

UNIVERZITA KOMENSKÉHO  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

---

NUMERICKÝ VÝPOČET  
ČASOV ŠÍRENIA SEIZMICKÝCH VLN  
V 3D NEHOMOGÉNNOM PROSTREDÍ  
A LOKALIZÁCIA HYPOCENTIER  
ZEMETRASENÍ

---

2011

FILIP KUBINA



UNIVERZITA KOMENSKÉHO  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A  
INFORMATIKY



---

NUMERICKÝ VÝPOČET  
ČASOV ŠÍRENIA SEIZMICKÝCH VĹN  
V 3D NEHOMOGENNOM PROSTREDÍ  
A LOKALIZÁCIA HYPOCENTIER  
ZEMETRASENÍ

---

Bakalárska práca

Študijný program : Fyzika

Študijný odbor: 4.1.1 Fyzika

Školiace pracovisko: Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Školiteľ: Peter Moczo, prof. RNDr. DrSc.

Evidenčné číslo: d257fac1-3a4e-4f5e-89f5-671c6ce72f64

Bratislava 2011

FILIP KUBINA

fkubina@gmail.com

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....

# Pod'akovanie

Ďakujem svojmu vedúcemu, profesorovi Petrovi Moczovi, za jeho podporu, konzultácie, opravy a návrhy a vytvorenia tvorivého prostredia.

Moja veľká vďaka patrí aj dr. François Thouvenot, ktorý mi pomohol s prehľadom zaužívaných postupov, princípu lokalizačnej siete SISMALP i histórie Alsaska.

Ďakujem aj Doc. Jozefovi Kristekovi za algoritmickú časť, za model oblasti Dobrá Voda Dr. Martinovi Gálišovi a za vstupné údaje Dr. Lucii Fojtíkovej.

Moju vďaka majú aj Dr. Pierre-Yves Bard za vysávač a Dr. Emmanuel Chaljub za ruksak, bez ktorého by moja práca zostala navždy v Grenobli.

Za technickú podporu, bez ktorej by moja práca zostala naveky iba na hardidisku počítača ďakujem pánovi Romanovi Pločekovi.

Svojej rodine a priateľom ďakujem za povzbudivé slová a pomoc.

Za neustále povzbudzovanie, rozveseľovanie a názov programu vďačím milej Adi Pločekovej.

# Abstrakt

meno: Filip Kubina  
názov práce: Numerický výpočet časov šírenia seizmických vln  
v 3D nehomogénnom prostredí  
a lokalizácia hypocentier zemetrasení  
škola: Univerzita Komenského  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie  
školiťel: Peter Moczo, prof. RNDr. DrSc.  
miesto: Bratislava  
rok: 2011  
rozsah: 62 strán  
odborná kval.: bakalár

V tejto práci sa venujem numerickému výpočtu časov šírenia seizmických vln. Výpočet som vykonal pre model seizmicky aktívnej zdrojovej oblasti Dobrá Voda. Táto oblasť je z geologického hľadiska veľmi zložitá s výraznými nehomogenitami na veľkej priestorovej škále. Preto využitie trojrozmerných modelov a algoritmov pri lokalizácii hypocentier je v nej nutnosťou.

Takéto algoritmy však vo svete ešte stále nie sú zaužívané. V tejto bakalárskej práci sa snažím ukázať, že lokalizácia v 3D prostrediach je už v súčasnosti možná aj s bežným vybavením. Na to som navrhol nový postup.

Navrhnutý postup slúži na výpočet časov šírenia seizmických vln zo zdroja k seizmickým staniciam. Tieto výsledky spolu s údajmi zo seizmických staníc využívam na lokalizáciu zdrojov. Výsledky vedú k relokizácii zdrojov a zmene parametrov prostredia.

Algoritmus som implementoval v prostredí jazyka C/C++. Mojou snahou bolo napísať algoritmickejšie čo najrýchlejší program. V práci ukazujem, že jeho časová zložitosť je len  $O(N^3)$ , čo je pre 3D prostredie optimum.

Kľúčové slová: seizmické vlny, vlnoplocha, čas šírenia, lokalizácia zemetrasení v 3D prostredí, ohnisková oblasť Dobrá voda

# Abstract

author: Filip Kubina  
title: Numerical computation of seismic wave travel times  
in 3D heterogeneous medium  
and an earthquake hypocenter location  
institution: Comenius University  
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics  
Department of Astronomy, Physics of the Earth  
and Meteorology  
supervisor: Peter Moczo, prof. RNDr. DrSc.  
place: Bratislava  
year: 2011  
pages: 62  
degree of qual.: Bachelor

The thesis is devoted to the numerical computation of the arrival times of seismic waves. I performed computations for a model of the active source region Dobrá Voda. The region is geologically complex and heterogeneous. It is very important to use a *3D* model and algorithms in such conditions.

However, the *3D* algorithms have not become a common tool yet. My aim in this thesis is to show that the location with *3D* modeling is feasible even with basic equipment. I propose a new algorithm to accomplish that.

I use it to compute the arrival times of seismic waves. With these results and experimental data I localize hypocenters. The location leads to changes in hypocentral positions and changes in the model parameters as well.

I implemented the algorithm in the C/C++ language. My aim was to write algorithmically fast code. I demonstrated that its time complexity is only  $O(N^3)$  which is an optimum for *3D* medium.

Keywords: seismic waves, wavefront, arrival time, hypocenter location in *3D*, source region Dobrá Voda

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>11</b>
1.1	Prvé príchody . . . . .	12
1.2	Poznámka o príchode čela vlny . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Výpočet časov šírení seizmických vln</b>	<b>13</b>
2.1	Lúčové metódy . . . . .	14
2.1.1	Metóda strieľania . . . . .	14
2.1.2	Metóda ohýbania . . . . .	15
2.2	Sieťové metódy . . . . .	18
2.2.1	Riešenia rovnice eikonalu pomocou konečných diferencií	18
2.2.2	Metódy najkratšej cesty . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Lokalizácia hypocentra</b>	<b>23</b>
3.1	Manuálna lokalizácia . . . . .	23
3.2	Lokalizácia numerickými metódami . . . . .	25
3.2.1	Iteratívne metódy . . . . .	27
3.2.2	<i>Brute-force</i> metódy na diskretnej sieti . . . . .	28
3.3	Algoritmy relatívnej lokalizácie . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Numerická simulácia šírenia vlnoplochy</b>	<b>30</b>
4.1	Model prostredia . . . . .	31
4.2	Počiatkové podmienky - zdroj . . . . .	31
4.3	Šírenie vlny . . . . .	32
4.4	Vlnoplocha . . . . .	33

4.5	Algoritmus simulácie šírenia vlnoplochy . . . . .	34
4.6	Výpočet lokálnej normály vlnoplochy . . . . .	37
4.7	Okrajové podmienky . . . . .	37
4.8	Čas príchodu . . . . .	38
4.9	Časová zložitosť algoritmu . . . . .	39
4.10	Zhrnutie . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Kanonické modely</b>	<b>41</b>
5.1	Odraz vln od rozhrania . . . . .	41
5.2	Lom vln . . . . .	42
5.3	Difrakcia vln . . . . .	42
5.4	Spätné vyžarovanie . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Lokalizácia zemetrasení</b>	<b>45</b>
6.1	Hľadanie hypocentra - obrátená úloha . . . . .	45
6.1.1	Váhovacie koeficienty . . . . .	47
6.1.2	Čas vzniku . . . . .	48
6.2	Časová zložitosť algoritmu . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Výsledky numerických simulácií v zdrojovej oblasti Dobrá</b>	
	<b>Voda</b>	<b>49</b>
7.1	Vstupný model . . . . .	49
7.2	Seizmické údaje . . . . .	50
7.3	Pomer rýchlostí P a S vln . . . . .	51
7.4	Výsledky . . . . .	53
<b>8</b>	<b>Záver</b>	<b>55</b>
<b>9</b>	<b>Prílohy</b>	<b>59</b>



# Zoznam obrázkov

2.1	Ilustrácia k metóde strieľania . . . . .	15
2.2	Ilustrácia k metóde ohýbania . . . . .	17
2.3	Ilustrácia k Vidaleho schéme . . . . .	19
2.4	Nekauzálnosť Vidaleho schémy . . . . .	21
2.5	Ukážka vrcholu grafu so 16 hranami . . . . .	21
3.1	Ilustrácia k lokalizácii polohy zdroja v $2D$ prípade . . . . .	24
3.2	Wadatiho diagram pre zemetrasenie V03 . . . . .	25
4.1	Simulácia vlnoplochy v $3D$ homogénnom prostredí . . . . .	34
4.2	Ilustrácia čela vlny pri definovaní zložitých okrajových podmienok v $3D$ . . . . .	38
5.1	Miesto dopadu vlnenia na rozhranie dvoch polpriestorov . . . . .	43
5.2	Simulácia v $2D$ prostredí na rozhraní dvoch polpriestorov . . . . .	43
5.3	Simulácia v $3D$ prostredí na rozhraní dvoch polpriestorov . . . . .	44
9.1	Poloha záujmovej oblasti Dobrá Voda . . . . .	59
9.2	Model poľa veľkostí rýchlostí šírenia P vln v oblasti Dobrá Voda . . . . .	60
9.3	Horizontálne rezy modelom vo vybraných hĺbkach . . . . .	60
9.4	Izochrony príchodov na zemský povrch pre zemetrasenie V03. . . . .	61
9.5	Výsledky lokalizácie pre pomer $v_P/v_S = 1.90$ . . . . .	62

# Kapitola 1

## Úvod

Zemetrasenie je komplexný jav zahrňajúci vznik a šírenie trhliny emitujúcej seizmické vlny, ich následné šírenie prostredím a nimi spôsobené vibrácie povrchu Zeme. Zemetrasenie vzniká v mieste zlomu (hypocentre), kde tangenciálne napätie dosiahne medzu pevnosti kontaktu dvoch blokov danú statickým trením. Z tohoto bodového zdroja sa trhlina šíri po zlomovej ploche a vyžaruje energiu vo forme seizmických vln.

Samotný proces šírenia trhliny je zložitý, vyžiarené vlny sú širokospektrálne, s rôznymi amplitúdami na rôznych frekvenciách a smeroch. Tieto vlny sa následne šíria prostredím, ktorého nehomogenity ďalej mení ich charakteristiky. Na miestach seizmických staníc, ktoré nie sú vhodne umiestnené (napríklad na skalnom podloží), možno očakávať nezanedbateľný vplyv lokálnych podmienok na seizmický signál. Výsledkom býva teda veľmi komplikovaný časový priebeh vlny a tomu zodpovedajúci komplikovaný záznam na seizmografe. Naším cieľom je využiť aspoň časť z dostupných informácií v zázname k čo najpresnejšiemu určeniu polohy hypocentra a času vzniku trhliny.

## 1.1 Prvé príchody

Čas prvého príchodu seizmickej vlny je okamih, kedy sa nástup seizmického vlnenia vynorí z bežného náhodného šumu prostredia. Keďže prostredím sa šíria objemové pozdĺžne (P) aj priečne (S) polarizované vlny, má zmysel uvažovať časy príchodov P a S vln zvlášť. Časy prvých príchodov objemových seizmických vln sú údaje, ktoré môžeme priamo a veľmi presne odčítať zo záznamov zemetrasení.

Numerickou simuláciou šírenia vlnoplochy možno tieto časy šírenia vypočítať. K tomuto použijeme program založený na myšlienke Huyghensovho princípu. Porovnávanie skutočných časov príchodov a teoreticky vypočítaných časov príchodov možno využiť na lokalizáciu hypocentier zemetrasení.

