\lambda}{\pi^2}, \quad T_1 = \frac{T_a}{\pi^4}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\pi^2} \quad \text{a} \quad R_1 = \frac{R_a}{\pi^4}. \quad (88)$$

Ak uvažujeme najjednoduchšie hraničné podmienky pre $z = -1/2, 1/2$, (v [37] sú pomenované *illustrative conditions*), t.j. hranice sú mechanicky voľné a elektricky a tepelne dokonale vodivé,

$$W = D^2 W = D\Omega = \Theta = B = DJ = 0,$$

potom vďaka riešeniu $W = W_0 \cos(\pi z)$ môžeme operátory v (87) nahradiť jednoduchými algebraickými výrazmi. Nakoniec zavedením pomocných premenných

$$\tilde{a} = \tilde{l} + \tilde{m}, \quad A = 1 + \tilde{a} \quad (89)$$

$$\text{a} \quad A_\alpha = \begin{cases} 1 + \alpha\tilde{l} + \tilde{m} \\ 1 + \alpha\tilde{a} \end{cases} \quad \text{v prípade} \quad \begin{matrix} BM \\ SA \end{matrix} \quad \text{anizotropie,} \quad (90)$$

dostaneme disperzný vzťah pre Rayleighove číslo R_1 v tvare

$$\begin{aligned} (A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \left\{ A[(A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{m}]^2 + T_1(A + i\sigma_1)^2 \right\} = \\ = R_1(A - 1)(A + i\sigma_1) \left\{ (A + i\sigma_1)(A_\alpha + ip\sigma_1) + Q_1\tilde{m} \right\}. \end{aligned} \quad (91)$$

Disperzná rovnica (91) pre prípad horizontálneho základného magnetického poľa v smere y je analogická prípadu s vertikálnym magnetickým poľom v ([13], kap. V). Prechod na bezrozmerné parametre použité v [13, 18, 19] tu slúži pre porovnanie a overenie zložitých výrazov, ale v nasledujúcom texte sú numerické výsledky prezentované v priestore parametrov (77) – R , E_z , Λ , q_z (alebo $\zeta = 1/q_z$), p ($= R_o/E_z$) a α [60, 59].

Rovnica, analogická rovnici (91), vo „vhodnejšom“ priestore parametrov, má tvar

$$Ra^2 \frac{q_z(K^2 + \lambda)}{(q_z K_\alpha^2 + \lambda)} = \frac{K^2[E_z(K^2 + \lambda)(K_\alpha^2 + p\lambda) + m^2\Lambda]^2 + \pi^2(K^2 + \lambda)^2}{E_z(K^2 + \lambda)(K_\alpha^2 + p\lambda) + m^2\Lambda}, \quad (92)$$

kde použitím transformačných vzťahov (88–90)

$$K^2 = a^2 + \pi^2 \quad (93)$$

$$\text{a} \quad K_\alpha^2 = \begin{cases} \alpha l^2 + m^2 + \pi^2 \\ \alpha a^2 + \pi^2 \end{cases} \quad \text{v prípade} \quad \begin{matrix} BM \\ SA \end{matrix} \quad \text{anizotropie.} \quad (94)$$

Je zaujímavé vidieť peknú zhodu ľavej strany tejto disperznej rovnice s ľavou stranou rovnice (36) v modeli I, kde namiesto Robertsovo čísla q_z bola použitá jeho obrátená hodnota $\zeta = 1/q_z$ (často používaná v astrofyzike), a kde je samozrejme radiálne vlnové číslo k namiesto horizontálneho vlnového čísla a .

V posledných rokoch nastal výrazný pokrok v numerických simuláciách tepelnou konvekciou hnaných dynám. Tieto numerické modely sú riadené rovnakými bezrozmernými parametrami, ako tu skúmaný problém rotujúcej magnetokonvekcie. Dôležitou limitou pre tieto modely geodynamika je limita, pri ktorej sa zanedbáva inerciálny člen $\partial \mathbf{u} / \partial t$, pretože sa verí, že rýchle módy sú relatívne menej dôležité. Napriek tomu v častiach 8.5.3–8.5.5 s numerickými výsledkami pre nestacionárnu konvekciu sme uvážili aj $p \neq 0$. Základná disperzná rovnica v limitnom prípade $p = 0$, t.j. nulového inverzného magnetického Prandtlovo čísla $p = \eta/\nu_{zz}$ v priestore bezrozmerných parametrov (77) E_z , Λ , q_z a α má tvar

$$Ra^2 \frac{q_z(K^2 + \lambda)}{(q_z K_\alpha^2 + \lambda)} = \frac{K^2[E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda]^2 + \pi^2(K^2 + \lambda)^2}{E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda}. \quad (95)$$

Limita $p = 0$ súvisí s priblížením $\nu \gg \kappa \sim \eta$, pri ktorom Roberts a Jones [37] riešili izotropný problém, ale ktorá sa výrazne líši od limity $\nu \ll \eta$ ($p = \infty$), pri ktorej riešil podobný problém Eltayeb [18]. Zdôrazníme ešte, že v izotropnom prípade $\alpha = 1$ platí $K_\alpha^2 = K^2$, $q_z = q$, $E_z = E$, a podobne $A_\alpha = A$ a $\mathcal{D}_\alpha = D^2 - a^2$, čo je užitočné pre porovnanie výrazov (87–95) s odpovedajúcimi výrazmi v [13, 19, 37, 28]. Napr. rovnica (95) v limite $\alpha = 1$ je identická s (3.3) v [37].

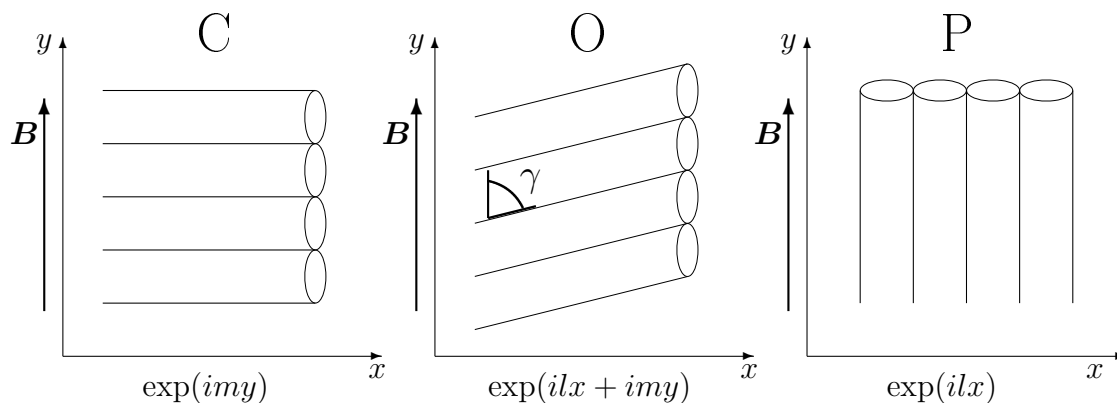
8.4 Módy konvekcie vo forme roliek

Hlavným cieľom lineárnej stabilitnej analýzy je vyšetriť nástup konvekcie, teda nájsť také základné vstupné parametre opisujúce systém a takú konfiguráciu nestability, ktorá sa

vybudí najľahšie. Ide teda opäť o hľadanie marginálnej konvekcie (viď začiatok podkapitoly 6.1). Nestabilita vznikne, ak Rayleighove číslo, ktoré je pomerom destabilizujúcich a stabilizujúcich síl, dosiahne určitú kritickú hodnotu. Úlohou je nájsť pri zadaných vstupných parametroch (Ekmanove číslo, Elsasserove číslo, Robertsove číslo) taký tvar poruchy (daný vlnovými číslami), ktorá vznikne pri najmenšom Rayleighovom čísle. Takéto Rayleighove číslo nazývame kritickým Rayleighovým číslom a označujeme ho R_c . Hľadanie R_c súvisí s procesom minimalizácie, ale najprv si zadefinujeme všetky vyšetřované módy konvekcie, ktoré súťažajú o preferenciu v priestore bezrozmerných parametrov (77). Vyšetřujeme nástup stacionárnej a nestacionárnej konvekcie, ktorá má tvar horizontálnych roliek a je jednoznačne popísaná dvoma zložkami l a m horizontálneho vlnového čísla. Pár l a m môže byť nahradený iným párom

$$a = (l^2 + m^2)^{1/2} \quad \text{a} \quad \gamma = \arctg(m/l), \quad (96)$$

kde veľkosť a horizontálneho vlnového čísla zjednodušene voláme horizontálne vlnové číslo a γ je uhol sklonu roliek vzhľadom na orientáciu základného magnetického poľa v smere osi y . Vďaka (80) vektor (l, m) určuje orientáciu konvektívnych roliek (rolky sú kolmé na vektor) a v prípade nestacionárnej konvekcie tento vektor určuje tiež smer šírenia vlny [56, 55]. V prípade, že vlnové číslo l je nulové, tak hovoríme o kolmých rolkách, lebo sú



Obr. 29: Rôzne orientácie konvektívnych horizontálnych roliek. Uhol $\gamma = \arctg(m/l)$ je uhol medzi osou roliek a magnetickým poľom \mathbf{B} . Pre rolky kolmé na magnetické pole platí $l = 0 \Rightarrow \gamma = \pi/2$ (C) a pre rolky rovnobežné s magnetickým poľom platí $m = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ (P).

orientované kolmo na základné magnetické pole (cross). Iný extrémny prípad je, keď vlnové číslo m je nulové, a takéto rolky nazývame rovnobežné (parallel). Ak sú obidve vlnové čísla nenulové, tak hovoríme o šikmých rolkách (oblique). Orientácia roliek je názorne zobrazená na obrázku 29. Preskúmať preferenciu znamená určiť, ktorá z týchto foriem konvekcie je preferovaná pre dané E_z , Λ , q_z a α ; pozri (77). Kombináciou troch možných orientácií roliek so stacionárnou (steady) a nestacionárnou (overstable) konvekciou definujeme 5 rôznych módov konvekcie. Používajúc označenia a názvy podľa Roberta a Jonesa [28, 37] ich pomenujeme P, SC, SO, OC a OO módy. Značenie je od anglických názvov parallel, steady cross, steady oblique, overstable cross a overstable oblique. P rolky nikdy nie sú nestacionárne [37].

8.4.1 Základné módy konvekcie v prípadoch SA a BM anizotropie

Rovnica (91) prejde pri $p = \eta/\nu_{zz} = R_o/E_z = 0$ na

$$\begin{aligned} (A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \left\{ A [(A + i\sigma_1)A_\alpha + Q_1\tilde{m}]^2 + T_1(A + i\sigma_1)^2 \right\} = \\ = R_1(A - 1)(A + i\sigma_1) \left\{ (A + i\sigma_1)A_\alpha + Q_1\tilde{m} \right\}. \end{aligned} \quad (97)$$

Prejdeme teraz na značenie v [37], teda $K^2 = \pi^2 A$, $a^2 = \pi^2(A - 1)$. Ďalej využijeme, že $E_z^{-2} = T_a = \pi^4 T_1$, $\Lambda/E_z = Q = \pi^2 Q_1$ a $\tilde{m} = m^2/\pi^2$. Vynásobením (97) s E_z^2 máme

$$\begin{aligned} (A_\alpha + i\zeta\sigma_1) \left\{ A [E_z(A + i\sigma_1)A_\alpha + \pi^{-4}\Lambda m^2]^2 + \pi^{-4}(A + i\sigma_1)^2 \right\} = \\ = \pi^{-4} R a^2 \pi^{-2} (A + i\sigma_1) \left\{ (A + i\sigma_1)A_\alpha E_z + \pi^{-4}\Lambda m^2 \right\} \end{aligned} \quad (98)$$

a ďalším vynásobením s π^{12} a ešte s q_z (miesto ζ) a $\lambda = i\sigma$ máme

$$\begin{aligned} (q_z K_\alpha^2 + \lambda) \left\{ K^2 [E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + \Lambda m^2]^2 + \pi^2(K^2 + \lambda)^2 \right\} = \\ = R a^2 q_z (K^2 + \lambda) \left\{ E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + \Lambda m^2 \right\}, \end{aligned} \quad (99)$$

čo je iným vyjadrením (95). Vzťah (99) je anizotropným zovšeobecnením izotropného prípadu $\alpha = 1$ z [37]. V zložitej algebre bolo užitočné využiť sprehľadňujúce prístupy [37] spojené so zavedením nových premenných

$$\phi = \frac{\Lambda m^2}{\pi K}, \quad y = \frac{\sigma}{K^2}, \quad y_\alpha = \frac{\sigma}{K_\alpha^2} \quad \text{a} \quad c_\alpha = \frac{E_z K K_\alpha^2}{\pi}, \quad (100)$$

ktoré umožnili disperznú rovnicu (99) vyjadriť ako

$$q_z x(1 + iy)\lambda \{c_\alpha(1 + iy) + \phi\} = (q_z + iy_\alpha)c_\alpha \{[c_\alpha(1 + iy) + \phi]^2 + (1 + iy)^2\}. \quad (101)$$

Pritom anizotropné zovšeobecnenie si vyžiadalo zdefinovať y_α a c_α navyše ku y a c .

V stacionárnom prípade pri $\lambda = 0$, $x^s = x$ a $R^s = R$ vzťahy (98–101) pre Rayleighove číslo sú

$$\begin{aligned} x^s = c_\alpha \left(c_\alpha + \phi + \frac{1}{c_\alpha + \phi} \right); \\ R^s = \frac{\pi(\pi^2 + a^2)_\alpha^{3/2}}{a^2} \left(C_\alpha + \frac{1}{C_\alpha} \right), \quad \text{kde} \quad C_\alpha = c_\alpha + \phi = \frac{E_z K^2 K_\alpha^2 + \Lambda m^2}{\pi K} \end{aligned} \quad (102)$$

a symbol $(\pi^2 + a^2)_\alpha^{3/2} \equiv \begin{cases} (\pi^2 + a^2)^{1/2}(\pi^2 + \alpha a^2) \\ (\pi^2 + a^2)^{1/2}(\pi^2 + \alpha l^2 + m^2) \end{cases}$ v prípade $\begin{matrix} SA \\ BM \end{matrix}$ anizotropie.

Tvar (101) disperznej rovnice sa ukázal ako veľmi užitočný pri štúdiu (analytickými, asymptotickými metódami) vlastností zložitejších nestacionárnych módov. V nasledujúcej podkapitole 8.5 sa týmto vlastnostiam venujeme numerickými metódami. Mnohé detaily štúdia nestacionárnych OC a OO módov asymptotickými metódami sú prezentované u ďalšieho modelu IV s ležatou rotačnou osou, a to hlavne v podkapitolách 9.3 a 9.4.

8.4.2 Určenie hraníc medzi módmami P, SC a SO

Sústredíme sa hlavne na SA anizotropiu. Potom

$$R^s = \frac{\pi(\pi^2 + a^2)^{1/2}(\pi^2 + \alpha a^2)}{a^2} \left(C_\alpha + \frac{1}{C_\alpha} \right). \quad (103)$$

Z podmienok

$$\frac{\partial R^s}{\partial C_\alpha} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial R^s}{\partial a^2} = 0$$

máme kritické C_α a a^2 , teda

$$C_c = 1 \quad \text{a} \quad a_c^2 = \pi^2 \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha}}{2\alpha} = \pi^2 2_\alpha. \quad (104)$$

Ďalej $K_c^2 = a_c^2 + \pi^2 = (2_\alpha + 1)\pi^2 = 3_\alpha\pi^2$ a $K_{\alpha c}^2 = \pi^2 + \alpha a_c^2 = \pi^2 + \alpha\pi^2 2_\alpha = \pi^2(1 + \alpha 2_\alpha)$. Z rovníc (102–104) pre zložky kritického horizontálneho vlnového čísla máme

$$m_c^2 = \frac{\sqrt{3_\alpha}\pi^2 - 9_\alpha\pi^4 E_z}{\Lambda}, \quad l_c^2 = 2_\alpha\pi^2 - m_c^2, \quad (105)$$

pričom¹⁶ $2_\alpha = (1 + \sqrt{1 + 8\alpha})/2\alpha$, $3_\alpha = 2_\alpha + 1$ a $9_\alpha = 3_\alpha(1 + \alpha 2_\alpha)$.

Hranica SO/P je určená podmienkou $m = 0$. Z rovnice (105) máme

$$E^* = \frac{\sqrt{3_\alpha}}{9_\alpha} \pi^{-2} = \frac{\pi^{-2}}{\sqrt{3_\alpha}(1 + \alpha 2_\alpha)}, \quad (106)$$

z čoho okamžite vidieť, že v izotropnom prípade $E^* \doteq 1,95 \cdot 10^{-2}$ v súlade s [37] a ΛE_z režimovým diagramom na grafe 30a. Po dosadení pomocných premenných 2_α , 3_α a 9_α dostávame predpis pre SO/P hranicu v tvare

$$E = E^* = \pi^{-2} \left\{ \left[\frac{2\alpha + 1 + \sqrt{8\alpha + 1}}{2\alpha} \right]^{1/2} (3 + \sqrt{8\alpha + 1}) \frac{1}{2} \right\}^{-1} = \frac{2(2\alpha)^{1/2}}{\pi^2} \left\{ (2\alpha + 1 + \sqrt{8\alpha + 1})^{1/2} (3 + \sqrt{8\alpha + 1}) \right\}^{-1} = E^*(\alpha), \quad (107)$$

teda v závislosti na anizotropnom parametri α , čo vystihuje vertikály $E = E^*$, teda hranice SO/P na grafe 30a pre $\alpha = 0,5, 1$ a 2 . Dva limitné prípady majú nasledujúci tvar

$$E^*|_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi^2} = O(\alpha^{1/2}), \quad E^*|_{\alpha \rightarrow \infty} = \frac{(2\alpha)^{-1/2}}{\pi^2} \rightarrow 0 \quad (108)$$

a naznačujú, ako extrémne prípady anizotropie $\alpha \rightarrow 0$ a $\alpha \rightarrow \infty$ môžu dramaticky meniť charakter konvekcie. Pozri numerické výsledky v časti 8.5.2.

Hranica SC/SO je určená podmienkou $l = 0$. Z rovnice (105) dostávame

$$2_\alpha\pi^2 = m^2 = \frac{9_\alpha\pi^4}{\Lambda} (E^* - E) \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{\sqrt{3_\alpha}}{2_\alpha} \left(1 - \frac{E}{E^*} \right).$$

¹⁶Tu a v ďalšom texte zavádzame nezvyčajné označenie nových parametrov 2_α , 3_α a 9_α , závislých na anizotropnom parametri α . Dôvodom je sprehľadniť zložitejšie výrazy závislé na α tak, aby na prvý pohľad bolo vidieť, aké hodnoty majú tieto parametre v izotropnom prípade $\alpha = 1$, t.j. $2_\alpha|_{\alpha=1} = 2$, $3_\alpha|_{\alpha=1} = 3$ a $9_\alpha|_{\alpha=1} = 9$.

Teda matematický predpis pre hranicu SC/SO má tvar

$$\Lambda = \Lambda^* \left(1 - \frac{E}{E^*} \right), \quad (109)$$

kde Λ^* je funkciou len od α a je definovaná nasledovne

$$\Lambda^* = \frac{\sqrt{3\alpha}}{2\alpha} = (2\alpha)^{1/2} \frac{[2\alpha + 1 + \sqrt{8\alpha + 1}]^{1/2}}{1 + \sqrt{8\alpha + 1}}. \quad (110)$$

Vzťah (109) reprezentuje úsečky SC/SO na režimovom ΛE_z diagrame (obr. 30a) pre $\alpha = 0,5, 1$ a 2 . Dva limitné prípady tejto premennej majú nasledujúci tvar

$$\Lambda^*|_{\alpha \rightarrow 0} = \alpha^{1/2} \rightarrow 0, \quad \Lambda^*|_{\alpha \rightarrow \infty} = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{1/4} \rightarrow \infty \quad (111)$$

a opäť upozorňujú, aký význam má plánované štúdium extrémnych prípadov anizotropie.

Ku štúdiu hraníc medzi módmí v prípade BM anizotropie treba vychádzať (102) z nasledujúceho výrazu pre Rayleighove číslo

$$R^s = \frac{\pi(\pi^2 + a^2)^{1/2}(\pi^2 + \alpha l^2 + m^2)}{a^2} \left(C_\alpha + \frac{1}{C_\alpha} \right),$$

u ktorého na prvý pohľad vidieť dôsledok stratenej horizontálnej izotropie difúzných koeficientov. Pozri člen $\pi^2 + \alpha l^2 + m^2$, ktorý na rozdiel od SA anizotropie s členom $\pi^2 + \alpha a^2$ sa nedá vyjadriť cez a , ale len cez zložky l a m . Avšak stratená horizontálna izotropia difúzných koeficientov sa vo výraze pre Rayleighove číslo prejaví aj cez $C_\alpha = c_\alpha + \phi$, pretože podľa (94, 100) $c_\alpha = (E_z/\pi)(\pi^2 + a^2)(\pi^2 + \alpha l^2 + m^2)$.

Pre odpovedajúce zložitosti minimalizácie R^s v BM anizotropii a pri nemožnosti zvládnuť ju analyticky čitateľa odkazujeme na podkapitolu 8.5 Numerické prístupy a výsledky.

8.5 Numerické prístupy a výsledky

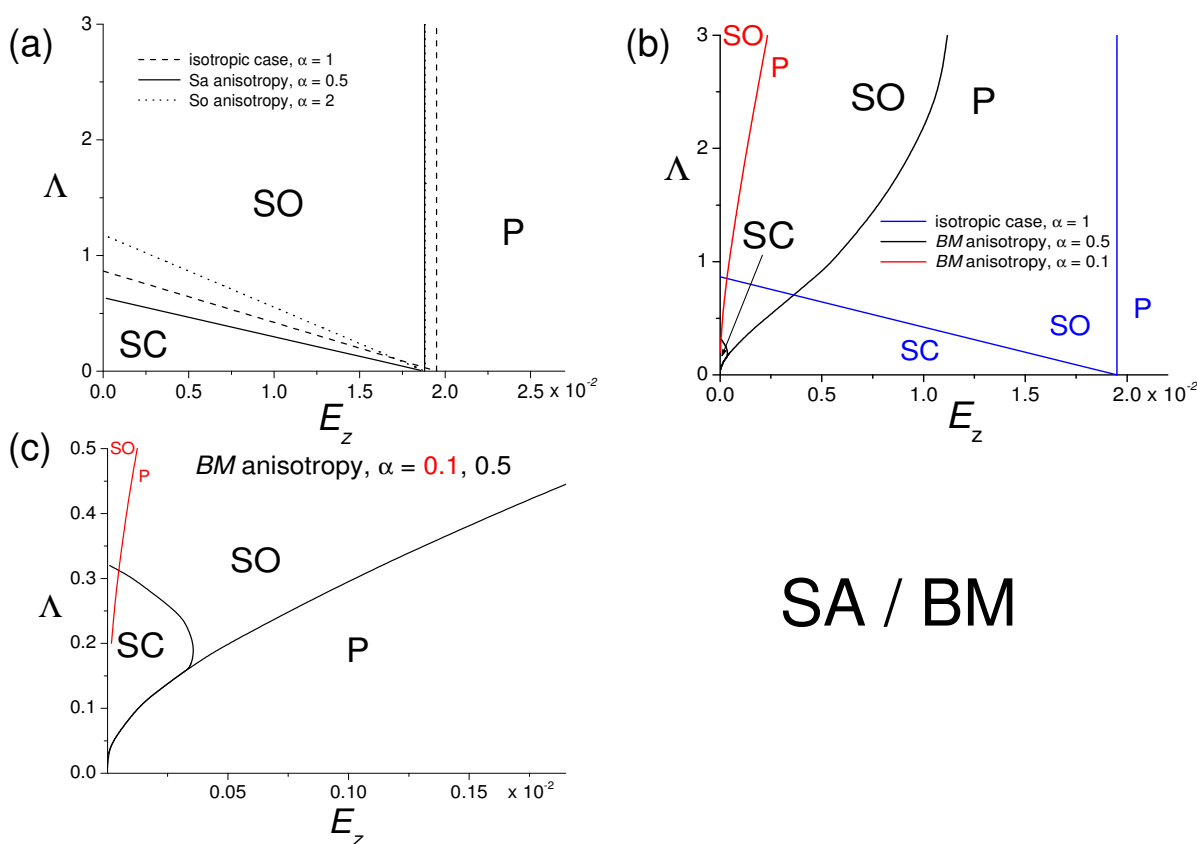
Proces minimalizácie bol robený veľmi jednoduchým, ale pre tento problém postačujúcim spôsobom. Fyzikálne dôležitá časť dvojrozmerného priestoru zložiek l a m vlnového vektora je pokrytá sieťou. Rayleighove číslo je počítané v každom bode siete a je nájdený bod s najmenším Rayleighovým číslom. Vhodne vybrané okolie tohoto bodu je pokryté novou sieťou s vyššou hustotou bodov a opäť sa hľadá bod s najmenším Rayleighovým číslom. Tento proces pokračuje, pokiaľ sa nedosiahne požadovaná presnosť; získané Rayleighove číslo je už kritické R_c s odpovedajúcimi kritickými zložkami horizontálneho vlnového vektora l_c a m_c . V prípade nestacionárnej konvekcie bol formálne použitý ten istý proces minimalizácie, ale v každom bode siete bola navyše počítaná frekvencia σ . Frekvencia σ je koreňom polynómu siedmeho stupňa, ktorý vznikol z podmienky $\Im m(R) = 0$, kde R korešponduje výrazu (92). Evidentný koreň $\sigma = 0$ súvisí so stacionárnou konvekciou. Ďalšie korene tejto rovnice, súvisiace s nestacionárnou konvekciou, pochádzajú z polynomiálnej rovnice tretieho stupňa pre neznámu σ^2 . V prípade viac ako jednej fyzikálne vhodnej frekvencie je kritická frekvencia odpovedajúca najmenšiemu Rayleighovému číslu, rovnako ako kritické l_c , m_c a R_c pre nestacionárne módy. Nakoniec sú porovnané kritické Rayleighove čísla pre stacionárnu a nestacionárnu frekvenciu kvôli určeniu preferovaného módu. Určenie orientácie preferovaného módu (vrátane P módov s $m = 0$ a SC a OC modov s $l = 0$) je súčasťou minimalizačného procesu.

8.5.1 Stacionárna konvekcia; ΛE_z diagram

Nasledujúce numerické výsledky (obr. 30) ukazujú vplyv anizotropie na rozloženie regiónov preferencie v ΛE_z rovine, kde tri oblasti sú označené podľa toho, aká orientácia roliek je v tejto oblasti preferovaná.

- P \Rightarrow Steady Parallel roll – stacionárne módy rovnobežných roliek sú preferované;
- SC \Rightarrow Steady Cross roll – stacionárne módy kolmých roliek sú preferované;
- SO \Rightarrow Steady Oblique roll – stacionárne módy šikmých roliek sú preferované.

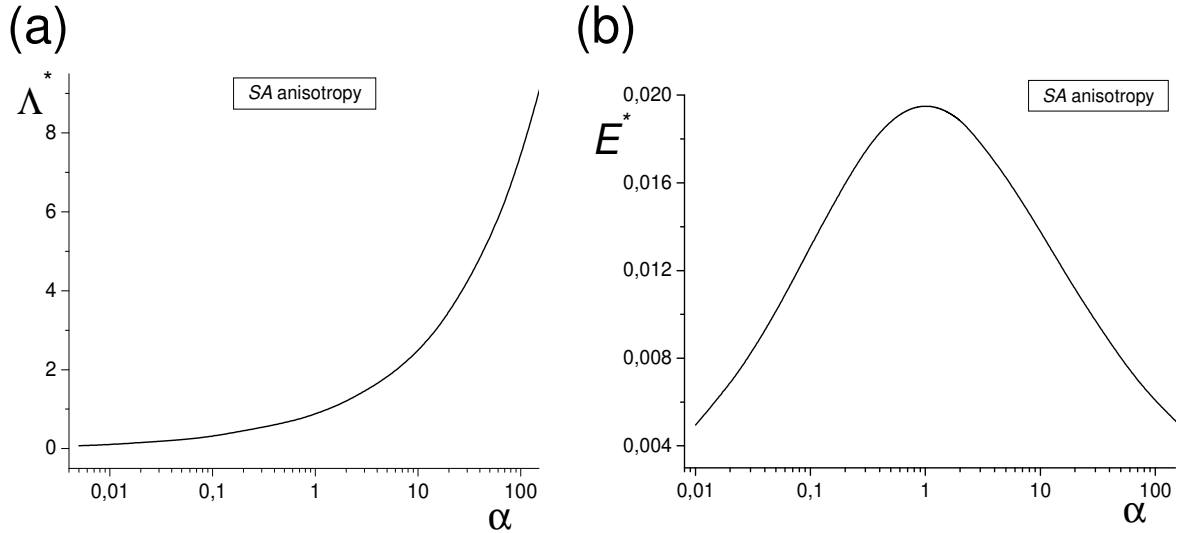
Jednotlivé diagramy 30abc vlastne reprezentujú funkciu $R_c = R_c(\Lambda; E_z)$, pričom krivky predstavujú rovnaké hodnoty R_c pre dvojice súperiacich módov SC, SO, a P. Napr. krivka SC/SO znamená hranicu preferencie v priestore parametrov Λ a E_z medzi módmi SC a SO. Graf 30a ukazuje vplyv anizotropie typu SA , t.j. Sa a So na tieto oblasti. Plné



Obr. 30: Režimový diagram stacionárnej konvekcie pre oba SA a BM typy anizotropie. Režimový diagram ukazuje oblasti s preferovaným typom konvekcie v ΛE_z -rovine.

a bodkované čiary znázorňujú hranice medzi jednotlivými oblasťami v anizotropných Sa a So prípadoch, teda pri $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 2$ a prerušované čiary platia pre izotropný prípad $\alpha = 1$.

Hranica medzi SO a P sa v oboch prípadoch silnejších Sa a So anizotropií posúva k menším hodnotám Ekmanovho čísla E_z , čo môžeme vidieť na obrázku 31 ako aj zo vzťahu (107), ktorý má lokálne maximum práve v izotropnom prípade $\alpha = 1$. V limitných prípadoch $\alpha \rightarrow 0$ a $\alpha \rightarrow \infty$ sa hranica SO/P (hodnota E^* v (107)) posúva k nule, čo sme ukázali analyticky v (108) a čo naznačuje aj obrázok 31. Hranica SC/SO medzi SC a SO je úsečka daná podľa (109) hodnotami E^* a Λ^* , pričom E^* a Λ^* sú hodnoty E_z pre $\Lambda = 0$



Obr. 31: Parametre Λ^* a E^* , určujúce hranice SO/P a SC/SO podľa vzťahov (107, 109), ako funkcie parametra anizotropie α .

a Λ pre $E_z = 0$. Závislosti $\Lambda^*(\alpha)$ a $E^*(\alpha)$ na obrázku 31, a to prvá monotónna a druhá s maximom práve pre $\alpha = 1$ u izotropného prípadu vysvetľujú, prečo hranica SC/SO je v prípade silnejšej *Sa* anizotropie posúvaná k menším hodnotám Elsasserovho čísla Λ a v prípade silnejšej *So* anizotropie k väčším hodnotám Λ . Z fyzikálneho hľadiska môžeme povedať, že *Sa* anizotropia zosilňuje účinok Lorentzovej sily, lebo tá istá oblasť (oblasť medzi dvoma šikmými úsečkami - hranicami SC/SO), ktorú sme v izotropnom prípade nazývali režim slabého magnetického poľa, je v prípade *Sa* anizotropie už režim silného magnetického poľa (Λ^* v izotropnom prípade je väčšia ako Λ^* v prípade *Sa* anizotropie, pozri diskusiu v [37]). Keďže vplyv *So* anizotropie na hranicu SC/SO je opačný, tak môžeme povedať, že *So* anizotropia oslabuje účinok Lorentzovej sily. Podobne môžeme hovoriť, že *Sa* aj *So* anizotropia znižuje účinok Coriolisovej sily, lebo oblasť medzi dvoma vertikálnymi priamkami, ktorá v izotropnom prípade prislúcha režimu silnej rotácie, je v prípadoch *Sa* a *So* anizotropie ešte režim slabej rotácie (E_z^* v izotropnom prípade je väčšie ako E_z^* v prípadoch *Sa* a *So* anizotropie).