## 1.2 Poznámka o príchode čela vlny

Zaujímavým faktom je, že v  $3D$  (v ľubovoľnom, nepárnorozmernom priestore), platí aj **silná verzia Huyghensovho princípu**: superpozícia elementárnych vlnoplôch je konštruktívna len na vonkajšej, obalovej vlnoploche a všade inde sa elementárne vlnoplochy navzájom vyrušia. Preto sa celá energia šíri iba v danej vlnoploche a nedochádza k jej disipácii počas šírenia, ako je to napríklad v  $2D$  rybníku, kde po prechode prvej vlny zostane hladina zvrátená. Hustota energie čela vlnoplochy klesá len v dôsledku geometrického rozširovania vlnoplochy a anelastických vlastností materiálov. Anelastický útlm je pri nízkofrekvenčných vlnách malý. Preto čelo vlny má stále pomerne veľkú hustotu energie a je ľahko zaznamenateľné seizmografom. Bez tejto vlastnosti by nebolo možné využívať k lokalizácii práve časy prvých príchodov.

## Kapitola 2

# Výpočet časov šírení seizmických vln

Analytický výpočet časov šírení vln je s výnimkou najjednoduchších prostredí nemožný. Preto sa na výpočty používajú mnohé druhy približných numerických metód. Neexistuje žiadna univerzálna a najlepšia metóda. Rôzne metódy sú vhodné pre rôzne druhy prostredí a cieľov. Používané metódy môžeme rozdeliť na dva druhy.

Jedným druhom sú metódy, ktoré riešia matematický problém s určenými dvoma okrajovými podmienkami - začiatočným a konečným bodom. V princípe tieto metódy hľadajú taký lúč, aby na ňom ležali počiatočný i konečný bod. Výhoda týchto metód spočíva v možnosti riešenia úlohy len medzi týmito dvomi zvolenými bodmi. V takomto prípade sú výpočtovo efektívne, no keďže skúšajú **len obmedzenú množinu možných riešení**, tak ich výpočet často dokonverguje len do lokálneho a nie globálneho extrému.

Druhým druhom sú sieťové metódy. Sieťové metódy sú vhodné na výpočet časov šírenia do celého prostredia alebo do jeho zvolenej časti. To znamená, že sa vypočítajú hodnoty vo všetkých sieťových bodoch. Hodnoty medzi sieťovými bodmi sa určujú zväčša interpoláciou. Až po výpočte sa v poli časov šírení vyhľadá bod, ktorého čas šírenia nás zaujíma. Je zjavné, že tieto metódy počítajú množstvo redundantnej informácie a sú výpočtovo

náročnejšie<sup>1</sup>. Avšak redundantná informácia pri priamej úlohe sa dá veľmi dobre využiť pri lokalizácii zemetrasení, ako uvedieme neskôr v časti 6 na strane 45.

## 2.1 Lúčové metódy

### - riešenie diferenciálnych rovníc lúča

Lúčová metóda je vysokofrekvenčným priblížením k riešeniu pohybovej rovnice elastického prostredia. Princíp týchto metód spočíva v hľadaní lúča - takej trajektórie, po ktorej sa šíri energia. Existuje viacero prístupov, ako riešiť rovnicu lúča

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{v(\vec{x})} \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \right) = \nabla \frac{1}{v(\vec{x})}. \quad (2.1)$$

Podrobnejšie rozoberieme dva z nich.

#### 2.1.1 Metóda strieľania

Metódy strieľania (*shooting methods*) sú iteratívne metódy založené na myšlienke pokus-omyl. Ako okrajové podmienky slúžia dva body  $A$  a  $B$ . Pri riešení skúšame rôzne lúče prechádzajúce počiatočným bodom  $A$  v snahe nájsť (alebo sa aspoň čo najviac priblížiť) lúčom ku konečnému bodu  $B$ .

Rovnicu 2.1 môžeme prepísať na diferenciálne rovnice prvého rádu:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = v(\vec{x}) \cdot \vec{p} \quad (2.2)$$

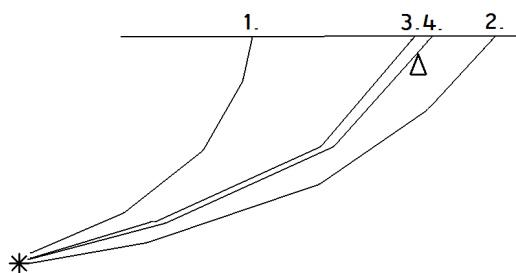
$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{v(\vec{x})} \quad (2.3)$$

Z týchto šiestich rovníc je len päť lineárne nezávislých.<sup>2</sup>

Iteratívnymi metódami vieme porovnávaním polohy, ktorou prechádza vypočítaný pokusný lúč, a polohy, ktorú chceme dosiahnuť, nájsť potrebné

<sup>1</sup>Sú to všetko aspoň  $O(N^3)$  a ešte pomalšie algoritmy.

<sup>2</sup>Veľkosť vektora  $p$  (*slowness*) je rovná prevrátenej hodnote rýchlosti šírenia vln  $v(\vec{x})$ .



**Obr. 2.1:** Ilustrácia k metóde strieľania. Na obrázku sú vyznačené prvé štyri lúče konvergujúce k optimálnemu riešeniu. Po častiach lineárny charakter lúčov je dôsledkom numerických aproximácií a konečne veľkého kroku.

hodnoty azimutálneho a latitudálneho uhla, aby lúč prechádzal presne touto polohou.

## 2.1.2 Metóda ohýbania

Variačnou metódou ohýbania (*bending method*, Wesson 1971) riešime úlohu určenia lúča medzi dvoma pevne danými bodmi. V prvej iterácii zvolíme jednoduchú trajektóriu (napríklad priamu spojnicu). Pri ďalších iteráciách trajektóriu perturbujeme s fixovanými koncami tak, aby výsledná trajektória bola totožná s lúčom. Táto metóda konverguje výrazne rýchlejšie ako metóda strieľania (ako ukázali Julian a Gubbins (1977)), preto ju rozoberieme podrobnejšie.

Najprv odvodíme diferenciálne rovnice lúča. Čas šírenia z miesta  $A$  do miesta  $B$  je vo všeobecnosti

$$t_{BA} = \int_A^B \frac{dl}{v} = \int_A^B s \cdot dl, \quad (2.4)$$

kde  $s$  označuje prevrátenú hodnotu rýchlosti šírenia (*slowness*). Hoci lúč je všeobecne trojrozmerný, vieme ho parametrizovať len s pomocou jedného parametra:

$$x = x(q), \quad y = y(q), \quad z = z(q). \quad (2.5)$$

Od diferenciálu  $dl$  prejdeme k diferenciálu dĺžkového parametra  $q$  pomocou rovnice

$$\frac{dl}{dq} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} \equiv \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \equiv F. \quad (2.6)$$

Dosadíme do rovnice 2.4 a dostaneme:

$$t_{BA} = \int_{q_A}^{q_B} s \cdot F \cdot dq. \quad (2.7)$$

Štandardným postupom variačného počtu odvodíme Eulerove rovnice, ktoré ďalej využijeme. Označme

$$s(x, y, z) \cdot F(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv L(\vec{X}, \vec{X}). \quad (2.8)$$

Lúč musí spĺňať Fermatov princíp extrémálneho času. V extrémé platí, že odchýlka hodnoty funkcie v optimálnom riešení a riešenia s nekonečne malou perturbáciou je do prvého rádu nulová.

$$\begin{aligned} & \int_{q_A}^{q_B} L(\vec{X} + \delta\vec{X}, \vec{X} + \delta\vec{X})dq - \int_{q_A}^{q_B} L(\vec{X}, \vec{X})dq = 0 \\ & \int_{q_A}^{q_B} L(\vec{X}, \vec{X}) + \sum_{i=0}^2 \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=0}^2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i dq - \int_{q_A}^{q_B} L(\vec{X}, \vec{X})dq = 0 \\ & \sum_{i=0}^2 \int_{q_A}^{q_B} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dq = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Druhý člen zintegrujeme per partes. Perturbácia na začiatku a konci je nulová, lebo okrajové body sú fixované. Po dosadení hraníc po zintegrovaní bude preto jeden člen nulový a dostávame

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 \int_{q_A}^{q_B} \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{d}{dq} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i dq = 0 \\ & \sum_{i=0}^2 \int_{q_A}^{q_B} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dq} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dq = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Integrál musí byť nulový na každom svojom intervale a preto nulové musí byť samotné vnútro, čím dostávame finálny tvar

$$\forall i : \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dq} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (2.11)$$

Výsledkom sú teda tri Eulerove rovnice, z ktorých sú len dve nezávislé. Tretiu lineárne nezávislú rovnicu získame vhodným zvolením parametra  $q$ .

Bude zodpovedať časti celkovej dĺžky trajektórie, čiže pomeru aktuálnej dráhy  $\lambda$  k celkovej dráhe. Preto  $q \in \langle 0, 1 \rangle$ . Potom z rovnice 2.6 vyplýva, že  $F = \frac{dl}{dq} = \text{const}$  a dostávame tretiu rovnicu. Dokopy teda máme:

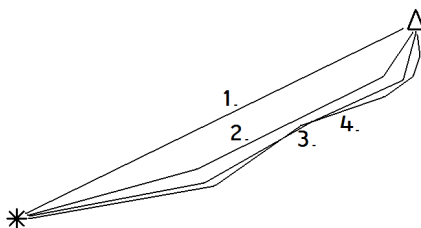
$$\frac{\partial}{\partial x}(s \cdot F) = \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(s \cdot F) \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(s \cdot F) = \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(s \cdot F) \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{dF}{dq} = 0 \quad (2.14)$$

s okrajovými podmienkami:

$$\begin{array}{lll} x(0) = x_A & y(0) = y_A & z(0) = z_A \\ x(1) = x_B & y(1) = y_B & z(1) = z_B \end{array}$$



**Obr. 2.2:** Ilustrácia k metóde ohýbania. Znázornené sú začiatkové a ďalšie tri perturbované riešenia.

Teraz vyskúšame ľubovoľnú počiatkovú trajektóriu spĺňajúcu okrajové podmienky. Zväčša volíme úsečku, ktorá spája body  $A$  a  $B$ . Riešenie v ďalšom kroku hľadáme v tvare

$$\forall i : x_i^{(1)}(q) = x_i^{(0)}(q) + \delta x_i^{(0)}(q). \quad (2.15)$$

Takto navrhované riešenie dosadíme do rovníc 2.12 až 2.14. Uvažujeme, že odchýlka od pôvodného riešenia je malá a rovnice môžeme linearizovať. Riešime teda algebraickú sústavu lineárnych rovníc. Výsledné riešenie je len približnou trajektóriou a preto iteratívne opakujeme uvedený postup.



Prehľad oboch metód a podrobnejšie odvodenie možno nájsť v článku *Three-Dimensional Seismic Ray Tracing* (Julian a Gubbins 1977) a *Advances in travel-time calculations for three dimensional structures* (Thurber a Kissling 2000), odkiaľ je čerpaná táto sekcia. Naše odvodenie sa trochu líši, aby sme sa vyhli drobným nepresnostiam v prvom z uvedených článkov.

## 2.2 Sieťové metódy

### 2.2.1 Riešenia rovnice eikonálu pomocou konečných diferencií

Tento prístup navrhol Vidale (Vidale 1988). Podobne ako v originálnej práci, budeme sa venovať 2D prípadu, jeho rozšírenie na 3D je už priamočiare. Prostredie charakterizujeme pravidelnou ortogonálnou sieťou so známymi hodnotami rýchlosti.

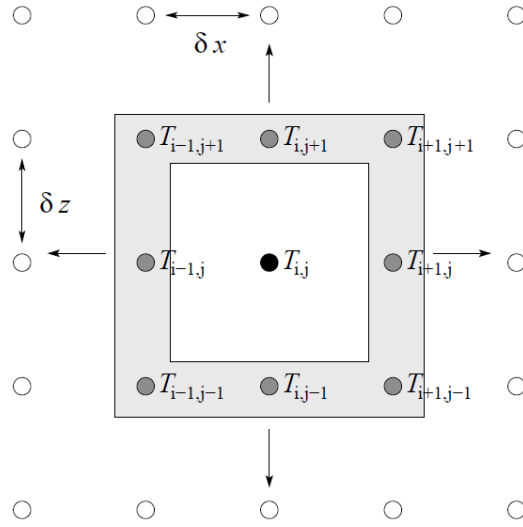
Postup je nasledovný. Počítanie šírenia vlny prostredím prebieha po sieťových „vrstvách“ so stredom v zdroji - vždy vypočítame časy príchodov do všetkých bodov siete na obvode štvorca hrany  $2(a)$  skôr, než pristúpime k počítaniu časov príchodov na bodoch obvodu štvorca s väčšou stranou  $2(a+1)$ . Aby sme zachovali kauzalnosť, počítanie príchodov na každej strane novej vrstvy vždy začneme nájdením bodu s najskorším príchodom v zodpovedajúcej strane predchádzajúcej vrstvy. Na výpočet času šírenia do bodu v novej vrstve využijeme jeden zo vzťahov:

$$T_{i,j\pm 1} = T_{i,j} + \delta x \frac{s_{i,j\pm 1} + s_{i,j}}{2} \quad (2.16)$$

$$T_{i\pm 1,j} = T_{i,j} + \delta z \frac{s_{i\pm 1,j} + s_{i,j}}{2} \quad (2.17)$$

podľa toho, o ktorú stranu ide. Tieto vzťahy sú platné len v prípade, že vlnoplocha je kolmá na stranu, čo platí v prípade (lokálneho) minima.

Časy šírenia do ostatných bodov vypočítame postupne smerom od minima. Bez ujmy na všeobecnosti, bod  $(i+1, j+1)$ , ktorého čas počítame má vždy už troch susedov -  $(i+1, j)$   $(i, j+1)$  a  $(i, j)$  - s už vypočítanými časmi.



Obr. 2.3: Ilustrácia k Vidaleho schéme. Časy šírenia po prvom kroku.

Je teda vhodné využiť tieto tri časy na určenie času šírenia aj v štvrtom mieste  $(i + 1, j + 1)$ . Pole časov šírení linearizujeme vzťahmi

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1} + T_{i+1,j} - T_{i,j}}{2\delta x} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j} + T_{i,j+1} - T_{i,j}}{2\delta z}. \quad (2.19)$$

Dosadením do rovnice eikonálu

$$|\nabla T| = s \quad (2.20)$$

dostávame kvadratickú rovnicu

$$\frac{(T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1} + T_{i+1,j} - T_{i,j})^2}{4\delta x^2} + \frac{(T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j} + T_{i,j+1} - T_{i,j})^2}{4\delta z^2} = s^2, \quad (2.21)$$

kde  $s$  (*slowness*) je prevrátená hodnota (priemernej) rýchlosti šírenia. Pre homogénnu sieť  $\delta x = \delta z$  je riešenie

$$T_{i+1,j+1} = T_{i,j} + \sqrt{2(hs)^2 - (T_{i+1,j} - T_{i,j+1})}. \quad (2.22)$$

Takto prechádzame postupne celú stranu a dopĺňame neznáme hodnoty. Akonáhle je vyplnený celý obvod, prejdeme k počítaniu nasledujúcej vrstvy. Pre väčšiu presnosť v miestach, kde je vlnoplocha výrazne nerovinná, je vhodné namiesto linearizácie používať vzťahy pre kruhové vlnoplochy. Vhodnou kombináciou vzťahu pre rovinné a vzťahu pre kruhové vlnoplochy určenou lokálnymi vlastnosťami vlnoplochy je možné dosiahnuť väčšiu presnosť výpočtu.

Pri používaní tejto metódy sa však vyskytujú problémy s kauzalitou. Pri výpočte časov príchodov v novej vrstve sa v originálnej schéme (Vidale 1988) vždy najskôr nájde bod, ktorý v predchádzajúcej vrstve má minimálny čas šírenia. Predpokladá sa, že aj jeho sused v novej vrstve bude tiež minimálny a výpočet začne od tohoto miesta. Skutočné minimum však môže byť niekde inde. Ďalším problémom sú iné, lokálne minimá. Dôsledným počítaním po stranách od všetkých miním sa za cenu zvýšených výpočtových nárokov vieme tomuto problému aspoň čiastočne vyhnúť.

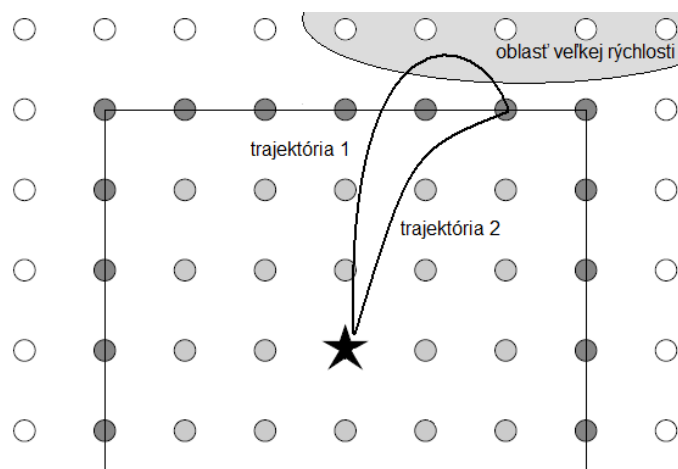
Počítanie po vrstvách však nie vždy rešpektuje skutočný smer šírenia vlnoplochy. Problémom je, keď do bodu na obvode aktuálneho štvorca prichádza vlnoplocha z oblasti mimo štvorca, čo sa môže stať, ak sa mimo štvorca nachádza oblasť s veľkou rýchlosťou šírenia vln.

Bolo navrhnutých množstvo postupov, ktoré sa snažia vysporiadať s uvedenými problémami dôsledkom počítania po pravidelných štvorcových vrstvách. Elegantne sa im vyhýba postup (Qin et al. 1992), ktorý sa zbavuje štvorcových vrstiev. Nahrádza ich jedinou vrstvou, ktorá v každom čase charakterizuje vlnový front. V každom kroku sa nájde bod s najmenším časom šírenia v tejto vrstve, vypočíta sa šírenie do jeho susedov a títo novo vypočítaní susedia ho nahradia vo vrstve. Takéto zlepšenie je však za cenu zvýšenia časovej zložitosti  $2D$  algoritmu z  $O(N^2)$  na  $O(N^2 \log(N))$  dôsledkom nutného zoraďovania bodov podľa ich časov šírení.<sup>34</sup>

---

<sup>3</sup>Ak na zoraďovanie a vyhľadávanie používame optimálnu dátovú štruktúru, napríklad haldu.

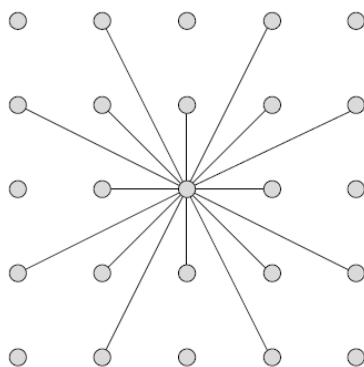
<sup>4</sup>Respektíve  $O(N^3) \rightarrow O(N^3 \log(N))$  v  $3D$ .



Obr. 2.4: Ilustrácia situácie, v ktorej vlnoplocha dosiahne miesto najprv zo smeru 1. Pri počítaní  $n$ -tej vrstvy však táto trajektória ešte nie je pripravená a ako čas príchodu sa zaznamená čas šírenia po pomalšej trajektórii 2.

## 2.2.2 Metódy najkratšej cesty

Metódy najkratšej cesty lúča (*Shortest path ray tracing*) nahrádzajú spojité prostredie sieťou bodov tvoriacich súvislý graf. Uvažujeme, že lúče prechádzajú (len) po hranách medzi vrcholmi grafu. Jednoduchým Dijkstrovým algoritmom hľadáme minimálne časy šírení zo zdroja do ostatných vrcholov. Doba šírenia medzi dvomi susednými vrcholmi je  $t = \frac{d}{v}$ .



Obr. 2.5: Ukážka vrcholu grafu so 16 hranami (Moser 1991).

Výhoda algoritmu je v tom, že sa ľahko prispôsobí prostrediu. Sieť vieme jednoducho zhustiť podľa potreby a nastaviť tak, aby vystihovala lokálne nehomogenity. Na zvýšenie presnosti však nestačí zhusťovanie vrcholov, ale musíme pristúpiť aj k zvyšovaniu počtu hrán z jednotlivých vrcholov, aby sme umožnili lúčom sa šíriť po čo najjemnejších odchýlkach.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Napríklad pravidelná schéma, v ktorej má každý vrchol ôsmich susedov umožňuje lúču šíriť sa iba v ôsmich diskretných smeroch - jeden smer každých 45°. Môže tak dôjsť k pomerne veľkej, až 22.5° odchýlke od optimálneho smeru šírenia, čo sa prejaví umelým predĺžením trajektórie a neskorším príchodom.

# Kapitola 3

## Lokalizácia hypocentra

### 3.1 Manuálna lokalizácia

Najjednoduchšia možnosť hľadania hypocentra je jeho lokalizácia v homogénnom médiu. Existuje prístup, ktorý môžeme využiť akonáhle sú k dispozícii záznamy z aspoň troch staníc. Podstata leží vo využití rozdielu  $\Delta t$  medzi príchodmi P a S vlny. Vieme, že obe vlny vznikli v čase  $t_0$  a šírili sa rýchlosťami  $v_P$  resp.  $v_S$  po dráhe  $r$ . Musí platiť:

$$r = v_P \cdot (t_1 - t_0) \quad (3.1)$$

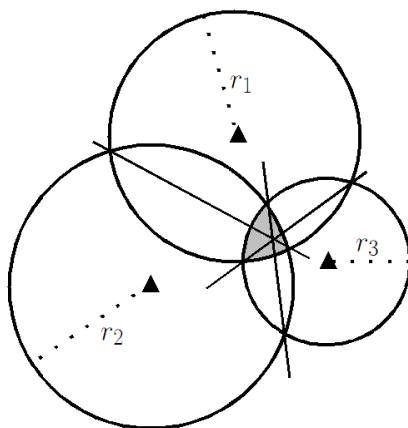
$$r = v_S \cdot (t_2 - t_0) \quad (3.2)$$

Vylúčením neznámej  $t_0$  dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{r}{v_S} - \frac{r}{v_P} &= (t_2 - t_1) \\ r \cdot \frac{v_P - v_S}{v_P \cdot v_S} &= \Delta t \\ r &= \Delta t \cdot \frac{v_P \cdot v_S}{v_P - v_S} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Keď poznáme pre každú stanicu  $i$  vzdialenosť  $r_i$  od hypocentra, jeho nájdenie je už len geometrickou úlohou nájdenia prieniku  $n$  sfér s danými polomerami. V princípe je našou úlohou nájsť hodnoty troch parametrov. Ide o tri priestorové súradnice, čas vzniku určíme až neskôr.