Graf 30b ukazuje vplyv anizotropie typu *BM* na ΛE_z režimový diagram. Čierne a červené čiary opäť znázorňujú hranice medzi jednotlivými oblasťami pre anizotropné prípady ($\alpha = 0,5$ a $0,1$). Pre porovnanie sú na grafe aj hranice pre izotropný prípad $\alpha = 1$ vykreslené modrými čiarami. Hranice medzi jednotlivými oblasťami preferencie sa pod vplyvom *BM* anizotropie menia oveľa výraznejšie ako v prípade *SA* anizotropie, aj keď hodnota parametra anizotropie je rovnaká. Dochádza nielen ku kvantitatívnej zmene (pri *SA* anizotropii sa hranice len posúvajú), ale hranice sa teraz menia aj kvalitatívne, lebo dochádza aj ku zmene tvaru hraníc. Vplyv *BM* anizotropie na účinok Lorentzovej a Coriolisovej sily je teda tiež oveľa výraznejší ako v prípade *SA* anizotropie. Paralelné módy môžu byť preferované aj v prípade veľmi rýchlej rotácie (veľmi malé E_z), ak je magnetické pole veľmi slabé (nezabúdajme však, že *BM* anizotropia je spôsobená silnejším magnetickým poľom, viď komentár k obrázku 30c). Stačí však silnejšie pole a jeho účinok je výrazný. Rolky, kolmé na magnetické pole, sú preferované len vo veľmi úzkej oblasti ako Ekmanovho čísla E_z tak aj Elsasserovho čísla Λ . V prípade *BM* anizotropie už nie je také jednoznačné rozdelenie na rýchlo rotujúci prípad ($E_z < E_z^*$) a na prípad s pomalou rotáciou ($E_z > E_z^*$), ako je to v prípade *SA* anizotropie a v izotropnom prípade, lebo hranica v ΛE_z rovine,

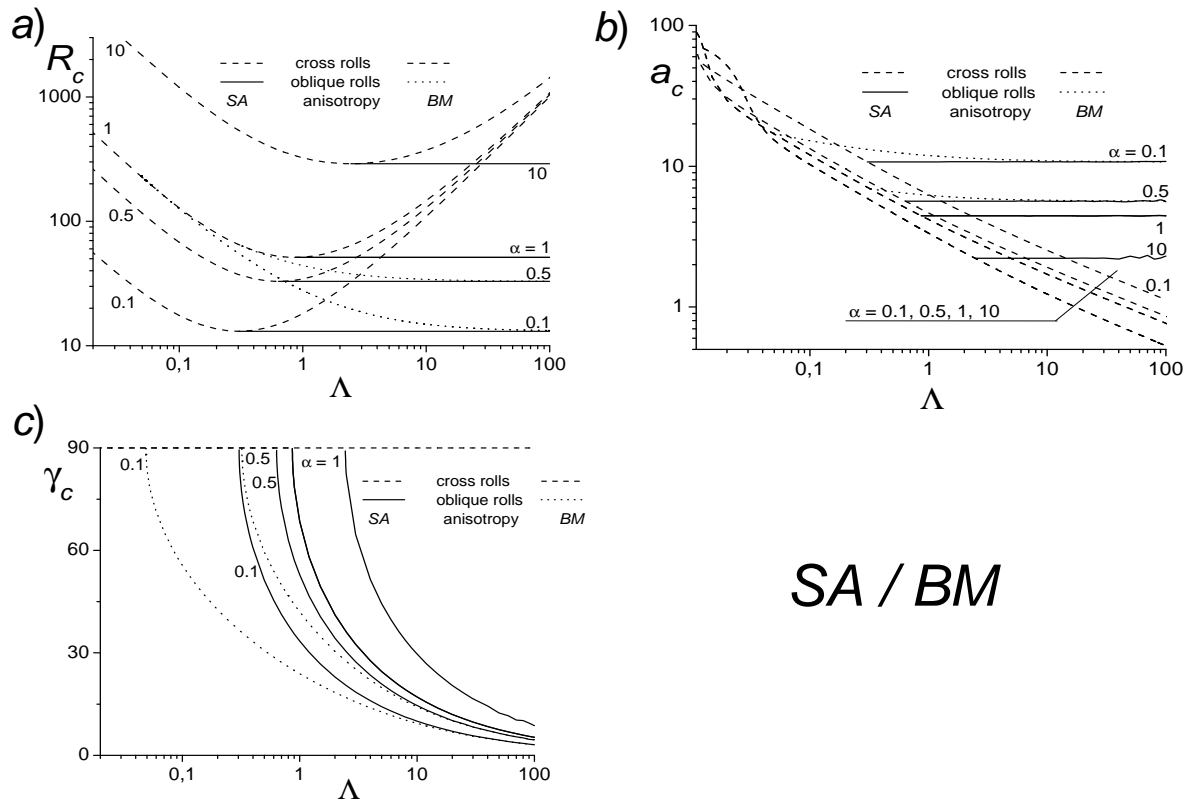
rozdeľujúca tieto dva režimy, už nie je vertikálna priamka daná $E = E_z^*$, t.j. číslom E_z^* , nezávislým na Elsasserovom čísle A , ale je jeho funkciou, t.j. $E_z = E_z(A)$. Platí teda, že čím je magnetické pole silnejšie, tým je hraničná hodnota E_z^* , ktorá oddeľuje rýchlo rotujúci režim od pomalo rotujúceho režimu, väčšia. Tretí graf 30c zobrazuje detailnejšie oblasť malých Ekmanových a Elsasserových čísel, a teda oblasť styku všetkých troch režimov (SC, SO, P). Z tohoto grafu pekne vidno, že v režime rýchlej rotácie vznikajú nielen SC módy, ale tiež P módy, čo je typické len pre prípad *BM* anizotropie. Avšak to sa nemôže stať pre slabšiu anizotropiu, lebo *BM* anizotropia musí byť spôsobená silným magnetickým poľom, t.j. musíme rozumne ignorovať malé hodnoty Elsasserovho čísla, napr. $A \lesssim 0,01$. Preto ďalej vo vyšetovaných prípadoch slabšej anizotropie *BM* ($\alpha = 0,5$) upriamime pozornosť na len na SC a SO módy, ale nie na P módy. V prípade silnejšej *BM* anizotropie pre $\alpha = 0,1$, prezentovanej červenou farbou na obrázku 30c, ale vidíme, že P módy sú preferované aj pre $A = O(1)$ a pri veľmi malých hodnotách E_z , teda pre veľičiny realistickejšie pre vonkajšie zemské jadro.

8.5.2 Stacionárna konvekcia; kritické čísla R_c , a_c a γ_c

Ďalšie numerické výsledky tejto stabilitej analýzy sú prezentované na obrázku 32, ktorý vyjadruje závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a kritického uhla sklonu roliek γ_c na Elsasserovom čísle A . Hlavným cieľom tejto práce je vyšetriť vplyv anizotropie difúzných koeficientov na rotujúcu magnetokonvekciu, preto rôzne krivky na grafoch odpovedajú rôznym hodnotám parametra anizotropie, ktorý je mierou anizotropie. Pre porovnanie sa na grafoch vždy vyskytuje aj izotropný prípad s $\alpha = 1$.

Uvažujúc nasledujúci rozsah vstupných parametrov (Elsasserove číslo $A \in (0,011, 100)$ a Ekmanove číslo $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ ($E_x = \alpha E_z$)), len dva typy (SC a SO) orientácie roliek sú možné, pretože vhodne vybrané hodnoty E_z a A vylučujú preferenciu P módov (pozri obrázok 30). Osi roliek sú kolmé na magnetické pole (uhol γ_c je rovný 90°), alebo sú naklonené k magnetickému poľu pod nejakým nenulovým uhlom. Tieto dva prípady rozlišujeme rôznym typom kriviek. Pre vzájomné porovnanie anizotropií (obrázok 32) boli vybrané tri rôzne hodnoty parametra anizotropie $\alpha = 1; 0,5; 0,1$ (kvôli kompletности je *So* anizotropia reprezentovaná len jedným $\alpha = 10$). Rôzne orientácie roliek sú odlíšené typom kriviek - prerušované krivky pre kolmé SC rolky pre všetky α , plné krivky pre šikmé SO rolky v prípade *SA* anizotropie a bodkované krivky pre prípad *BM* anizotropie. Kolmé rolky sú ovplyvnené jedine *SA* anizotropiou a v prípade *BM* anizotropie máme len jeden prípad kolmých roliek, stotožnený s krivkou $\alpha = 1$. Ak sa pozrieme na rovnice (92–94), ktoré vyjadrujú predpis pre Rayleighove číslo R , tak vidíme, že koeficient anizotropie α v prípade *BM* anizotropie je vždy násobený s premennou l^2 – štvorcom horizontálneho vlnového čísla l . Pre rolky kolmé na základné magnetické pole v smere y je horizontálne vlnové číslo l nulové. To spôsobí zánik závislosti vlastností kolmých roliek (napr. hodnoty Rayleighovho čísla) na *BM* anizotropii. Preto sústredíme pozornosť na šikmé rolky, t.j. na plné a bodkované krivky pre hodnoty parametra anizotropie $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 0,1$ (a samozrejme tiež na izotropný prípad $\alpha = 1$).

Na grafe 32a vidíme, že obe anizotropie, *BM* a *Sa*, uľahčujú konvekciu znižovaním kritického Rayleighovho čísla R_c (*So* typ anizotropie, *So* s $\alpha > 1$, zabraňuje nástupu konvekcie, pretože zvyšuje R_c). *Sa* anizotropia uľahčuje nástup konvekcie efektívnejšie ako *BM* anizotropia, lebo kritické Rayleighove čísla v prípade *Sa* anizotropie sú menšie ako v prípade *BM* anizotropie. Tento rozdiel je najvýraznejší pre hodnoty Elsasserovho čísla $A = O(1)$ a pre veľké hodnoty sa tento rozdiel znižuje. Hodnoty A , u ktorých dochádza



SA / BM

Obr. 32: Porovnanie oboch typov anizotropií. Závislosť (a) kritického Rayleighovho čísla R_c , (b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a (c) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle v prípade stratifikačnej anizotropie (SA) a anizotropie podľa Braginského a Meytlisa (BM). Rolky, kolmé na magnetické pole – prerušované krivky, rolky šikmé vzhľadom k magnetickému poľu – plné krivky (SA), bodkované krivky (BM).

k zmene preferencie (z kolmých na šikmé rolky), sú menšie v prípade BM anizotropie.

Graf 32b ukazuje, že rozdiel medzi kritickými horizontálnymi vlnovými číslami a_c medzi anizotropiami SA a BM je malý. Kritické horizontálne vlnové číslo je v prípade BM anizotropie trochu väčšie. Pre veľké hodnoty Λ sa aj tento malý rozdiel úplne stráca.

Z grafu 32c najlepšie vidno, že najväčší rozdiel medzi oboma anizotropiami je v hodnotách Elsasserovho čísla Λ , pri ktorých dochádza k prechodu z kolmých na šikmé rolky. Napr. pre prípad relatívne veľkej anizotropie ($\alpha = 0,1$) je tento rozdiel skoro o jeden rád, a preto môžeme uzavrieť, že kritický uhol γ_c je pri BM anizotropii menší, ako pri SA anizotropii, pričom aj v prípade uhlu γ_c platí, že pre veľké Elsasserove čísla Λ sa rozdiel medzi BM a SA anizotropiami stráca.

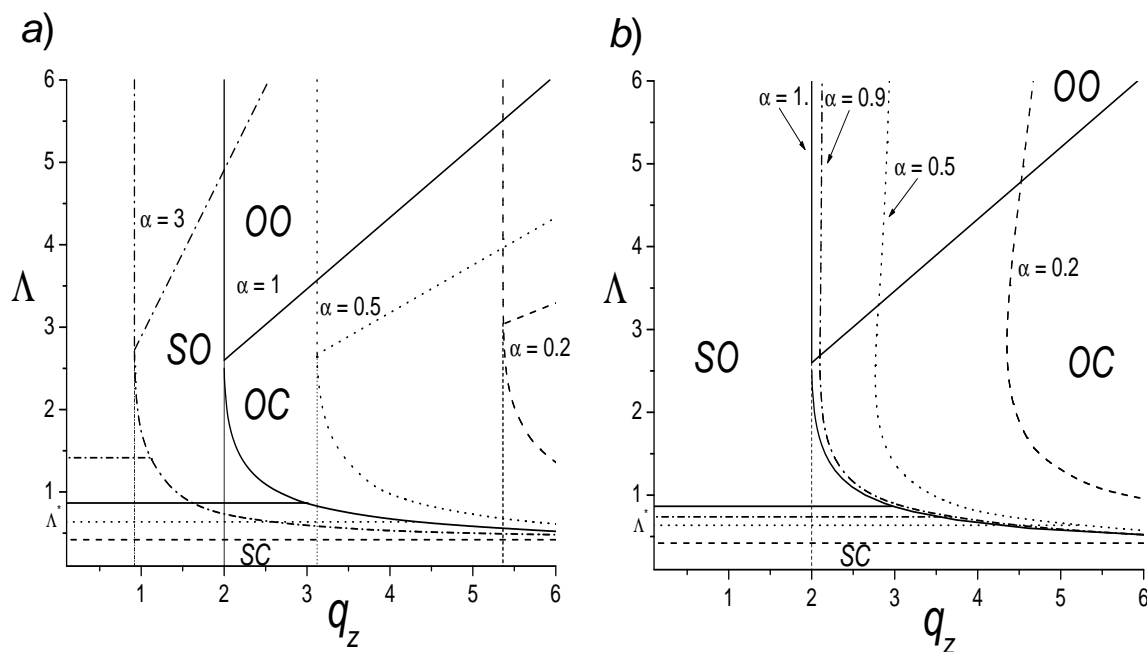
8.5.3 Nestacionárna konvekcia; Λq_z režimové diagramy

Z geofyzikálneho hľadiska je zaujímavejšie analyzovať vplyv anizotropie na nestabilitu, ktoré sú na čas závislé, a ktoré nazývame nestacionárnou konvekciou (v literatúre sa to niekedy označuje ako overstabilita, resp. periodická nestabilita). Nestacionárna konvekcia má v tomto modeli tvar vlny, šíriacej sa v smere kolmom na orientáciu roliek (danej základnými vstupnými podmienkami; pozri obrázok 29). Keďže uhol γ_c medzi magnetickým poľom (orientovaným v smere osi y) a osou rolky je jedným z výstupov nášho štúdia, tak uhol medzi magnetickým poľom a smerom šírenia vlny je $\gamma_c \pm \pi/2$. Vlna je v našom prípade popísaná dvoma zložkami horizontálneho vlnového čísla v horizontálnych smeroch x

a y a frekvenciou σ .

Aj magnetické pole aj rotácia majú stabilizujúci účinok na kvapalinu, lebo môžu fungovať ako vratná sila, pôsobiaca na vychýlenú kvapalnú časticu, čím poskytujú základ pre možný vlnový pohyb v kvapaline. Preto môžeme očakávať, že vlnový pohyb je dôležitý v rotujúcich MHD systémoch ako napr. zemské jadro, Slnko, hviezdy,... Z meraní magnetického poľa Zeme na povrchu a z modelovaní magnetického poľa na povrchu jadra je viacero dôkazov o vlnovom charaktere pohybů. Vlny teda môžeme považovať za prirodzenú reakciu kvapalných systémův na poruchu.

Skúmaním nestacionárnej konvekcie sa do systému dostávajú ďalšie vstupné parametre - Prandtlove čísla, t.j. Robertsove číslo q a obrátené magnetické Prandtlove číslo p . Prieštor parametrov teda obsahuje q a p ako aj Λ a E . Presnejšie v štúdiách anizotropie¹⁷ máme p_z , q_z , E_z a α namiesto p , q a E . Režimový diagram sa zmení z trojrozmerného v stacionárnom prípade na viac komplikovaný päťrozmerný v nestacionárnom prípade. Ak chceme vyšetrovať vplyv anizotropie na režimový diagram nestacionárnych módov v najjednoduchšom prípade, tak budeme uvažovať dokonale elektricky a tepelne vodivé a mechanicky voľné hranice (illustrative case [37, 28]). Ďalšie zjednodušenie je v zanedbaní zotrvačných síl ($p = 0$) a najmä uvažovanie často používaného neviskózneho priblíženia ($E = 0$). V tomto prípade je dvojrozmerný Λq_z režimový diagram de facto rezom všeobecného trojrozmerného diagramu $\Lambda E_z q_z$ v rovine $E_z = 0$. Na nasledujúcom obrázku 33 sú



Obr. 33: Režimové diagramy v prípadoch oboch typův anizotropií, (a) *SA* a (b) *BM*. Režimové diagramy ukazujú oblasti v Λq_z rovine s preferovaným typom konvekcie v neviskóznom prípade $E_z = 0$. (Pozícia symbolův SO, SC, OO a OC korešponduje správnym oblastiam ohraničeným plnými krivkami pre izotropný prípad.)

dva Λq_z režimové diagramy získané numericky. Niektoré dôležité detaily na diagramoch boli potvrdené asymptoticky, ale v tejto práci to neprezentujeme.

Obrázky 33ab ukazujú vplyv anizotropií na tieto režimové diagramy. Podobne, ako v prípade stacionárnej konvekcie a ΛE_z diagramu, je aj teraz Λq_z režimový diagram z istého pohľadu znázornenie funkcie $R_c = R_c(\Lambda, q_z)$. Krivky znázorňujú hranice me-

¹⁷V podkapitole 3.1 sme už definovali (78) anizotropné Prandtlove čísla $p = p_z$ a $\zeta = q_z^{-1}$.

dzi oblasťami s preferovaným typom a orientáciou roliek. Uvažujeme (ako v [37, 28]) štyri režimy

- SC \Rightarrow Stacionárna kolmá rolka je preferovaná;
- SO \Rightarrow Stacionárna šikmá rolka je preferovaná;
- OC \Rightarrow Nestacionárna kolmá rolka je preferovaná;
- OO \Rightarrow Nestacionárna šikmá rolka je preferovaná.

Krivky Λq_z diagramu teda opäť predstavujú rovnaké hodnoty R_c pre dvojice súperiacich módov SC, SO, OC a OO. Na grafe 33a je opísaný vplyv stratifikačnej anizotropie (SA). Hranice medzi základnými režimami sú pre rôzne prípady SA anizotropie (rôzne hodnoty anizotropného parametra α) odlíšené rôznym typom kriviek a pre izotropný prípad boli zvolené plné čiary. Hranica medzi SO a OO režimom je vertikálna priamka nezávislá na Elsasserovom čísle Λ a je to v podstate jedno konkrétne číslo $q_z = q_{pref}$. Táto hranica nie je hranicou existencie¹⁸ nestacionárnej konvekcie, ale len hranicou preferencie.

Hranica medzi režimami SO a SC je horizontálna priamka $\Lambda = \Lambda^*(\alpha)$ nezávislá na q_z (stacionárna konvekcia je vždy nezávislá na Robertsovom čísle), kde $\Lambda^*(\alpha)$ je rastúcou funkciou α . Tento fakt bol tiež diskutovaný pri obrázku 30 pre $E_z = 0$ v prípade ΛE_z režimového diagramu pre stacionárnu konvekciu. Hranica OO/OC je opäť priamka, vyjadrujúca lineárnu závislosť $\Lambda = \Lambda(q_z)$ so sklonom narastajúcim s α .

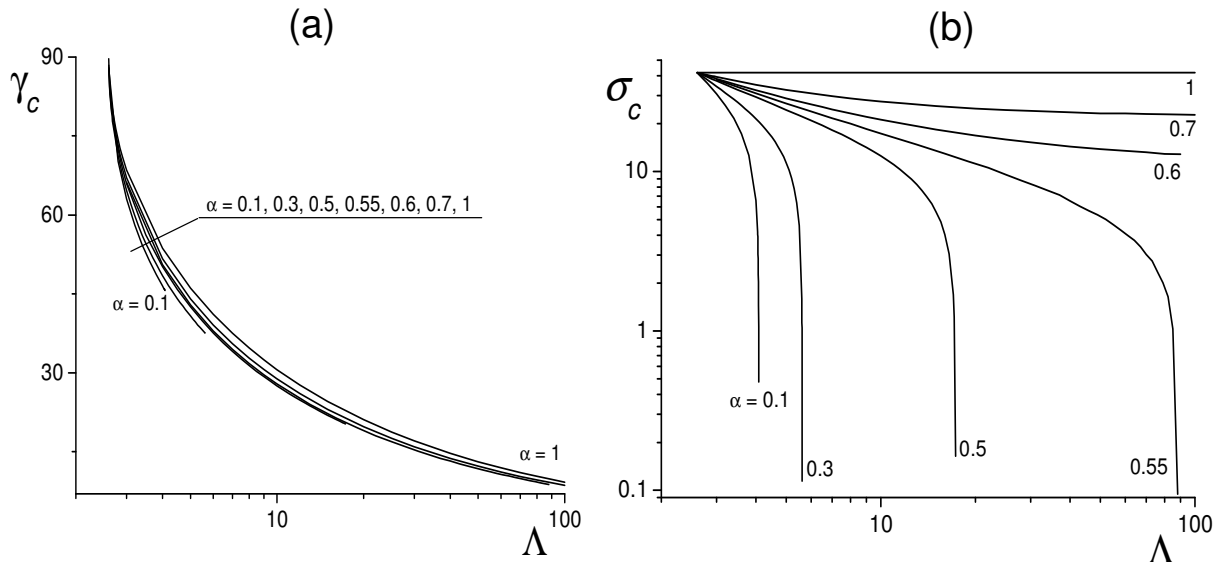
Ostatné hranice SO/OC a SC/OC medzi režimami SO, SC a OC sú už zložité krivky $\Lambda = \Lambda(q_z)$ a ich analytické vyjadrenie je veľmi komplikované. Hlavnou úlohou je však preskúmať, ako sa jednotlivé hranice menia vplyvom anizotropie difúzných koeficientov. Hneď na prvý pohľad vidíme, že SA anizotropia mení hranice len kvantitatívne – základné črty hraníc sú zachované. Celý súbor kriviek (hraníc) pre fixované α sa vplyvom oceánskeho typu anizotropie (So , $\alpha > 1$) anizotropie posúva smerom k menším hodnotám Robertsovho čísla a väčším hodnotám Λ . V prípade atmosférického typu (Sa , $\alpha < 1$) sa posúvajú tieto krivky smerom k väčším Robertsovým číslam a menším Λ .

Vplyv anizotropie typu BM na režimový diagram opisuje druhý graf 33b. Plné čiary opäť súvisia s izotropným prípadom a ostatné anizotropné prípady sú odlíšené rôznymi typmi kriviek. Porovnaním s predchádzajúcim grafom 33a vidíme, že BM anizotropia mení režimový diagram aj kvalitatívne. Hlavný rozdiel je v hranici SO/OO, ktorá je len v izotropnom prípade jednoduchá vertikálna priamka $q_z = q_z^*$ nezávislá na Elsasserovom čísle. Už slabá anizotropia ($\alpha = 0,9$) ju mení na krivku $\Lambda = \Lambda(q_z)$. Zošikmenie tejto hranice oproti vertikále narastá s anizotropiou. Ďalší dôležitý rozdiel oproti prípadu SA je v hranici medzi režimami OC a OO, ktorá nie je ovplyvnená hodnotou parametra anizotropie a je rovnaká ako v izotropnom prípade. Hranica medzi režimami SC a SO je horizontálna priamka podobne ako v prípade SA anizotropie na predchádzajúcom grafe 33a. Avšak, tieto podobnosti SC/SO hraníc v SA a BM type anizotropie nie sú zrejme v prípade nenulového E_z na obrázku 30, ukazujúcom režimový diagram v ΛE_z rovine pre stacionárnu konvekciu. Najpravdepodobnejší dôvod je v dobre známom veľkom rozdieli medzi prípadom $E_z \rightarrow 0$ a tu vyšetrovaným prípadom $E_z = 0$. Ostatné hranice SO/SC a SC/OC medzi režimami SO-OC a SC-OC sú opäť zložité krivky $\Lambda = \Lambda(q_z)$ ako v prípade SA anizotropie.

¹⁸Hranica existencie q_{ex} podľa [37] a ako je potvrdené aj v ďalšom modeli IV s ležatou rotačnou osou je v izotropnom prípade $q_{ex} = 1$. Táto však závisí od anizotropného parametra α , a to podobne, ako v izotropnom prípade $q_{ex} < q_{pref} = 2$, kde q_{pref} odpovedá SO/OO hranici preferencie. Teda na Λq_z režimovom diagrame na obr. 33a si treba všetky vertikály $q_z = q_{ex}(\alpha)$ predstaviť naľavo od vyznačených SO/OO hraníc - vertikál $q_z = q_{pref}(\alpha)$.

8.5.4 Nestacionárna konvekcia; závislosť R_c , a_c , σ_c a γ_c na Λ

Podobne ako v prípade stacionárnej konvekcie, aj teraz je v centre nášho záujmu vplyv anizotropie na závislosti základných parametrov instability (kritické Rayleighove číslo R_c , kritické horizontálne vlnové číslo a_c , kritický uhol γ_c a kritická frekvencia σ_c) na vstupných parametroch, charakterizujúcich základný stav (Elsasserove číslo Λ , Ekmanove číslo E_z , koeficient anizotropie α , ale pre fixné hodnoty Prandtlových čísel ζ a p). Nasledujúce výsledky sú prezentované vo forme grafov, ktoré vyjadrujú závislosti R_c , a_c , σ_c a γ_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle E_z (alebo závislosti na Ekmanovom čísle pri konštantnom Elsasserovom čísle), keď sú uvažované aj zotrvačné sily (nenulové Rossbyho číslo). Viaceré krivky na grafoch súvisia s rôznymi hodnotami parametra anizotropie α , čo je pre nás najdôležitejším výstupom numerického vyšetovania, lebo preskúmať vplyv anizotropie na vznikajúce instability je hlavným cieľom tejto práce. Rôzna veľkosť anizotropie je reprezentovaná rôznymi krivkami (krivky sú označené hodnotou parametra anizotropie α).

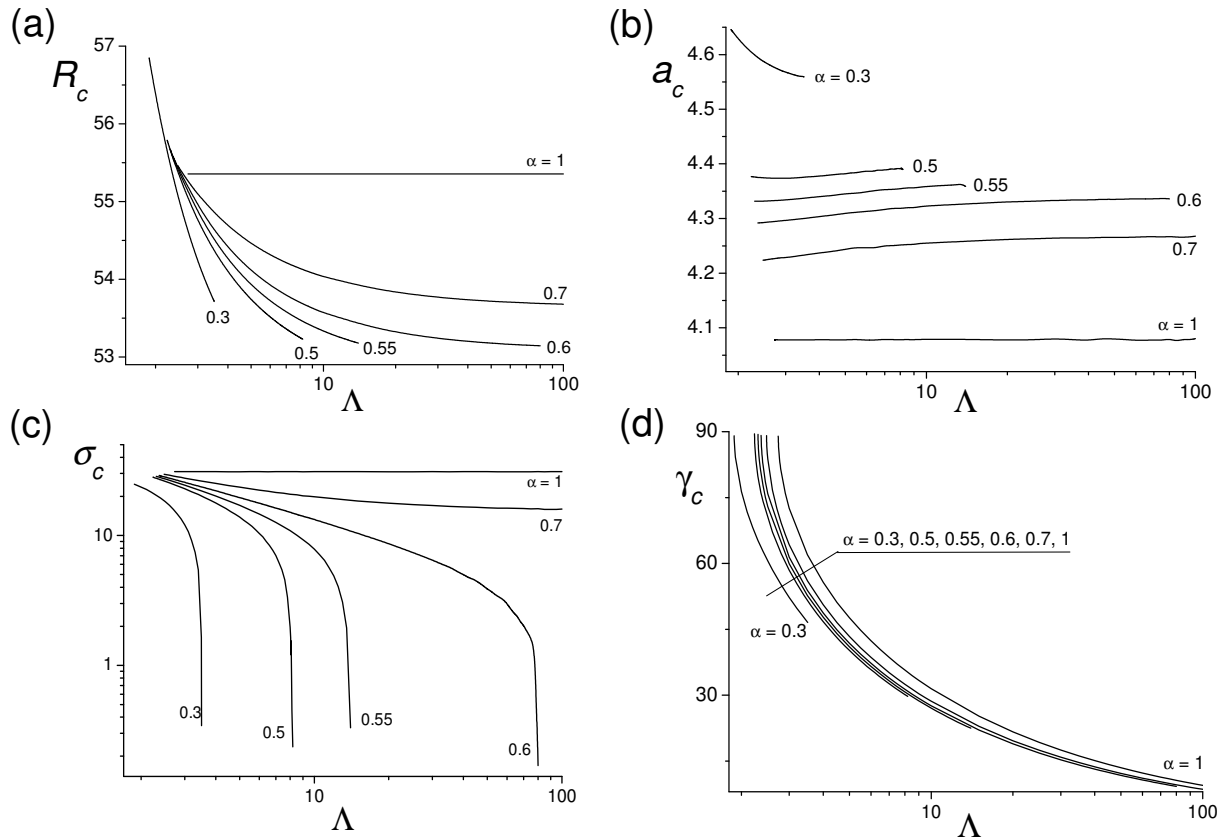


Obr. 34: Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť (a) kritického uhla medzi roľkami a základným magnetickým poľom γ_c a (b) kritickej frekvencie σ_c a na Elsasserovom čísle pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ a pri $p = 0,9$ a $\zeta = 0,5$.

Obrázky 34ab ukazujú γ_c a σ_c ako funkcie Λ v režime rýchlej rotácie $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ a v prípade BM anizotropie (R_c a a_c nie sú na obrázkoch prezentované, pozri komentár nižšie). Sedem kriviek odpovedá siedmim rôznym hodnotám parametra anizotropie $\alpha = 1; 0,7; 0,6; 0,55; 0,5; 0,3; 0,1$. Pre hodnoty parametra anizotropie $0 < \alpha < 1$, typické pre BM anizotropiu zrejme platí, že čím menší parameter anizotropie, tým silnejšia anizotropia, t.j. pri $\alpha \rightarrow 0$ je BM anizotropia najsilnejšia a pri $\alpha \rightarrow 1$ najslabšia. Hneď na prvý pohľad môžeme vidieť výrazný vplyv anizotropie, a to hlavne v ohraničení intervalu Elsasserovho čísla Λ , na ktorom môže daná nestabilita existovať. Zvyšovaním anizotropie sa tento interval znižuje z pravej strany. Ľavá hranica tohto intervalu existencie je na anizotropii nezávislá. To znamená, že ani extrémne silná BM anizotropia nezmení fakt, že nestacionárna konvekcia existuje len pri dostatočne silnom magnetickom poli (t.j. Elsasserove číslo musí byť dostatočne veľké; vid' ľavý koniec kriviek).

Na prvom grafe 34a môžeme vidieť, že pri určitej hodnote Elsasserovho čísla začne existovať nestacionárna konvekcia OC, ktorej konvektívne roľky sú orientované kolmo na

magnetické pole ($\gamma_c = 90^\circ$) a postupným zvyšovaním Elsasserovho čísla sa rolky nakláňajú k smeru magnetického poľa (OO konvekcia). Z grafu 34b vidno, že zatiaľ čo frekvencia nestability v izotropnom prípade je konštantná a na Elsasserovom čísle nezávislá, pri anizotropných prípadoch je už frekvencia klesajúcou funkciou a na uvažovanom intervale hodnôt Elsasserovho čísla Λ sa od určitej anizotropie objavuje prechod nestacionárnej konvekcie na stacionárnu prudkým poklesom frekvencie na nulu. Hodnota Λ tohto prudkého poklesu frekvencie je rastúca funkcia parametra anizotropie α , čo znamená, že táto hodnota je menšia pri silnejšej *BM* anizotropii. Toto ohraňovanie existencie nestacionárnej konvekcie môžeme ľahko vidieť aj na grafe 34a, ako náhly koniec kriviek. Toto je jeden z dôležitých objavených vplyvov *BM* anizotropie na nestacionárnu konvekciu, lebo v izotropnom prípade a v prípade *SA* anizotropie nie je ani náznak po takomto správaní. Kritické Rayleighove číslo R_c a kritické horizontálne vlnové číslo a_c ako funkcie Λ nie sú zobrazené, pretože v prípade veľmi malého $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ *BM* anizotropia nemá vplyv na tieto závislosti (ako aj v izotropnom prípade [28, 37]). R_c nie je závislé na Λ (a ani na α pre OO - nestacionárne šikmé rolky), pretože $R_c = 6\zeta\sqrt{3}\pi^2$ ($\doteq 51,28$ pre $\zeta = 0,5$, kde ζ je q_z^{-1}). Podobne kritické horizontálne vlnové číslo a_c má rovnakú vlastnosť. Navyše $a_c = \pi\sqrt{2} \doteq 4,44$ je konštanta, ktorá na rozdiel od R_c nezávisí dokonca ani na ζ . Ďalší dôvod, prečo nezobrazovať závislosti $R_c(\Lambda)$ a $a_c(\Lambda)$, je fakt, že rôzne dlhé krivky týchto závislostí pre rôzne α sa v prípade *BM* anizotropie prekrývajú a sú nerozoznateľné.



Obr. 35: Vplyv anizotropie typu *BM* na nestacionárnu konvekciu. Závislosť (a) kritického Rayleighovho čísla R_c , (b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , (c) kritickej frekvencie σ_c a (d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Elsasserovom čísle pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$ a pri $p = 0,9$ a $\zeta = 0,5$.

Ďalší obrázok 35 opisuje rovnaké závislosti ako predchádzajúci (teraz už aj vrátane

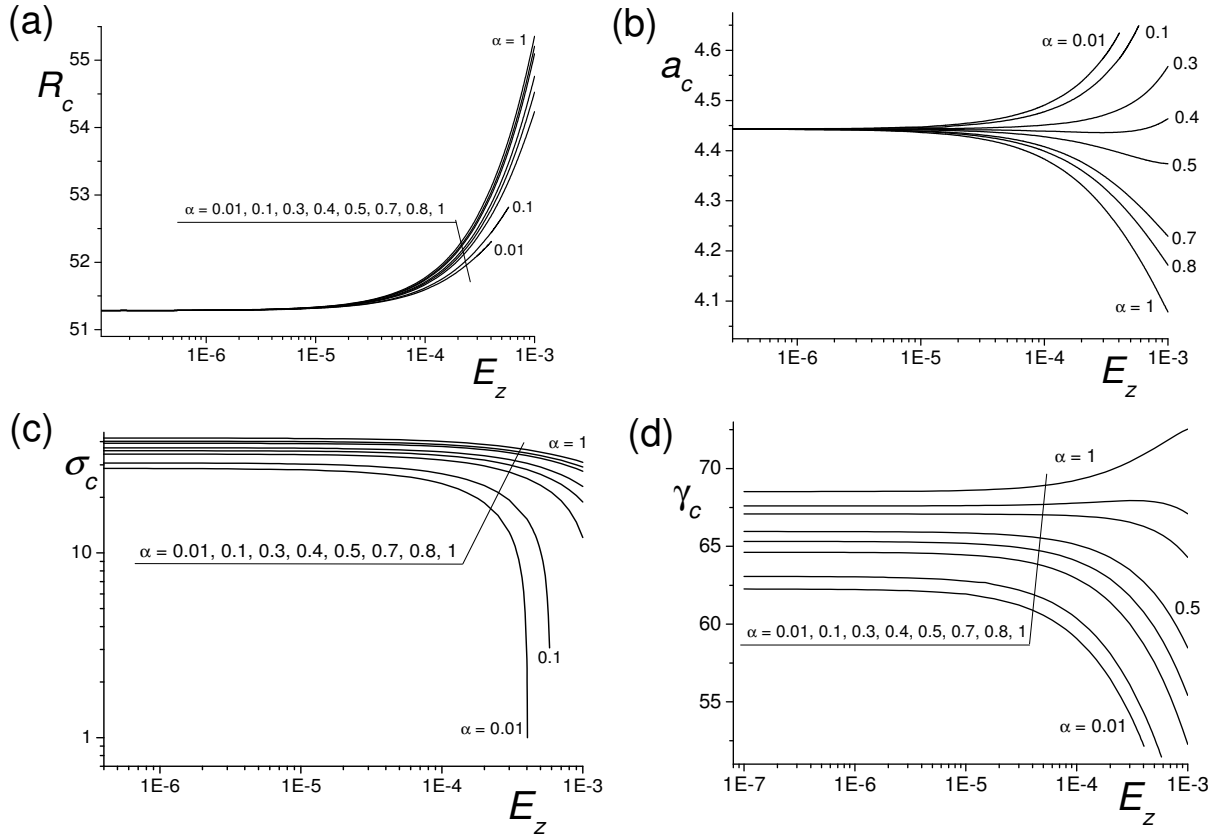
R_c a Λ a a_c ako funkcie Λ) opäť v režime rýchlej rotácie, ale teraz pri vyššej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$ a pri rovnakých Prandtlových číslach $p = 0,9$ a $\zeta = 0,5$ ako na obrázku 34. Rôzne krivky odpovedajú hodnotám parametra anizotropie $\alpha = 1; 0,7; 0,6; 0,55; 0,5$ a $0,3$ ako v prípade menšieho $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ v tomto *BM* prípade. Vplyv *BM* anizotropie je zrejmy zo všetkých štyroch grafov 35abcd a rozdiel medzi izotropným prípadom $\alpha = 1$ a ostatnými anizotropnými prípadmi narastá so zväčšujúcou sa anizotropiou výraznejšie, ako v prípade oveľa menšieho Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade (obr. 34), z istého pohľadu pôsobí *BM* anizotropia nepriaznivo na vznik nestacionárnej konvekcie, lebo zužuje interval hodnôt Elsasserovho čísla, na ktorom môžu nestability existovať. Z grafu 35a vidíme, že zvyšovaním anizotropie (zmenšovaním α) sa minimálna hodnota Λ existencie nestacionárnej konvekcie mierne znižuje, ale kritické Rayleighove číslo sa mierne zvyšuje. Kritické horizontálne vlnové číslo a_c má podobné správanie, t.j. je mierne klesajúcou funkciou od α u *BM* anizotropie. Kritické frekvencie σ_c sú pre všetky uvažované anizotropie malé, pričom sú klesajúcou funkciou Elsasserovho čísla. Prudký pokles frekvencií a následný koniec existencie nestacionárnej konvekcie pre vyššie hodnoty Elsasserovho čísla nastane pri všetkých hodnotách anizotropného parametra $\alpha < 1$; samozrejme pri rôznych $\Lambda = \Lambda(\alpha)$.

Hodnota Λ , pri ktorej k tomuto poklesu dôjde, je menšia pri silnejšej *BM* anizotropii (čím menšie α , tým menšie Λ). Tie isté závislosti boli vyšetřované aj v prípade stratifikačnej anizotropie. Vplyv tejto *SA* anizotropie na nestacionárnu konvekciu je veľmi podobný, a preto na obrázkoch nie je prezentovaný. Kritické Rayleighove číslo R_c ako aj kritické horizontálne vlnové číslo a_c nie sú ovplyvnené *SA* anizotropiou a majú rovnaké hodnoty ako v izotropnom prípade [28, 37] $R_c = 6\zeta\sqrt{3}\pi^2$, kde ζ je q_z^{-1} a $a_c = \pi\sqrt{2} \doteq 4,44$). Obe kritické čísla spolu s kritickou frekvenciou σ_c sú nezávislé aj na Elsasserovom čísle Λ . Kritická frekvencia je menšia pri silnejšej *SA* anizotropii rovnako, ako v prípade silnejšej *BM* anizotropie. Teda, čím menší anizotropný parameter α , tým menšia kritická frekvencia σ_c .

8.5.5 Nestacionárna konvekcia; závislosti R_c , a_c , σ_c a γ_c na E_z

Nasledujúci obrázok 36 opäť súvisí s *BM* anizotropiou, ale teraz opisuje R_c , a_c , σ_c a γ_c ako funkcie Ekmanovho čísla E_z pri konštantnom Elsasserovom čísle $\Lambda = 3$. Prandtlove čísla $p = 0,9$ a $\zeta = 0,5$ sú také isté, ako v ostatných štúdiách prezentovaných na obrázkoch 34 a 35.

Kritické Rayleighove číslo R_c nie je na Ekmanovom čísle závislé pre malé E_z a nie je ovplyvnené ani *BM* anizotropiou. Slabá závislosť R_c na E_z a α je len pre väčšie $E_z > O(10^{-5})$. Pre menšie Ekmanove čísla nie je kritické horizontálne vlnové číslo a_c ovplyvnené ani anizotropiou, ani samotným Ekmanovým číslom. Avšak, pre Ekmanove čísla väčšie ako $E_z = O(10^{-5})$ začína byť vplyv anizotropie evidentný a horizontálne vlnové číslo sa v prípade silnej anizotropie ($\alpha = 0,01$) správa ako rastúca funkcia Ekmanovho čísla, ako aj klesajúca funkcia Ekmanovho čísla pre slabú anizotropiu až po izotropný prípad ($\alpha = 1$), pričom je postupný prechod medzi týmito dvoma rôznymi správaniami. Podobné správanie vidíme aj na grafe 36d, kde uhol natočenia γ_c je pre malé E_z závislý na anizotropii, ale nezávislý na samotnom Ekmanovom čísle. Pre väčšie hodnoty E_z sa už objavuje aj závislosť na samotnom E_z a vplyv *BM* anizotropie je tiež kvalitatívny. V izotropnom prípade sa nárastom Ekmanovho čísla E_z uhol γ_c zväčšuje a rolky sa nakláňajú do kolmého smeru vzhľadom na magnetické pole. *BM* anizotropia toto správanie zmení na opačné a rolky sa pre väčšie Ekmanove čísla nakláňajú viac do smeru magnetického poľa (uhol γ_c sa znižuje). Tretí graf 36c ukazuje, že v prípadoch silnej anizotropie nastáva prudký pokles frekvencie, čo teda znamená, že nestacionárna konvekcia neexistuje



Obr. 36: Vplyv anizotropie typu BM na nestacionárnu konvekciu. Závislosť (a) kritického Rayleighovho čísla R_c , (b) kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , (c) kritickej frekvencie σ_c a (d) kritického uhla medzi rolkami a základným magnetickým poľom γ_c na Ekmanovom čísle E_z pri konštantnej hodnote Elsasserovho čísla $A = 3$ a pri $p = 0,9$ a $\zeta = 0,5$.

pre hodnoty Ekmanovho čísla väčšie, ako hodnota, pri ktorej dosiahne frekvencia nulovú hodnotu (táto hodnota je rastúcou funkciou parametra anizotropie α). Anizotropia typu BM teda znevýhodňuje nestacionárnu konvekciu oproti stacionárnej v zmysle, že znižuje rozsah hodnôt Ekmanovho čísla, na ktorom nestacionárna konvekcia existuje (podobne ako je to v prípade Elsasserovho čísla A).

8.6 Závěry – model III

V tejto kapitole bol študovaný vplyv anizotropie difúzných koeficientov (tepelnej difúziivity a viskozity) na marginálnu stabilitu horizontálnej rovinatej vrstvy elektricky vodivej kvapaliny. Vrstva je preniknutá homogénnym horizontálnym magnetickým poľom a rotuje okolo vertikálnej rotačnej osi. Tento model v izotropnom prípade bol skúmaný Robertsom a Jonesom [37, 28] a tiež Eltayebom [18, 19]. V tomto prípade sme riešili problém rovnako ako Roberts a Jones [37] v limite $\nu \gg \kappa \sim \eta$, čo je iné, ako v modeli riešenom Eltayebom [18, 19], kde uvažoval inú limitu $\nu \ll \eta$. Uvažovaním SA — stratifikačnej anizotropie ($\nu_{zz} \neq \nu_{xx} = \nu_{yy}$, $\kappa_{zz} \neq \kappa_{xx} = \kappa_{yy}$) a BM — anizotropie podľa Braginského a Meytlisa [5] ($\nu_{zz} = \nu_{yy} > \nu_{xx}$, $\kappa_{zz} = \kappa_{yy} > \kappa_{xx}$), sme rozšírili a obohatili tieto (doteraz izotropné) štúdie.

Stacionárna konvekcia; SA a BM anizotropia. V prípade stacionárnej konvekcie (ako v [37, 28, 18, 19]) sú možné tri režimy: P – rolky rovnobežné s magnetickým poľom;

SO – šikmé rolky a SC – kolmé rolky. Oba typy anizotropie ovplyvňujú ΛE_z režimový diagram (obr. 30). Hranice medzi individuálnymi oblasťami preferencie sú viac ovplyvnené *BM* anizotropiou ako *SA* anizotropiou v porovnaní s izotropným prípadom. *SA* anizotropia atmosférického typu zosilňuje účinok Lorentzovej sily a oslabuje účinok Coriolisovej sily. V prípade *BM* anizotropie je zmena týchto hraníc nielen kvantitatívna (hranice sa len posúvajú v prípade *SA* anizotropie), ale hranice sa menia aj kvalitatívne, lebo sa mení ich tvar. Vplyv *BM* anizotropie na účinok Lorentzovej a Coriolisovej sily je teda výraznejší, ako v prípade *SA* anizotropie. *SA* anizotropia atmosférického typu uľahčuje konvekciu efektívnejšie ako *BM* anizotropia, lebo kritické Rayleighove číslo je menšie v tomto *SA* prípade. Kritické horizontálne vlnové čísla sú mierne väčšie v prípade *BM* anizotropie, ako v prípade *SA* anizotropie a izotropnom prípade. Rozdiel medzi vplyvom *SA* a *BM* anizotropií je najvýraznejší pre $\Lambda = O(1)$ a pre väčšie hodnoty Λ klesá.

Nestacionárna konvekcia; *SA* anizotropia. Predpokladajúc nestacionárnu konvekciu sa objavia nové vstupné parametre. Zanedbaním zotrvačných síl a uvažovaním neviskózneho priblíženia bol študovaný vplyv oboch typov anizotropie na Λq_z režimový diagram. Ako v [37, 28, 18, 19] sú porovnávané štyri režimy: stacionárne kolmé rolky (SC); stacionárne šikmé rolky (SO); nestacionárne kolmé rolky (OC) a nestacionárne šikmé rolky (OO). *SA* anizotropia mení hranice medzi režimami len kvantitatívne – základný charakter hraníc je zachovaný (v porovnaní s izotropným prípadom [37]). Hranice jednotlivých oblastí preferencie sú v prípade oceánskeho typu anizotropie ($\alpha > 1$) posunuté smerom k menším Robertsovým číslam q_z a smerom k väčším Elsasserovým číslam Λ , v prípade atmosférického typu ($\alpha < 1$) sú hranice posunuté v opačných smeroch.

Nestacionárna konvekcia. *BM* anizotropia mení režimový diagram nielen kvantitatívne, ale aj kvalitatívne (podobne ako v prípade stacionárnej konvekcie). V tomto *BM* prípade hranica OC/OO je nezávislá na anizotropnom parametri a je teda rovnaká ako v izotropnom prípade.

Kritické čísla (R_c, a_c, γ_c a σ_c) ako funkcie Elsasserovho čísla Λ a Ekmanovho čísla E_z a vplyv anizotropií na tieto závislosti bol tiež vyšetrovaný. Pre prípad veľmi malého Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ je kritické Rayleighove číslo R_c nezávislé na Λ (a ani na α pre OO - nestacionárne šikmé rolky), pretože $R_c = 6\zeta\sqrt{3}\pi^2$ ($\doteq 51,28$ pre $\zeta = 0,5$). Podobne aj kritické horizontálne vlnové číslo a_c má rovnakú vlastnosť. Navyše je $a_c = \pi\sqrt{2} \doteq 4,44$ konštantné. Tieto vlastnosti platia pre obe anizotropie, čo znamená, že anizotropia nemení preferenciu nestacionárnych módov v prípade veľmi malého $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$.

Vplyv *BM* anizotropie je výraznejší pre veľké Ekmanove číslo $E_z = 10^{-3}$ (obr. 35). Rozdiel medzi izotropným prípadom a prípadom *BM* anizotropie narastá s narastajúcou anizotropiou výraznejšie, ako v prípade menšieho Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. R_c a a_c už nie sú jednoduché konštanty, ale obidve sú už funkciami Λ a anizotropného parametra α .

BM anizotropia má (v porovnaní s *SA* anizotropiou a/alebo izotropným prípadom) jednu špecifickú vlastnosť. *BM* anizotropia znevýhodňuje nestacionárnu konvekciu redukciami intervalov Elsasserovho čísla Λ ako aj Ekmanovho čísla E_z , na ktorých nestacionárna konvekcia existuje (pozri poklesy frekvencií na obrázkoch 34 - 36, na krivkách $\sigma_c(\Lambda)$ a $\sigma_c(E_z)$). Táto redukcia intervalov hodnôt je v zmysle, že čím väčšia anizotropia, tým menšie maximum Λ a E_z , na ktorom prestane nestacionárna konvekcia existovať.

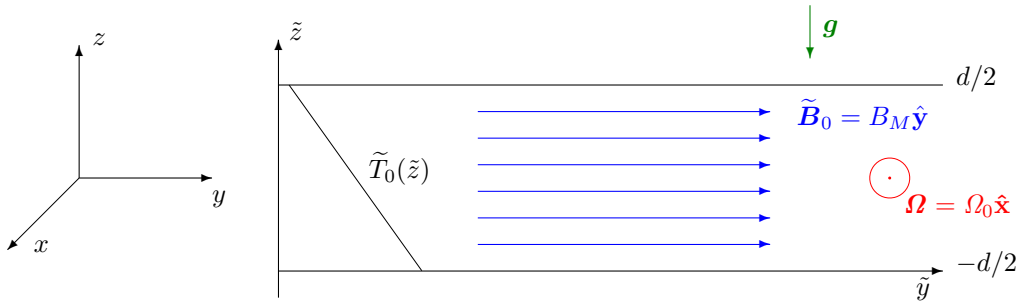
9 Model IV

9.1 Model s homogénnym horizontálnym magnetickým poľom

V modeli IV je uvažovaný základný stav so základným homogénnym magnetickým poľom v smere osi y a s osou rotácie v horizontálnom smere x . Táto konfigurácia je uvážením tiaže vo vertikálnom smere z hrubou analógiou k rovníkovým oblastiam zemského jadra [52, 53, 54]. Pri tejto konfigurácii základného stavu sú všetky smery, určujúce 3 základné sily (M, A, C), na seba navzájom kolmé. Preto je dôležité preskúmať, ako anizotropia difúzných koeficientov ovplyvní rovnováhu týchto síl a ako sa zmenia podmienky pre nástup konvekcie a ako sa zmení časová a priestorová štruktúra samotnej konvekcie. Opäť ako v modeli III podľa [37] riešime problém v limite $\nu \gg \kappa \sim \eta$, čo je iné, ako v podobnom modeli s horizontálnou rotačnou osou riešil pri $\nu \ll \eta$ Eltayeb [18]. Táto limita $\nu \gg \eta$ ($p = \eta/\nu = R_o/E = 0$) má aj iný význam, lebo jej uvážením sa eliminujú inerciálne oscilácie, ktoré nie sú dôležité pre činnosť geodynamika tak, ako aj nami študované nestability typu MAC vln. Na rozdiel od predchádzajúceho modelu III je definícia BM anizotropie a SA anizotropie formálne rovnaká, lebo aj magnetické pole aj os rotácie ležia v horizontálnej rovine. Difúzne koeficienty sú teda v oboch horizontálnych smeroch rovnaké (horizontálne izotropné), ale rôzne od koeficientu vo vertikálnom smere ($\nu_{xx} = \nu_{yy} \neq \nu_{zz}$, $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} \neq \kappa_{zz}$). Anizotropiu, pri ktorej predpokladáme väčšie koeficienty difúzie v horizontálnych smeroch $\nu_{xx} = \nu_{yy} > \nu_{zz}$, nazývame stratifikačnou anizotropiou oceánskeho typu (v tomto modeli je rovnako definovaná aj anizotropia Braginského a Meytliisa, ale v ďalšom texte budeme túto anizotropiu volať len So anizotropia)¹⁹. Ak sú koeficienty v horizontálnych smeroch menšie v porovnaní s koeficientom vo vertikálnom smere, tak hovoríme o stratifikačnej anizotropii atmosférického typu $\nu_{xx} = \nu_{yy} < \nu_{zz}$.

9.2 Základné rovnice

Tento model je popísaný rovnakými základnými rovnicami ako model III. Sú to nasledu-



Obr. 37: Model rotujúcej magnetokonvekcie so základným homogénnym horizontálnym magnetickým poľom v nekonečnej horizontálnej nestabilne stratifikovanej vrstve s vertikálnym teplotným profilom $\tilde{T}_0(\tilde{z})$ a rotujúcej okolo horizontálnej rotačnej osi.

júce rovnice, ktoré sú v linearizovanom a bezrozmernom tvare. Na zbezrozmernenie boli použité tie isté substitúcie, ako v predchádzajúcom modeli III.

$$R_o \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda(\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{y}} + R\vartheta \hat{\mathbf{z}} + E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}, \quad (112)$$

¹⁹V modeli II sme uvažovali hrubú analógiu BM anizotropie pomocou SA anizotropie. Teraz v modeli IV táto analógia cez So anizotropiu je „lepšia“, pretože os rotácie a magnetické pole sú v rôznych smeroch.

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{y}}) + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (113)$$

$$\frac{1}{q_z} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \vartheta, \quad (114)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (115)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (116)$$

V porovnaní s predchádzajúcim modelom III je zmena jedine v Navier-Stokesovej rovnici v Coriolisovom člene (v tomto modeli uvažujeme horizontálnu os rotácie v smere x), ktorý sa zmení nasledovne

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}.$$

Ako už bolo napísané, anizotropia podľa Braginského a Meytliisa a stratifikačná anizotropia majú formálne rovnakú matematickú formuláciu, preto viskózný člen $E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u}$ v Navier-Stokesovej rovnici má tvar

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = E_z [(1 - \alpha_\nu) \partial_{zz}^2 + \alpha_\nu \nabla^2] \mathbf{u}. \quad (117)$$

Z rovnakého dôvodu má teraz difúzny člen $\nabla_\alpha^2 \vartheta$ v rovnici vedenia tepla tvar

$$\nabla_\alpha^2 \vartheta = [(1 - \alpha_\vartheta) \partial_{zz}^2 + \alpha_\vartheta \nabla^2] \vartheta. \quad (118)$$

Ak položíme parametre anizotropie α_ν a α_ϑ rovné jednej, tak z anizotropných verzií týchto difúzných členov dostávame bežne používané tvary $E \nabla^2 \mathbf{u}$, resp. $\nabla^2 \vartheta$. Bezrozmerné čísla, objavujúce sa v týchto rovniciach, sú definované úplne rovnako ako v predchádzajúcom modeli III, t.j.

$$R_o = \frac{\eta}{2\Omega_0 d^2}, \quad \Lambda = \frac{B_M^2}{2\Omega_0 \rho_l \mu \eta}, \quad E_z = \frac{\nu_{zz}}{2\Omega_0 d^2}, \quad R = \frac{\alpha_T g \Delta T d}{2\Omega_0 \kappa_{zz}}, \quad q_z = \frac{\kappa_{zz}}{\eta}, \quad \alpha = \frac{\nu_{xx}}{\nu_{zz}} = \frac{\kappa_{xx}}{\kappa_{zz}}. \quad (74)$$

V tomto modeli IV zanedbáme Rossbyho číslo, teda dáme $R_o = 0$, a tým aj $p = R_o/E = \eta/\nu = 0$, pričom p^{-1} je magnetické Prandtlovo číslo.

Pri ďalšom postupe (rovnako ako u všetkých predchádzajúcich modelov (pozri (28, 44, 79)) využijeme fakt, že poruchy magnetického poľa \mathbf{b} a poľa rýchlosti \mathbf{u} môžeme rozložiť na toroidálnu a poloidálnu časť v tvare

$$\mathbf{u} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times w \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \omega \hat{\mathbf{z}}] \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times b \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times j \hat{\mathbf{z}}]. \quad (119)$$

Rovnako ako v prípade modelu III majú poruchy (w , ω , b , j a ϑ) tvar

$$f(x, y, z, t) = \Re [F(z) \exp(ilx + imy) \exp(\lambda t)], \quad (120)$$

kde l a m sú horizontálne zložky vlnového čísla a pri $a^2 = l^2 + m^2$ nazývame a horizontálnym vlnovým číslom a λ je komplexná frekvencia ($\lambda = i\sigma$). Ďalej aplikujeme na Navier-Stokesovu rovnicu operátor rotácie a dvojitej rotácie. Operátor rotácie aplikujeme tiež na indukčnú rovnicu a po dosadení porúch (w , ω , b , j a ϑ) do týchto rovníc ($\nabla \times \text{NS}$, $\nabla \times \nabla \times \text{NS}$, IR, $\nabla \times \text{IR}$)²⁰ a do rovnice vedenia tepla a uvažovaním $\hat{\mathbf{z}}$ zložiek

²⁰NS a IR je Navier-Stokesova a indukčná rovnica.

dostaneme nasledujúci systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $F(z) = W(z)$, $\Omega(z)$, $B(z)$, $J(z)$ a $\Theta(z)$

$$[E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] \Omega + i l W + i m \Lambda J = 0, \quad (121)$$

$$(D^2 - a^2) [E_z \mathcal{D}_\alpha - R_o \lambda] W - i l \Omega + i m \Lambda (D^2 - a^2) B = a^2 R \Theta, \quad (122)$$

$$(D^2 - a^2 - \lambda) J + i m \Omega = 0, \quad (123)$$

$$(D^2 - a^2 - \lambda) B + i m W = 0, \quad (124)$$

$$(\mathcal{D}_\alpha - \zeta \lambda) \Theta + W = 0, \quad (125)$$

kde $D^2 = d^2/dz^2$ a $\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha a^2$. Pri porovnaní tohto systému rovníc s podobným systémom (81-85) pre predchádzajúci model III vidíme, že rozdiel je len v dvoch členoch v rovniciach (121) a (122). V rovnici (121) sa člen DW zmenil na $i l W$, v rovnici (122) ide o zmenu $-D\Omega$ na $-i l \Omega$. Operátor D ako aj v predchádzajúcich modeloch I, II a III znamená d/dz . Operátor \mathcal{D}_α má teraz jediný tvar $\mathcal{D}_\alpha = D^2 - \alpha l^2 - \alpha m^2$ na rozdiel od modelu III, kde má dva rôzne tvary (86) v závislosti od typu anizotropie SA či BM . Teraz však \mathcal{D}_α odráža len horizontálnu izotropiu, ktorá v modeli III u BM anizotropie bola narušená. Uvažovaním najjednoduchších hraničných podmienok na $z = -1/2, 1/2$, t.j. mechanicky voľných a tepelne a elektricky dokonale vodivých hraníc

$$W = D^2 W = D\Omega = \Theta = B = DJ = 0 \quad (126)$$

a aplikovaním rovnakých algebraických postupov, ako v prípade modelu III, odvodíme veľmi podobnú disperznú rovnicu²¹

$$Ra^2 \frac{q_z (K^2 + \lambda)}{(q_z K_\alpha^2 + \lambda)} = \frac{K^2 [E_z (K^2 + \lambda) (K_\alpha^2 + p\lambda) + m^2 \Lambda]^2 + l^2 (K^2 + \lambda)^2}{E_z (K^2 + \lambda) (K_\alpha^2 + p\lambda) + m^2 \Lambda}, \quad (127)$$

kde $K^2 = \pi^2 + a^2$ a $K_\alpha^2 = \pi^2 + \alpha a^2$. Rozdiel oproti predchádzajúcemu prípadu ((92) v modeli III) je v poslednom člene v čitateli pravej strany, ktorý sa zmenil nasledovne

$$\pi^2 (K^2 + \lambda)^2 \rightarrow l^2 (K^2 + \lambda)^2.$$

Môžeme si všimnúť, že Λ sa v rovnici (127) vyskytuje vždy ako súčin Λm^2 . Z toho vyplýva zaujímavá vlastnosť, že všetky módy s rovnakým R , E_z , q_z , a a Λm^2 majú rovnakú komplexnú frekvenciu λ ($= \lambda_r + i \lambda_i$, kde λ_r je rýchlosť rastu amplitúdy a $\lambda_i = \sigma$ je frekvencia). Z toho tiež vyplýva, že λ paralelných módov, teda módov s $m = 0$, je nezávislé na Λ . V prípade $\Lambda = 0$, teda bez magnetického poľa, vrstva nie je „horizontálne izotropná“ ako v prípade modelu s vertikálnou osou rotácie, ale stále existuje smer rovnobežný s osou rotácie, do ktorého sú natočené konvektívne rolky v tomto nemagnetickom prípade, keďže magnetické pole viac neposkytuje preferovaný smer. Hlavnou úlohou nášho vyšetovania je nájsť preferované módy, pričom sa hneď od začiatku zameriame na marginálne módy, pre ktoré platí $\Re(\lambda) = 0$. Prvým krokom je nájsť pre všetky l a m módy vo forme stacionárnej konvekcie s $\Im m(\lambda) = 0$ alebo overstability s $\Im m(\lambda) = \sigma \neq 0$. Z rovnice (127) okamžite vidíme, že stacionárne módy sú nezávislé na Robertsovom čísle q_z a na obrátenom magnetickom Prandtlovom čísle p . Rayleighove číslo stacionárnej konvekcie označíme R^s a pre overstabilitu R^o . Ďalším krokom je nájsť pre oba typy konvekcie (pre dané E_z , Λ , q_z a p) kritický mód, t.j. také l a m , pre ktoré sú $R^s(l, m)$ a $R^o(l, m)$ najmenšie. Posledný krok je určenie, ktoré z R_c^s a R_c^o je menšie, a teda preferované. Z rovnice (127) ďalej vidíme, že ak položíme $p = 0$ a $\alpha = 1$, tak v prípade P módov, t.j. paralelných módov, teda

²¹Verzia tejto rovnice s $p = 0$, použitá v práci, je rovnica (144).

módov rovnobežných s magnetickým poľom ($m = 0$), ju môžeme prepísať na tvar

$$\frac{Rl^2(l^2 + \pi^2)qE}{q(l^2 + \pi^2) + \lambda} = E^2(l^2 + \pi^2)^3 + l^2, \quad (128)$$

lebo $a = l$ a $K^2 = l^2 + \pi^2$. Z toho vyplýva, že paralelné rolky nemôžu byť nestacionárne, lebo λ je reálne číslo. Platí to aj v anizotropnom prípade $\alpha \neq 1$; ale pri nenulovej hodnote p už táto vlastnosť neplatí.

9.3 Stacionárna a nestacionárna konvekcia vo forme roliek

Disperzná rovnica (127) je pre najvšeobecnejšie východiskové zadanie problému. Ďalej k nej pristúpime v rámci rôznych priblížení, a vždy potlačíme záujem o inerciálne oscilácie, teda položíme $p = 0$ (pozri (78)). Rôzne natočenie konvektívnych horizontálnych roliek voči magnetickému poľu (pozri obr. 29) je ovplyvnené súbojom dvoch hlavných síl magnetickej a Coriolisovej. Informáciu o uhle medzi rolkami a magnetickým poľom máme v zložkách (l, m) horizontálneho vlnového čísla (96). V minimalizácii Rayleighovho čísla $R = R(l, m)$ môžu nastať 2 extrémne prípady, P módy alebo C módy, kedy $m = 0$ alebo $l = 0$. Nulovosť jednej zložky je jednou podmienkou v určení minimálneho R . Druhá podmienka je daná deriváciou $\partial R/\partial a^2$, resp. $\partial R/\partial \tilde{a}$, kde $\tilde{a} = a^2/\pi^2$. Všeobecnému šikmému natočeniu roliek, kedy $l, m \neq 0$ odpovedá zložitejší proces minimalizácie s nutnosťou vypočítať ešte ďalšiu parciálnu deriváciu; častokrát $\partial R/\partial \tilde{l} = 0$ a $\partial R/\partial \tilde{m} = 0$ pri $\tilde{l} = l^2/\pi^2$ a $\tilde{m} = m^2/\pi^2$. P alebo C rolky môžu predstavovať časté matematické zjednodušenie popisu konvekcie. Avšak ďalšie výrazné zjednodušenie je pre stacionárne módy, pre ktoré je $\lambda = 0$. Tým v ďalšej časti 9.3.1 dostaneme zo (127) výraz pre Rayleighove číslo $R^s \equiv R$, ak položíme nielen $p = 0$, ale hlavne $\lambda = 0$.

9.3.1 Stacionárne módy

V konvekcii, ktorej charakter sa v čase nemení, sa stráca jej závislosť aj od Robertsoveho čísla q_z , teda podielu magnetického a teplotného difúzneho času. Okamžite to vidieť z ľavej strany (127), keď $\lambda = 0$, čo umožní v zlomku vykrátiť q_z . V nasledujúcich vzťahoch je vyjadrené Rayleighove číslo R^s pre stacionárnu konvekciu ako funkcia vstupných parametrov E_z, Λ a α a horizontálnych vlnových čísel l a m , teda $R^s = R^s(E_z, \Lambda, \alpha; l, m)$. Pritom opäť kvôli prehľadnosti, ale i jednoduchosti si zavádzame pomocné parametre, napr. $\tilde{m} = m^2/\pi^2$, $\tilde{l} = l^2/\pi^2$ a $\tilde{a} = a^2/\pi^2$ (pozri (88–90)). Významným zjednodušením je zavedenie funkcie $l_\alpha = (1 + \alpha\tilde{a})/(1 + \tilde{a})$, ktorá umožní prehľadne rozlíšiť anizotropné od izotropných prípadov (pozri (59, 148)).

Pracnou algebrou sa pri $p = \lambda = 0$ odvodí zo (127)

$$R^s = \pi l_\alpha \frac{K^3}{a^2} \left\{ C_\alpha + \frac{\tilde{l}}{C_\alpha} \right\} = \pi^2 l_\alpha \frac{(1 + \tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ C_\alpha + \frac{\tilde{l}}{C_\alpha} \right\}, \quad (129)$$

$$C_\alpha = \frac{E_z}{\pi} l_\alpha K^3 + \frac{\Lambda m^2}{\pi K} = \pi^2 E_z l_\alpha (1 + \tilde{a})^{3/2} + \frac{\Lambda \tilde{m}}{(1 + \tilde{a})^{1/2}} = c_\alpha + \phi, \quad (130)$$

pričom

$$a^2 = l^2 + m^2, \text{ resp. } \tilde{a} = \tilde{l} + \tilde{m} \quad \text{a} \quad c_\alpha = \pi^2 E_z l_\alpha (1 + \tilde{a})^{3/2}, \quad \phi = \frac{\Lambda \tilde{m}}{(1 + \tilde{a})^{1/2}}. \quad (131)$$

Pritom podobne ako v modeli III aj teraz v izotropnom prípade $\alpha = 1$ platí $l_\alpha = 1$ a $c_\alpha = c$, $C_\alpha = C$. Vzťahy (129–131) naznačujú možnosť vyjadriť R^s cez iné nezávislé premenné,

ako sú horizontálne zložky vlnového čísla, napr. $R^s = R^s(a^2, C_\alpha)$, resp. $R^s = R^s(\tilde{a}, C_\alpha)$, teda možnosť vyjadriť R^s pomocou nových nezávislých premenných \tilde{a} a C_α . Potom pri daných pevných vstupných parametroch E_z, Λ a α minimalizáciu R^s nemusíme robiť zložito z $R^s = R^s(l, m)$, ale z jednoduchšieho vyjadrenia $R^s = R^s(\tilde{a}, C_\alpha)$.

Vzťahy (130, 131) vyjadrujú prechod od nezávisle premenných l, m , resp. \tilde{l}, \tilde{m} ku novým nezávisle premenným C_α a a^2 , resp. C_α a \tilde{a} . K tomu, aby v (129) bolo $R^s = R^s(\tilde{a}, C_\alpha)$, potrebujeme spätné transformačné vzťahy

$$\tilde{l} = \tilde{a} + \frac{\pi^2 E_z}{\Lambda} l_\alpha (1 + \tilde{a})^2 - C_\alpha \frac{(1 + \tilde{a})^{1/2}}{\Lambda}, \quad (132)$$

$$\tilde{m} = -\frac{\pi^2 E_z}{\Lambda} l_\alpha (1 + \tilde{a})^2 + C_\alpha \frac{(1 + \tilde{a})^{1/2}}{\Lambda}, \quad (133)$$

teda aj $\tilde{l} = \tilde{l}(\tilde{a}, C_\alpha)$ a $\tilde{m} = \tilde{m}(\tilde{a}, C_\alpha)$. R^s s využitím (132) pre \tilde{l} teda je

$$R^s = \pi^2 l_\alpha \frac{(1 + \tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ C_\alpha + \frac{\tilde{a}}{C_\alpha} + \varepsilon \frac{l_\alpha}{C_\alpha} (1 + \tilde{a})^2 - \frac{(1 + \tilde{a})^{1/2}}{\Lambda} \right\} = R^s(\tilde{a}, C_\alpha), \quad (134)$$

pričom

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 E_z}{\Lambda}. \quad (135)$$

K minimalizácii R^s , a teda k hľadaniu kritických čísel potrebujeme parciálne derivovať R^s podľa C_α a \tilde{a} . Deriváciou $\partial R^s / \partial C_\alpha$ a z podmienky $\partial R^s / \partial C_\alpha = 0$ dostávame

$$C_\alpha^2 = \tilde{a} + \varepsilon l_\alpha A^2, \quad \text{kde} \quad A = 1 + \tilde{a}. \quad (136)$$

Z definičného vzťahu (130) pre C_α máme $C_\alpha^2 A = \Lambda^2 (\tilde{m} + \varepsilon l_\alpha A^2)^2$, čo spolu so (136) dáva prvú rovnicu

$$(\tilde{a} + \varepsilon l_\alpha A^2) A = \Lambda^2 (\tilde{m} + \varepsilon l_\alpha A^2)^2. \quad (137)$$

Podobne deriváciou $\partial R^s / \partial \tilde{a}$ a z podmienky $\partial R^s / \partial \tilde{a} = 0$ dostaneme druhý vzťah

$$\tilde{m} = \frac{[1 - \alpha \tilde{a}(1 + 2\tilde{a})] [\tilde{a} + A(1 + \alpha \tilde{a})\varepsilon]}{1 - \alpha \tilde{a}^2}, \quad (138)$$

čím už máme vzťahy pre výpočet oboch neznámych²² \tilde{m} a \tilde{a} . Čitateľ si môže ľahko overiť, že položením $\alpha = 1$ dostane vzorce (170, 171) v časti 9.4.1, venovanej stacionárnej konvekcie izotropného prípadu. Samozrejme obidve podmienky $\partial R^s / \partial C_\alpha = 0$ a $\partial R^s / \partial \tilde{a} = 0$ spĺňajú len SO (resp. OO) módy. Pre úplnosť ku vzťahom pre kritické vlnové čísla (137, 138) pridávame vďaka (136) výrazne zjednodušený vzťah pre kritické Rayleighove číslo pre SO módy

$$R_c^{SO} = \pi^2 l_\alpha \frac{A_c^{3/2}}{\tilde{a}_c} \left\{ 2C_c - \frac{A_c^{1/2}}{\Lambda} \right\} = R_c^{SO}(\tilde{a}_c, C_c), \quad (139)$$

kde $l_\alpha(\tilde{a})$ a $C_\alpha(\tilde{a})$ sú vyjadrené pre \tilde{a}_c ($C_c = C_\alpha(\tilde{a}_c)$).