Dôsledkom nepresností - záznamu, prostredia i výpočtu - však nie sú jednotlivé polomery úplne presné. Nestačí teda použiť len trojicu sfér a nájsť ich prienik. Naopak, snažíme sa využiť čo najviac záznamov. Prienikom viacerých sfér, na rozdiel od ideálneho prípadu bez chýb, nebude jediný bod, ale len neurčito vyznačená oblasť. Následne použijeme vhodnú metódu na nájdenie hypocentra v preurčenom (*overdetermined*) systéme rovníc, napríklad priesečník jednotlivých tetív alebo ťažisko tejto oblasti. (Havskov et al 2002)

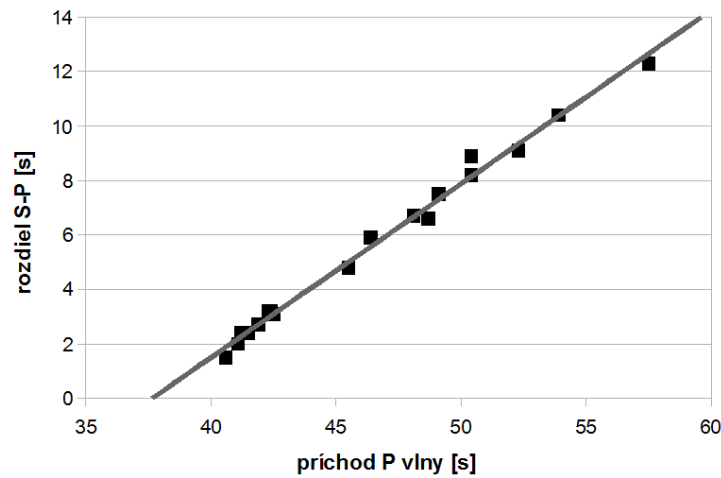


Obr. 3.1: Ilustrácia k lokalizácii polohy zdroja v 2D prípade za predpokladu homogénneho prostredia. Trojuholník indikuje polohu seizmickej stanice. Kružnica so stredom v stanici má polomer určený z rozdielu časov príchodov P a S vln.

Okrem polohy potrebujeme určiť aj čas vzniku zemetrasenia. Tento čas vieme jednoducho zistiť metódou nazývanou Wadatiho diagramy (Wadati 1933), ktoré tiež využívajú rozdiel časov P a S vln. Vylúčením vzdialenosti  $r$  z rovníc 3.1 dostávame

$$\Delta t_{SP} = \left( \frac{v_p}{v_s} - 1 \right) \cdot (t_P - t_0) \quad (3.4)$$

Dostávame teda lineárnu závislosť rozdielu časov príchodov S a P vln od času príchodu P vlny, ktorý je lineárne závislý od vzdialenosti stanice od hypocentra. Rozdiel časov príchodov S a P vln je nulový len v čase počiatku. Úlohou je teda nájsť lineárnu regresiu čas pre nulovú hodnotu rozdielu.



Obr. 3.2: Wadatiho diagram pre zemetrasenie V03, oblasť Dobrá Voda.

Zároveň zo sklonu priamky je jednoduché určiť pomer rýchlosti P a S vln

$$\frac{v_p}{v_s} = k + 1. \quad (3.5)$$

Uvedený postup má však aj svoje nevýhody. Tou je hlavne fakt, že využíva aj príchod S vlny, ktorá sa šíri pomalšie. Na seizmogramoch preto niekedy interferuje s neskoršími príchodmi P vln, prostredie ešte nie je ustálené, a preto čas príchodu S vlny môže byť nesprávne vyhodnotený. V takýchto prípadoch je vhodné využiť i záznamy len o príchode P vlny. Horeuvedený postup v tomto prípade zlyháva.

### 3.2 Lokalizácia numerickými metódami

Pre iné ako homogénne médiá sa situácia výrazne komplikuje. Stále však platí, že čas príchodu vlny na stanicu vieme vyjadriť ako

$$t_i = T_i(\vec{r}_i, \vec{r}_0) + t_0, \quad (3.6)$$

kde  $\vec{r}_i$  je (známa) poloha stanice,  $\vec{r}_0$  poloha hypocentra,  $t_0$  čas počiatku a funkcia  $T_i(\vec{B}, \vec{A})$  je čas šírenia vlny z miesta  $A$  do miesta  $B$ . Ak poznáme



túto funkciu, celá úloha je len riešenie  $m$  rovníc z  $m$  záznamov príchodov o štyroch neznámych.

Taktýto systém zjavne pre  $m > 4$  väčšinou nemá riešenie. Ako riešenie teda považujeme bod v parametrickom priestore s najmenším reziduom, kde reziduom je vo všeobecnosti hodnotiaca funkcia tvaru  $R = \sum_{i=1}^m c_i \cdot f(\tau_i - t_i)$ , kde  $\tau_i$  vypočítaný a  $t_i$  je zaznamenaný čas príchodu vlny na stanicu  $i$  a  $c_i$  je koeficient priradený danej stanici.<sup>1</sup> Funkcia  $f$  by mala spĺňať, že na intervale  $(-\infty, 0)$  monotónne klesá a na intervale  $(0, \infty)$  monotónne rastie. Najpoužívanejšie sú reziduom kvadratických odchýlok medzi vypočítaným a nameraným časom

$$R = \sum_{i=1}^m (\tau_i - t_i)^2 \quad (3.7)$$

a reziduom absolútnych hodnôt

$$R = \sum_{i=1}^m |\tau_i - t_i|. \quad (3.8)$$

Po definovaní si takýchto podmienok pre riešenie ho už „len“ stačí nájsť. Problémom je, že funkcia času šírenia nie je lineárna a vo všeobecnosti veľmi zložitá. Napríklad už i pre najjednoduchšie - homogénne prostredie má zložitý tvar

$$T_i = \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_0|}{v} = \frac{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}}{v}. \quad (3.9)$$

To je dôvod, prečo nemôžeme využívať bežné metódy lineárneho optimalizovania v parametrickom priestore pri hľadaní minimálneho rezidua, ale sme nútení využívať rôzne aproximatívne a iteratívne metódy.

V nasledujúcich pár odstavcoch uvádzame prehľad dvoch metód, ktoré sú vhodné na riešenie takejto úlohy. Pri využívaní každej z nich potrebujeme pri lokalizovaní hypocentra poznať časy šírenia z ľubovoľného bodu ku všetkým

---

<sup>1</sup>Ak napríklad vieme, že záznamy z niektorej stanice sú nepresné, môžeme jej priradiť nižšiu váhu. Ak táto odchýlka je systematická a vieme ju odhadnúť, tak potom využívame korekcie aplikované na časy príchodov.

stanciam. Časy šírenia z bodu do stanice môžeme získať riešením priamej úlohy pre každý možný bod zvlášť alebo ich vypočítať všetky súčasne využitím sieťovej metódy v obrátenej úlohe (podrobnejšie v kapitole 6.1 na strane 45).

### 3.2.1 Iteratívne metódy

V tomto odstavci vysvetlíme princípy Geigerovej metódy (Geiger 1910). Vychádzame pritom z práce Havskov et al (2002).

Iteratívne metódy spočívajú v linearizácii problému. Začneme s náhodnou pozíciou, o ktorej predpokladáme, že je blízko riešenia. Môže to byť napríklad poloha stanice, kam seizmické vlny prišli najskôr. Dostávame tak začiatočnú polohu

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0). \quad (3.10)$$

Riešením priamej úlohy s predpokladaným hypocentrom v  $P_0$  vypočítame časy príchodov k jednotlivým stanciam

$$t_i^c = T(x_i, y_i, z_i, x_0, y_0, z_0) + t_0 \quad (3.11)$$

a zodpovedajúce reziduá časov  $r_i = t_i^c - t_i^o$ , kde  $t_i^o$  je nameraný čas príchodu. V snahe znížiť reziduá musíme zmeniť vyskúšané hypocentrum o  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  a  $\Delta t$ . Ak predpokladáme, že korekcie sú malé, môžeme funkciu časov šírení aproximovať prvým členom Taylorovho rozvoja a dostaneme

$$r_i = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z_i + \Delta t, \quad (3.12)$$

čo sa dá zapísať v maticovom tvare pre všetky stanice ako

$$\bar{r} = \overline{\overline{G}} \cdot \overline{X}, \quad (3.13)$$

kde  $\bar{r}$  je vektor reziduí,  $\overline{\overline{G}}$  matica parciálnych derivácií a  $\overline{X}$  vektor korekcií. Ide teda o lineárnu sústavu  $n$  rovníc o 4 neznámých. Táto sústava sa rieši tak, aby celkové reziduum bolo minimálne. Iteratívnym opakovaním vyššie uvedeného postupu konvergujeme k minimu. Nevýhodou postupu je, že pri nevhodných podmienkach môže metóda viesť len k lokálnemu a nie globálnemu minimu.

### 3.2.2 **Brute-force** metódy na diskretnéj sieti

Podstata metódy spočíva v diskretizácii parametrického priestoru. Pri dostatočnej výpočtovej kapacite stačí vyskúšať všetky možné polohy v takomto parametrickom priestore, každú pozíciu ohodnotiť hodnotiacou funkciou a za hypocentrum prehlásime bod s najlepšou zhodou s nameranými údajmi.

Táto metóda je vhodná hlavne do zložitých prostredí, keďže máme istotu, že takto nájdeme polohu s globálnym minimom hodnotiacej funkcie. Veľmi efektívnou sa ukazuje kombinácia oboch metód.<sup>2</sup> Zvolíme čo najhustejšiu sieť, ktorú ešte dovoľujú výpočtové kapacity a skúšaním všetkých možných polôh nájdeme predbežné hypocentrum. Presnú polohu potom dohľadáme aplikovaním iteratívnych metód.

## 3.3 Algoritmy relatívnej lokalizácie

Podrobne rozoberieme *A double-difference earthquake location algorithm*, ktorý navrhli Waldhauser a Ellsworth (2000). Tento patrí do skupiny algoritmov využívajúce relatívne rozdiely v časoch príchodov. Algoritmy relatívnej lokalizácie využívajú fakt, že ak sa stanica nachádza oveľa ďalej ako vzájomná vzdialenosť dvoch hypocentier, tak môžeme predpokladať, že energia sa šírila po takmer totožných lúčoch zo zdrojov ku stanici. Relatívny rozdiel v čase šírení vln z dvoch vzájomne blízkych zemetrasení teda musí byť spôsobený šírením cez nejakú časť prostredia navyše medzi oboma hypocentrami.

Keďže tieto relatívne rozdiely nie sú ovplyvnené nehomogenitami mimo prostredia a na malej škále oblasti zdrojov je prostredie približne homogénne, relatívna poloha týchto hypocentier je určená veľmi presne. Takto funguje prístup založený na lokalizácii jedného zemetrasenia (*The master event approach*), vzhľadom na ktoré sú lokalizované všetky ostatné. Metóda súčasného určovania hypocentier (*Joint hypocenter determination (JHD)*) využíva súčasne údaje z viacerých staníc a viacerých zemetrasení na určenie relatívnych polôh zdrojov, korekcií na stanicích a korekcií rýchlostného modelu.