Vzorce (129–139) sú najvšeobecnejšie pre stacionárnu konvekciu. Pri viacerých zjednodušujúcich predpokladoch môžu v istých prípadoch dať prehľadnú informáciu. Ukážeme

²²Vzorce (136, 137, 138) platia pre kritické čísla, t.j. je potrebné si uvedomiť, že \tilde{m} , \tilde{a} , A a C_α treba chápať ako \tilde{m}_c , \tilde{a}_c , A_c a C_c .

teraz, ako tieto vzorce poskytnú dôležité údaje o prechode SO módov na P módy (pozri obrázky 43, 46, 47). Numerické výpočty ukázali, že pri konštantnom E_z sa SO módy zvyšovaním Elsasserovho čísla Λ postupne nakláňajú smerom k magnetickému pólu a pri určitej hodnote Λ dosiahne uhol náklonu 0° , čím prejdú na P módy. Je preto zaujímavé odvodiť hodnotu $E_{SO/P}$ Ekmanovho čísla $E_z = E_z(\Lambda, \alpha)$, pri ktorom dochádza k prechodu SO na P módy. Minimalizáciou Rayleighovho čísla pre P módy s $\tilde{m} = 0$ dostaneme zo (129 – 131), že kritické horizontálne vlnové číslo a_c , dané pomocnou premennou \tilde{a}_c ($a_c = \pi\tilde{a}_c^{1/2}$), kde

$$\tilde{a}_c = 1/4 \left[(1 + 8/\alpha)^{1/2} - 1 \right] = \tilde{a}_c^P(\alpha), \quad (140)$$

závisí iba od anizotropného parametra α ; pritom je nezávislé na Ekmanovom čísle E_z . Rovnica (137) pri $\tilde{m} = 0$ má potom jednoduchší tvar

$$(\tilde{a} + \varepsilon l_\alpha A^2)A = \Lambda^2 \varepsilon^2 l_\alpha^2 A^4,$$

a po dosadení $\tilde{a}_c^P(\alpha)$ za \tilde{a} a riešením pre neznámu E_z dostávame vyjadrenie $E_z = E_z(\Lambda, \alpha)$ v tvare

$$E_z = \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_1 + c_2 \Lambda^2}}{\pi^2 \Lambda}, \quad (141)$$

kde c_1 a c_2 a sú funkcie len od parametra α a v izotropnom prípade $\alpha = 1$ prechádzajú na jednoduché čísla $c_1 = 1/9$ a $c_2 = 4/27$, čo vedie na

$$E_{SO/P} \Big|_{\alpha=1} = \frac{3 + \sqrt{9 + 12\Lambda^2}}{9\pi^2 \Lambda}.$$

Tejto hodnote $E_{SO/P}$ a vzťahu (141) presne odpovedajú Ekmanove čísla na obrázkoch 46b a 47b (pri všetkých $\alpha = 0,5, 1$ a 2 a $\Lambda = 1$ a 3). Podobne môžeme v tomto priblížení riešiť rovnicu (137) pre neznámu Λ , čím dostaneme vyjadrenie $\Lambda = \Lambda(E_z, \alpha)$. Opäť v izotropnom prípade máme jednoduchší tvar

$$\Lambda_{SO/P} \Big|_{\alpha=1} = \frac{18\pi^2 E}{27\pi^4 E^2 - 4} \quad (142)$$

a predstavuje čiarkovanú krivku prechodu SO/P na obr. 43, kde ostatné krivky prechodu SO/P pre $\alpha = 0,5$ a 2 , vypočítané numericky, presne korešpondujú analogickým vzťahom (142) s odpovedajúcimi koeficientami.

Obrázky 43, 46 a 47, reprezentujúce výsledky numerických výpočtov, odvíjajúcich sa hlavne z disperznej rovnice (127), dávajú inšpiráciu aj na ďalšie využitie vzorcov (129 – 131). Napr. k lepšiemu chápaniu prechodu SC roliek na SO rolky.

Z obrázkov 46 a 47 je zrejмый prechod SC/SO dvojakým spôsobom. Pri $\Lambda = 1$ kritické horizontálne vlnové číslo sa prechodom SC/SO mení spojito, zatiaľ čo pri $\Lambda = 3$ nespojito, pričom pri $\Lambda = 1$ uhol náklonu roliek prechádza spojito z 90° u SC módov na 90° u SO módov, zatiaľčo pri $\Lambda = 3$ je skok z 90° na nejaký iný uhol menší ako 90° (pozri časť 9.5.2).

Vyjadrieme teraz analyticky spojitý SC/SO prechod. Porovnaním kritických horizontálnych vlnových čísel pre SC a SO módy dostaneme parametrické vyjadrenie funkcie $\Lambda = \Lambda(E_z, \alpha)$ a pre prehľadnosť to urobíme len pre izotropný prípad $\alpha = 1$, keď $E_z = E$. Máme

$$E = \pi^{-2} \frac{\tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \sqrt{\frac{\tilde{a}}{(1 - 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}^2)}} \quad \text{a} \quad \Lambda = \sqrt{\frac{(1 - 2\tilde{a})(1 + \tilde{a})}{(1 - \tilde{a})\tilde{a}}}, \quad (143)$$

pričom v úlohe parametra je $\tilde{a} = a_c^2/\pi^2$, teda „normovaný“ štvorec kritického horizontálneho vlnového čísla. Priamym porovnaním tohto parametrického vyjadrenia a numericky vypočítanej krivky dostávame, že hraničné $\Lambda = \Lambda_s$, od ktorého parametrické vyjadrenie vystihuje spojitý SC/SO prechod, je $\Lambda_s \doteq 2,23$ a jemu odpovedajúce $E_s \doteq 0,00864$, teda pre $\Lambda > \Lambda_s$ a $E < E_s$ už prechod SC/SO nie je spojitý a (143) nemožno použiť. Teda pre $\Lambda \leq \Lambda_s$ a $E \geq E_s$ vzťah (143) odpovedá čiarkovanej krivke, teda hranici medzi SC a SO módmami pre $\alpha = 1$ na ΛE_z režimovom diagrame na obrázku 43.

9.3.2 Nestacionárne módy

Pri vyšetrowaní nestacionárnej konvekcie položením $p = 0$ zanedbávame zotrvačné členy a rovnica (127) má v tomto priblížení tvar

$$Ra^2 \frac{q_z(K^2 + \lambda)}{(q_z K_\alpha^2 + \lambda)} = \frac{K^2[E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda]^2 + l^2(K^2 + \lambda)^2}{E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda}. \quad (144)$$

Zavedieme nasledujúce pomocné substitúcie (sledujúc analógiu [37] v modeli s vertikálnou osou rotácie; pozri tiež vzťahy (100) pre model III)

$$\lambda = i\sigma, \quad y = \frac{\sigma}{K^2}, \quad y_\alpha = \frac{\sigma}{K_\alpha^2}, \quad \phi = \frac{\Lambda m^2}{\pi K}, \quad x = \frac{Ra^2 E_z}{\pi^2} \quad \text{a} \quad c_\alpha = \frac{E_z K K_\alpha^2}{\pi}. \quad (145)$$

Pritom v izotropnom prípade $\alpha = 1$ platí $y_\alpha = y$, $K_\alpha = K$ a $c_\alpha = c$. Ďalej si výraz v hranatej zátvorke na pravej strane rovnice upravíme podľa týchto substitúcií na tvar

$$E_z(K^2 + \lambda)K_\alpha^2 + m^2\Lambda = \pi K \left\{ \frac{E_z}{\pi K} K^2 K_\alpha^2 (1 + iy) + \phi \right\} = \pi K \{c_\alpha(1 + iy) + \phi\}$$

a po ďalších algebraických operáciách dostaneme rovnicu (144) v tvare

$$\frac{Ra^2 q_z (1 + iy)}{q_z + iy_\alpha} \frac{K^2}{K_\alpha^2} = \frac{\pi^2 K^4 \{c_\alpha(1 + iy) + \phi\}^2 + l^2 K^4 (1 + iy)^2}{\pi K \{c_\alpha(1 + iy) + \phi\}}.$$

Využitím nasledujúceho pomocného výpočtu

$$\frac{q_z x}{c_\alpha} = \frac{q_z Ra^2 E_z}{\pi^2} \frac{\pi}{E_z K K_\alpha^2} = \frac{q_z}{\pi} \frac{Ra^2}{K K_\alpha^2}$$

dostávame poslednú rovnicu postupne v tvaroch

$$\frac{q_z(1 + iy)}{q_z + iy_\alpha} \frac{Ra^2}{\pi K K_\alpha^2} = \frac{\{c_\alpha(1 + iy) + \phi\}^2 + (l^2/\pi^2)(1 + iy)^2}{c_\alpha(1 + iy) + \phi},$$

$$q_z x(1 + iy) \{c_\alpha(1 + iy) + \phi\} = (q_z + iy_\alpha) c_\alpha \left\{ [c_\alpha(1 + iy) + \phi]^2 + (l^2/\pi^2)(1 + iy)^2 \right\}, \quad (146)$$

kde posledná rovnica je už vhodná na ďalšiu analýzu. Pritom v nej vystupujúce nové premenné, úmerné fyzikálnym veličinám, ako Rayleighove číslo, Ekmanove číslo alebo frekvencia, sú vyjadrené pomocou vzťahov (145). Napr. premenná x je úmerná Rayleighovému číslu R , pre nás však bude ďalej užitočná premenná x/c_α , ktorá je takisto úmerná R , ale navyiac je už nezávislá na Ekmanovom čísle E_z . Teda pri definíciách parametrov (145) je rovnica (146) dobrým východiskom pre štúdium rôznych čiastkových problémov, a to nielen v rámci nestacionárnej konvekcie, ale pri $y = y_\alpha = 0$ aj v rámci stacionárnej konvekcie.

9.3.3 Nestacionárne módy; limita $E_z \rightarrow 0$

Limita $E_z \rightarrow 0 \Rightarrow c_\alpha \rightarrow 0$ vedie k nasledujúcemu zjednodušeniu rovnice (146)

$$\frac{q_z x}{c_\alpha} (1 + iy)\phi = (q_z + iy_\alpha)[\phi^2 + \tilde{l}(1 - y^2 + 2iy)],$$

kde sme ešte využili $\tilde{l} = l^2/\pi^2$ (88). Vynásobením tejto rovnice výrazom $1 - iy$ dostaneme rovnicu

$$\frac{q_z x}{c_\alpha} (1 + y^2)\phi = (q_z + iy_\alpha)(1 - iy)[\phi^2 + \tilde{l}(1 - y^2 + 2iy)], \quad (147)$$

čím ľavá strana rovnice (*LHS*) je reálna a pravú stranu (*RHS*) môžeme napísať v tvare $\mathcal{R} + i\mathcal{I}$, kde

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (q_z + yy_\alpha)[\phi^2 + \tilde{l}(1 - y^2)] - 2y\tilde{l}(y_\alpha - q_z y), \\ \mathcal{I} &= (q_z + yy_\alpha)2y\tilde{l} + (y_\alpha - q_z y)[\phi^2 + \tilde{l}(1 - y^2)]. \end{aligned}$$

Využitím podmienky $\mathcal{I} = 0$ a s využitím spätných transformačných vzťahov $y = \sigma/K^2$ a $y_\alpha = \sigma/K_\alpha^2$ dostaneme dôležitý vzťah pre frekvenciu σ

$$\sigma^2 = K^4 \left[\frac{q_z - K^2/K_\alpha^2 \phi^2}{q_z + K^2/K_\alpha^2 \tilde{l}} - 1 \right].$$

Kvôli prehľadnému porovnávaniu izotropných a anizotropných prípadov si zavedieme pomocnú premennú (pozri (59))

$$l_\alpha = \frac{K_\alpha^2}{K^2} = \frac{A_\alpha}{A} = \frac{1 + \alpha\tilde{a}}{1 + \tilde{a}} = l_\alpha(\tilde{a}, \alpha), \quad (148)$$

ktorá v izotropnom prípade $\alpha = 1$ je rovná 1, teda

$$l_\alpha(\tilde{a}, \alpha)|_{\alpha=1} = 1.$$

Ak si ďalej zavedieme

$$q_\alpha = q_z l_\alpha \quad (\text{pri } \alpha = 1 \text{ je } q_\alpha = q_z = q), \quad (149)$$

tak potom frekvenciu vyjadríme

$$\sigma^2 = K^4 \left[\frac{q_\alpha - 1}{q_\alpha + 1} \frac{\phi^2}{\tilde{l}} - 1 \right]. \quad (150)$$

Zavedením novej pomocnej premennej

$$\beta = \frac{q_\alpha - 1}{q_\alpha + 1} \frac{1}{\tilde{l}}$$

dostaneme užitočnú rovnicu $y^2 + 1 = \beta\phi^2$, čo nám umožní vhodne upraviť výraz

$$\begin{aligned} RHS \equiv \mathcal{R} &= q_z(1 + \beta\tilde{l})\phi^2 + (\beta\phi^2 - 1)\phi^2 \frac{2l_\alpha^{-1}}{q_\alpha + 1} \\ &= 2\phi^2 l_\alpha^{-1} (q_\alpha - 1) \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{l}} \left(\frac{\phi}{q_\alpha + 1} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ľavú stranu rovnice (147) označíme LHS a tiež upravíme pomocou premennej β

$$LHS = \frac{q_z x^o}{c_\alpha} (1 + y^2) \phi = \frac{q_z x^o}{c_\alpha} \beta \phi^3.$$

Z rovnosti $LHS = RHS$ dostávame rovnicu

$$q_z \phi \frac{x^o}{c_\alpha} \frac{l_\alpha / \tilde{l}}{q_\alpha + 1} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{l}} \left(\frac{\phi}{q_\alpha + 1} \right)^2 \right\},$$

ktorú po zavedení ďalšej pomocnej premennej

$$\psi = \frac{\phi}{q_\alpha + 1} \quad (151)$$

dostávame v tvare

$$\frac{x^o}{c_\alpha} = \frac{2}{q_\alpha} \frac{\tilde{l}}{\psi} \left\{ 1 + \frac{\psi^2}{\tilde{l}} \right\} = \frac{2}{q_\alpha} \left\{ \psi + \frac{\tilde{l}}{\psi} \right\}, \quad (152)$$

ktorý nám umožňuje vyjadriť predpis pre Rayleighove číslo

$$R^o = \pi \frac{K K_\alpha^2}{a^2} \left(\frac{x^o}{c_\alpha} \right) = \frac{2\pi}{q_z} \frac{K^3}{a^2} \left\{ \psi + \frac{\tilde{l}}{\psi} \right\}. \quad (153)$$

Všimnite si, že závislosť R^o na anizotropii je skrytá (iba) v ψ , teda v závislosti $\psi = \psi(\alpha)$ (151).

Vzťah (150) dáva dva závažné výsledky, pretože najprv z neho vyplýva, že v neviskóznom prípade $c_\alpha = 0$ ($E_z = 0$) neexistujú OC módy, pretože pri $\tilde{l} = 0$ je frekvencia nekonečne veľká, čo samozrejme nemôže nastať. Platí to pre všetky α , teda ako pre izotropný, tak i anizotropné prípady. Ďalej pre nestacionárne, teda OO i OC módy v izotropnom prípade zrejme musí byť $q > 1$, čo takisto potvrdia aj vzťahy (165, 168, 186, 187); presne ako v prípade so zvislou rotačnou osou v modeli III. Zo (150) však vyplýva všeobecnejší výsledok pre $q_{ex} = q_{ex}(\alpha) = l_\alpha^{-1}$, určujúce hranicu existencie OO módov, teda (nezobrazené) vertikály $q_z = q_{ex}(\alpha)$ na Aq_z režimových diagramoch na obr. 42ab a 48 v podkapitole 9.5 Numerické výsledky. Pri $l_\alpha^{-1} = [(1 + 8/\alpha)^{1/2} + 1]/4$ je zrejmé, že podobne, ako v modeli III u vertikálnej rotačnej osi platí, že všetky vertikály $q_z = q_{ex}(\alpha)$ by mali byť naľavo od vertikál $q_z = q_{pref}(\alpha)$, predstavujúcich hranice SO/OO, teda hranice preferencie medzi SO a OO módmi. Teda OO módy môžu existovať aj v oblastiach mierne naľavo od vyznačených SO/OO hraníc na obr. 42ab a 48, ale už tam nie sú preferované.

9.3.4 Nestacionárne módy; izotropný prípad

Disperznú rovnicu (144) upravíme v izotropnom prípade pomocou substitúcií

$$y = \frac{\sigma}{K^2}, \quad \phi = \frac{\Lambda m^2}{\pi K}, \quad x = \frac{R a^2 E}{\pi^2} \quad \text{a} \quad c = \frac{EK^3}{\pi}, \quad (154)$$

na tvar analogický rovnici (5.3) v [37]

$$q x^o (1 + iy) \{c(1 + iy) + \phi\} = (q + iy)c \left\{ [c(1 + iy) + \phi]^2 + \tilde{l}(1 + iy)^2 \right\}, \quad (155)$$

kde $\tilde{l} = l^2/\pi^2$. Pritom substitúcie (154), úmerné doležitým fyzikálnym veličinám, sú izotropným priblížením už definovaných všeobecnejších anizotropných substitúcií (145). Analogickým zavedením $\tilde{a} = a^2/\pi^2$ a $\tilde{m} = m^2/\pi^2$ môžeme vzťahy (154) pomocou vlnkovaných veličín vyjadriť nasledovne

$$\phi = \frac{\Lambda\tilde{m}}{(1+\tilde{a})^{1/2}}, \quad \frac{x}{c} = \pi^{-1}a^2K^{-3}R = \frac{R}{\pi^2} \frac{\tilde{a}}{(1+\tilde{a})^{3/2}} \quad \text{a} \quad c = \pi^2 E(1+\tilde{a})^{3/2}. \quad (156)$$

Dôležitý vzťah pre R^o teda je

$$R^o = \pi^2 \left(\frac{x^o}{c} \right) \frac{(1+\tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}}. \quad (157)$$

Položením imaginárnej časti rovnice (155) rovnej nule dostaneme vyjadrenie pre premennú y úmernú frekvencii v tvare

$$y^2 = \frac{c\phi^2 + (2c^2(q+1) - qx)\phi + c(c^2 + \tilde{l})(2q+1) - 2cqx}{c(c^2 + \tilde{l})}, \quad (158)$$

ktorá je analógiou k rovnici (5.4) v [37]. Elimináciou y^2 z reálnej časti (155) dostávame

$$\frac{x^o}{c} = \frac{4(q+1)c^2 + (3q+7)\phi c + 3\phi^2 + 4\tilde{l}(q+1) - T\phi}{2q(2c + \phi)}, \quad (159)$$

čo je analógia k (5.5) v [37] (odpovedajúca rovnica má však dve riešenia, z ktorých len (159) je fyzikálne vhodné, a ktoré budeme uvažovať v nasledujúcom texte). Pritom

$$T = \frac{\mathcal{R} - \tilde{l}(q+1)}{c}, \quad (160)$$

$$\frac{\mathcal{R}}{c} = \sqrt{(q+1)^2c^2 + 2(q+1)\phi c + (\phi^2 - 2\tilde{l}((q-6)q+1)) + 2(\tilde{l}/c)(3q-1)\phi + (\tilde{l}/c)^2(q+1)^2} \quad (161)$$

a odmocninový výraz \mathcal{R} bol analogicky zavedený v [37] (vzťah (5.6)). Pre presný numerický výpočet T v prípade $c \ll 1$ využijeme zrejmu identitu

$$T = \frac{\mathcal{R}^2 - \tilde{l}^2(q+1)^2}{c(\mathcal{R} + \tilde{l}(q+1))} = \frac{2\tilde{l}(3q-1)\phi + \phi^2c - 2[(q-6)q+1]\tilde{l}c + 2(q+1)\phi c^2 + (q+1)^2c^3}{\mathcal{R} + \tilde{l}(q+1)}. \quad (162)$$

Ak do rovnice (158) za x dosadíme x^o z rovnice (159), tak dostaneme

$$y^2 = \frac{(T - \phi)\phi + (q-3)\phi c}{2(\tilde{l} + c^2)} - 1, \quad (163)$$

veľmi vhodný výraz pre výpočet frekvencie (150), maximálne eliminujúci chybu pri numerických výpočtoch. Na základe (162) je dobre si uvedomiť, že v čitateľoch zlomkov (159, 163) sa nasledujúce výrazy vyjadria ako

$$3\phi^2 - T\phi = 4\phi^2/(q+1) + O(c), \quad (T - \phi)\phi = 2\phi^2(q-1)/(q+1) + O(c).$$

Využije sa to v nasledujúcich vyjadreniach pre R^o a σ v priblížení $c \ll 1$.

Pri nízkych frekvenciách sa napokon nestacionárna konvekcia pri $y^2 = 0$ stotožní so stacionárnou. Teda z rovnosti Rayleighových čísel pre stacionárnu konvekciu (129–131) a nestacionárnu konvekciu

$$x^o|_{y^2=0} = \frac{c(\phi^2 + 2c(q+1)\phi + (c^2 + \tilde{l})(2q+1))}{q(2c + \phi)} \quad (164)$$

dostaneme pri ľubovoľných pevných Λ a E odpovedajúcu hodnotu

$$q_0 = \frac{(c + \phi)((c + \phi)^2 + \tilde{l})}{\phi^3 + c^2\phi - 2\tilde{l}\phi + \phi + c(2\phi^2 - 2\tilde{l} + 2)}, \quad (165)$$

pri ktorej končí, resp. začína existovať nestacionárna konvekcia. Teda pre pevné (Λ, E) , resp. (ϕ, c) nestacionárna konvekcia nastupuje pre $q > q_0$. Absolútne minimum pravej strany výrazu (165) je pre $\phi \rightarrow \infty$ a je rovné 1. Je zrejmé, že nestacionárna konvekcia nemôže existovať pre $q < 1$, ako nám to už vyplynulo zo (150), a to presne tak, ako v prípade vertikálnej rotačnej osi.

Dalej sústredíme pozornosť na nestacionárnu konvekciu v tvare roliek kolmých na magnetické pole - OC módy, pre ktoré platí $\tilde{l} = 0$. Pri $\tilde{l} = 0$ máme zjednodušenia

$$\frac{\mathcal{R}}{c}\Big|_{\tilde{l}=0} = T\Big|_{\tilde{l}=0} = (q+1)(\psi + c), \quad (166)$$

$$\frac{x^o}{c}\Big|_{\tilde{l}=0} = \frac{q+1}{q}(\psi + c), \quad \text{kde} \quad \psi = \frac{\phi}{q+1}, \quad (167)$$

pričom z parametra

$$y^2|_{\tilde{l}=0} = \frac{(q-1)\phi}{c} - 1, \quad (168)$$

úmerného štvorca frekvencie OC módov (154), máme zaujímavý výsledok. Vo viskóznom prípade, teda pri nenulovom $c \neq 0$, resp. $E \neq 0$, OC módy môžu existovať na rozdiel od neviskózneho prípadu, kedy neexistujú (pozri časť 9.3.3).

9.4 Izotropný prípad v limite $E = 0$ a pre $E \ll 1$

Izotropný prípad tu v modeli IV ležatej rotačnej osi má oproti modelom I–III bohatší význam. V predchádzajúcich modeloch izotropné prípady slúžili iba na porovnanie s anizotropnými prípadmi. Teraz však ide o doteraz neštudovaný prípad, teda samotný izotropný prípad v modeli IV prinesie nové poznatky a výsledky. Izotropný prípad je určite jednoduchší ako anizotropné, a tým má ďalšiu nezanedbateľnú úlohu. Niečo nové, a to je model s ležatou osou, začneme v rámci možnosti študovať čo najjednoduchšie.

V izotropnom prípade je anizotropný parameter α rovný jednej, teda $\alpha = 1 \Rightarrow K_\alpha^2 = K^2 = \pi^2 + a^2 = \pi^2(1 + \tilde{a}) = \pi^2 A$ a $l_\alpha = 1$. Ďalej $c_\alpha = c$, $C_\alpha = C$, $q_\alpha = q_z = q$ a $E_z = E$.

9.4.1 Stacionárna konvekcia, SO módy

V širokom rozsahu hodnôt magnetického poľa, teda pre $\Lambda \geq O(1)$ môžeme očakávať, že rolky sú šikmé. V prípade stacionárnych šikmých roliek je Rayleighove číslo pri $\alpha = 1$ a v súlade so (129–131)

$$R^s = \pi^2 \frac{(1 + \tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ \phi + c + \frac{\tilde{l}}{\phi + c} \right\}, \quad \text{keď} \quad c = \pi^2 E (1 + \tilde{a})^{3/2} \quad \text{a} \quad \phi = \frac{\Lambda \tilde{m}}{(1 + \tilde{a})^{1/2}}. \quad (169)$$

U šikmých, či stacionárnych alebo nestacionárnych roliek (SO a OO módov), je minimum Rayleighoveho čísla dané nulovosťou dvoch parciálnych derivácií. $R^s = R^s(\tilde{l}, \tilde{m})$ môže byť dané aj ako $R^s = R^s(\tilde{a}, C)$ (pozri (134) a časť 9.3.1), a preto minimalizácia Rayleighoveho čísla u SO módov v izotropnom prípade, kedy $c_\alpha = c$, $C_\alpha = C$ a $l_\alpha = 1$, sa zabezpečí takto

$$\frac{\partial R^s}{\partial C} = 0 \Rightarrow (\tilde{m} + \varepsilon A^2)^2 = \frac{A}{\Lambda^2}(\tilde{a} + \varepsilon A^2). \quad (170)$$

Napokon z $\partial R^s / \partial \tilde{a} = 0$ a využitím (170) máme

$$\tilde{m} = \frac{1 - 2\tilde{a}}{1 - \tilde{a}}(\tilde{a} + \varepsilon A^2). \quad (171)$$

Pritom $\varepsilon = \pi^2 E / \Lambda$ a vzťahy (170, 171) platia pre ľubovoľné hodnoty ε .

Neviskózna limita je výrazným zjednodušením, a takisto vzťahy (169–171) v limite $\varepsilon = 0$, resp. $E = 0$ i $c = 0$ prejdú na jednoduchší tvar

$$R^s = \pi^2 \frac{A^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ \phi + \frac{\tilde{l}}{\phi} \right\}, \quad (172)$$

$$\tilde{m}^2 = \frac{A}{\Lambda^2} \tilde{a} \quad (173)$$

$$\text{a} \quad \tilde{m} = \frac{1 - 2\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \tilde{a}. \quad (174)$$

Pripomíname pritom, že $A = 1 + \tilde{a}$. Neskôr v časti 9.4.3 ukážeme, že rovnice (173, 174) teraz pre SO módy v limite $E = 0$ takisto platia aj pre OO módy v limite $E = 0$ avšak s rozdielom, že u OO módov teraz $1/\Lambda$ prejde na $(q+1)/\Lambda$. Preto pre porovnanie SO a OO módov si zavedieme parameter Q , rôzne definovaný u SO a OO módov, a to $Q = \Lambda^{-1}$ a $Q = (q+1)/\Lambda$ pre SO resp. OO módy.

Pri zrejmej požiadavke $0 \leq \tilde{m} \leq \tilde{a}$ máme hlavne z prvej nerovnice a zo (174), resp. zo (171) dôležité ohraničenie pre \tilde{a} , a to $\tilde{a} \leq 1/2$. Pre SO módy môžeme získať porovnaním (173) a (174) existenčnú hranicu parametra Λ . Zrejme platí

$$\frac{1}{\Lambda} = Q = \left(\frac{\tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \right)^{1/2} \frac{1 - 2\tilde{a}}{1 - \tilde{a}}. \quad (175)$$

Deriváciou $dQ/d\tilde{a}$ a riešením $dQ/d\tilde{a} = 0$ dostaneme $Q_{max} = (1/2)(3/2)^{1/2}$, z čoho máme, že SO módy existujú len pre $\Lambda \geq \Lambda_{min} = Q_{max}^{-1} \doteq 3,266$. V nasledujúcej časti 9.4.2 dokážeme, že hranica preferencie medzi SO a SC módmi je $\Lambda_{pref} = 4$. Teda SO módy sú preferované pre $\Lambda > 4$, zatiaľčo SC módy pre $\Lambda < 4$. V časti 9.4.2 je aj diskusia o súčasnej existencii SO a SC módov pre $3,266 \leq \Lambda \leq 4$ (pozri režimové Λq diagramy (a,b) na obrázku 42).

Zo (173, 174) ľahko odvodíme kubickú rovnicu

$$(4 - Q^2)\tilde{a}^3 - (4 - Q^2)\tilde{a}^2 + (1 + Q^2)\tilde{a} - Q^2 = 0 \quad (176)$$

pre \tilde{a} ($= a^2/\pi^2$, veličinu úmernú štvorcu horizontálneho vlnového čísla). Už vieme, že prijateľné riešenia $\tilde{a} \in \langle 0, 1/2 \rangle$. Limita $Q^2 \rightarrow \infty$ (teda $\Lambda \rightarrow 0$) dáva polynóm s koreňami -1 , 1 a 1 , teda všetkými mimo intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$, čo dokazuje, že SO módy (ale aj OO módy) nemôžu existovať pri $\Lambda = 0$, kde ako neskôr ukážeme, existujú a sú aj preferované

SC (resp. OC) módy. Ďalšia limita $Q^2 \rightarrow 0$ (teda $\Lambda \rightarrow \infty$) dáva polynóm s koreňami 0, $1/2, 1/2$, teda v rámci intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$. Takže SO (resp. OO) módy, t.j. rolky nie kolmé na magnetické pole sú v hre, keď magnetické pole je silné, teda $\Lambda \geq O(1)$. V podkapitole 9.5 je ukázané (pozri napr. obr. 44–47), že pri $\Lambda \rightarrow \infty$ sú rolky pri rastúcom Λ stále viac a viac naklonené ku smeru magnetického poľa, ako je to zrejmé zo (174), pretože $\tilde{m} = 0$ pri $\tilde{a} = 1/2$ (pozri tiež (96)). Odpovedajúce Rayleighove číslo $R_c^{SO}|_{\Lambda \rightarrow \infty} = 3\sqrt{3}\pi^2 \doteq 51,28$ (pozri vzťah pre R_c^{SO} nižšie), čo je tá istá hodnota ako v modeli III.

Využívajúc (134, 135) vyjadríme si teraz kritické Rayleighove číslo R_c^{SO} pre SO módy v limitách $\alpha = 1$, teda $C_\alpha = C$ a $l_\alpha = 1$, a ďalej $\varepsilon = 0$. Keďže zo (136) vyplýva $C = \tilde{a}^{1/2}$, tak (134) v uvedených limitách dáva

$$R_c^{SO} = \pi^2 \frac{(1 + \tilde{a}_c)^{3/2}}{\tilde{a}_c} \left\{ 2\tilde{a}_c^{1/2} - \frac{(1 + \tilde{a}_c)^{1/2}}{\Lambda} \right\}.$$

Ak pomocou (173, 174) vyjadríme $(1 + \tilde{a}_c)^{1/2}/\Lambda$, tak

$$R_c^{SO} = \pi^2 \Lambda \frac{(1 + \tilde{a}_c)(1 - 2\tilde{a}_c)}{(1 - \tilde{a}_c)^2} = \pi^2 \left(\frac{1 + \tilde{a}_c}{\tilde{a}_c} \right)^{1/2} \frac{1 + \tilde{a}_c}{1 - \tilde{a}_c}, \quad (177)$$

čo v nasledujúcej časti 9.4.2 pomôže určiť preferenčnú hranicu $\Lambda_{pref} = 4$ medzi SO a SC módmí.

Vnímajme teraz vzťahy (170, 171) v zmysle $\varepsilon \ll 1$, teda pre viskóznou kvapalinu s extrémne malou viskozitou. Zanedbaním členov $O(\varepsilon^2)$ dostaneme

$$\begin{aligned} & \left[(4 - Q^2)\tilde{a}^3 - (4 - Q^2)\tilde{a}^2 + (1 + Q^2)\tilde{a} - Q^2 \right] \tilde{a} + \\ & + \varepsilon A^2 \left[(12 - Q^2)\tilde{a}^3 - (14 - Q^2)\tilde{a}^2 + (4 + Q^2)\tilde{a} - Q^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (178)$$

pričom $\varepsilon = \pi^2 E/\Lambda$, $A = \tilde{a} + 1$ a $Q = \Lambda^{-1}$.

Je zrejmé, že (178) pre $\varepsilon = 0$, resp. $E = 0$ dáva už analyzovanú rovnicu (176). Teda pri $\varepsilon \ll 1$ môžeme očakávať, že korene \tilde{a} rovnice (178), ktoré majú fyzikálny význam, sa výrazne líšia od koreňov (176) nemôžu; iba ak malý parameter ε násobiaci v rovnici (178) najvyššiu mocninu \tilde{a} nespôsobí, že pribudnú ďalšie, a to veľmi veľké korene. Hoci člen $\varepsilon \tilde{a}^5$ dáva aj veľké korene \tilde{a} , ukazuje sa, že odpovedajúce $\tilde{m} < 0$ tým, že je záporné, vylučuje realistikosť $\tilde{a} \gg 1$ (protirečí to aj $\tilde{a} \leq 1/2$ v prípade rovnice (176)). Žiaľ, asymptotické riešenia (178) s uvážením členov $O(\varepsilon)$ priveľmi neobohacujú doterajší obraz SO módov. Pripomíname, že ten sa tvoril nielen v časti 9.4.1, ale i v podkapitolách 9.3 a 9.4. Samozrejme, že mnohé dôležité informácie o SO módoch možno nájsť v podkapitole 9.5 Numerické výsledky. Tam sa napr. v prípadoch SO aj OO módov potvrdzuje (pozri obr. 39b, 40b, 45a, 46b, 47b, 49b, 50b), že práve riešenia (176, 178) pri $Q \rightarrow 0$ (resp. $\Lambda \rightarrow \infty$) s hodnotami \tilde{a} málo menšími od $1/2$ dávajú veľmi dobré priblíženia kritických horizontálnych vlnových čísel $a_c = \pi \tilde{a}^{1/2} \doteq 2,22$.

9.4.2 Stacionárna konvekcia, SC módy

Pri menších magnetických poliach, teda pri $\Lambda < O(1)$, sa vplyv magnetického poľa na konvekciu nemusí potláčať orientovaním roliek do smeru blízkeho smeru magnetického poľa, a preto rolky môžu byť kolmé (cross) na magnetické pole. Študujeme preto teraz SC módy, u ktorých x -zložka vlnového čísla, teda zložka kolmá na naše pole v smere y , je nulová²³, teda $l = 0$. Potom $\tilde{l} = 0$ a $a = m$, resp. $\tilde{a} = \tilde{m}$. Navyše SC módy v našom

²³SC rolky sú kolmé na magnetické pole v smere y , a preto ich konvektívny obraz sa mení len v smere y , a nie v smere x .

modeli s horizontálnou rotačnou osou sú výrazne ovplyvnené rotáciou, pretože SC rolky sú rovnobežné s rotačnou osou.

Pozrime si špeciálne prípad $\Lambda \ll 1$. Vzťahy (170, 171) pri $\varepsilon = \pi^2 E/\Lambda$ sa pri $\Lambda \rightarrow 0$ vzájomne vylučujú, a preto SO módy pri malých magnetických poliach nemôžu existovať. Tým skôr jednoducho z fyzikálnych dôvodov môžeme pri $\Lambda \rightarrow 0$ vylúčiť P módy. Ostávajú nám teda len SC módy. Priamo zo (127) (pri $p = \lambda = 0$ a $K^2 = m^2 + \pi^2$) máme

$$R = R^s = \Lambda(m^2 + \pi^2) + E \frac{(m^2 + \pi^2)^3}{m^2}, \quad (179)$$

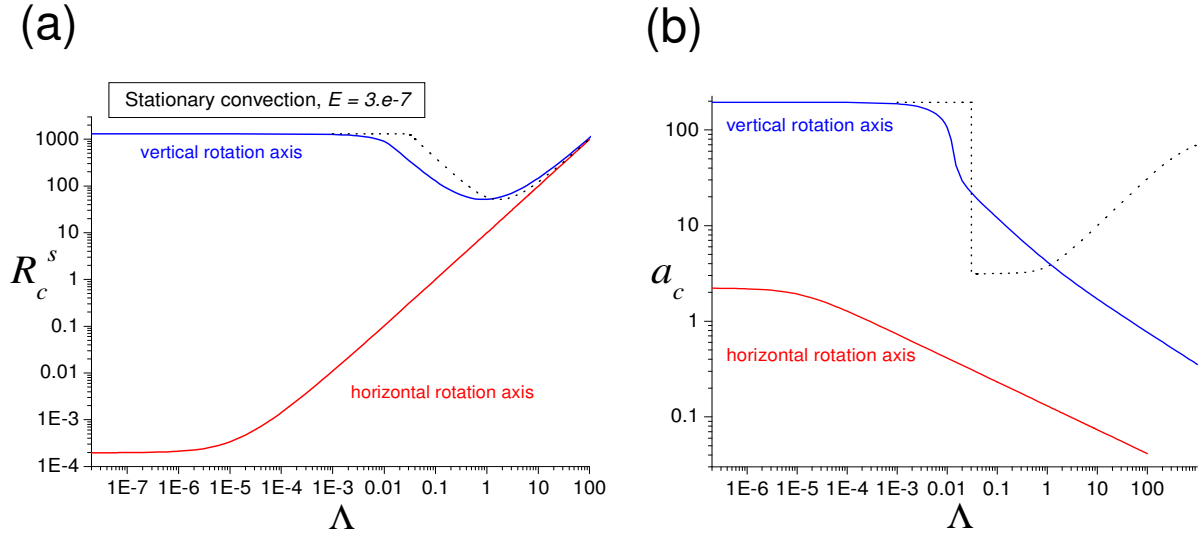
z čoho (ale aj zo (129, 130)) pri $\tilde{m} = m^2/\pi^2$ takisto

$$\tilde{R} = \frac{R^s}{\pi^2} = \Lambda(\tilde{m} + 1) + \pi^2 E \frac{(\tilde{m} + 1)^3}{\tilde{m}}. \quad (180)$$

Minimalizácia Rayleighovho čísla vedie na $\partial \tilde{R}/\partial \tilde{m} = 0$, teda na rovnicu

$$\Lambda + \pi^2 E \left(3 - \frac{1}{\tilde{m}^2} + 2\tilde{m} \right) = 0, \quad (181)$$

ktorá vedie na kubickú rovnicu pre \tilde{m} s jediným parametrom $\varepsilon = \pi^2 E/\Lambda$, ktorý pritom nie je závislý na uhlovej rýchlosti rotácie Ω_0 . Jej riešenia pri $E = 3 \cdot 10^{-7}$ s odpovedajúcim priebehom $R_c^s(\Lambda)$ a $m_c(\Lambda)$ sú prezentované na obrázku 38 pre hodnoty $\Lambda \in \langle 10^{-8}, 10^2 \rangle$. Vzťah (181) však ponúka dve dôležité asymptotické riešenia. Najprv pri $\varepsilon = \pi^2 E/\Lambda \ll 1$,



Obr. 38: Stacionárna konvekcia vo forme SC módov v prípadoch horizontálnej a vertikálnej rotačnej osi (červené a modré krivky); Závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c^s a kritického horizontálneho vlnového čísla $m_c (= a_c)$ na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 3 \cdot 10^{-7}$. Veľké rozdiely medzi týmito prípadmi sú pre $\Lambda \leq O(1)$, kedy SC módy sú preferované.

teda pre $\pi^2 E \ll \Lambda \ll 1$ máme

$$\tilde{m}_c = \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (182)$$

čo nám na základe (180) dáva kritické Rayleighove číslo

$$R_c^s = \pi^2 \Lambda (1 + 2\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)) = \pi^2 \Lambda + 2\pi^3 (E\Lambda)^{1/2} + O(E), \quad (183)$$

čomu veľmi pekne zodpovedajú pravé vetvy (pre „väčšie“ Λ) červených kriviek na obr. 38. Na obrázku 38b je m_c vs Λ , pričom $m_c = \pi \widetilde{m}_c^{1/2}$. Treba však zdôrazniť, že čím väčšie Λ , tým je lepšie splnená podmienka $\varepsilon = \pi^2 E / \Lambda \ll 1$. Preto asymptotické priblíženie $\widetilde{m}_c \sim \varepsilon^{1/2}$ a $R_c^s \sim \pi^2 \Lambda$ veľmi dobre vystihuje priebeh SC módov aj pre $\Lambda \geq O(1)$ prezentované v podkapitole 9.5 Numerické výsledky a ešte v tejto časti ho využijeme na porovnanie SC a SO módov v prípadoch $E = 0$ a $E \ll 1$.

Druhé asymptotické riešenie (181) máme pre $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = \Lambda / (\pi^2 E) \ll 1$, t.j. pre $\Lambda \ll \pi^2 E$. Teda

$$\widetilde{m}_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2) \quad \text{a} \quad R_c^s = \pi^4 E \left(\frac{27}{4} + \frac{3}{2} \tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2) \right). \quad (184)$$

Ak uvážime, že $m_c = a_c = \pi\sqrt{2}/2$ a ďalej, že klasické kritické Rayleighove číslo R_a , odvodené samotným Lordom Rayleighom v roku 1920 [13], je definované vzťahom $R_a = R_c^s / E$, tak vidíme očakávanú zhodu našej limity pre nulové magnetické pole s Bénardovou tepelnou konvekciou, a to v oboch dôležitých kritických číslach a_c a R_c^s . Tejto asymptotike odpovedajú ľavé vetvy červených kriviek na obrázku 38. V podkapitole 9.5 Numerické výsledky na žiadnom grafe nie sú prezentované tak malé hodnoty Λ , ako tu na obrázku 38.

Núka sa tu ďalší záver pre ležatú os. Na rozdiel od vertikálnej osi rotácie, rotácia okolo horizontálnej osi nebráni vzniku konvekcie. Treba si totiž uvedomiť, že $\Lambda \ll 1$ môže pri konečnej hodnote magnetického poľa znamenať i extrémne veľkú uhlovú rýchlosť rotácie²⁴. Vidieť, že silná rotácia okolo ležatej osi ($\Lambda \ll 1$) má také isté Rayleighove číslo, ako Bénardova konvekcia bez rotácie; pozri obr. 38a a (184). Rotácia si však uchováva dôležitú vlastnosť utlmiť brániaci efekt magnetického poľa pre konvekciu, ak $\Lambda = O(1)$ tak, ako je to pri vertikálnej osi rotácie. Na obr. 38a pekne vidieť, že oveľa efektívnejšie to robí rotácia okolo horizontálnej ako vertikálnej osi. Na obr. 38b si treba všimnúť, že horizontálne vlnové číslo $m_c = O(1)$ pri horizontálnej osi rotácie je oveľa menšie, ako v prípade vertikálnej rotačnej osi, kedy $m_c \gg 1$ (ako pri horizontálnom, tak aj pri vertikálnom magnetickom poli; modré a čierne krivky). V druhom prípade, teda pri vertikálnej rotačnej osi sa pri malých Λ a E nastolí geostrofická rovnováha, pre ktorú platí Taylorova-Proudmanova veta, zatiaľčo pri horizontálnej rotačnej osi v 1. prípade priblíženie geostrofickou rovnováhou nie je vhodné a Taylorova-Proudmanova veta neplatí. Podľa tejto vety sú silné zábrany pre vznik nestabilit. Zábrany môžu byť potlačené pri veľmi malej, ale nenulovej viskozite ($E \ll 1$) efektívnejším využitím viskozity, ak do hry vstúpia nestability s veľmi malými rozmermi konvektívnych buniek.

Vráťme sa teraz k limitnému prípadu $\Lambda \gg \pi^2 E$ vzťahu (181) a výsledku $\widetilde{m}_c \sim \varepsilon^{1/2} = \pi(E/\Lambda)^{1/2} \ll 1$, hlavne však ku $R_c^{SC} \sim \pi^2 \Lambda$, čo využijeme na určenie hranice preferencie $\Lambda_{SC/SO}$ medzi SC a SO módmami v limite $E = 0$. Z rovnosti $R_c^{SC} = R_c^{SO}$ pri využití (177) zrejme máme

$$\pi^2 \Lambda = \pi^2 A \frac{(1 + \tilde{a}_c)(1 - 2\tilde{a}_c)}{(1 - \tilde{a}_c)^2},$$

čo dáva kritické \tilde{a}_c pre SO módy, ktorým odpovedá hranica preferencie s SC módmami. Teda z rovnice $3\tilde{a}_c^2 - \tilde{a}_c = 0$ máme $\tilde{a}_c = 1/3$ a zo (177) je

$$R_c^{SO} = \pi^2 \left(\frac{4/3}{1/3} \right)^{1/2} \frac{4/3}{2/3} = 4\pi^2.$$

²⁴SC módy, preferované pre $\Lambda \ll 1$, nezávisia na rotácii; pozri (181). Preto obe asymptotiky, či pre $\varepsilon \ll 1$ alebo $\varepsilon^{-1} \ll 1$, možno spájať s ľubovoľnými hodnotami Ω_0 , teda ako pre rýchlu, tak aj pre pomalú rotáciu.

Keďže $R^{SC} = \pi^2 \Lambda$, tak $\Lambda_{pref} \equiv \Lambda_{SC/SO} = 4$ (pozri režimové Λq diagramy (a,b) na obrázku (42)).

Zaujímavé je však odvodiť si R^{SC} zo vzťahov (129–131) v limitách $\alpha = 1$ a $E = 0$. Máme

$$R^{SC} = \pi^2 \frac{(1 + \tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ \frac{\Lambda \tilde{a}}{(1 + \tilde{a})^{1/2}} + 0 \right\},$$

pretože pre SC módy $\tilde{l} = 0$ a $\tilde{m} = \tilde{a}$. Napokon $R^{SC} = \pi^2 \Lambda(1 + \tilde{a})$ a je zrejmé, že $\partial R^{SC} / \partial \tilde{a} \neq 0$. Teda na rozdiel od viskózneho prípadu v neviskóznom prípade $E = 0$ kritické Rayleighove číslo pre SC módy nemáme z lokálneho minima R^{SC} vzhľadom na \tilde{a} , ale len z absolútneho, a to pre $\tilde{a} = 0$. Teda formálne $R_c^{SC} = \pi^2 \Lambda$, čo je takmer to isté, ako vo viskóznom prípade $E \ll 1$.

SC mód s $\tilde{a} \equiv \tilde{a}^{SC} = 0$ budeme nazývať spiaci SC mód a budeme ho vnímať ako kritický SC mód. Ďalej v študovanom neviskóznom prípade $E = 0$ zavedieme tzv. prebudené SC módy a ukážeme, ako umožňujú predstaviť si konvekciu realistickejšie. SO rolky pri hranici preferencie (s SC módm) a ich hranici existencie, teda pre $\Lambda = 4$ a $\Lambda = 3,266 (= 4(2/3)^{1/2})$ a s odpovedajúcimi horizontálnymi vlnovými číslami 1,814 ($= \pi/3^{1/2}$) a 1,405 ($= \pi/5^{1/2}$) zvierajú so smerom magnetického poľa uhly $\gamma = 45^\circ$ a 60° ($\gamma = \arcsin [(\tilde{m}/\tilde{a})^{1/2}]$, kde \tilde{m} je dané (174)), čo odpovedá ich správaniu pri klesajúcom Λ , teda zakolmovaniu a zriedňovaniu sa vzhľadom na magnetické pole. Je zrejmé, že pre každé $\Lambda \in \langle 3,266; 4 \rangle$ ku každému spiacemu SC módu s $\tilde{a}_c^{SC} = 0$ existujú prebudené SC módy s nenulovým $\tilde{a}^{SC} \leq \tilde{a}_{max}^{SC}$, pričom $R^{SC}(\tilde{a}_{max}^{SC}) = R_c^{SO}(\tilde{a}_c^{SO})$, čo dáva pre \tilde{a}_{max}^{SC} definičný vzťah

$$\Lambda(1 + \tilde{a}_{max}^{SC}) = \Lambda \frac{(1 + \tilde{a}_c^{SO})(1 - 2\tilde{a}_c^{SO})}{(1 - \tilde{a}_c^{SO})^2}, \quad \text{resp.} \quad \tilde{a}_{max}^{SC} = \frac{3\tilde{a}_c^{SO}(1/3 - \tilde{a}_c^{SO})}{(1 - \tilde{a}_c^{SO})^2}. \quad (185)$$

Prebudené SC módy na rozdiel od spiacich módov reálne zabezpečujú pohyb-konvekciu, pričom spiace módy sú síce pred prebudenými preferované, ale ich $\tilde{a}_c^{SC} = 0$ dáva pohyb-konvekciu s nekonečne horizontálne rozľahlou konvektívnou bunkou, čo nie je realistické. Všetky prebudené SC módy s horizontálnym vlnovým číslom $0 < \tilde{a}^{SC} < \tilde{a}_{max}^{SC}$ sú pritom preferované voči SO módom pri danom Λ s odpovedajúcim a_c . Zo (185) vyplýva, že pri $\Lambda = 4$ a $\Lambda = 3,266$ a pre SO módy odpovedajúcich $\tilde{a}_c^{SO} = 1/3$ a $\tilde{a}_c^{SO} = 1/5$ máme pre prebudené SC módy $\tilde{a}_{max}^{SC} = 0$ a $\tilde{a}_{max}^{SC} = 1/8$. Teda prebudené SC módy, pokiaľ musia súperiť s SO módm, majú minimálny rozsah vlnových čísel pre $\Lambda = 4$, keď len preberajú preferenciu a maximálny rozsah u $\Lambda = 3,266$, keď SO módy končia svoju existenciu. Pre menšie Λ , teda pre $\Lambda < 3,266$ rozsah vlnových čísel prebudených módov je neohraničený pokiaľ neštudujeme ich súperenie s OO a OC módm (pozri Λq režimový diagram na obrázku 42).

Vo viskóznom prípade $0 \neq E \ll 1$, teda v prípade, ktorý by sa veľmi nemal líšiť od $E = 0$, vôbec netreba zavádzať spiace a prebudené SC módy, pretože v oboch limitných prípadoch $\pi^2 E \ll \Lambda$ a $\Lambda \ll \pi^2 E$ ľahko vidieť existenciu (182, 183) kritických módov s kritickými číslami prirodzene definovanými cez lokálny extrém Rayleighoveho čísla vzhľadom na horizontálne vlnové číslo. Nedá poznamenať, že tu máme pekný názorný príklad kvantitatívnej podobnosti, ale kvalitatívnej rozdielnosti tekutiny s nulovou, resp. nenulovou viskozitou.

9.4.3 Nestacionárna konvekcia; OO módy, $E = 0$

V izotropnom prípade pre OO módy v limite $E = 0$ pre frekvenciu σ máme

$$\sigma^2 = K^4 \left[\frac{q-1}{q+1} \frac{\phi^2}{\tilde{l}} - 1 \right], \quad \phi = \frac{\Lambda m^2}{\pi K} = \frac{\Lambda \tilde{m}}{A^{1/2}}, \quad A = 1 + \tilde{a} \quad (186)$$

$$\text{resp.} \quad \sigma^2 = \pi^4 A^2 \left[\frac{q-1}{q+1} \frac{\phi^2}{\tilde{l}} - 1 \right], \quad (187)$$

a pre Rayleighove číslo

$$R^o = \frac{2\pi K^3}{q} \frac{1}{a^2} \left\{ \psi + \frac{\tilde{l}}{\psi} \right\} = \frac{2\pi^2 A^{3/2}}{q} \frac{1}{\tilde{a}} \left\{ \psi + \frac{\tilde{l}}{\psi} \right\}. \quad (188)$$

Pritom

$$\psi = \frac{\phi}{q+1} = \frac{\Lambda}{q+1} \frac{\tilde{m}}{A^{1/2}}. \quad (189)$$

Dobré je uvedomiť si, že vzťahy (186, 189, 188) pre izotropný prípad pekne korešpondujú vzťahom (150, 151, 153) v anizotropných prípadoch. Nech

$$\tilde{R} \equiv \frac{q}{2\pi^2} R^o = \frac{A^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ \psi + \frac{\tilde{l}}{\psi} \right\}. \quad (190)$$

Pripomíname, že v prípade stacionárnej konvekcie pri $E_z \neq 0$ sme mali C , ktorého²⁵ analógiou teraz je ψ . Takže pri $E_z = 0$ máme závislosti

$$C = \phi, \quad \psi = \frac{\phi}{q+1} = \frac{C}{q+1}. \quad (191)$$

Prejdeme teraz z dvojice nezávislých premenných \tilde{l} a \tilde{m} k novej dvojici \tilde{a} a ψ , definované nasledovne

$$\tilde{a} = \tilde{l} + \tilde{m} = \tilde{a}(\tilde{l}, \tilde{m}), \quad (192)$$

$$\psi = \frac{\Lambda}{q+1} \frac{\tilde{m}}{(1+\tilde{a})^{1/2}} = \psi(\tilde{l}, \tilde{m}). \quad (193)$$

Spätná transformácia je potom

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= \tilde{a} - \frac{q+1}{\Lambda} (1+\tilde{a})^{1/2} \psi = \tilde{l}(\tilde{a}, \psi), \\ \tilde{m} &= \frac{q+1}{\Lambda} (1+\tilde{a})^{1/2} \psi = \tilde{m}(\tilde{a}, \psi). \end{aligned}$$

Pre výpočet kritických čísel môžeme využiť vzťah

$$\tilde{R} = \tilde{R}(\tilde{a}, \psi) = \frac{(1+\tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left\{ \psi + \frac{\tilde{a}}{\psi} - Q(1+\tilde{a})^{1/2} \right\}, \quad (194)$$

kde $Q = (q+1)/\Lambda$. Pri hľadaní kritických čísel vyjadríme prvé parciálne derivácie \tilde{R} podľa premenných \tilde{a} a ψ nasledovne

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \psi} = (1+\tilde{a})^{3/2} \left\{ \frac{1}{\tilde{a}} - \frac{1}{\psi^2} \right\}, \quad (195)$$

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{a}} = \frac{(1+\tilde{a})^{1/2}}{\tilde{a}^2} \left\{ \left(\frac{\tilde{a}}{2} - 1 \right) \psi + \frac{3\tilde{a}^2}{2} - Q(1+\tilde{a})^{1/2}(\tilde{a}-1) \right\}. \quad (196)$$

²⁵ $C = \pi^2 E_z A^{3/2} + \Lambda \tilde{m} A^{-1/2}$.

Z podmienky nulovosti derivácie $\partial\tilde{R}/\partial\psi = 0$ dostaneme $\psi = \tilde{a}^{1/2}$. Z definície premennej ψ (193) dostaneme rovnicu

$$\frac{\Lambda}{q+1} \frac{\tilde{m}}{(1+\tilde{a})^{1/2}} = \tilde{a}^{1/2}. \quad (197)$$

Podmienka nulovosti derivácie $\partial\tilde{R}/\partial\tilde{a} = 0$ a skutočnosť, že $\psi = \tilde{a}^{1/2}$ nám dávajú rovnicu

$$\left(\frac{\tilde{a}}{2} - 1\right) \tilde{a}^{1/2} + \frac{3}{2} \tilde{a}^{3/2} = Q(1+\tilde{a})^{1/2}(\tilde{a}-1),$$

ktorú po umocnení na druhú a po ďalších algebraických úpravách prepíšeme na kubickú rovnicu pre neznámu \tilde{a}

$$(4 - Q^2)\tilde{a}^3 + (-4 + Q^2)\tilde{a}^2 + (1 + Q^2)\tilde{a} - Q = 0. \quad (198)$$

Pripomíname, že pre SO módy sme mali takú istú rovnicu (176) s $Q = \Lambda^{-1}$ na rozdiel od terajšieho $Q = (q+1)/\Lambda$ u OO módov.

9.4.4 Nestacionárna konvekcia; OO módy, $E \ll 1$

V limite $E = 0$ sa ukazuje pekná podobnosť stacionárnych a nestacionárnych módov, a to vďaka formálnej matematickej podobnosti vyjadrení Rayleighových čísel pre SO a OO módy (169, 188). Avšak vo viskóznom prípade, hoci i pri veľmi malej viskozite, t.j. pri $E \ll 1$, resp. $c \ll 1$ máme také vyjadrenia pre Rayleighove čísla pre SO a OO módy, že s podobnosťou už nemožno rátať. Zo (129–131) máme

$$R^{SO}\Big|_{c \ll 1} = \pi^2 \frac{(1+\tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left[\phi + \frac{\tilde{l}}{\phi} + c \left(1 - \frac{\tilde{l}}{\phi^2} \right) \right] + O(c^2) \quad (199)$$

a zo (156, 157, 159, 162, 188)

$$R^{OO}\Big|_{c \ll 1} = \frac{2\pi^2}{q} \frac{(1+\tilde{a})^{3/2}}{\tilde{a}} \left[\psi + \frac{\tilde{l}}{\psi} + c \left(\frac{q-1}{q+1} \frac{\psi^2}{\tilde{l}} + 1 - \frac{2\tilde{l}}{q(q+1)\psi^2} \right) \right] + O(c^2). \quad (200)$$

Na prvý pohľad zo (199, 200) je vidieť, že pri $c = 0$ sú R^{SO} a R^{OO} veľmi podobné. Pri $\psi = \phi/(q+1)$ a $\phi = \Lambda\tilde{m}/(1+\tilde{a})^{1/2}$ je zrejme, prečo pri limite $c = 0$, resp. $E = 0$ sa vzťahy pre určenie kritických čísel pre SO a OO módy takmer zhodovali až na odlišnosť parametra Q , rovného Λ^{-1} a $(q+1)/\Lambda$ pre SO, resp. OO módy (176, 198).

$O(c)$ členy v (199, 200) pre Rayleighove čísla SO a OO módov sa však už výrazne odlišujú. Napr. vo výraze pre R^{OO} je $\tilde{l}(=l^2/\pi^2)$ v menovateli, čo naznačuje problémy pre OC módy; dokázali sme, že OC módy pre $c = 0$ neexistujú (pozri časť 9.3.3 a (150)). V nasledujúcej časti sa dokonca venujeme špeciálnym OO módom, tzv. OC' módom, ktorých vlastnosti sú výrazne ovplyvnené s \tilde{l} v menovateli $O(c)$ člena v (200). Totiž voľba správnej malosti \tilde{l} , v primeranej miere eliminovanej malosťou c , nie je triviálna.

Podobné niečo nemohlo byť v modeli III so zvislou rotačnou osou. Preto aj vidieť na režimovom Λq diagrame na obrázku 42 výrazné rozdiely pre $E = 0$ a $E \ll 1$ u ležatej osi. Pozoruhodná je však kvalitatívna podobnosť (b) a (c) diagramov pre $E \ll 1$ ležatej osi a $E = 0$ zvislej osi.

9.4.5 Nestacionárna konvekcia; OC' módy, $E \ll 1$

Numerické výpočty priniesli v prípade OO módov zaujímavú špecifickú podmnožinu tzv. OC' módov, charakterizovanú ich takmer kolmostou na magnetické pole ($\tilde{l} \ll \tilde{a}$). Prirodzene vyvstala otázka, či sa analyticky s asymptotickým priblížením podarí upresniť ich vlastnosti, a takisto nájsť dobrý súlad vybraného asymptotického priblíženia s numerickým výpočtom. Pri vyšetrowaní OC' módov preto predpokladáme priblíženie $\tilde{l} \sim \beta c^{1/2}$. Pri tomto predpoklade je premenná x^o/c (159) definovaná nasledovne

$$\frac{x^o}{c} = \frac{2\psi_a(\tilde{a})}{q} + c^{1/2} f(\tilde{a}, \beta) + O(c), \quad (201)$$

kde

$$\psi_a = \frac{\phi_a}{(q+1)}, \quad \phi_a = \frac{\Lambda \tilde{a}}{(1+\tilde{a})^{1/2}}, \quad f(\tilde{a}, \beta) = \frac{2\beta}{q\psi_a} - \frac{2\psi_a\beta}{q\tilde{a}} + \frac{2\psi_a^2 q - 1}{\beta q + 1} \quad (202)$$

a podľa (156) pripomínáme $c = \pi^2 E(1 + \tilde{a})^{3/2}$.

Pri odvodení (201, 202) zo (159) sa využilo

$$\tilde{m} = \tilde{a} - \beta c^{1/2} + O(c) \quad (203)$$

a napokon v súlade so (156) vzťahy pre ϕ a ψ sú

$$\phi = \phi_a \left(1 - c^{1/2} \frac{\beta}{\tilde{a}} + O(c) \right), \quad \text{resp.} \quad \psi = \psi_a \left(1 - c^{1/2} \frac{\beta}{\tilde{a}} + O(c) \right). \quad (204)$$

Pri hľadaní OC' módov derivujeme najprv výraz x^o/c (201) podľa β a riešením rovnice $d(x^o/c)/d\beta = 0$ dostávame

$$\beta^2 = q \frac{q-1}{q+1} \frac{\psi_a^3}{\tilde{a} - \psi_a^2}. \quad (205)$$

Ďalej derivujeme výraz (157) pre R^o podľa \tilde{a} . Rovnicu $dR^o/d\tilde{a} = 0$ už s uvážením β zo (205) riešime numericky (pri konkrétnych vstupných parametroch Λ, q, E), pričom fyzikálne vhodný koreň \tilde{a} je už veličina úmerná horizontálnemu vlnovému číslu OC' módov. Minimalizácia R^o cez \tilde{a} a β teda dáva kritické čísla \tilde{a}_c a R_c^o , ktoré odpovedajú priblíženiu $\tilde{l} = \beta c^{1/2} + O(c)$, a ktoré dávajú vzťah

$$y^2 \Big|_{\tilde{l} \ll \tilde{a}} = \frac{(q^2 - 1)\psi_a^2}{\beta c^{1/2}} - \frac{2(q^2 - 1)\psi_a^2}{\tilde{a}} - \frac{2q(q-1)\psi_a^3}{\beta^2} - 1 + O(c^{1/2}), \quad (206)$$

teda pre frekvenciu $\sigma \sim y$ (154). Nasledujúca tabuľka 2 naznačuje, že numericky nájdené „prekvapujúce“ OC' módy prirodzene existujú vo viskóznej limite $E \ll 1$, kde Λ

Λ	a_N	a_A	l_N	l_A	R_N^o	R_A^o	y_N^2	y_A^2	Λ
0,1	0,607	0,604	0,741e-3	0,774e-3	0,3697	0,3695	73,221	65,244	0,1
2	0,374	0,373	0,351e-2	0,356e-2	6,8687	6,8680	204,571	196,611	2
10	0,292	0,291	0,834e-2	0,841e-2	33,712	33,710	341,448	333,939	10

Tabuľka 2: Porovnanie vlastností OC' módov, získaných numericky a asymptoticky.

je Elsasserove číslo, a_N a a_A horizontálne vlnové čísla ($a = \pi \tilde{a}^{1/2}$), získané numericky resp. asymptoticky a rovnako tiež vlnové čísla l_N a l_A ($l = \pi \tilde{l}^{1/2}$), Rayleighove čísla R_N

Λ	Δa [%]	Δl [%]	ΔR^o [%]	Δy^2 [%]
0,1	0,49	4,45	0,05	10,89
2	0,27	1,42	0,01	3,89
10	0,34	0,84	0,006	2,2

Tabuľka 3: Relatívna chyba v % medzi numericky asymptoticky určenými vlastnosťami OC' módov.

a R_A a nakoniec y_N^2 a y_A^2 , t.j. hodnoty veličiny y^2 (všetko pri hodnote Ekmanoveho čísla $E = 3 \cdot 10^{-7}$ a pri Robertsovom čísle $q = 2$). Posledná tabuľka 3 obsahuje relatívne rozdiely v percentách medzi veličinami získanými numericky a asymptoticky. Práve y^2 , teda frekvencia, dáva najväčšie rozdiely medzi numerickým a asymptotickým prístupom. Ostatné parametre, vlnové čísla a a l a Rayleighove číslo R^o , majú veľmi dobrú zhodu na minimálne dve platné cifry.

9.5 Numerické výsledky

Lineárnou stabilitnou analýzou sú vyšetované nestability na čase nezávislé (stacionárna konvekcia) aj časovo závislé (nestacionárna konvekcia alebo overstabilita). Aj v tomto prípade majú vyšetované marginálne poruchy tvar horizontálnych roliek, ktoré v závislosti od vstupných parametrov môžu mať rôznu orientáciu v horizontálnej rovine. Rolky v prípade stacionárnej konvekcie môžu byť buď kolmé na základné magnetické pole (a automaticky rovnobežné s osou rotácie), alebo rovnobežné s magnetickým poľom (a teda kolmé na os rotácie), alebo môžu byť šikmé s osou roliek, zvierajúcou určitý uhol s magnetickým poľom.

9.5.1 Izotropný prípad a porovnanie s modelom s vertikálnou rotačnou osou

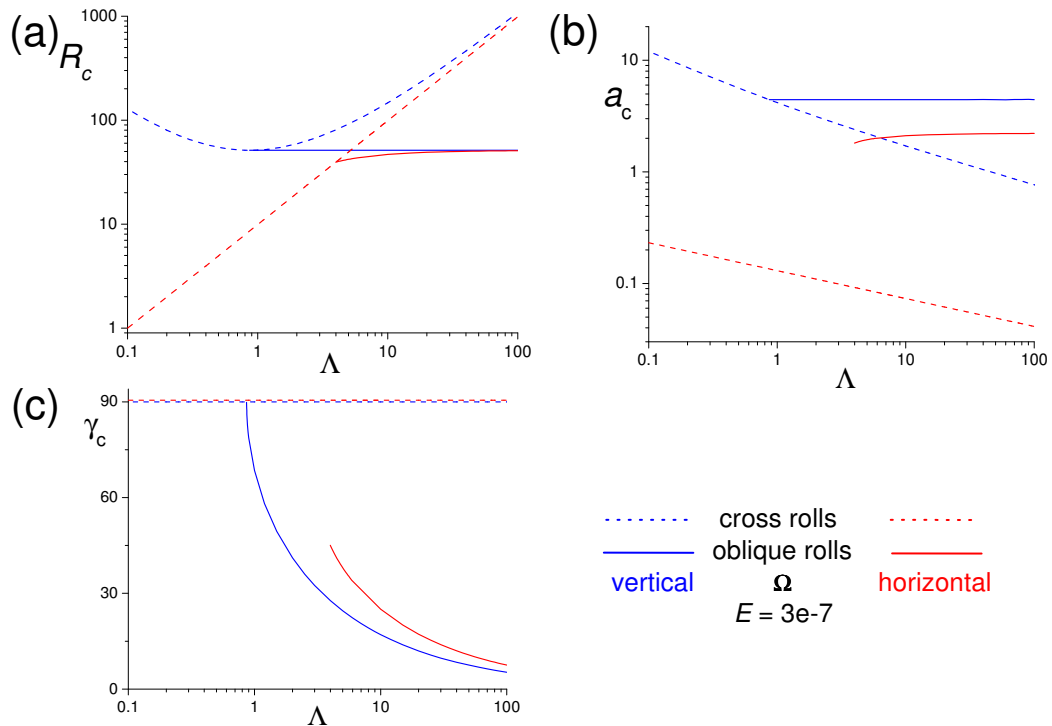
Keďže tento model zatiaľ nebol študovaný ani v izotropnom prípade, tak prvá časť numerických výsledkov je venovaná práve tomuto prípadu, pričom sú výsledky porovnávané s výsledkami z predchádzajúceho modelu s vertikálnou osou rotácie (tiež v jednoduchšom izotropnom prípade). Obrázok 39 ukazuje kritické čísla R_c , a_c a γ_c ako funkcie Elsasserovho čísla Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 3 \cdot 10^{-7}$. Červené krivky odpovedajú modelu IV s horizontálnou (ležatou) rotačnou osou a modré krivky predchádzajúcemu modelu III s vertikálnou rotačnou osou. Hneď na prvý pohľad vidíme niekoľko dôležitých rozdielov. Kritické Rayleighove číslo kolmých roliek (cross modes) je v prípade ležatej rotačnej osi rastúca funkcia Elsasserovho čísla, zatiaľ čo v prípade vertikálnej osi rotácie dosahuje lokálne minimum. V časti 9.4.2 je analyticky ukázané, že u SC, teda kolmých roliek, je $R_c = \pi^2 \Lambda (1 + 2\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon))$, kde $\varepsilon = \pi^2 E / \Lambda$ je malý parameter. Takáto závislosť však neplatí pre veľmi malé hodnoty Λ (na obr. 39 nezobrazené), kde sa už kritické Rayleighove číslo správa ako $R_c = \pi^4 E (27/4 + 3\tilde{\varepsilon}/2 + O(\tilde{\varepsilon}^2))$, pričom $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$. R_c šikmých roliek je v prípade vertikálnej rotácie²⁶ konštanta a v prípade horizontálnej rotácie rastúca funkcia od Λ , pričom sa pre veľké Λ asymptoticky blíži k tej istej konštante 51,28, rovnakej pre zvislú i ležatú os rotácie. Podobne sa pre veľké Λ k $R_c(\Lambda)$ u vertikálnej rotácie asymptoticky blíži aj $R_c(\Lambda)$ u horizontálnej rotácie. Zmena preferencie medzi kolmými a šikmými rolkami je v prípade vertikálnej rotácie plynulý prechod, pri ktorom sa uhol γ_c postupne nárastom Λ znižuje z 90° na menšie hodnoty. V prípade horizontálnej rotačnej osi je táto zmena preferencie nespojitým procesom, kde šikmé rolky začínajú byť

²⁶ v prípade vertikálnej osi rotácie; v ďalšom texte „prípady vertikálnej osi rotácie“ a „prípady horizontálnej osi rotácie“ často skrátíme na „vertikálnu rotáciu“ alebo „horizontálnu rotáciu“.