---

<sup>2</sup>François Thouvenot, osobná komunikácia

Algoritmus lokalizácie pomocou dvojitého rezidua (*A double-difference earthquake location algorithm*) využíva k určeniu časov šírení lúčovú metódu. Pri lokalizácii sa vyberie skupina korelovaných, blízkych zdrojov a lokalizujú sa súčasne (JHD). Blízkosť jednotlivých zdrojov umožňuje linearizáciu problému. Úpravou rovnice 3.12 navrhnutou **Fréchetom** (1985) pre  $i$ -tu stanicu tak, aby do úvahy brala relatívne a nie absolútne rozdiely v časoch príchodov pre zdroje  $k$  a  $l$ , dostávame rovnicu

$$r_i^{kl} = \frac{\partial T_i^{kl}}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial T_i^{kl}}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial T_i^{kl}}{\partial z} \Delta z_i + \Delta t, \quad (3.14)$$

kde člen

$$r_i^{kl} \equiv (t_i^k - t_i^l)^{namerané} - (t_i^k - t_i^l)^{vypočítané} \quad (3.15)$$

sa nazýva dvojité reziduum (double-difference).

Riešením tejto sústavy rovníc sa získavajú veľmi presné relatívne polohy zdrojov. Problémom na určenie zostáva len ich absolútna poloha v priestore. Na jej určenie musíme použiť predchádzajúce metódy.

## Kapitola 4

# Výpočet času šírenia seizmických vln pomocou numerickej simulácie šírenia vlnoplochy

V tejto kapitole sa budeme zaoberať riešením priamej úlohy. Pod priamou úlohou zvykneme rozumieť proces šírenia seizmického vzruchu prostredím z nejakého zdrojového bodu  $A(\vec{r}, t)$ . Týmto bodom býva zvyčajne hypocentrum zemetrasenia. Pri numerickej simulácii musíme mať zadaný model prostredia - pole veľkostí rýchlostí šírenia vln a polohy seizmických staníc. Namerané údaje zo seizmografov o časoch príchodov k jednotlivým staniciam môžu slúžiť k porovnaniu vypočítaných a reálnych údajov.

V našej práci budeme využívať sieťovú metódu. Výhoda sieťových metód je v tom, že výstupom z riešenia jedinej priamej úlohy je kompletne pole šírení z miesta  $A$  do celého zvyšku prostredia. Údaje o príchode prvej vlnoplochy k stanici sa dajú jednoducho odčítať ako hodnota času šírenia na jej mieste v prostredí.

## 4.1 Model prostredia

Výhodou navrhovaného sieťového prístupu je možnosť simulovať šírenie vlny v dokonale elasticom 3D nehomogénnom izotropnom prostredí so spojitými gradientami rýchlostného poľa i s materiálovými diskontinuitami a so zložitými okrajovými podmienkami. K simulácii je ako vstupný parameter potrebný práve tento model rýchlostí seizmických vln v prostredí.

Jediná požiadavka na tento model je, aby bol schopný efektívne odpovedať na otázku: „Aká je rýchlosť šírenia vln v bode  $A(x, y, z)$ ?“. Príkladom takého prostredia je pravouhlá sieť so zadanými rýchlosťami  $V$  v jej vrcholoch. Na určenie rýchlosti v mieste medzi sieťovými bodmi používame pseudo-lineárnu interpoláciu

$$v(x, y, z) = \sum_{0 \leq i, j, k \leq 1} V(x_i, y_j, z_k) \left(1 - \frac{|x - x_i|}{|x_1 - x_0|}\right) \left(1 - \frac{|y - y_i|}{|y_1 - y_0|}\right) \left(1 - \frac{|z - z_i|}{|z_1 - z_0|}\right), \quad (4.1)$$

kde indexy 0 a 1 sú indexy najbližších sieťových bodov z oboch smerov na každej osi.

Pole rýchlostí môže byť zložitá. Musíme však dbať na to, aby nami zvolené maximálne vzdialenosti medzi sieťovými bodmi boli rádovo menšie ako samotné nehomogenity prostredia.

Bez ohľadu na zadané prostredie, algoritmus sa nemení. Vplyv prostredia sa prejavuje členom  $v(\vec{r}_i)$  vo vzťahu  $\Delta \vec{r}_i = \vec{n}_i \cdot v(\vec{r}_i) \Delta t$  pre posunutie jednotlivých sieťových bodov.

## 4.2 Počiatkové podmienky - zdroj

Pri simulácii uvažujeme bodový zdroj zemetrasenia. Hoci ďalší vývoj trhliny je hlavným faktorom ovplyvňujúcim celkový priebeh zemetrasenia, samotná trhlina sa šíri pomalšie, ako je rýchlosť P a S vln, preto tento vývoj už nebude mať efekt na samotný nástup vlnového frontu. Prejaví sa to iba na neskoršom priebehu, ktorý však už nie je predmetom našej simulácie.

Problémy sa však môžu vyskytnúť vtedy, ak sa trhlina šíri rýchlejšie, ako je rýchlosť objemových S vln (*supershear*). Jednou z možností, ako simulovať takéto zemetrasenie, je kinematická reprezentácia trhliny množinou bodových zdrojov s danými časmi excitácie. Výsledná vlnoplocha by bola obalová plocha týchto zdrojov. Efektívnejšia metóda je predpísanie rýchlostného poľa na anizotropné tak, aby rýchlosť v smere trhliny zodpovedala rýchlosti šírenia trhliny a vo zvyšných smeroch zodpovedala rýchlosti šírenia objemových vln. V našom prípade sa týmto nebudeme zaoberať.

### 4.3 Šírenie vlny

Navrhovaný prístup je založený na myšlienke Huygensovho princípu, ktorý znie:

*Každý bod vlnoplochy v istom okamihu môžeme pokladať za zdroj elementárneho vlnenia, ktoré sa z neho šíri v elementárnych vlnoplochách. Vlnoplocha v nasledujúcom časovom okamihu je vonkajšia obalová plocha všetkých elementárnych vlnoplôch.*

Elementárna vlnoplocha vychádzajúca z miesta  $\vec{r}$  je v izotropnom prostredí kruhová vlnoplocha s polomerom  $R = v(\vec{r}) \cdot dt$ , kde  $v(\vec{r})$  je hodnota rýchlosti šírenia seizmických vln v danom mieste.

Vonkajšia obalová plocha elementárnych vlnoplôch bude teda vo vzdialenosti  $v \cdot dt$  smerom von od vlnoplochy v predchádzajúcom časovom okamihu. Táto ich vzájomná vzdialenosť závisí len od lokálnej hodnoty rýchlosti šírenia vln. Keďže rýchlosť šírenia nie je vo všeobecnosti konštantná, vzdialenosť obalovej vlnoplochy od zdrojovej je na rôznych polohách rôzna. Takto môže dochádzať k zmene tvaru vlnoplochy počas jej šírenia.

Vzniká dôležitá otázka - ako numericky simulovať šírenie spojitej vlnoplochy, ak dostupná pamäť počítača je konečná? Riešením je jej opis len pomocou konečnej množiny čísiel a zároveň zadefinovanie vzťahov, ktoré určia časový vývoj tejto množiny v zhode s prírodnými zákonami.

## 4.4 Vlnoplocha

Vlnoplocha je dvojrozmerná ohraničená a uzavretá plocha v  $3D$  priestore. V našej simulácii ju budeme charakterizovať pomocou bodov ležiacich na jej povrchu.

Vlnoplocha v numerickom modeli je nahradená konečnou množinou navzájom susediacich, neprekrývajúcich sa trojuholníkov tvoriacich topologický povrch gule. Každý trojuholník symbolizuje časť vlnoplochy. V pamäti počítača sú uložené ako súvislý graf, kde jednotlivé vrcholy zodpovedajú vrcholom trojuholníkov a hrany ich stranám.

Tieto body (vrcholy) niesú statické. Tak, ako sa pohybuje celá vlnoplocha v skutočnom prípade, tak sa musia posúvať v priestore aj jednotlivé body a s nimi i celé trojuholníky, ktoré ju charakterizujú v numerickom modeli. Pravidlá tohoto pohybu vysvetlíme v nasledujúcej sekcii.

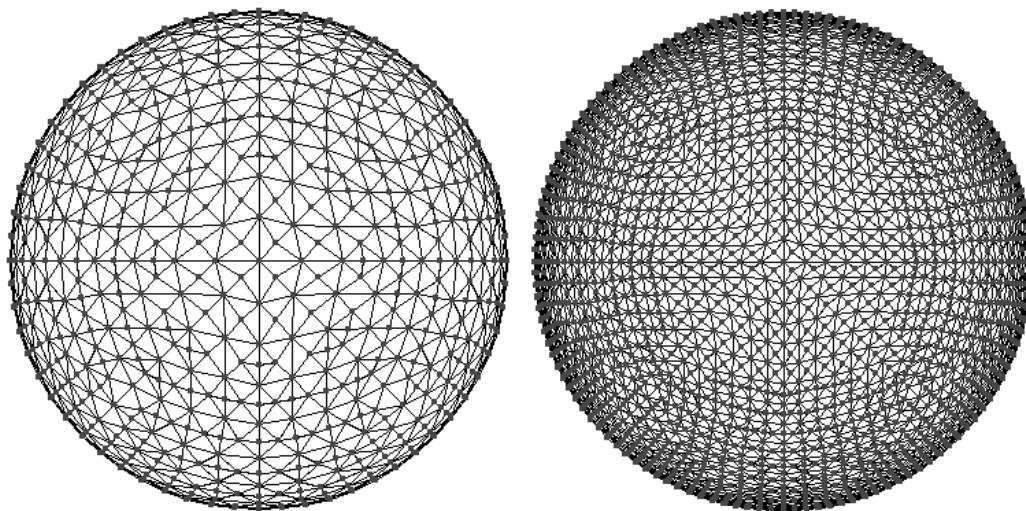
Aby (rovinné) trojuholníky dostatočne vystihovali lokálny tvar skutočnej (nerovinné) vlnoplochy, musia byť ich rozmery malé. Ich rozmery musia byť rádovo menšie ako charakteristické dĺžky v prostredí. Dostávame tak horné obmedzenie pre maximálnu vzdialenosť dvoch vrcholov jedného trojuholníka. Keďže vlnoplocha sa pri šírení všeobecne rozširuje, zväčšujú sa aj vzdialenosti medzi jednotlivými bodmi - vrcholmi trojuholníkov. Aby sme neznižili presnosť výpočtu, je vhodné pri prekročení (nami zadanej) maximálnej vzdialenosti dvoch vrcholov rozdeliť stranu na dve časti. Vzniknú dva nové trojuholníky na mieste starého, ktorý zanikne. Procedúru delenia na dvojice opakujeme dovtedy, kým nové trojuholníky nie sú opäť dostatočne malé.

Dôsledkom vlastností prostredia sa však môže vlnoplocha lokálne zmenšovať a medzivrcholové vzdialenosti klesajú. Primalé vzdialenosti, čiže veľký počet bodov na jednotku plochy vlnoplochy, však spôsobujú zbytočne veľké výpočtové nároky a numerické chyby, preto je vhodné zdefinovať aj minimálnu vzdialenosť ako dolné ohraničenie. Pri jeho prekročení jeden z bodov zaniká a trojuholníky sa spájajú.

Počet trojuholníkov je teda v čase nekonštantný, vrcholy a spolu s nimi



aj trojuholníky vznikajú i zanikajú tak, aby stále zodpovedali skutočnej vlnoploche.



**Obr. 4.1:** Simulácia vlnoplochy v  $3D$  homogénnom prostredí. Sieťové body sa pohybujú a ich poloha v každom kroku charakterizuje tvar vlnoplochy - je to obalová plocha týchto sieťových bodov. Úsečky medzi sieťovými bodmi delia túto plochu na jednotlivé trojuholníky, ktoré využívame pri simulácii. Dve siete na obrázku znázorňujú tú istú vlnoplochu v rôznych časoch. Dlhšie simulovaná (pravá) sieť sa rozopla oveľa viac a obsahuje oveľa viac sieťových bodov (vzdialenosti medzi vrcholmi siete sa zachovávajú). Siete sú preškálované tak, aby na obrázku mali rovnakú veľkosť.