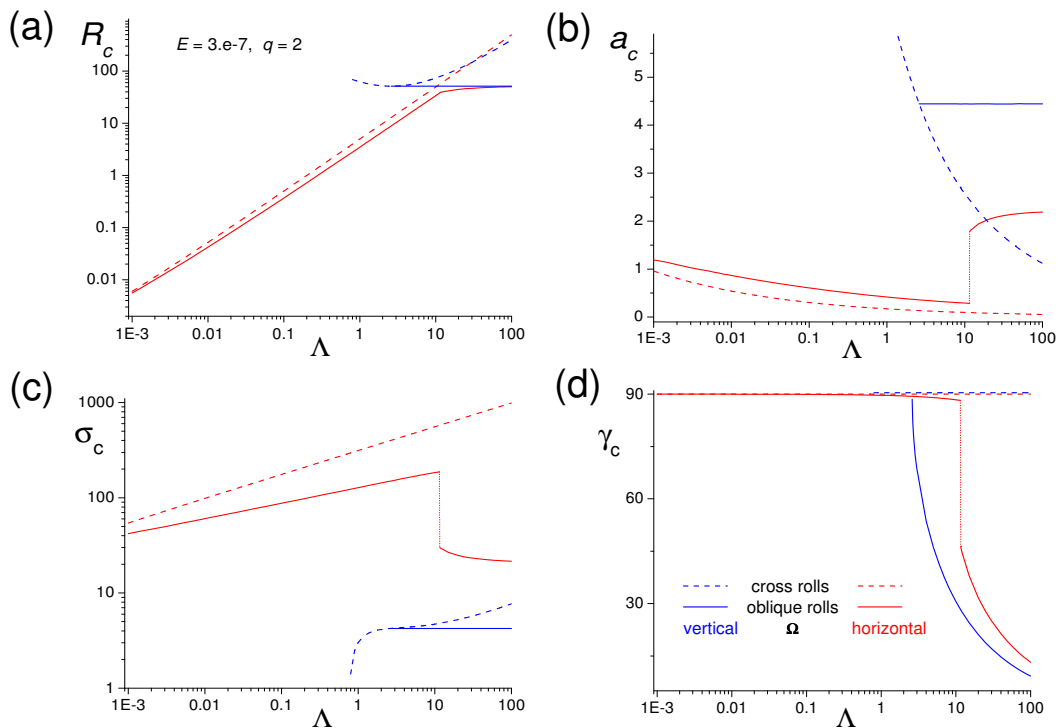
preferované pri náklone o uhol 45° pri $\Lambda = 4$ a ďalším zvyšovaním Λ sa ešte viac nakláňajú k smeru magnetického poľa. Takisto z asymptotickej analýzy v 9.4.2 vieme, že aj objavenie SO módov pri $\Lambda = 3,266$ je spojené s náklonom 60° , a nie 90° ako u zvislej osi rotácie (samozrejme u iného $\Lambda \approx 1$).

Obrázok 40 porovnáva kritické čísla R_c , a_c , σ_c a γ_c pre nestacionárnu konvekciu pri vertikálnej resp. horizontálnej rotačnej osi. Podobne ako v prípade stacionárnej konvekcie vidíme, že kritické Rayleighove číslo R_c ako funkcia Elsasseroveho čísla Λ sa v prípade horizontálnej rotácie (obr. 40a - červené krivky) správa ináč, ako v prípade vertikálnej rotácie (modré krivky). K najdôležitejším výsledkom pri horizontálnej rotácii patrí objavenie nového módu, ktorý je charakteristický natočením roliek takmer do smeru rovnobežnému s osou rotácie. Nazývame ich OC' módy, lebo sú to stále šikmé OO módy, ale veľmi blízke kolným módom OC, pričom pre klesajúce Λ sa asymptoticky blížia k OC módom. Existenciu a vlastnosti týchto zaujímavých módov sa podarilo potvrdiť aj analyticky, a to vhodným priblížením vlnového čísla $\tilde{l} = l^2/\pi^2 = \beta c^{1/2} + O(c)$, kde β je funkcia rádu $O(1)$ a c je malý parameter úmerný Ekmanovmu číslu E (pozri časť 9.4.4). Tieto OC' módy sú významné hlavne preto, že ku svojej existencii potrebujú nenulovú viskozitu a sú preferované na dosť veľkom priestore parametrov Λ a q_z . V neviskóznom prípade ($E = 0$) OC' módy neexistujú a podobne neexistujú ani čisté OC módy, lebo ich frekvencia je nekonečne veľká (čo je nefyzikálne), a čo sa tiež analyticky dokázalo v časti 9.3.3. Pri $\Lambda \sim 10$ dochádza ku zmene preferencie na „normálne“ šikmé, teda OO módy, čo sa prejavuje skokom v hodnotách a_c , σ_c a γ_c na grafoch 40bcd a zalomením krivky $R_c^{OO}(\Lambda)$ na grafe 40a. Bodkované vertikály sú iba pomocné čiary, ukazujúce nadväznosť kriviek pre OC' a OO módy. Ďalej si môžeme všimnúť, že pri horizontálnej rotácii majú rolky menšie horizontálne vlnové číslo, a teda väčší horizontálny rozmer, ako pri vertikálnej rotácii (rovnako ako u stacionárnej konvekcie, viď graf 39b). Frekvencia σ_c je u horizontálnej rotácie väčšia ako u vertikálnej rotácie obr. 39c). Vhodnou kombináciou kriviek z obrázkov 39a a 40a dostávame porovnanie kritických Rayleighových čísel pre stacionárnu a nestacionárnu konvekciu (pre šikmé aj kolmé rolky) v oboch prípadoch orientácie rotačnej osi. Obrázok 41 teda ukazuje preferovanosť jednotlivých možných módov pre rôzne hodnoty Λ . Treba však mať na pamäti, že preferencia módov súvisí aj s hodnotou Robertsoveho čísla q . Keďže krivky na obrázkoch 41ab sú pre jediné konkrétne Robertsovo číslo $q = 2$, môžeme sa na takto určenú preferovanosť módov pozeráť ako na istý rez všeobecnejšieho Λq diagramu.

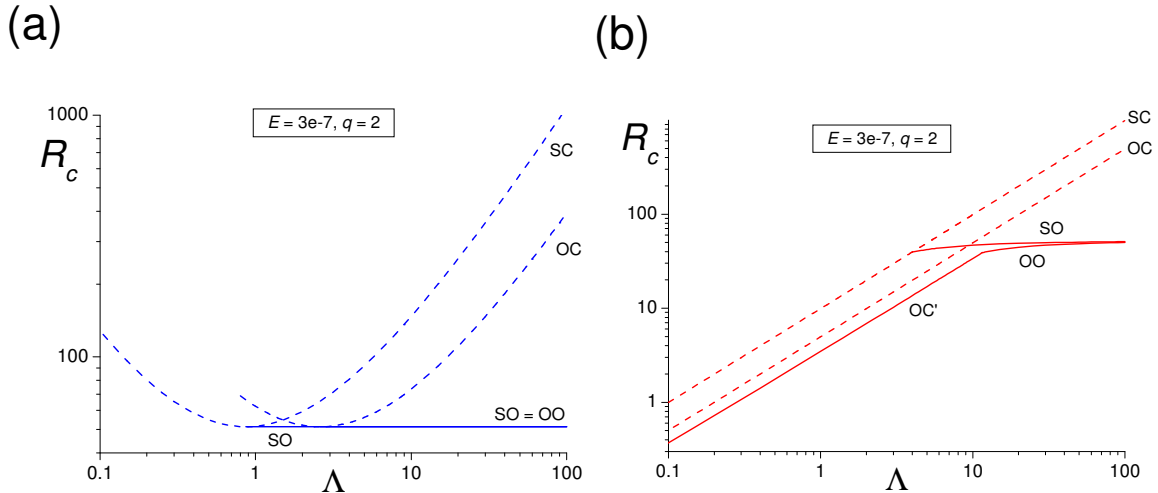
Nasledujúci obrázok 42 porovnáva práve Λq diagramy vo viskóznom a neviskóznom prípade (obr. 42ab) pri horizontálnej rotácii s neviskóznym prípadom pri vertikálnej rotácii (obr. 42c). Hneď na prvý pohľad vidno veľké rozdiely medzi neviskóznym a viskóznym prípadom. Ako už bolo spomenuté, pri nulovej viskozite neexistujú OC ani OC' módy. Nestacionárna konvekcia môže existovať jedine vo forme OO módov, teda šikmých módov. Na Λq diagrame (obr. 42a) má oblasť preferencie OO módov tvar klinu, kde ľavá hranica je hranica preferencie medzi SO a OO módmí a pravá hranica je hranica existencie OO módov. Veľmi zaujímavé sa správajú aj oblasti preferencie stacionárnych SO a SC módov, pričom je to správanie úplne iné ako vo viskóznom prípade (obr. 42b). Hranica preferencie medzi SO a SC módmí je v neviskóznom prípade daná horizontálou $\Lambda = 4$ a hranica existencie SO módov je daná druhou horizontálou $\Lambda \doteq 3,266$, pričom obe hranice boli odvodené aj analyticky v časti 9.4.2. V tejto časti sa tiež ukázalo, že kritický SC mód je mód s nulovým horizontálnym vlnovým číslom a bol nazvaný spiacim módom, lebo s nekonečne rozľahlou konvektívnou bunkou nie je realistický. Avšak medzi horizontálnymi hranicami $\Lambda = 4$ a $\Lambda \doteq 3,266$ boli zavedené tzv. prebudené SC módy s nenulovým horizontálnym vlnovým číslom, ktoré môžu byť preferované pred ešte stále existujúcimi SO



Obr. 39: Stacionárna konvekcia; Závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a kritického uhla γ_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 3 \cdot 10^{-7}$ v izotropnom prípade $\alpha = 1$. Vertikálna rotačná os - modré krivky, horizontálna rotačná os - červené krivky.



Obr. 40: Nestacionárna konvekcia; Závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického horizontálneho vlnového čísla a_c , kritickej frekvencie σ_c a kritického uhla γ_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 3 \cdot 10^{-7}$ a pri Robertsovom čísle $q = 2$ v izotropnom prípade $\alpha = 1$. Vertikálna rotačná os - modré krivky, horizontálna rotačná os - červené krivky.



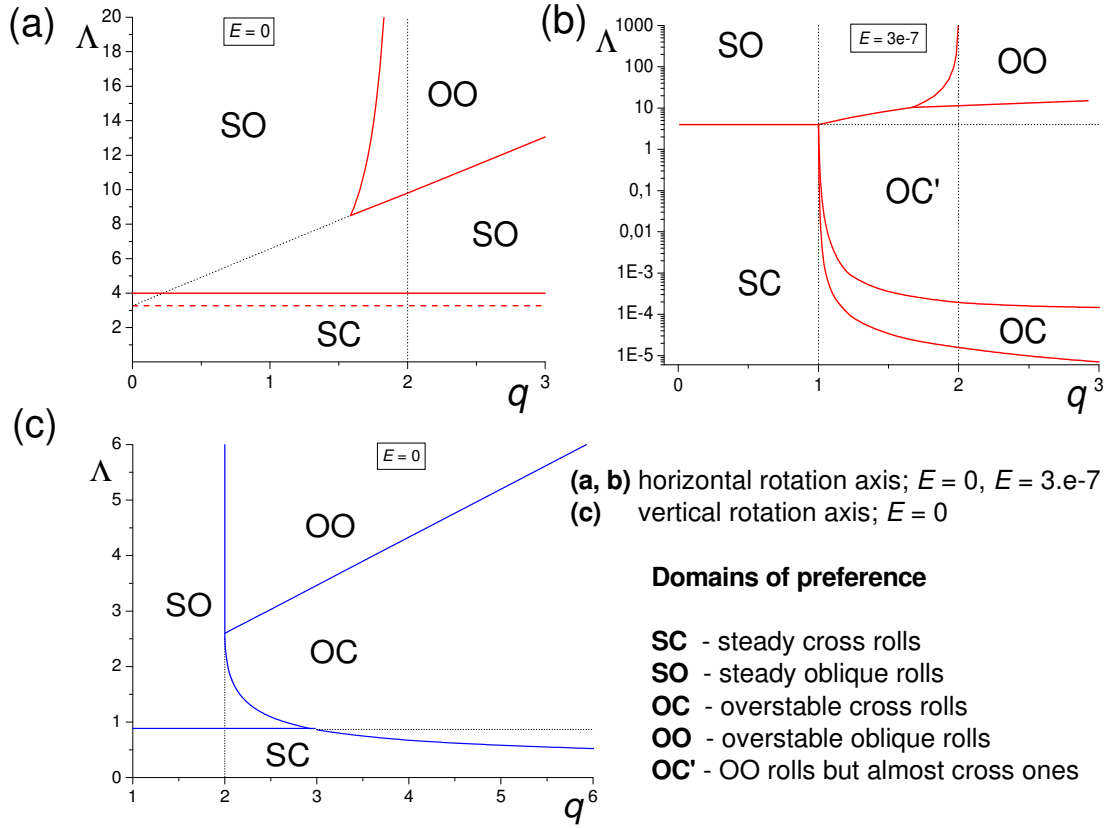
Obr. 41: Nestacionárna a stacionárna konvekcia; Závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E = 3 \cdot 10^{-7}$ a pri Robertsovom čísle $q = 2$ v izotropnom prípade $\alpha = 1$. Vertikálna rotačná os - modré krivky, horizontálna rotačná os - červené krivky.

módmi. Podmienky preferovanosti prebudných SC módov sú takisto odvodené v časti 9.4.2. V prípade nenulovej viskozity sú už SC módy normálne, teda s nenulovým kritickým horizontálnym vlnovým číslom a_c a prirodzene definovaným cez lokálny extrém Rayleighovho čísla vzhľadom na horizontálne vlnové číslo a . Pozoruhodná je aj kvalitatívna podobnosť diagramov pre $E \ll 1$ u ležatej osi (b) a pre $E = 0$ u zvislej osi (c). Λq režimový diagram vo viskóznom prípade, obohatený aj o dva prípady anizotropie, je prezentovaný ďalej na obrázku 48.

9.5.2 Stacionárna konvekcia v prípade anizotropie

Orientácia roliek vzhľadom na magnetické pole a os rotácie súvisí s Coriolisovou a Lorentzovou silou, a to vďaka istému súboju vplyvov týchto síl na vznikajúcu konvekciu. Je známy fakt, že aj Coriolisova aj Lorentzova sila sa snažia svojim pôsobením natočiť konvektívne rolky do smeru osi rotácie, resp. smeru magnetického poľa. Je preto dôležité preskúmať, ako rôzne anizotropie difúzných koeficientov ovplyvnia preferenciu rôzne orientovaných roliek v ΛE_z režimovom diagrame. Rovnako, ako v modeli III, ΛE_z diagram rozdeľuje priestor parametrov Λ a E_z na tri oblasti, v ktorých sú preferované rolky s danou orientáciou. V oblasti SC sú preferované rolky kolmé na magnetické pole, v oblasti SO rolky šikmé vzhľadom na smer magnetického poľa a P oblasti sú preferované rolky rovnobežné s magnetickým poľom. Na SC oblasť (steady cross rolls) môžeme pozeráť aj ako na oblasť, v ktorej má dominantnú úlohu Coriolisova sila, lebo konvektívne rolky sú natočené presne rovnobežne s osou rotácie (a teda kolmo na magnetické pole). V P oblasti (steady parallel rolls) má dominantný vplyv Lorentzova sila s rolkami, natočenými rovnobežne s magnetickým poľom. V SO oblasti (steady oblique rolls) sú Lorentzova a Coriolisova sila v určitej rovnováhe, pri ktorej sú konvektívne rolky orientované s určitým uhlom k magnetickému poľu a k osi rotácie.

Nasledujúci obrázok 43 znázorňuje ΛE_z diagram v izotropnom prípade ($\alpha = 1$ čiarované krivky) a v dvoch anizotropných prípadoch ($\alpha = 0,5$ plné krivky, SA anizotropia atmosférického typu; $\alpha = 5$ bodkované krivky, So anizotropia). Vplyv anizotropie sa prejavuje zmenou hraníc medzi oblasťami SC a SO a medzi SO a P. Pripomeňme si, že hranici SC/SO v izotropnom prípade pre $E \ll 1$ sme sa venovali v časti 9.4.2, pričom vyšlo



Obr. 42: Λq režimový diagram pre stacionárnu a nestacionárnu konvekciu v prípade ležatej rotačnej osi v neviskóznom prípade (a) a v prípade nenulovej viskozity $E = 3 \cdot 10^{-7}$ (b), ako aj v prípade vertikálnej rotačnej osi (c).

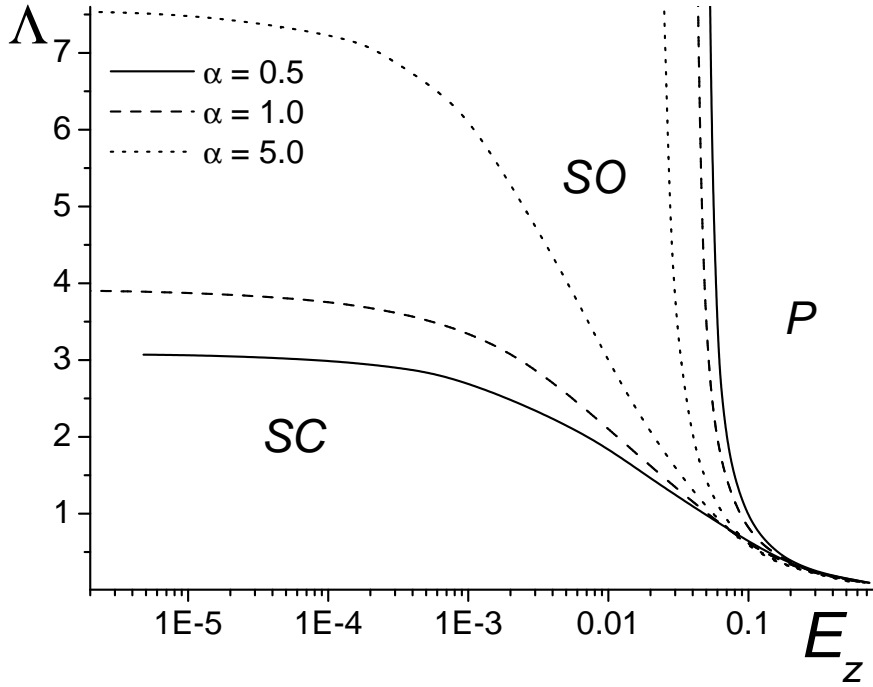
$\Lambda_{SC/SO}|_{E=0} = 4$. Hranica SO/P sa takisto dá určiť asymptoticky²⁷, napr. v izotropnom prípade pre $\Lambda \gg 1$ máme $E_{SO/P}|_{\Lambda \rightarrow \infty} = 2\sqrt{3}/(9\pi^2) \doteq 0,039000$. Takže asymptoty kriviek SC/SO a SO/P v izotropnom prípade sú horizontála $\Lambda = 4$ a vertikála $E \doteq 0,039000$. Priebeh týchto kriviek sme však analyticky určili v širších intervaloch hodnôt E_z a Λ v časti 9.3.1, pričom sme sa neobmedzili len na $E \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$ a $\alpha = 1$. Významné je to, že analytické vyjadrenia hraníc SC/SO a SO/P ukázali, že „chvostík“ pre $E_z > 0,1$ a $\Lambda \rightarrow 0$ je vyjadrený súbežnými krivkami, ktoré blížiac sa k sebe sa „stretávajú“ až v nekonečne ($E_z \rightarrow \infty$).

Na prvý pohľad z obrázku vidno, že *So* anizotropia redukuje oblasť preferencie šikmých roliek SO (hranica SC/SO je posunutá k väčším hodnotám Ekmanovho čísla E_z a Elsasserovho čísla Λ a hranica SO/P je posunutá k menším hodnotám E_z), a naopak stratifikačná anizotropia atmosférického typu túto oblasť rozširuje (hranice SC/SO a SO/P sa vplyvom anizotropie posúvajú opačne). Z fyzikálneho hľadiska to môžeme interpretovať ako oslabovanie²⁸ vplyvu Coriolisovej a Lorentzovej sily v prípade *So* anizotropie, resp. zosilňovanie vplyvu týchto síl v prípade *Sa* anizotropie.

ΛE_z diagram nám ukazuje, ako rôzne anizotropie (rôzne hodnoty parametra α) menia rozdelenie priestoru parametrov na oblasti s rôznymi rovnováhami síl (Coriolisovej a Lorentzovej), ale nepovie nám nič o tom, ako anizotropia ovplyvní podmienky nástupu

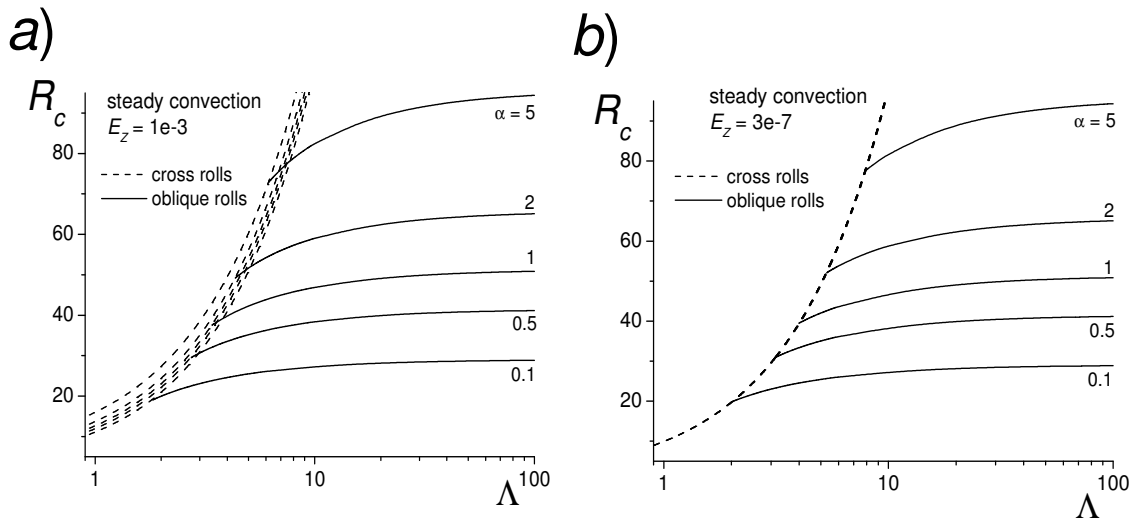
²⁷Vychádzame zo vzťahov (172–174) a (129–131) pre Rayleighove čísla stacionárnych módov. Odvodíme kritické R_c^{SO} , R_c^P a ich porovnaním v limite $\Lambda \rightarrow \infty$ dostaneme pre Ekmanove číslo na hranici SO/P kvadratickú algebraickú rovnicu.

²⁸Coriolisova sila je nepriamo úmerná E_z na rozdiel od Lorentzovej sily, ktorá je priamo úmerná Λ (pozri (16) a podkapitolu 3.2).



Obr. 43: Stacionárna konvekcia; ΛE_z diagram pre izotropný prípad $\alpha = 1$ a pre anizotropné prípady $\alpha = 2$ a $\alpha = 0,5$.

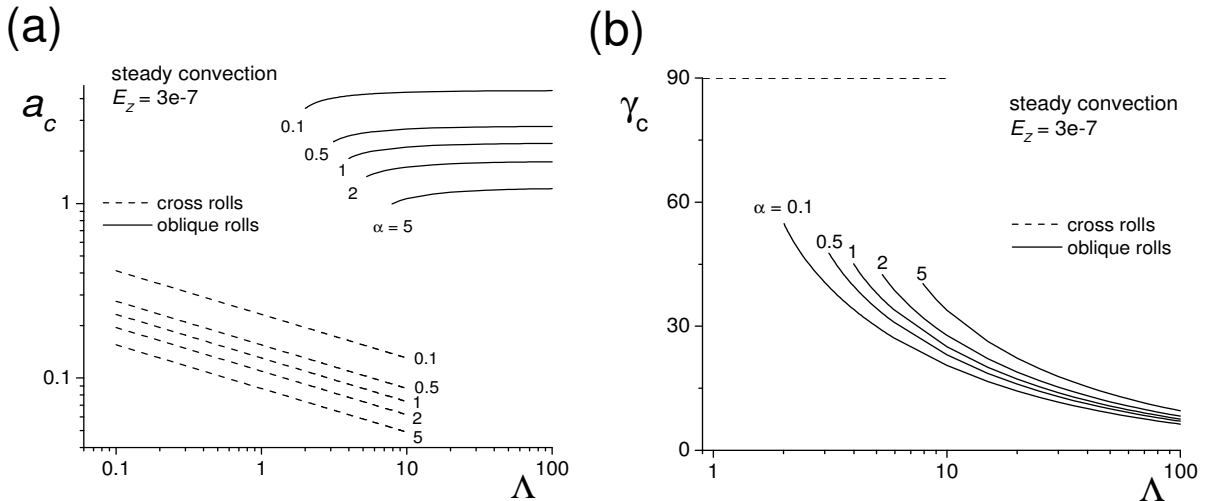
konvekcie (kritické Rayleighove číslo) a tvar samotnej konvekcie (kritické vlnové číslo). Podobne, ako v predchádzajúcom modeli III, sú pre nás zaujímavé grafy, vyjadrujúce závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického horizontálneho vlnového čísla a_c ($a_c = (l_c^2 + m_c^2)^{1/2}$) a kritického uhla γ_c (uhol $\gamma_c = \arctg(m_c/l_c)$ medzi osou roliek a magnetickým poľom) na Elsasserovom čísle Λ a Ekmanovom čísle E_z .



Obr. 44: Vplyv anizotropie na stacionárnu konvekciu. Závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E_z = 10^{-3}$ (graf a) a pri $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ (graf b)

Obrázok 44 obsahuje dva grafy závislostí kritického Rayleighovho čísla R_c na Elsasserovom čísle Λ . Na prvom grafe 44a je hodnota Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$ (slabšia rotácia) a na druhom $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ (silnejšia rotácia). Rôzne krivky súvisia s rôznymi hodnotami

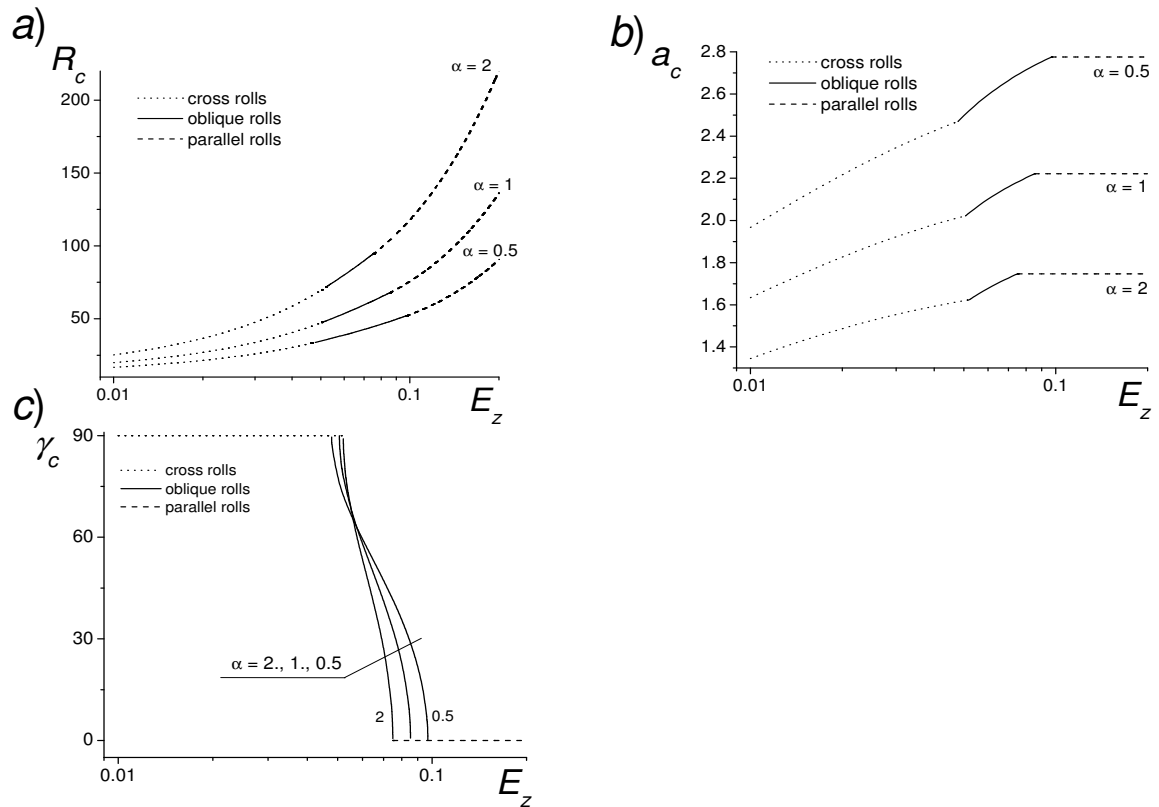
parametra α , kde konkrétna hodnota parametra označuje konkrétnu krivku. Prerušované krivky odpovedajú kolmým roľkám (oblasť SC na predchádzajúcom grafe) a plné krivky odpovedajú šikmým SO roľkám. V prípade väčšieho Ekmanovho čísla $E_z = 10^{-3}$ (väčšej viskozity, resp. slabšej rotácie; graf 44a) môžeme vidieť, že anizotropia ovplyvňuje kolmé aj šikmé rolky. *So* anizotropia ($\alpha > 1$) znevýhodňuje nástup konvekcie, lebo zvyšuje kritické Rayleighove číslo. *Sa* anizotropia ($\alpha < 1$) znižovaním kritického Rayleighovho čísla uľahčuje konvekciu. Pri nižšej hodnote Ekmanovho čísla (menšej viskozite, resp. silnejšej rotácie; graf 44b) anizotropia neovplyvňuje nástup stacionárnej konvekcie v tvare kolmých roliek (pre rôzne hodnoty parametra anizotropie α existuje len jedna prerušovaná krivka). Vplyv anizotropie na šikmé rolky je rovnaký, ako v prípade väčšieho Ekmanovho čísla.



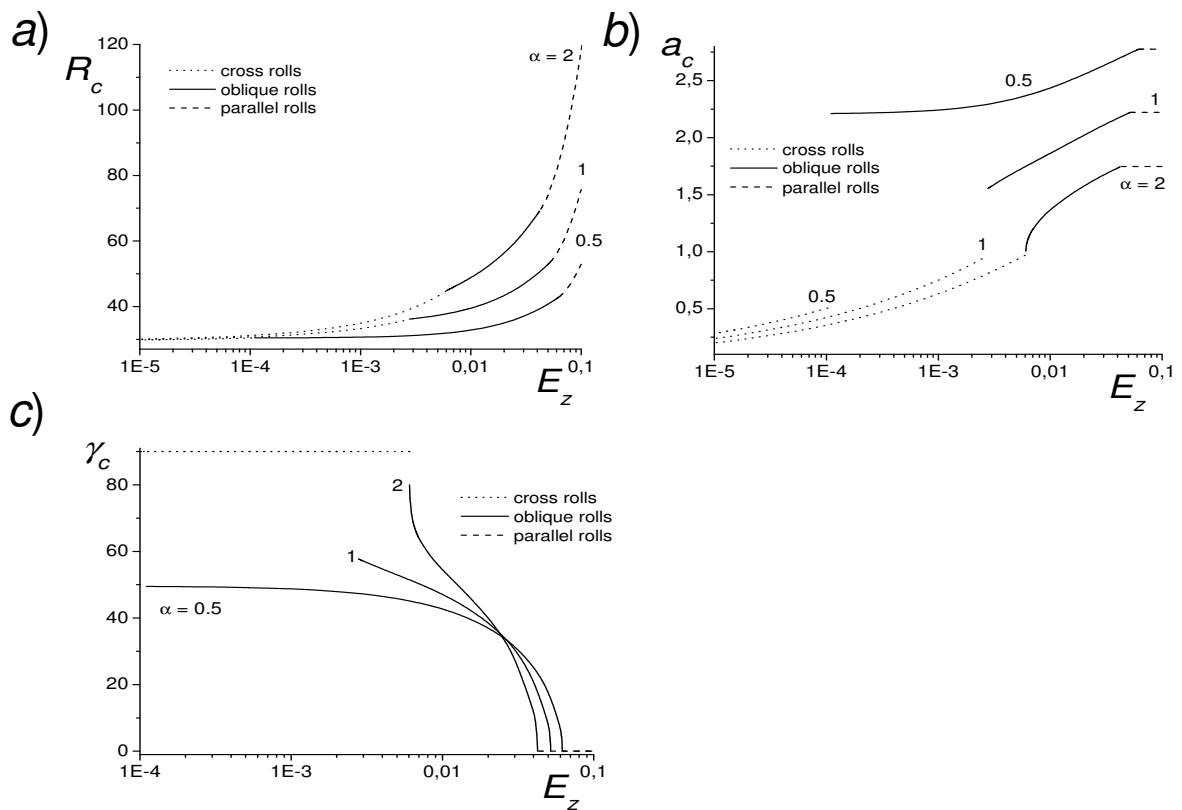
Obr. 45: Vplyv anizotropie na stacionárnu konvekciu. Závislosti kritického horizontálneho vlnového čísla a_c a kritického uhla γ_c na Elsasserovom čísle Λ pri konštantnom Ekmanovom čísle $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$.

Anizotropia má vplyv nielen na kritické Rayleighove číslo R_c , ale aj na iné parametre, popisujúce konvekciu. Obrázok 45 ukazuje, ako anizotropia ovplyvňuje kritické horizontálne vlnové číslo a_c a kritický uhol γ_c (medzi osou roliek a základným magnetickým poľom) pri konštantnej hodnote Ekmanovho čísla $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$. Z grafu 45a vidíme, že *So* anizotropia ($\alpha > 1$) znižuje kritické horizontálne vlnové číslo a *Sa* anizotropia ($\alpha < 1$) ho zvyšuje. Zmena preferencie medzi SC a SO módmí je sprevádzaná prudkým skokom v hodnotách vlnového čísla približne o jeden rád. Podobný skok je aj v hodnote kritického uhla γ_c na grafe 45b. Tieto skoky nám hovoria o tom, že ku zmene preferencie z SC na SO módy pri zvyšovaní Elsasserovho čísla Λ nedochádza spojito, ako v prípade modelu III s vertikálnou rotačnou osou. Ak pri určitej hodnote Elsasserovho čísla Λ (táto hodnota je funkciou parametra anizotropie α) dôjde ku zmene preferencie módom, tak SO módy sú už voči magnetickému poľu natočené o určitý uhol ($\neq 90^\circ$), ktorého hodnota je tiež funkciou parametra anizotropie α (γ_c je rastúcou funkciou α). Graf 45b nám tiež ukazuje, že *So* anizotropia zvyšuje kritický uhol γ_c a *Sa* anizotropia ho znižuje.

Ďalší obrázok 46 obsahuje tri grafy, ktoré opisujú závislosti kritického Rayleighovho čísla R_c , kritického horizontálneho čísla a_c a kritického uhla γ_c na Ekmanovom čísle E_z , pričom Elsasserove číslo je teraz konštantné a má hodnotu $\Lambda = 1$. Tri krivky na prvom grafe 46a súvisia s troma uvažovanými hodnotami parametra anizotropie α ; izotropný prípad $\alpha = 1$ a dva prípady anizotropie $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 2$. Každá krivka je rozdelená na tri časti, kde bodkované časti sú pre SC rolky - kolmé na magnetické pole, plné čiary platia pre šikmé SO rolky a čiarkované časti súvisia s P roľkami, rovnobežnými s magnetic-



Obr. 46: Vplyv anizotropie na stacionárnu konvekciu. Závislosti kritických čísel Rayleighovho R_c , horizontálneho vlnového a_c a uhla γ_c na Ekmanovom čísle E_z pri konštantnom Elsasserovom čísle $\Lambda = 1$.

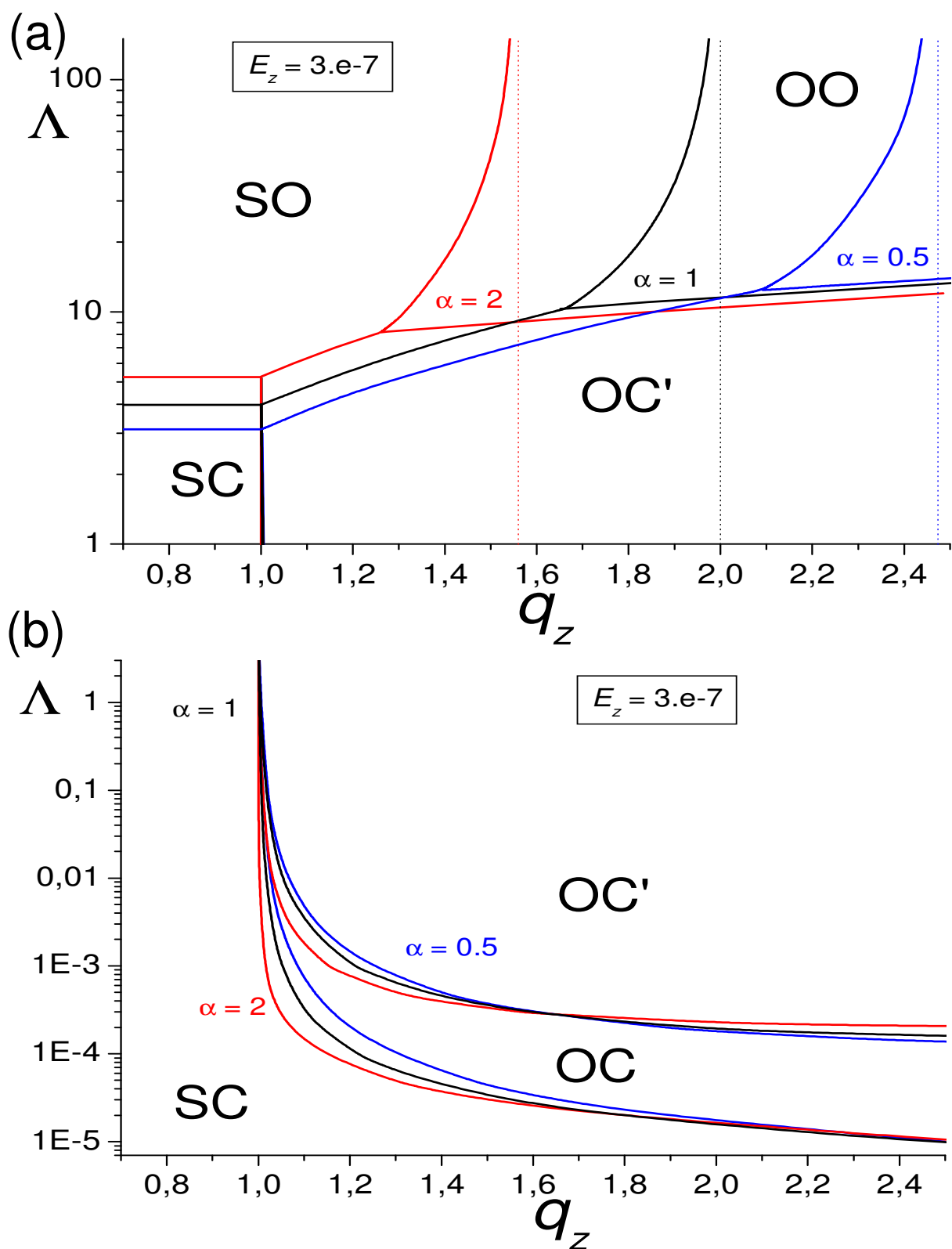


Obr. 47: To isté ako na obr. 46, ale pre $\Lambda = 3$.

kým poľom. Rôzna dĺžka plných kriviek súvisí s vlastnosťou opísanou na ΛE_z diagrame, a to s vplyvom anizotropie na veľkosť priestoru parametrov, v ktorom sú preferované šikmé SO rolky. Vidíme, že zatiaľ čo *So* anizotropia ($\alpha > 1$) znižuje tento rozsah parametra E_z , stratifikačná anizotropia atmosférického typu ($\alpha < 1$) tento rozsah rozširuje. Aj na tomto grafe môžeme vidieť už spomenutý fakt, že stratifikačná anizotropia uľahčuje konvekciu a *So* anizotropia ju potláča. Na druhom grafe 46b vidíme, že *So* anizotropia znižuje kritické horizontálne vlnové číslo a_c a *Sa* anizotropia ho zvyšuje. Znamená to, že *So* anizotropia zväčšuje horizontálne rozmery konvekcie a stratifikačná anizotropia ich znižuje, pričom táto vlastnosť platí pre všetky orientácie roliek (kolmé, šikmé aj rovnobežné rolky). Tretí graf 46c ukazuje, ako sa pri zvyšujúcom sa Ekmanovom čísle E_z mení preferencia roliek najprv z kolmých na šikmé, a potom zo šikmých na rovnobežné. Kritický uhol γ_c roliek sa pri istej hodnote Ekmanovho čísla (táto hodnota, ako už bolo povedané, je funkciou ako Elsasserovho čísla Λ tak aj parametra anizotropie α) začne znižovať z 90 stupňov až na nulu a pre vyššie hodnoty Ekmanovho čísla (aj táto hodnota, pri ktorej dochádza k zmene preferencie zo šikmých na rovnobežné rolky, je funkciou Elsasserovho čísla a parametra anizotropie) už ostáva nulový (preferované sú už rolky rovnobežné s magnetickým poľom).

Z nasledujúceho obrázku 47 môžeme vidieť, ako výrazne sa menia krivky, ak Elsasserove číslo zvýšime na hodnotu $\Lambda = 3$. Obrázok obsahuje tri grafy rovnakých závislostí R_c , a_c a γ_c na Ekmanovom čísle E_z a pre tie isté hodnoty parametra anizotropie $\alpha = 0,5, 1$ a 2 . Krivky na grafe 47a, vyjadrujúce kritické Rayleighove číslo R_c ako funkciu Ekmanovho čísla E_z , ukazujú jasnú nespojitosť pri zmene preferencie kolmých roliek na šikmé a zo šikmých na rovnobežné rolky. Celkovo vplyv anizotropie na kritické Rayleighove číslo, a teda na podmienky nástupu konvekcie, je rovnaký, ako v predchádzajúcom prípade $\Lambda = 1$. Nespojitosť pri už uvedených zmenách preferencie je oveľa výraznejšia pre kritické horizontálne vlnové číslo a_c . Vlnové číslo a_c ako funkcia Ekmanovho čísla E_z sa pri prechode z kolmých roliek na šikmé mení nielen kvalitatívne (charakter bodkovaných a plných kriviek je úplne iný), ale aj hodnota čísla sa skokom mení. Pri prechode zo šikmých na rovnobežné rolky ku skokom v hodnotách vlnového čísla nedochádza, ale opäť sa mení kvalita závislosti na Ekmanovom čísle, t.j. horizontálne vlnové číslo a_c ako funkcia E_z sa z rastúcej funkcie pre šikmé rolky mení na konštantu (závislú na hodnote parametra anizotropie α)²⁹ pre rovnobežné rolky. Jednu z príčin skokov a nespojitosti vidíme na grafe 47c. Postupným nárastom hodnoty Ekmanovho čísla E_z sa orientácia preferovaných konvektívnych roliek mení podľa nasledujúceho scenára. Pre malé hodnoty Ekmanovho čísla E_z sú preferované rolky kolmé na magnetické pole (uhol γ_c je rovný presne 90 stupňov). Pri určitej hodnote E_z dôjde k zmene preferencie na šikmé rolky (uhol γ_c je menší ako 90 stupňov). Príčinou nespojitosti a skokov na predchádzajúcich grafoch je fakt, že pri zmene preferencie nedôjde k postupnému nakláňaniu roliek z kolmej orientácie na šikmú, ale šikmé rolky začnú byť preferované až pri určitom uhle γ_c (tento uhol je rôzny pre rôzne hodnoty parametra anizotropie α). Pri ďalšom zvyšovaní hodnoty E_z sa uhol γ_c znižuje postupne na nulu a rolky sa tým pádom postupne orientujú k smeru rovnobežnému so smerom magnetického poľa. Dosiahnutie nulového uhla znamená ďalšiu zmenu preferencie zo šikmých roliek na rovnobežné, lebo pre vyššie hodnoty E_z sú už preferované len rovnobežné rolky (uhol γ_c je presne nulový).

²⁹Konštantné a_c na grafoch 46b a 47b, nezávislé na Ekmanovom čísle E_z pre jednotlivé $\alpha = 0,5, 1$ a 2 sú 2,776, 2,221 a 1,746, a to podľa $a_c = (\pi/2)[(1 + 8/\alpha)^{1/2} - 1]^{1/2}$ (pozri (140)).



Obr. 48: Λq_z režimový diagram pre stacionárnu a nestacionárnu konvekciu pre oba anizotropné ($\alpha = 0.5$ a 2) a izotropný prípad pri $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$.

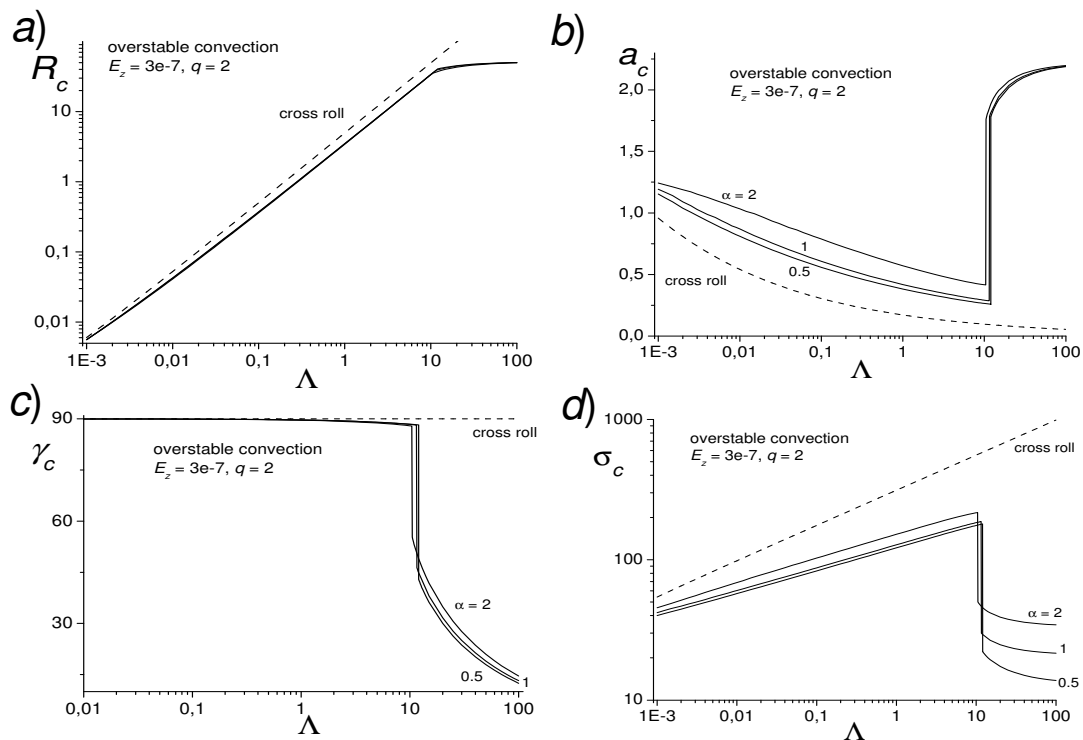
9.5.3 Nestacionárna konvekcia v prípade anizotropie

Ak vyšetrujeme nestacionárnu konvekciu, tak do hry vstupujú ďalšie parametre, ktoré pri stacionárnej konvekcii neboli dôležité (položením frekvencie σ rovnej nule vypadli z rovníc). V tomto prípade ide iba o Robertsove číslo q (resp. Robertsove číslo q_z v anizotropnom prípade), lebo obrátené magnetické Prandtlove číslo p pokladáme od začiatku za nulové. Rovnako ako v prípade modelu s vertikálnou rotačnou osou, aj teraz neanalyzujeme zložitý trojrozmerný $\Lambda E_z q_z$ diagram, ale len jeho zjednodušenú dvojrozmernú formu Λq_z , ale tentokrát uvažujeme viskózný prípad $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$.

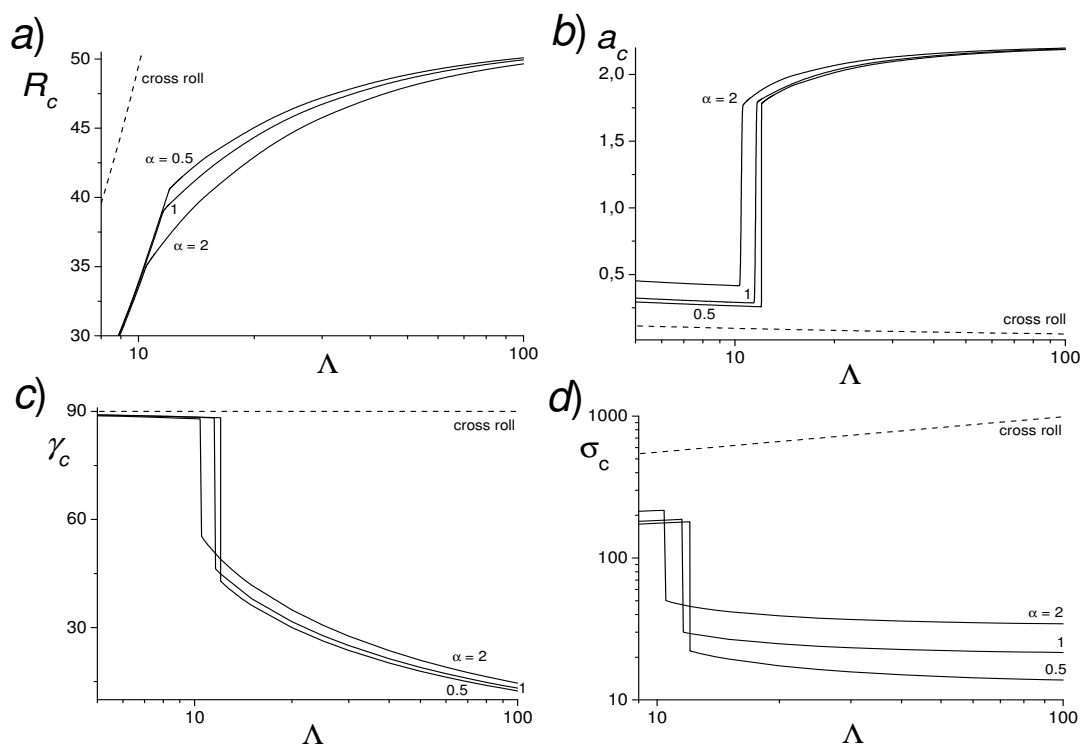
Obrázok 48 ukazuje Λq_z režimový diagram, ktorý je kvôli prehľadnosti rozdelený na dve časti 48a a 48b, a to pre väčšie $\Lambda \geq O(1)$ a menšie $\Lambda \leq O(1)$. Režimový diagram teraz priestor parametrov Λ a q_z rozdeľuje na 5 oblastí preferencie. SC a SO sú rovnako ako na obr. 43 oblasti preferencie stacionárnych kolmých, resp. šikmých roliek. Oblasť OC' je oblasťou preferencie nestacionárnych roliek šikmých vzhľadom na magnetické pole, kde ale konvektívne rolky sú takmer kolmé (uhol medzi osou roliek a magnetickým poľom je veľmi blízky k 90 stupňom). OO je oblasťou preferencie nestacionárnych šikmých roliek (overstable oblique). Tri (červené, čierne a modré) skupiny kriviek súvisia s tromi hodnotami parametra anizotropie $\alpha = 0,5; 1$ a 2 , kde jednotlivé krivky reprezentujú hranice medzi piatimi oblasťami preferencie a bodkované vertikály sú pomocné asymptoty, ku ktorým sa blížia hranice SO/OO pre $\Lambda \rightarrow \infty$. Vplyv anizotropie je hneď zrejmý, keďže *So* anizotropia ($\alpha = 2$) posúva systém kriviek smerom k menším hodnotám Λ a q_z (pre Λ len vo väčšej časti diagramu). Výnimkou je horizontálna hranica SO/SC, nezávislá na q_z (lebo ide o stacionárne módy), ktorú *So* anizotropia posúva smerom k vyšším hodnotám Λ (pozri obr. 43). *Sa* anizotropia ($\alpha = 0,5$) má presne opačný účinok. Hranica SC/OC nie je až tak citlivá na anizotropiu, podobne ako aj hranica OC/OC'. Porovnaním oboch častí obrázku (a, b) môžeme uzavrieť, že vplyv anizotropie na Λq_z diagram je väčší pre veľké Λ , ako pre malé Λ . Z obrázku 48b vidíme, že pre malé hodnoty Elsasserovho čísla Λ sa SC oblasť rozširuje k väčším hodnotám q_z , čo znamená, že slabé magnetické polia znevýhodňujú nestacionárnu konvekciu, resp. u malých Λ nestacionárna konvekcia potrebuje väčšie Robertsove číslo q_z , aby bola preferovaná.

Obrázky 49 a 50 ukazujú vplyv anizotropie na parametre R_c , a_c , γ_c a σ_c , opisujúce konvekciu. Tieto parametre sú zobrazené ako funkcie Elsasserovho čísla Λ pri nenulovom Ekmanovom čísle $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ a pre Robertsove číslo $q_z = 2$. Na každom grafe sú tri plné krivky OO módov (pre tri rôzne hodnoty parametra anizotropie α) a jedna prerušovaná krivka OC módu, nezávislého na anizotropii. Na všetkých grafoch môžeme vidieť výraznú zmenu kvality pre $\Lambda \sim 10$, ktorá zodpovedá zmene preferencie dvoch OO módov. Prvý mód pre menšie hodnoty Λ je síce šikmý mód, ale uhol γ_c je takmer 90° (nie však presne 90° ako u OC módu - prerušované krivky). Tento mód je už diskutovaný OC' mód (na Λq_z diagrame na obr. 48) a pri $\Lambda \sim 10$ prechádza na „normálny“ OO mód s menším uhlom γ_c . Zo závislosti R_c na Λ vidíme, že pri zobrazenom rozsahu Elsasserovho čísla Λ anizotropia neovplyvní fakt, že OC mód nie je preferovaný. Kritické Rayleighove čísla OC' módov sa však približujú k Rayleighovemu číslu OC módu s klesajúcim Λ . Treba si však uvedomiť, že Robertsove číslo q_z má hodnotu 2, čo pri pohľade na Λq_z režimový diagram (obr. 48) znamená, že OC mód bude preferovaný až pri menších hodnotách Λ , ako sú zobrazené na obrázku. Rovnako vplyv anizotropie sa znižuje s klesajúcim Λ , čo možno vidieť na všetkých grafoch tohto obrázku, ako aj na obrázku 48b, kde vidíme veľmi slabý vplyv anizotropie na hranice OC/OC'.

Obrázok 50 opisuje rovnaké závislosti ako predchádzajúci obrázok 49, ale zúžením rozsahu Elsasserovho čísla Λ je detailnejší pohľad na zmeny parametrov R_c , a_c , γ_c a σ_c pri



Obr. 49: Vplyv anizotropie na nestacionárnu konvekciu. Závislosti kritických čísel - Rayleighovho R_c , horizontálneho vlnového čísla a_c , uhla γ_c a frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle Λ (v širšom rozsahu hodnôt) pri konštantných Ekmanovom $E_z = 3 \cdot 10^{-7}$ a Robertsovom čísle $q_z = 2$.



Obr. 50: To samé ako na predchádzajúcom obrázku, ale v užšom rozsahu hodnôt Λ kvôli upriameniu pozornosti na prechod medzi dvoma OO módmí. Vertikálne úseky kriviek na grafoch (b) (c) a (d) sú iba ilustračné, lebo ukazujú nadväznosť medzi dvoma krivkami, ktoré sú v skutočnosti nezávislé a nespojité. Pri prechode z jedného módu na druhý dochádza ku skoku z jednej krivky na druhú.

už spomínanej zmene preferencie OO a OC' módov. Kritické Rayleighove číslo R_c (50a) sa pri zmene preferencie nemení skokom v hodnote, $R_c(\Lambda)$ sa mení iba kvalitatívne. $R_c(\Lambda)$ je pre OC' mód pri menších hodnotách Λ nezávislý na anizotropnom parametre α . OO mód, preferovaný pri väčších Λ , je už na anizotropii závislý, kde *So* anizotropia ($\alpha > 1$) znižuje hodnotu R_c a *Sa* anizotropia ($\alpha < 1$) zvyšuje³⁰ hodnotu R_c . Ostatné tri zobrazované parametre pri zmene preferencie menia svoje hodnoty skokom, pričom sa vždy zmení aj charakter správania sa daného parametra ako funkcie Elsasserovho čísla Λ . Kritické horizontálne číslo a_c skočí na vyššiu hodnotu a kritický uhol γ_c ako aj kritická frekvencia σ_c skočia na nižšiu hodnotu (platí pri zmene preferencie pri zvyšovaní Elsasserovho čísla Λ).

Porovnaním obrázkov 50 a 44, 45 si môžeme všimnúť rôzny vplyv anizotropie na kritické Rayleighove čísla R_c a kritické horizontálne vlnové čísla a_c pre OO a SO módy, teda pre šikmé nestacionárne a stacionárne rolky. *So* anizotropia ($\alpha > 1$) znižuje kritické Rayleighove číslo R_c v prípade nestacionárnej konvekcie, ale zvyšuje ho v prípade stacionárnej konvekcie. Podobne *So* anizotropia zvyšuje kritické horizontálne vlnové číslo v prípade nestacionárnej konvekcie a znižuje ho v prípade stacionárnej konvekcie. Druhý typ anizotropie (*Sa*, $\alpha < 1$) má na tieto dva parametre opačný vplyv. K dôležitým výsledkom tohto štúdia teda patrí fakt, že rovnaká anizotropia má kvalitatívne opačný vplyv na stacionárnu a nestacionárnu konvekciu v tvare šikmých roliek. Napr. *So* anizotropia uľahčuje nástup nestacionárnej OO konvekcie a znižuje jej horizontálny rozmer, ale sťažuje nástup stacionárnej SO konvekcie a zväčšuje jej horizontálny rozmer. *Sa* anizotropia ($\alpha < 1$) má samozrejme opačný účinok, pričom však opäť platí, vplyv na stacionárnu a nestacionárnu konvekciu je kvalitatívne opačný.

9.6 Závery - model IV

Lineárnou stabilitnou analýzou bol preskúmaný vplyv anizotropie tepelnej difuzivity a viskozity na model horizontálnej rovinnej vrstvy, rotujúcej okolo horizontálnej osi rotácie v smere x a preniknutej homogénnym magnetickým poľom v horizontálnom smere y . Vrstva je zohrievaná zospodu a chladená zvrchu a vo vrstve je udržiavaný rovnomerný teplotný gradient.

So = BM. Zavedená anizotropia difúzných koeficientov je v zmysle rôznych hodnôt týchto koeficientov v horizontálnych smeroch x a y (ktoré sú však rovnaké - uvažujeme horizontálnu izotropiu $\nu_{xx} = \nu_{yy}$ a $\kappa_{xx} = \kappa_{yy}$) oproti koeficientom v treťom smere z . V porovnaní s prípadom vertikálnej rotačnej osi (model III) je *BM* anizotropia definovaná formálne rovnako ako stratifikačná anizotropia, lebo aj magnetické pole aj os rotácie teraz ležia v horizontálnej rovine a horizontálnu izotropiu kvôli jednoduchosti sme v modeli radšej neporušili. Uvažujeme teda dva rôzne prípady anizotropie. Stratifikačná anizotropia oceánskeho typu (ako aj *BM* anizotropia) je definovaná nerovnosťami $\nu_{xx} = \nu_{yy} > \nu_{zz}$ a $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} > \kappa_{zz}$. Stratifikačná anizotropia atmosférického typu je definovaná nerovnosťami $\nu_{xx} = \nu_{yy} < \nu_{zz}$ a $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} < \kappa_{zz}$.

Stacionárna konvekcia. Pri skúmaní vplyvu anizotropie na stacionárnu konvekciu uvažujeme tvar konvekcie vo forme horizontálnych roliek (rovnako ako v prípade modelu III). V závislosti od vstupných parametrov môžu nastať tri orientácie roliek v horizontálnom smere - rolky môžu byť kolmé na magnetické pole, a teda orientované v smere x , alebo môžu byť rovnobežné so smerom magnetického poľa, teda orientované v smere osi y , alebo môžu byť natočené k magnetickému poľu o nejaký uhol. Rovnako, ako v predchádzajúcom modeli III sme preskúmali, ako sú preferované rolky s rôznymi orientáciami

³⁰Vplyv *So* a *Sa* anizotropií je tu nestacionárnej konvekcie opačný ako u stacionárnej konvekcie

v priestore parametrov ΛE_z a ako je tento ΛE_z režimový diagram, rozloženie oblasti preferencie jednotlivo orientovaných roliek, ovplyvnený anizotropiou difúzných koeficientov. Oblasť preferencie kolmých roliek označujeme SC, oblasť šikmých roliek SO a oblasť preferencie rovnobežných roliek je označená P. Vplyv anizotropie sa prejavuje zmenou hraníc SC/SO a SO/P medzi oblasťami. *So* anizotropia ($\alpha > 1$) redukuje oblasť preferencie šikmých SO roliek a naopak *Sa* anizotropia ($\alpha < 1$) túto oblasť rozširuje (obr. 43). Z fyzikálneho hľadiska to môžeme interpretovať ako oslabovanie vplyvu Coriolisovej a Lorentzovej sily v prípade *So* anizotropie, resp. zosilňovanie vplyvu týchto síl v prípade *Sa* anizotropie. Okrem vplyvu anizotropie na ΛE_z diagram bol preskúmaný aj vplyv anizotropie na nástup konvekcie (kritické Rayleighove číslo) a na tvar konvekcie (kritické vlnové číslo). *So* anizotropia pôsobí na vrstvu stabilizujúco, keďže zvyšovaním kritického Rayleighovho čísla znevýhodňuje nástup stacionárnych SC a SO módov. Naopak *Sa* anizotropia znižovaním kritického Rayleighovho čísla vrstvu destabilizuje (obr. 44). *So* anizotropia znižuje kritické horizontálne vlnové číslo a_c a *Sa* anizotropia ho zvyšuje, teda *So* anizotropia zväčšuje horizontálne rozmery stacionárnej konvekcie a *Sa* anizotropia ich znižuje (obr. 45). Zmena preferencie medzi SC a SO módmami je sprevádzaná prudkým skokom v hodnotách horizontálneho vlnového čísla, čiže k zmene preferencie z SC na SO módy pri zvyšovaní Elsasserovho čísla Λ nedochádza spojito, ako v prípade modelu III s vertikálnou rotačnou osou.

Nestacionárna konvekcia. Pri vyšetrowaní nestacionárnej konvekcie bola pozornosť sústredená na jednoduchší dvojrozmerný Λq_z režimový diagram, rozdeľujúci priestor parametrov Λ a q_z na 5 oblastí preferencie. SC a SO sú rovnako ako na obr. 43 oblasti preferencie stacionárnych kolmých, resp. šikmých roliek. Oblasť OC' je oblasťou preferencie nestacionárnych roliek, šikmých vzhľadom na magnetické pole (overstable cross), kde ale konvektívne rolky sú takmer kolmé (uhol medzi osou roliek a magnetickým poľom sa blíži k 90 stupňom. OC je oblasť preferencie nestacionárnych roliek kolmých na magnetické pole, teda s uhlom presne 90 stupňov (OC módy ani OC' módy nemôžu existovať v neviskóznom prípade $E = 0$). OO je oblasťou preferencie nestacionárnych šikmých roliek (overstable oblique). Anizotropia výrazne ovplyvňuje polohu kriviek, tvoriacich hranice medzi týmito 4 oblasťami (obr. 48). *So* anizotropia posúva systém kriviek smerom k menším hodnotám Λ a q_z . Výnimkou je horizontálna hranica SO/SC, nezávislá na q_z (lebo ide o stacionárne módy), ktorú *So* anizotropia posúva smerom k vyšším hodnotám Λ . *Sa* anizotropia má presne opačný účinok.

Osobitý vplyv SA anizotropie na nestacionárnu konvekciu. K dôležitým výsledkom štúdia vplyvu anizotropie na kritické Rayleighove čísla a kritické horizontálne vlnové čísla je fakt, že rovnaká anizotropia má úplne opačný vplyv na stacionárnu a nestacionárnu konvekciu v tvare šikmých roliek (obr. 44, 45 a obr. 50). *So* anizotropia uľahčuje nástup nestacionárnej konvekcie (OO) a znižuje jej horizontálny rozmer, ale sťažuje nástup stacionárnej konvekcie (SO) a zväčšuje jej horizontálny rozmer. *Sa* anizotropia má opačný účinok, pričom však opäť platí, vplyv na stacionárnu a nestacionárnu konvekciu je rôzny.

10 Závery

V tejto práci bol študovaný vplyv anizotropie viskozity a tepelnej difuzivity na štyri modely rotujúcej magnetokonvekcie v horizontálnej rovinnej vrstve. Vrstva je v každom z modelov zahrievaná zospodu a chladená zvrchu a vo vnútri vrstvy je udržiavaný lineárny teplotný profil. Gravitačná sila pôsobí vo vertikálnom smere.

Modely I–IV. V modeloch I, II a III vrstva rotuje okolo vertikálnej osi rotácie a v modeli IV je os rotácie orientovaná v horizontálnom smere x .

Vrstva je preniknutá základným magnetickým poľom, pričom rôzne modely sú odlišené práve rôznou konfiguráciou alebo orientáciou tohoto poľa. V modeli I je základné pole azimutálne a rastúce smerom od osi rotácie a v modeli II je to vertikálne homogénne pole. Obe tieto polia sú osovo symetrické vzhľadom na os rotácie, a preto boli tieto modely vyšetrované v cylindrickej súradnicovej sústave (s, φ, z) .

V modeloch III a IV je základné magnetické pole homogénne a orientované v horizontálnom smere y . Tieto modely boli vyšetrované len v kartézskej súradnicovej sústave (x, y, z) .

Anizotropia difúzných koeficientov bola do týchto modelov zavedená v najjednoduchšej forme, t.j. vo forme diagonálneho tenzora (19) napr. pre viskozitu (podobnú formu má aj tenzor κ)

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \begin{pmatrix} \nu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz} \end{pmatrix},$$

v ktorom sú dve z troch zložiek vždy rovnaké. Pomer dvoch rôznych zložiek nazývame parameter anizotropie, ktorý je jednoduchou mierou anizotropie a označujeme ho α . V modeloch I a II je parameter anizotropie definovaný nasledovne $\alpha = \kappa_{ss}/\kappa_{zz} = \nu_{ss}/\nu_{zz}$. V modeloch III a IV je definovaný $\alpha = \kappa_{xx}/\kappa_{zz} = \nu_{xx}/\nu_{zz}$.