## 4.5 Algoritmus simulácie šírenia vlnoplochy

Akonáhle je vlnoplocha v čase  $t_0$  charakterizovaná konečnou množinou bodov, zostáva vyriešiť problém jej šírenia pre časy  $t > t_0$ .

Ak aj uvažujeme jednotlivé diskrétné body vlnoplochy ako zdroje elementárnych vlnoplôch, tak len použitím Huygensovho princípu - každý bod sa stane zdrojom elementárnej vlnoplochy - dostaneme opäť spojitú vonkajšiu

obalovú vlnoplochu. Pre numerickú simuláciu je však nutné zachovanie konečnej siete bodov. Preto musíme opísať pravidlá, podľa ktorých sa budú hýbať samotné body. Tieto pravidlá musia byť konzistentné s fyzikou šírenia skutočnej vlnoplochy, ktorú body charakterizujú. Huygensov princíp nám však takéto pravidlá explicitne neposkytuje.

Uvažujme teda, že seizmická vlna prešla prostredím a zanechala za sebou pole časov šírenia. Inými slovami, máme informáciu o dobe šírenia zo zdroja do ľubovoľného bodu prostredia. Ľahko si všimneme, že časy šírenia do dvoch blízkych bodov sú podobné.<sup>1</sup> Naozaj, toto pole je spojité aj pre prípad nespojitého poľa rýchlostí.

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že v poli časov šírenia  $T(\vec{r})$  existuje nespojitosť, tj. medzi dvoma nekonečne blízkymi bodmi A a B existuje konečne veľký rozdiel v časoch príchodov. Potom ale podľa Huyghensovho zákona sa bod A, kam dorazila vlna skôr, stáva zdrojom elementárnej vlnoplochy šíriacej sa do všetkých smerov konečne veľkou rýchlosťou, čiže takéto vlna musí prísť aj do bodu B za nekonečne malý čas, čo je spor.

Vďaka spojitosti tohoto poľa môžeme zaviesť a opísať ďalšiu dôležitú vlastnosť. Tou je priestorový gradient poľa časov príchodov  $A(\vec{r})$ .

Tvrdíme, že veľkosť tohoto gradientu nikdy nie je väčšia ako  $1/v$ .

Dôkaz je triviálny. Ľubovoľný bod vonkajšej obalovej plochy všetkých elementárnych vlnoplôch musí byť vo vzdialenosti väčšej, nanajvýš rovnjej  $v \cdot dt$  od ľubovoľného elementárneho zdroja. Rozdiel časov je teda  $dt$  a vzdialenosť je  $v \cdot dt + \delta s$ , preto

$$\left| \vec{\nabla} A(\vec{r}) \right| = \frac{dt}{v \cdot dt + \delta s} \leq 1/v. \quad (4.2)$$

Taktiež tvrdíme, že veľkosť tohoto gradientu nie je menšia ako  $1/v$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Všade, kde rýchlosť šírenia nie je nulová.

<sup>2</sup>Toto neplatí v prípade, že dve časti tej istej vlnoplochy prechádzajú cez seba. Po prechode vlna začne prechádzať oblasťou poľa príchodov, kde už bolo zaznamenané vlnenie skôr, a preto sa už pole príchodov počas jej šírenia nemení. Tu myšlienka gradientu zjavne zlyháva, je totiž určený šírením prvej vlny.

Problémom sa vyhneme tým, že budeme uvažovať každú časť vlnoplochy zvlášť. Budeme sa tváriť, že tieto dve vlny spolu nesúvisia. Vyrátame pohyb a pole časov príchodov každej vlny zvlášť, čo je rovnaká situácia, ako keby tieto dve časti jednoducho prešli cez seba bez

Dôkaz: pre každý bod vonkajšej obalovej vlnoplochy musí existovať aspoň jeden bod vo vzdialenosti  $s \leq v \cdot t$ , ktorý by mohol byť zdrojom jej elementárnej vlnoplochy, ktorá ju tvorí.

$$\left| \vec{\nabla} A(\vec{r}) \right| = \frac{dt}{v \cdot dt - \delta s} \geq 1/v \quad (4.3)$$

Z platnosti dvoch predchádzajúcich tvrdení priamo vyplýva, že gradient tohoto poľa je rovný  $1/v$ . Teraz sme už schopní pri pohľade na pole časov príchodov spätne vypočítať, ako sa šírila seizmická vlna prostredím - vlnoplocha vždy prišla zo smeru gradientu.

Túto vlastnosť využijeme na definovanie pravidiel pre pohyb bodov vlnoplochy: v každom kroku sa všetky body siete posunú práve o  $v \cdot dt$  v smere gradientu poľa.

Explicitné pravidlo nám však stále chýba, keďže samotné pole ešte nepoznáme a teda nepoznáme ani gradient. Ľahko však ukážeme, že gradient poľa časov príchodov je vždy totožný so smerom normály vlnoplochy v danom mieste.

Dôkaz: stačí si uvedomiť, že v (lokálne) homogénnom prostredí je najkratšiou spojnicou bodu na obale elementárnych vlnoplôch so zdrojovou vlnoplochou kolmica.

Explicitné pravidlo pre pohyb bodov vlnoplochy teda znie:

***V každom kroku sa všetky body siete posunú práve o  $v \cdot dt$  v smere normály okamžitej vlnoplochy.***

Týmto jednoduchým pravidlom je jednoznačne určený časový vývoj siete. V každom kroku sa využijú polohy susedných bodov na skonštruovanie normál v jednotlivých častiach vlnoplochy, následne necháme všetky sieťové body expandovať čas  $dt$ . Tieto dva kroky sú stále opakované počas celého procesu šírenia vlnoplochy.

vzájomnej interferencie. Zmenami amplitúdy sa nezaobráame, takže to nevádi. Nakoniec, keďže našim cieľom je vypočítať iba čas prvého príchodu, môžeme utlmiť a zastaviť vlnenie šíriace sa oblasťou, kde už prešla iná vlnoplocha. Na časoch prvých príchodov sa takéto umelý zásah neprejaví.

Treba si uvedomiť, že vyššie uvedené pravidlo pre pohyb bodov nie je jediné možné. V skutočnosti by sme mohli zdefinovať mnohé iné pravidlá, ktoré by neboli v spore s fyzikou a viedli by k rovnakému riešeniu.<sup>3</sup> Toto pravidlo o pohybe v smere je však pre numerický výpočet najjednoduchšie.

## 4.6 Výpočet lokálnej normály vlnoplochy

Pri určovaní pohybu sieťových bodov je nutné poznať normálu vlnoplochy v mieste každého bodu. Spojitá vlnoplocha je však v numerickom modeli nahradená sieťou bodov, čo nám nájsť normálu priamo neumožňuje. Využijeme preto fakt, že takýto bod je vrcholom viacerých susediacich trojuholníkov. Každý z týchto trojuholníkov už vlastný normálový vektor má. Jeho orientáciu zvolíme tak, aby zodpovedal smeru šírenia. Trojuholníky sú schválne dostatočne malé, aby ich normála bola dostatočne podobná normále skutočnej vlnoplochy v danom mieste. Smer normály v mieste vrchola je teda približne nejakou funkciou normál susediacich trojuholníkov. Ak uvažujeme, že zakrivenie vlnoplochy je lokálne malé, výsledný vektor môžeme dostať ako obyčajný priemer jednotlivých normál.

Túto funkciu môžeme ďalej upravovať. Presnejšie vyjadrenie by malo napríklad brať ohľad na rozloženie trojuholníkov - trojuholníky, ktorých ťažisko je bližšie k vrcholu budú mať zjavne väčšiu váhu ako trojuholníky, ktoré sú väčšie a teda vystihujú vlnoplochu o čosi ďalej.

## 4.7 Okrajové podmienky

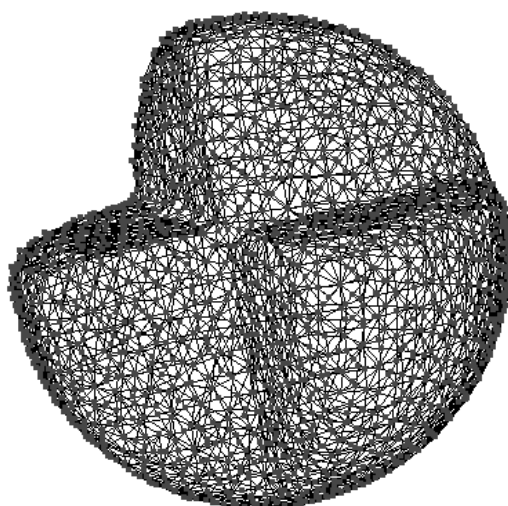
Okrajové podmienky na povrchu a na okrajoch rýchlostného modelu sú v našom modeli vybavené nulovou hodnotou rýchlosti šírenia  $v_{ln}$ . To spôsobí, že

---

<sup>3</sup>Nami uvažované body sú totiž len myslené body na spojitaj vlnoploche. Keby si napríklad po každom kroku ešte navzájom náhodne vymenili svoje polohy, vlnoplocha by sa vôbec nezmenila a samotné šírenie by naďalej fungovalo, i keď „pohyby“ jednotlivých bodov by boli nanajvýš čudné.

prichádzajúca vlna v danom mieste zastane a zostane stáť počas zvyšku simulácie. Efektívne sa to prejaví tak, ako keby vlna prešla ďalej cez hranicu modelu a už nikdy sa nevrátila naspäť do skúmanej oblasti.

Samozrejme, v dôsledku nehomogenít mimo modelu sa môže stať, že skutočná vlna sa môže opäť vrátiť do modelovaného prostredia. Bez znalosti prostredia mimo modelu však takéto situácie nemá zmysel uvažovať, keďže ich efekty môžeme nanajvýš hádať. Taktiež prichádzame o všetky odrazené vlny od voľného povrchu. Ako je však uvedené v 5.1, takéto vlny sú pomalšie a nemusíme ich uvažovať.



Obr. 4.2: Ilustrácia simulácie čela vlny pri definovaní zložitých okrajových podmienok v  $3D$  v zvolenom čase. Simulovaná plocha postupne „obopína“ oblasti, kde je rýchlosť šírenia nulová a ktorými sa už nemôže šíriť. Takáto situácia napríklad ilustruje dopadanie vlnenia na topograficky zložitý povrch Zeme.

## 4.8 Čas príchodu

Tu sa budeme venovať počítaniu presného času, v ktorom seizmická vlna dosiahne seizmickú stanicu. To znamená, že potrebujeme poznať čas, kedy bude

vlnoplocha prechádzať daným bodom. My však poznáme len diskkrétne polohy bodov v diskrétnych časových úsekoch. Nedá sa očakávať, že by sieťový bod „trafil“ v nejakom kroku polohu stanice.

Musíme teda aspoň približne daný čas vypočítať. Uvažujeme, že lokálna krivosť vlnoplochy je dostatočne malá vzhľadom na vzájomné vzdialenosti susediacich sieťových bodov. Potom smery gradientov poľa časov príchodov v mieste stanice a v mieste najbližšieho sieťového bodu sú takmer paralelné. Tento bod (a s ním celá vlnoplocha, ktorú reprezentuje) sa hýbe v smere gradientu. V okamihu najbližšieho priblíženia ku stanici - čiže okamihu, keď je jeho vektor rýchlosti kolmý na ich spojnicu - dôjde k príchodu vlnového frontu aj na stanicu.

Našou jednou úlohou je teda nájsť bod, ktorý sa priblíži ku stanici na minimálnu vzdialenosť. Ak je sieť dostatočne hustá, tak okamih priblíženia je priamo okamih príchodu vlny. Pritom sa dopúšťame maximálnej nepresnosti rádu  $\Delta t$ .

Nepresnosť je v skutočnosti len  $\Delta t/2$  ak predpokladáme, že lokálna krivosť je dostatočne malá a taktiež sú malé aj gradienty rýchlostného poľa na týchto priestorových škálach.

## 4.9 Časová zložitosť algoritmu

Časová zložitosť algoritmu pre priamu úlohu je  $O(N^3)$ , kde  $N$  je dĺžková hustota sieťových bodov.<sup>4</sup> Táto časová zložitosť je výsledkom  $N$  krokov so sieťou obsahujúcou  $N^2$  bodov. Dĺžkovú hustotu priamo ovplyvňujeme zvolením hodnôt maximálnej a minimálnej vzdialenosti medzi bodmi.

Výhodou algoritmu je to, že jeho časová zložitosť nezávisí od počtu staníc. Akonáhle spočítame jedinou priamu úlohu pre jeden zdroj, dostaneme riešenia pre každú z uvažovaných staníc ako i časy šírenia do ľubovoľného iného bodu prostredia (celé pole časov šírenia).

---

<sup>4</sup>Inými slovami, aká je priemerná vzdialenosť medzi dvoma susednými bodmi.

## 4.10 Zhrnutie

Používaný algoritmus je teda nasledovný:

1. pre všetky body siete sa vypočítajú normály k lokálnemu tvaru vlnoplochy
2. všetky body siete sa pohnú v smere ich normál o vhodnú vzdialenosť
3. graf sa upraví tak, aby zostali zachované jeho vlastnosti medzibodových vzdialeností (pridanie a odobratie bodov)
4. celá procedúra sa v ďalšom kroku opakuje

## Kapitola 5

# Numerické testy pre kanonické modely v prostredí s materiálovou diskontinuitou

Majme prostredie rozdelené rovinou na dva homogénne polpriestory s rôznymi rýchlosťami šírenia vln. V tejto kapitole sa budeme zaoberať javmi, ktoré nastávajú počas prechodu vlnoplochy takýmto prostredím. Teoretické poznatky porovnáme s výsledkami numerických simulácií nášho programu.

Existujú dve možné konfigurácie problému dopadania vlnoplochy na rozhranie. V prípade, že dopadá vlna z prostredia s väčšou hodnotou rýchlosti šírenia do prostredia s menšou rýchlosťou, dôjde len k lomu vlnenia smerom k normále. To sa prejaví sploštením vlnoplochy v pomalšom prostredí.

Prípad prechodu vlnenia do prostredia s väčšou rýchlosťou šírenia je komplikovanejší. V nasledujúcich odstavcoch podrobne rozoberieme nastávajúce javy pri takejto konfigurácii problému.

### 5.1 Odraz vln od rozhrania

Dopadajúca vlna po príchode na rozhranie dvoch prostredí s rôznymi impedanciami sa z časti odráža naspäť a časť sa lomí a pokračuje ďalej druhým



prostredím. Odrazením však dochádza k jej oneskoreniu za čelom vlny, keďže sa šíri späť do prostredia, z ktorého už prišla. Odraz preto nezanechá žiadnu stopu v poli časov prvých príchodov a teda ju pri počítaní časov príchodov netreba uvažovať.

V rámci použitého algoritmu k žiadnemu odrazu nedôjde. Sieť bodov sa šíri len v smere normály vlnoplochy. Z dvoch možných orientácií sa vyberá práve tá „ďalej“, zatiaľ čo pri odraze by bolo nutné zmeniť túto orientáciu.

## 5.2 Lom vln

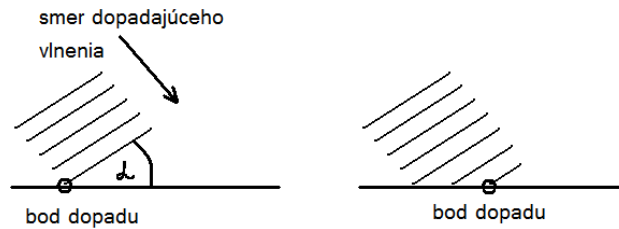
Pravidlá šírenia sú ekvivalentné Huyghensovmu princípu a lom vln z neho priamo vyplýva. V našom algoritme je za lom zodpovedná rozdielna hodnota rýchlosti vo vzťahu pre dĺžku kroku  $v \cdot dt$  - body v druhom prostredí sa budú šíriť rýchlejšie, čo sa prejaví zalomením vlnoplochy.

## 5.3 Difrakcia vln

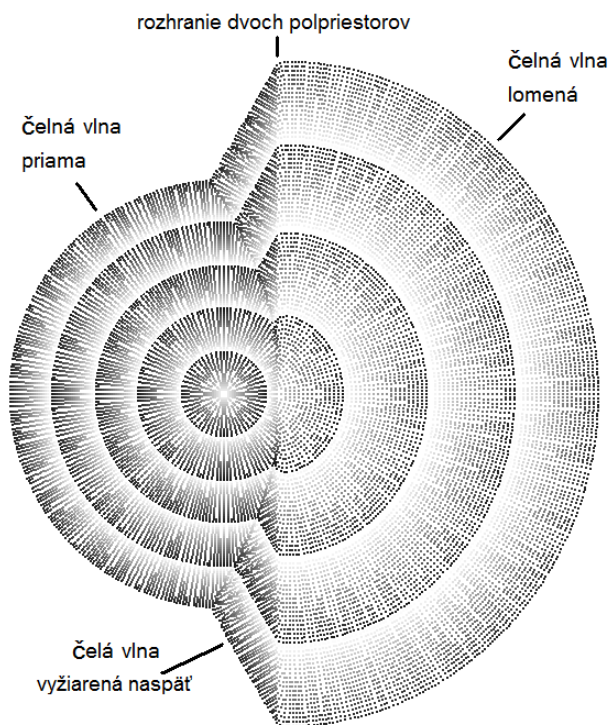
Difrakcia vyplýva tiež priamo z Huyghensovho princípu. Ľubovoľný bod vlnoplochy sa stáva zdrojom, z ktorého sa vlnoplocha šíri do všetkých strán. Používanie tohoto prístupu je preto vhodné hlavne pre nízko-frekvenčné vlny.

## 5.4 Spätné vyžarovanie

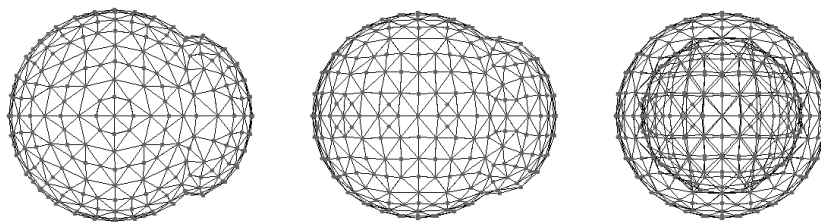
Dopadajúce vlnenie pod uhlom  $\alpha$  rýchlosťou  $v_1$  sa začne šíriť vonkajšej strane rozhrania rýchlosťou  $v_2$ . Ak je rýchlosť  $v_2$  väčšia ako pomyselná rýchlosť bodu dopadu  $v_1/\sin(\alpha)$ , tak čelná vlna v druhom médiu šíriaca sa pozdĺž rozhrania v rýchlejšom prostredí tento bod prebehne a začne vyžarovať do prvého prostredia, kam ešte priame vlnenie nedorazilo. Táto vyžiarená vlna sa šíri od rozhrania späť v prvom prostredí, čo sa môže javiť ako odrazená vlna. O odrazenú vlnu sa však nejedná.



Obr. 5.1: Miesto dopadu rovinatej vlny na rozhranie dvoch polpriestorov sa hýbe vždy rýchlejšie, ako je rýchlosť dopadajúceho vlnenia. Vlnenie v druhom prostredí šíriace sa pozdĺž rozhrania však tento bod predbehnúť môže.



**Obr. 5.2:** Výsledok numerickej simulácie v  $2D$  prostredí na rozhraní dvoch homogénnych polpriestorov s rýchlosťami šírenia  $v_2 > v_1$ . Rôzne odtiene sivej zodpovedajú vlnoploche v rôznych časových okamihoch.



**Obr. 5.3:** Vlnoplocha v  $3D$  prechádzajúca cez dva homogénne polpriestory s rýchlosťami šírenia  $v_2 > v_1$  po vstupe do rýchlejšieho prostredia. Pohľady v smeroch každej z kartézskych osí.

# Kapitola 6

## Lokalizácia zemetrasení

V nasledujúcej kapitole sa pokúsime objasniť prístup, ktorý sme použili pri lokalizácii javov v zdrojovej oblasti Dobrá Voda.

### 6.1 Hľadanie hypocentra - obrátená úloha

Vychádzame z teóremy reciprocity

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_V \left[ \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{g}(\vec{x}, \tau - t) - \vec{v}(\vec{x}, \tau - t) \cdot \vec{f}(\vec{x}, t) \right] dV \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S \left[ \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{T}(u(\vec{x}, t), \vec{n}) - \vec{u}(\vec{x}, \tau - t) \cdot \vec{T}(v(\vec{x}, \tau - t), \vec{n}) \right] dS. \end{aligned} \quad (6.1)$$

S jej pomocou sa dá dokázať priestoro-časová reciprocita Greenovej funkcie<sup>1</sup>

$$G_{nm}(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = G_{mn}(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2) \quad (6.2)$$

Z nej priamo vyplýva, že ak zdroj v mieste  $\vec{x}_1$  spôsobí odozvu na mieste  $\vec{x}_2$  po čase  $t$  neskôr, tak aj zdroj v mieste  $\vec{x}_2$  spôsobí odozvu na mieste  $\vec{x}_1$  po rovnakom čase  $t$ . Inými slovami, čas šírenia nezávisí od orientácie,

$$t(A \rightarrow B) = t(B \rightarrow A). \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>Podrobný postup napríklad v *Introduction to Theoretical Seismology*, Moczo 2006.

Namiesto hľadania polohy hypocentra, numerickej simulácie a následného porovnávania výsledkov s nameranými údajmi môžeme vďaka reciprocite úlohu obrátiť. Uvažovaním stanice ako zdroj vlnenia dostaneme jedinou simuláciou časy šírenia seizmickej vlny zo stanice do všetkých bodov prostredia. Recipročne poznáme teda aj časy šírenia z ľubovoľného bodu k tejto stanici.

Výsledok numerického výpočtu - čiže skalárne pole časov šírení z daného bodu ku stanici - si uložíme k neskoršiemu spracovaniu. Kvôli kompresii dát si zapamätáme len časy v konečnom počte bodov zodpovedajúcim vrcholom rovomernej pravouhlej mriežky.

Takýto výpočet spravíme pre všetky seizmické stanice v oblasti. V každom bode priestoru tak poznáme  $M$  hodnôt - čas šírenia z tohoto bodu k jednotlivým  $M$  staniciam.

Následne môžeme pristúpiť k lokalizácii hypocentra. Idea je nasledovná: z miesta  $A(x, y, z)$  sa do stanice  $S_i$  šíri seizmický front čas  $T_i(A(x, y, z))$  a na stanici bol zaznamenaný v čase  $t_i$ . To znamená, že ak zemetrasenie vzniklo na mieste  $A$ , tak muselo vzniknúť v čase  $t_i - T_i(A(x, y, z))$ . Zároveň sa šíri aj do stanice  $S_j$  čas  $T_j(A(x, y, z))$  a bolo zaznamenané v čase  $t_j$ . Zemetrasenie by teda muselo vzniknúť v čase  $t_j - T_j(A(x, y, z))$ .