Dôležitým pojmom je horizontálna izotropia, ktorá znamená rovnaké difúzne koeficienty práve v horizontálnych smeroch³¹. Anizotropiu, pri ktorej je zachovaná horizontálna izotropia, nazývame stratifikačná anizotropia (SA). Ak je difuzivita v horizontálnych smeroch väčšia ako vo vertikálnom smere, hovoríme o stratifikačnej anizotropii oceánskeho typu a označujeme ju So ; ak platí opak, t.j. difuzivita vo vertikálnom smere je väčšia, ako v horizontálnych smeroch, hovoríme o stratifikačnej anizotropii atmosférického typu a označujeme ju Sa .

Podľa [5] je vďaka lokálnej turbulencii v zemskom jadre zvýšená difúzia v smere osi rotácie a v smere magnetického poľa. Základný stav modelu III nám umožňuje zaviesť anizotropiu v zmysle [5], pri ktorej sú difúzne koeficienty v smeroch y a z rovnaké a väčšie, ako v smere x , teda $\nu_{yy} = \nu_{zz} > \nu_{xx}$. Túto anizotropiu nazývame anizotropiou podľa Braginského a Meytlisa (BM). BM anizotropia, definovaná v modeli III, je jediný vyšetrovaný prípad, pri ktorom je porušená horizontálna izotropia. Vďaka konfigurácii základných stavov môžeme BM anizotropiu formálne stotožniť s Sa anizotropiou v modeli II a s So anizotropiou v modeli IV.

Pre porovnanie definícií anizotropie v modeloch I, II, III a IV je nasledujúca tabuľka, ktorá obsahuje definície parametra anizotropie α a definície rôznych uvažovaných typov anizotropie viskozity (presne rovnako je definovaná anizotropia tepelnej difuzivity so zložkami κ namiesto ν).

³¹ $\nu_{ss} = \nu_{\varphi\varphi}$ v modeloch I a II, $\nu_{xx} = \nu_{yy}$ v modeloch III a IV.

model	α	BM	Sa	So
I	ν_{ss}/ν_{zz}	– –	$\nu_{ss} = \nu_{\varphi\varphi} < \nu_{zz}$ $\alpha < 1$	$\nu_{ss} = \nu_{\varphi\varphi} > \nu_{zz}$ $\alpha > 1$
II	ν_{ss}/ν_{zz}	$\nu_{ss} = \nu_{\varphi\varphi} < \nu_{zz}$ $\alpha < 1$	$\nu_{ss} = \nu_{\varphi\varphi} < \nu_{zz}$ $\alpha < 1$	$\nu_{ss} = \nu_{\varphi\varphi} > \nu_{zz}$ $\alpha > 1$
III	ν_{xx}/ν_{zz}	$\nu_{zz} = \nu_{yy} > \nu_{xx}$ $\alpha < 1$	$\nu_{xx} = \nu_{yy} < \nu_{zz}$ $\alpha < 1$	$\nu_{xx} = \nu_{yy} > \nu_{zz}$ $\alpha > 1$
IV	ν_{xx}/ν_{zz}	$\nu_{xx} = \nu_{yy} > \nu_{zz}$ $\alpha > 1$	$\nu_{xx} = \nu_{yy} < \nu_{zz}$ $\alpha < 1$	$\nu_{xx} = \nu_{yy} > \nu_{zz}$ $\alpha > 1$

Lineárna stabilitná analýza bola použitá pri štúdiu týchto modelov. Na základný stav sa naložia poruchy magnetického, rýchlostného a teplotného poľa s nekonečne malou amplitúdou a hľadajú sa podmienky nástupu konvekcie. Tvar navrhovaných porúch - nestabilit súvisí so základným poľom a je navrhnutý tak, aby bolo možné nájsť riešenie rovníc v separovanom tvare. Pre rôzne modely boli teda vyšetované nestability s rôznym tvarom.

Stacionárne a nestacionárne formy konvekcie. Vo všetkých modeloch vyšetrujeme stacionárne a nestacionárne nestability, pritom model I je jediný prípad, v ktorom sú možné len nestacionárne nestability, ktoré majú tvar periodickej nestability - vlny, šíriacej sa západným alebo východným smerom pozdĺž azimutálneho magnetického poľa. Sú to tepelné MAC, alebo magneticky hnané MAC a MC módy, ktoré ku svojmu vzniku nepotrebujú Archimedovu vztlakovú silu a energiu ku svojmu vybudeniu berú z magnetického poľa, ktoré je jedine v tomto modeli nehomogénne a zakrivené.

V modeli II sú nestability osovosymetrické, a to buď v tvare stacionárneho driftujúceho toku (nezávislom na čase), alebo v tvare časovo závislých torzných oscilácií.

V modeloch III a IV sú nestability v tvare horizontálnych roliek s osami vo všeobecnosti naklonenými k horizontálnemu magnetickému poľu (ktoré je v oboch prípadoch orientované v smere osi y).

10.1 Zhrnutie

Vplyv anizotropie difúzných koeficientov je vzhľadom na rôznosť nestabilit v rôznych modeloch rozmanitý. Existujú však určité podobnosti, ktoré súvisia so zachovaním, resp. porušením horizontálnej izotropie.

Vo všetkých modeloch bol vyšetovaný vplyv anizotropií na základné parametre, opisujúce časovú a priestorovú štruktúru konvekcie (kritické Rayleighove číslo, kritické vlnové číslo a kritická frekvencia) v priestore vstupných parametrov, popisujúcich základný stav (Ekmanove, Elsasserove, Robertsove, magnetické Prandtlove, Rossbyho číslo, ...).

V prípade zachovania horizontálnej izotropie má stratifikačná anizotropia oceánskeho typu (So) vo všeobecnosti na konvekciu stabilizujúci účinok, lebo zvyšuje kritické Rayleighove číslo R_c . Znižovaním kritického horizontálneho čísla a_c (resp. kritického radiálneho vlnového čísla k_c v modeloch I a II) sa vplyvom So anizotropie zväčšuje horizontálny rozmer konvektívnych buniek. Sa anizotropia má opačný vplyv, pôsobí destabilizujúco (znižuje kritické Rayleighove číslo) a znižuje horizontálny rozmer konvektívnych útvarov.

Vplyv stratifikačnej anizotropie v modeli IV je odlišný a zaujímavý, lebo anizotropia má rôzny vplyv na stacionárnu a na nestacionárnu konvekciu. So (formálne totožná s BM anizotropiou) anizotropia destabilizuje systém v prípade nestacionárnej konvekcie, ale stabilizuje ho v prípade stacionárnej konvekcie. Takisto znižuje horizontálny rozmer nestacionárnej konvekcie, ale zväčšuje ho v prípade stacionárnej konvekcie. Sa anizotropia

má presne opačný vplyv na stacionárnu resp. nestacionárnu konvekciu.

V jedinom vyšetovanom prípade, pri ktorom nie je zachovaná horizontálna izotropia (prípád *BM* anizotropie v modeli III), je vplyv anizotropie na kritické Rayleighove číslo a kritické horizontálne číslo minimálny. *BM* anizotropia destabilizuje systém (znižuje kritické Rayleighove číslo) len pri väčších hodnotách Ekmanovho čísla a rovnako až pri väčších hodnotách Ekmanovho čísla je anizotropiou ovplyvnený aj horizontálny rozmer konvektívnych roliet.

V modeli I sa zaujímavé výsledky dotýkajú aj magneticky hnaných módo. Viskózne MC módy môžu práve vďaka *So* anizotropii vznikáť pri geofyzikálne reálnejších parametroch, teda už nie pri priveľkých Λ a E ($E \leq O(10^{-4})$), ako v izotropnom prípade ($\Lambda = O(10^3)$, $E = O(10^{-3})$). MAC módy v stabilne stratifikovanej vrstve sa len vďaka *So* anizotropii môžu šíriť aj východným smerom.

Klasický model II, študovaný Chandrasekharom [13], tým, že sa riešil v cylindrickej geometrii, umožnil študovať vzájomný vplyv inerciálnych oscilácií a tepelnej konvekcie v zemskom jadre. Opäť isté typy anizotropie (oproti izotropnému prípadu) zlepšujú súlad vznikajúcich nestabilit so sekulárnymi variáciami geomagnetického poľa. Tu však definitívne závery možno urobiť až po (aspoň slabo) nelineárnej analýze.

Model III umožnil študovať anizotropie bez a s horizontálnou izotropiou. Rozdiely medzi odpovedajúcimi *BM* a *SA* anizotropiami, prípadne aj izotropným prípadom sú výrazné. Napr. *BM* anizotropia (v porovnaní so stratifikačnou anizotropiou a/alebo izotropným prípadom) má jednu špeciálnu vlastnosť. Znevýhodňuje nestacionárnu konvekciu redukovaním intervalov Elsasserovho a Ekmanovho čísla, na ktorých nestacionárna konvekcia môže existovať. Odlišnosti anizotropií indikujú, že obmedzovať sa len na izotropné štúdie môže viesť k chybným ako kvantitatívnym, tak aj kvalitatívnym záverom. Napokon veľký význam majú porovnania modelov III a IV, a to aj len v izotropnom prípade.

Model IV jednoduchým spôsobom aspoň čiastočne nahrádza (spolu s modelmi so zvislou rotačnou osou) nedostatky planárnych vrstiev pri modelovaní sférických vrstiev. Je zaujímavé, že hydromagnetické nestability, vznikajúce vo vrstve so zvislou, resp. ležatou rotačnou osou majú mnoho spoločného. Výrazne sa však aj odlišujú. Dramatický rozdiel je práve v uvážení obidvoch (*Sa* a *So*) typov *SA* anizotropie. U ležatej rotačnej osi je vplyv týchto anizotropií na nestacionárnu konvekciu úplne opačný, ako na stacionárnu a navyše (zrejme) v rozpore so všeobecne formulovanými vplyvmi týchto anizotropií na konvekciu vo všetkých vyšetovaných modeloch I-III. Možno ešte dôležitejší rozdiel je v samotnom izotropnom prípade. Rotácia okolo horizontálnej rotačnej osi na rozdiel od vertikálnej nepotláča konvekciu pri slabých magnetických poliach. Prítom pri $\Lambda = O(1)$ potláča brániaci efekt magnetického poľa pre konvekciu oveľa efektívnejšie.

Úplne **na záver** treba povedať, že naše v maximálnej možnej miere zjednodušené modely anizotropných difúzných koeficientov, ale tak, aby si uchovali heuristickú hodnotu, presvedčivo ukazujú, že rôzne typy anizotropie môžu výrazne zmeniť podmienky vzniku a charakter rotujúcej magnetokonvekcie, teda nestabilit vznikajúcich v rotujúcich systémoch v prítomnosti magnetického poľa.

Literatúra

- [1] Amit, H., Christensen U.R., 2008. Accounting for magnetic diffusion in core flow inversions from geomagnetic secular variation. *Geophysical Journal International*, 175, 913–924.
- [2] Boďa, J., 1988. Thermal and magnetically driven instabilities in a non-constantly stratified fluid layer. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 44, 77–90.
- [3] Braginsky, S.I., 1970. Torsional magnetohydrodynamic vibrations in the Earth's core and variations in day length. *Geomagn. & Aeron.*, 10, 3–12.
- [4] Braginsky, S.I., 1999. Dynamics of the stably stratified ocean at the top of the core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 111, 21–24.
- [5] Braginsky, S.I., Meytlis, V.P., 1990. Local turbulence in the Earth's core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 55, 71–87.
- [6] Brestenský, J., Rädler, K.-H., 1989. Mean electromotive forces resulting from instabilities in a stratified rapidly rotating fluid layer permeated by a magnetic field. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 49, 57–70.
- [7] Brestenský, J., Ševčík, S., 1994. Mean electromotive force due to magneto-convection in rotating horizontal layer with rigid boundaries. In: M.R.E. Proctor, ed., *Geodynamo Modelling*, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 77, 191–208.
- [8] Brestenský, J., Ševčík, S., Šimkanin, J., 1995. The boundary conditions in influence on a magnetoconvection of a rapidly rotating horizontal fluid layer stratified either uniformly or non-uniformly (mathematical approaches). In: Proc. of the 1st conference of Slovak geophysicists, ed(s). I. Túnyi et al., *Geophys. Inst. of SAS, Bratislava*, 80–85.
- [9] Brestenský, J., Ševčík, S., Šimkanin, J., 2001. Rotating magnetoconvection in dependence on stratification, diffusive processes and boundary conditions. In: *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, eds. P. Chossat, D. Armbruster and I. Oprea, NATO Science Series 26, 133–144, Kluwer Academic Publishers.
- [10] Brestenský, J., Šoltis, T., Ševčík, S., 2005. Linear Rotating Magnetoconvection with anisotropic diffusive coefficients. In: *Proceedings of the Riga Pamir conference, Fundamental and Applied MHD 1*, 101–104.
- [11] Brestenský, J., Šoltis, T., 2010. Hydromagnetic instabilities in the planar layer rotating around horizontal rotation axis. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, submitted
- [12] Brestenský, J., Ševčík, S., Šimkanin, J., Marsenić, A., Šoltis, T. eds., 2009. *Natural Dynamos, Book of Abstracts. Contributions to Geophysics and Geodesy, Vol. 39.*
- [13] Chandrasekhar, S., 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.* Clarendon Press, Oxford.
- [14] Colling, A. et al, 2002. *Ocean Circulation (2nd edition).* Butterworth-Heinemann, The Open University.
- [15] Davidson, P.A., 2004. *Turbulence; An Introduction for Scientists and Engineers,* Oxford.

- [16] Donald, J.T., Roberts, P.H., 2004. The effect of Anisotropic heat transport in the Earth's core on the Geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 98, 367–384.
- [17] Dumberry, M., 2008. Taylor's constraint and torsional oscillations, Course 7. In: Cardin, P., Cugliandolo, L.F. *Dynamos*. Elsevier
- [18] Eltayeb, I.A., 1972. Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer. *Proc. R. Soc. Lond., A* 326, 229–254.
- [19] Eltayeb, I.A., 1975. Overstable hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.*, 71, 161–179.
- [20] Fearn, D.R., 1998. Hydromagnetic flow in planetary cores. *Rep. Prog. Phys.*, 61, 175–235.
- [21] Fearn, D.R., Roberts, P.H., 2007. The geodynamo, Chapter 4. In: Dormy, E., Soward, A.M. *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*. Taylor and Francis.
- [22] Glatzmaier, G.A., Roberts, P.H., 1996. Rotation and magnetism of Earth's inner core. *Science*, 274, 1887–1891.
- [23] Greenspan, H.P., 1968. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge Univ. Press.
- [24] Guba, P., Worster, M.G., 2006. Nonlinear oscillatory convection in mushy layers. *J. Fluid Mech.*, 553, 419–443.
- [25] Gubbins, D., Herrero-Bervera, E., 2007. *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Springer.
- [26] Hejda, P., Reshetnyak, M., 2010. Nonlinearity in a dynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, Special Issue: Natural dynamos, Vol. 104 Issue 5-6, eds. J. Brestenský, S. Ševčík, J. Šimkanin, A. Marsenić, and T. Šoltis, in press.
- [27] Ivers, D.J., Phillips, C.G., 2007-2010. Osobná komunikácia.
- [28] Jones, C.A., Roberts, P.H., 2000. The Onset of Magnetoconvection at Large Prandtl Number in a Rotating Layer II. Small Magnetic Diffusion. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 93, 173–226.
- [29] Krause, F., Rädler, K.-H., 1980. *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Akademie-Verlag Berlin.
- [30] Liao, X., Zhang, K., 2006. On the convective excitation of torsional oscillations in rotating systems. *The Astrophysical Journal*, 638, 113–116
- [31] Marsenić, A., Ševčík, S., 2008. Influence of a position of the critical level inside a plane layer on the rise of magnetically and thermally driven instabilities. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 102, 457–476.
- [32] Matsushima, M., Nakajama, T., Roberts, P.H., 1999. The anisotropy of local turbulence in the Earth's core. *Earth Planet Space*, 51, 277–286.
- [33] Phillips, C.G., Ivers, D.J., 2000. Spherical anisotropic diffusion models for the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 117, 209–223.
- [34] Phillips, C.G., Ivers, D.J., 2001. Spectral interactions of rapidly anisotropic turbulent viscous and thermal diffusion in the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 128, 93–107.

- [35] Press, W.H., et al, 1989. Numerical Recipes. Cambridge Univ. Press.
- [36] Revallo, M., Ševčovič, D., Ševčík, S., Brestenský, J., 1999. Viscously controlled non-linear magnetoconvection in a non-uniformly stratified horizontal layer. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 111, 83–92.
- [37] Roberts, P.H., Jones, C.A., 2000. The Onset of Magnetoconvection at Large Prandtl Number in a Rotating Layer I. Finite Magnetic Diffusion. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 92, 289–325.
- [38] Sakuraba, A., 2002. Linear magnetoconvection in rotating fluid spheres permeated by a uniform axial magnetic field. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 96, 291–318.
- [39] Schlichting, H., Gersten, K., 2000. *Boundary Layer Theory*, Springer.
- [40] Schrunner, M., Rädler, K.-H., Schmitt, D., Rheinhardt, M., Christensen, U.R., 2007. Meanfield concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 101, No. 2., 81–116.
- [41] Schubert, G., 2007. *Treatise on Geophysics, Volume 5 – Geomagnetism*, ed. Kono, M., Volume 8 – Core Dynamics, ed. Olson, P., Elsevier.
- [42] Ševčík, S., 1989. Thermal and magnetically driven instabilities in a non-constantly stratified rapidly rotating fluid layer. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 49, 195–211.
- [43] Ševčík, S., Brestenský, J., Šimkanin, J., 2000. MAC waves and related instabilities influenced by viscosity in dependence on boundary conditions. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 122, 161–174.
- [44] Šimkanin, J., Brestenský, J., Ševčík, S., 1997. Dependence of rotating magnetoconvection in horizontal layer on boundary conditions and stratification. In: J. Brestenský and S. Ševčík, eds., *Stellar and Planetary Magnetoconvection*, *Acta Astron. et Geophys. Univ. Comenianae*, 19, 195–220.
- [45] Šimkanin, J., Brestenský, J., Ševčík, S., 2003. Problem of the rotating magnetoconvection in variously stratified fluid layer revisited. *Studia Geophys. Geod.*, 47, 827–845.
- [46] Šimkanin, J., Hejda, P., 2009. Control volume method for hydromagnetic dynamos in rotating spherical shells: testing the code against the numerical dynamo benchmark. *Stud. Geophys. Geod.*, 53, 99–110.
- [47] Šoltis, T., 2004. Hydromagnetické nestability v podmienkach zemského jadra. Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava.
- [48] Šoltis, T., 2008. Rotujúca magnetokonvekcia pri rôznych typoch anizotropie difúzných koeficientov. Rigorózna práca, FMFI UK, Bratislava.
- [49] Šoltis, T., Brestenský, J., 2010. Rotating magnetoconvection with anisotropic diffusivities in the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 178, 27–38.
- [50] Soward, A.M., 1979. Thermal and magnetically driven convection in a rapidly rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.*, 90, 669–684.

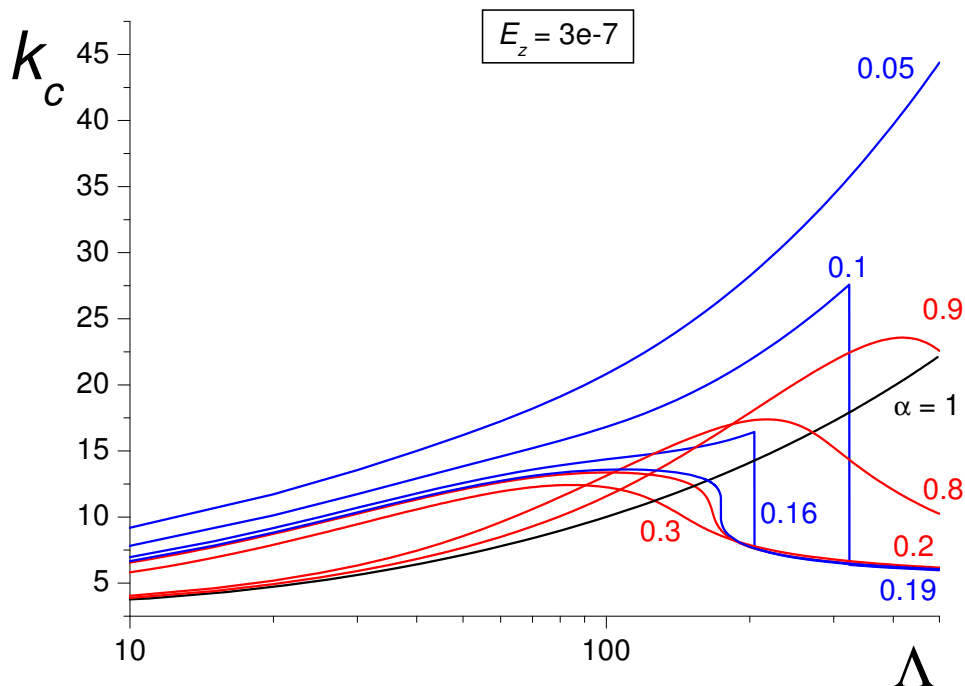
Príspevky na konferenciách

- [51] Šoltis, T., Brestenský, J., 2010. The anisotropic diffusivities' influence on magnetoconvection in the Earth's core. 12th Symposium of SEDI, Santa Barbara (poster).
- [52] Šoltis, T., Brestenský, J., 2009. Marginal stability of the planar layer in equatorial regions with anisotropic diffusivities. IAGA 11th Scientific Assembly, Sopron (prednáška).
- [53] Brestenský, J., Šoltis, T., 2009. Rotujúca magnetokonvekcia v zemskom jadre ovplyvnená dvoma typmi anizotropnej difúzie. VIII. Slovenská geofyzikálna konferencia, Bratislava (prednáška).
- [54] Brestenský, J., Šoltis, T., 2009. Anisotropic diffusivities' influence on the Earth's core convection. Natural Dynamos, Stará Lesná (prednáška).
- [55] Šoltis, T., Brestenský, J., 2008. Rotating magnetoconvection with anisotropic diffusivities in polar and equatorial regions of the Earth's core. 11th Symposium of SEDI, Kunming, P.R. China (poster).
- [56] Brestenský, J., Šoltis, T., 2008. Rotating Hydromagnetic Instabilities with Anisotropic Diffusivities at Large Prandtl Number. Magnetic Field Generation in Experiments, Geophysics and Astrophysics, Kavli Institute for Theoretical Physics, Santa Barbara (prednáška).
- [57] Brestenský, J., Avula Benerji Babu, Šoltis, T., 2008. The influence of anisotropic viscosity and thermal diffusivity on convection in a fluid planar layer. Workshop and Minicourse; Conceptual Aspects of Turbulence: Mean Fields vs. Fluctuations, Wolfgang Pauli Institute, Vienna. (poster).
- [58] Brestenský, J., Šoltis, T., Avula Benerji Babu, 2008. Rotating magnetoconvection in equatorial regions of the Earth's core influenced by anisotropic diffusive coefficients. EGU, Vienna (poster).
- [59] Šoltis, T., Brestenský, J., 2007 Hydromagnetic instabilities in the Earth's core influenced by various types of anisotropic diffusive coefficients. IUGG XXIV. Perugia, Italy (prednáška).
- [60] Šoltis, T., Brestenský, J., Marsenić, A., 2007. Earthlike hydromagnetic instabilities induced at various types of anisotropic diffusive coefficients. VII. Slovenská geofyzikálna konferencia, Bratislava (prednáška).
- [61] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2007. MAC / MC - modes in variously stratified fluid layers with anisotropic diffusive coefficients. EGU, Vienna (poster).
- [62] Brestenský, J., Marsenić, A., Šoltis, T., Rameshwar, Y., 2006. The influence of anisotropic viscosity and thermal diffusivity on convection in a fluid planar layer. 10th Symposium of SEDI, Prague (poster).
- [63] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2006. Axisymmetric hydromagnetic instabilities and their possible relation to torsional oscillations in the Earth's core. 10th Symposium of SEDI, Prague (poster).
- [64] Brestenský, J., Marsenić, A., Šoltis, T., Ševčík, S., 2006. Rotating magnetoconvection in planar layer fluid with anisotropic viscosity and thermal diffusivity. EGU, Vienna (poster).

- [65] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2006. Axisymmetric hydromagnetic instabilities in rotating planar layer permeated by vertical magnetic field influenced by anisotropic viscosity of fluid. EGU, Vienna (poster).
- [66] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2005. Influence of anisotropic transport coefficients on the diffusive modes in the rotating magnetoconvection. 8th MHD Days, Potsdam, (poster).
- [67] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2005. Diffusive MC waves in the fluid layer with anisotropic viscosity. IAGA, Toulouse (poster).
- [68] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2005. Linear rotating magnetoconvection with anisotropic diffusive coefficients. Joint 15th Riga and 6th Pamir International Conference, Jurmala (poster).
- [69] Brestenský, J., Šoltis, T., Ševčík, S., 2005. Difúzne magnetické nestability v stabilne stratifikovanej kvapalnej vrstve. VI. Slovenská geofyzikálna konferencia, Bratislava (prednáška)
- [70] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2005. Magnetic instabilities influenced by anisotropic viscosity in the Earth's core. EGU, Vienna (poster).
- [71] Šoltis, T., Brestenský, J., Ševčík, S., 2004. Influence of thermal conductivity anisotropy on rotating magnetoconvection. 9th Symposium of SEDI, Garmisch-Partenkirchen (poster).
- [72] Brestenský, J., Šoltis, T., Ševčík, S., 2004. Rotating Magnetoconvection With Thermal Diffusivity Anisotropy. 7th MHD Days, Ilmenau (prednáška).
- [73] Brestenský, J., Šoltis, T., Ševčík, S., 2004. Hydromagnetic instabilities in rotating layer in azimuthal magnetic field at various diffusive coefficients. EGU, Nice (poster).

11 Príloha 1: Odoveď na otázku Prof. RNDr. Daniela Ševčoviča, DrSc.

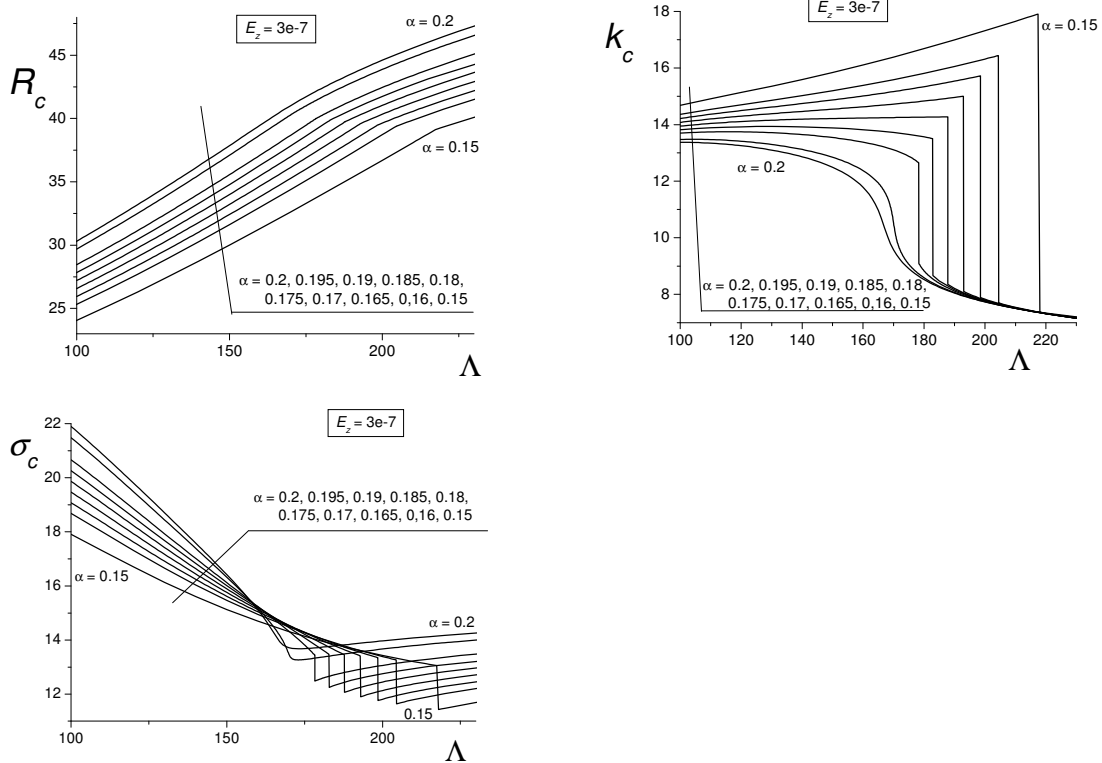
Zdanlivá porušenosť usporiadania kriviek na obr. 7d je spôsobená malou zahustenosťou kriviek pre rôzne hodnoty α . Ak medzi krivky $\alpha = 1$ a $\alpha = 0,1$ pridáme ďalšie krivky, tak (obr. 51) vidíme pekný prechod z jednej kvality (spojitý priebeh) na inú (nespojité priebeh - skok). Postupným zvyšovaním anizotropie (zmenšovaním α) sa krivky k_c vs Λ



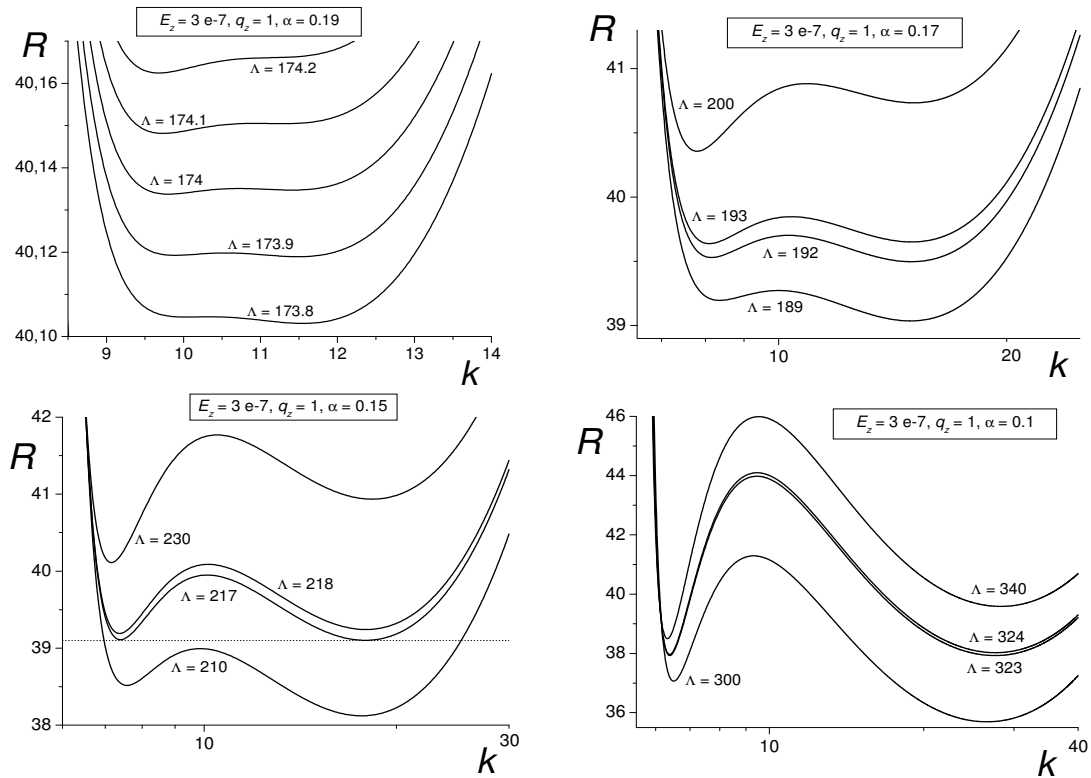
Obr. 51: Prechod jedného MAC módu na iný; závislosť kritického radiálneho vlnového čísla k_c na Elsasserovom čísle Λ pre rôzne prípady anizotropie.

deformujú, a od istej hodnoty α ($\lesssim 0,19$) sú už krivky nespojité a skok v hodnote kritického radiálneho vlnového čísla k_c sa ďalším zvyšovaním anizotropie zväčšuje. Pri zobrazenom rozsahu Elsasserovho čísla Λ sa skok u krivky $\alpha = 0,05$ neobjavuje, lebo existuje až pri väčšej hodnote Λ .

Tento prechod na nový MAC mód ovplyvňuje okrem k_c aj kritické Rayleighove číslo R_c a kritickú frekvenciu σ_c . Na obr.52 môžeme vidieť, že kritické Rayleighove číslo nového módu má menšiu strmosť, ale ku skoku v hodnote nedochádza, teda nespojitosť je v prvej derivácii. Kritická frekvencia sa naopak mení skokom, ale skok nie je tak výrazný, ako v prípade k_c . Dôvodom existencie skoku na iný mód je rovnako, ako v prípade prechodu z viskózneho na hydromagnetický mód existencia dvoch lokálnych miním na krivke R vs k , dôležitej pri minimalizácii. Pre prípady anizotropie α ($\lesssim 0,19$) má závislosť Rayleighovho čísla R na radiálnom vlnovom čísle k dve lokálne minimá pri dvoch rôznych vlnových číslach. Zmenou Elsasserovho čísla Λ si tieto minimá vymenia úlohu (Rayleighove číslo v menšom minimu nazývame kritické Rayleighove číslo - R_c) a dôjde teda k zmene preferencie. Postupne zmeny preferencie pre rôzne hodnoty parametra anizotropie α vidíme na obr. 53. Čím je silnejšia anizotropia, tým sú výraznejšie rozdiely medzi lokálnymi minimami, ktoré sa od seba navzájom vzdiaľujú pri klesajúcom α .



Obr. 52: Prechod jedného MAC módu na iný; závislosti kritického Rayleighoveho čísla R_c , kritického radiálneho vlnového čísla k_c a kritickej frekvencie σ_c na Elsasserovom čísle Λ pre rôzne prípady anizotropie.



Obr. 53: Prechod jedného MAC módu na iný; závislosť Rayleighoveho čísla R na radiálnom vlnovom čísle k pre rôzne Elsasserove čísla Λ pre rôzne prípady anizotropie.