Čas vzniku je však len jeden. Zjavne by teda malo platiť

$$\forall \{i, j\} : t_j - T_j(A(x, y, z)) = t_i - T_i(A(x, y, z)) \quad (6.4)$$

Dôsledkom rôznych nepresností vstupných údajov a numerickej chýb však takýto bod zvyčajne nenájdeme. Za hypocentrum prehlásime polohu a čas, ktoré má najväčšiu zhodu s nameranými údajmi, čiže poloha, kde hodnotiaca funkcia druhých mocnín reziduí časov nadobúda minimálnu hodnotu.

Aby sme našli túto polohu, prehľadávame celú mriežku - množinu bodov, o ktorých máme údaje o časoch šírenia ku každej stanici. Tieto body ohodnotíme. Hodnotiaca funkcia má v našom prípade tvar

$$H(x, y, z, t) = C \cdot \sum_{i=0}^M c_i \cdot (t - (t_i - T_i(A(x, y, z))))^2, \quad (6.5)$$

kde výraz  $(t - (t_i - T_i(A(x, y, z))))$  sa nazýva reziduum času,  $c_i$  je kladný váhový koeficient a  $C$  je normovacia konštanta. Normovacia konštantu volíme tak, aby:

$$C = \frac{1}{\sum_{i=0}^M c_i}. \quad (6.6)$$

Výhoda obrátenej úlohy je v tom, že náročné numerické výpočty šírenia stačí vykonať len raz pre každú stanicu. Následne sa už dá lokalizovať ľubovoľne veľa zemetrasení len obyčajným vyhľadávaním polohy hypocentra v priestore a čase, čo je relatívne rýchly a jednoduchý algoritmus popísaný ďalej.

### 6.1.1 Váhovacie koeficienty

Ak uvažujeme náhodné rozdelenie odchýlok spôsobené neznalosťou prostredia, výpočtovými chybami a ďalšími vplyvmi, je zjavné, že absolútne odchýlky vypočítaného času od toho skutočného so zväčšovaním vzdialenosti rastú. Preto je vhodné pri lokalizácii využívať hlavne stanice, ktoré sú k hypocentru najbližšie a teda sú pravdepodobne najpresnejšie určené.

Môžeme to dosiahnuť pomocou priradenia váhových koeficientov jednotlivým stanicám tak, aby bližšie stanice mali na výsledku väčšiu váhu. Zvolili sme funkciu v tvare

$$c_i(x, y, z) = \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_A(x, y, z)|} \quad (6.7)$$

ako najjednoduchšiu možnosť - neobsahuje žiadne voľné parametre<sup>2</sup>, na celom intervale je monotónna a pre vzdialené stanice klesajúca k nule. Zároveň uvažujeme, že hypocentrum zemetrasenia sa nikdy nenachádza v mieste stanice, kde daná funkcia nie je definovaná.

Je zvykom používať pre S vlny menšie váhy, keďže ich časy bývajú väčšinou horšie určiteľné. Používame koeficienty veľkosti

$$c_i(S) = \frac{1}{2}c_i(P), \quad (6.8)$$

---

<sup>2</sup>Dala by sa napísať vo všeobecnejšom tvare  $c_i = b/(r_i - r_A)$ , ale parameter  $b$  je aj tak určený normalizáciou.

ako je zaužívané napríklad pri lokalizácii v rámci **SISMALP**.<sup>3</sup>

### 6.1.2 Čas vzniku

Hodnotiaca funkcia  $H$  je len kvadratickou funkciou času vzniku  $t$ . Na optimalizáciu funkcie v parametrickom priestore  $t$  pri fixovanej polohe môžeme preto využiť bežné metódy. Označme  $t_i - T_i(A(x, y, z)) \equiv \tau_i$ . Potom

$$H(t) = C \cdot \sum_{i=0}^M c_i \cdot (t - \tau_i)^2. \quad (6.9)$$

Nájdeme jej minimum a vyjadríme čas vzniku  $t$

$$\frac{\partial H(x)}{\partial t} = 2C \cdot \sum_{i=0}^M c_i \cdot (t - \tau_i) \quad (6.10)$$

$$0 = \sum_{i=0}^M c_i \cdot (t - \tau_i) \quad (6.11)$$

$$t = \frac{1}{\sum_{i=0}^M c_i} \cdot \sum_{i=0}^M c_i \cdot \tau_i \quad (6.12)$$

## 6.2 Časová zložitosť algoritmu

Lokalizácia má dve časti. Jednou je príprava polí časov šírení. To je vlastne počítanie priamej úlohy pre každú z  $M$  staníc, čiže časová zložitosť tohoto algoritmu je  $O(M \cdot N^3)$ .

Hľadanie hypocentra daného zemetrasenia je veľmi jednoduchý  $O(N^3)$  algoritmus. Binárnym vyhľadávaním sme dokonca schopní vyhľadávať v čase  $O(\log(N))$ , toto však nieje v našich podmienkach potrebné, nakoľko celý výpočet trvá len pár sekúnd.

---

<sup>3</sup>François Thouvenot, osobná komunikácia

# Kapitola 7

## Výsledky numerických simulácií v zdrojovej oblasti Dobrá Voda

### 7.1 Vstupný model

Pre numerické simulácie sme zvolili oblasť Dobrej Vody, keďže pre ňu existuje 3D model rýchlostí šírenia P vln (Geofyzika Brno 1985). Zároveň je z geologického hľadiska veľmi zložitá, čo prakticky vylučuje možnosť lokalizácie bežnými 1D metódami.

Vykreslený model rýchlostí sa nachádza v prílohe ako obrázky 9.2 a 9.3.

Model rýchlostí šírenia seizmických vln v zdrojovej oblasti Dobrá Voda je 3D sieťový model so známymi hodnotami rýchlosti šírenia P vln vo všetkých sieťových bodoch. O rýchlosti S vln predpokladáme základnú hodnotu  $v_S = v_P/1.7$ .

Tento pôvodný model bol extrapolovaný smerom na juh a západ kvôli zahrnutiu celej záujmovej oblasti. Po extrapolácii bol upravený tak, aby bol v súlade s geologickou stavbou (model bol upravený Martinom Gálisom).

Takýto model je vhodný na rýchle určenie rýchlosti šírenia v ľubovoľnom bode uvažovaného priestoru. Medzi sieťovými bodmi používame jednoduchú pseudo-lineárnu interpoláciu (rovnica 4.1 na strane 31).

Sieť používaného modelu je pravidelná pravouhlá so vzdialenosťami 100m



medzi susednými sieťovými bodmi. Rozmery použitého modelu sú  $51km \times 31km \times 27km$ , zahŕňa približne oblasť medzi Piešťanmi, Hlohovcom, Modrou a Senicou ako znázorňuje obr. 9.1 v prílohe. Táto oblasť sa dá rozdeliť na tri hlavné časti. Stredom oblasti v smere zo severovýchodu na juhozápad prechádza jadrové pohorie Malých Karpát s vysokými rýchlosťami šírenia P vln v rozmedzí  $(4000 - 6200)m.s^{-1}$ . Tieto sú obkolesené zo severozápadu Záhorskou nížinou a z juhovýchodu hlbšie zasahujúcou Poddunajskou nížinou. Rýchlosti šírenia P vln v mladých trefohorných aluviálnych sedimentoch klesajú k hodnotám  $2000m.s^{-1}$  a nižším. Zložitosť šírenia seizmických vln v takomto prostredí je ilustrovaná na obrázku 9.4.

## 7.2 Seizmické údaje

Tabuľka 7.1: Stanice lokálnej siete seizmických staníc elektrárne Jaslovské Bohunice EBO.

Stanica	Kód stanice	Zem.šírka [°N]	Zem.dĺžka [°E]	Nadm.výška [m]
Buková	BUKO	48.5431	17.4097	296
Dobrá Voda	DVOD	48.6069	17.5344	285
Hradište	HRAD	48.6236	17.4944	280
Jaslovské Bohunice	JABO	48.4986	17.6981	168
Katarínka	KATA	48.5494	17.5519	304
Lakšár	LAKS	48.5722	17.2158	233
Lančár	LANC	48.5981	17.6492	226
Plavecké Podhradie	PLAV	48.4844	17.2611	223
Pustá Ves	PVES	48.6339	17.6375	251
Smolenice	SMOL	48.5139	17.4319	284
Špačince	SPAC	48.4344	17.6214	157

Tabuľka 7.2: Údaje o použitých zemetraseniach.

jav	ohniskový čas						poloha		
	rok	mes	deň	hod	min	sek	z.šírka [°N]	z.dĺžka [°E]	hĺbka [km]
T01	2004	04	29	07	47	11.31	48.5175	17.5815	2.18
U01	2005	11	16	08	27	13.39	48.5738	17.5161	9.10
V03	2006	03	13	08	28	38.39	48.5495	17.6942	10.16
V14	2006	08	05	09	00	8.63	48.5160	17.4680	5.23
W05	2007	08	04	02	39	19.79	48.5814	17.5649	10.30

### 7.3 Pomer rýchlostí P a S vln

Pre rýchlosti objemových vln všeobecne platia vzťahy

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (7.1)$$

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (7.2)$$

Používaný model zdrojovej oblasti Dobrá Voda (Geofyzika Brno 1985) má určené len hodnoty rýchlostí šírenia P vln. Pre hodnoty rýchlostí šírenia S vln sa v prípade chýbajúcich informácií bežne uvažuje rovnosť Lamého konštánt  $\mu$  a  $\lambda$ . Preto platí pomer  $v_P/v_S \approx \sqrt{3} \approx 1.7$ . Tento pomer je však len veľmi hrubým odhadom.

Výsledky simulácií s takýmito vstupnými parametrami viedli k systematickému skorému príchodu S vln. Zároveň sa to prejavilo na nepresnostiach, ktoré dosahovali  $\Delta r \sim 10km$ .

Výpočet sme preto vykonali aj pre iné hodnoty parametra  $v_P/v_S$  v rozmedzí 1.60 – 2.10. Hľadali sme taký parameter, pre ktorý budú nepresnosti minimálne a zároveň bude platiť, že nielen celková suma rozdielov nameraných a vypočítaných časov príchodov, ale aj sumy zvlášť pre P aj pre S vlny budú blízke nule. Akákoľvek odchýlka od nuly totiž znamená, že P vlny sa šíria príliš rýchlo a S vlny príliš pomaly alebo naopak v závislosti od znamienka

odchýlky.

Výpočtami pre rôzne hodnoty parametra sme zistili, že sa s nameranými údajmi najlepšie zhodujú výpočty pre pomer  $v_P/v_S = 1.90 \pm 0.05$ . Vykreslený model hodnôt rýchlostí šírenia P vln sa nachádza v prílohe ako obrázok 9.5. Zároveň vieme pôvodný pomer 1.70 vylúčiť, keďže viedol k nepresnostiam na škále  $\sim 10km$ , čo nieje vysvetliteľné ani numerickými chybami ani nepresnosťami záznamov. Podobne nepresnosti lokalizácie vylučujú hodnotu pomeru väčšiu ako  $\sim 2.10$ .

Väčší pomer ako bežne používaná hodnota 1.70 bola v zdrojovej oblasti Dobrá Voda očakávateľná. Napriek tomu netreba považovať vypočítanú hodnotu 1.90 za presnú, ale len nejakú charakteristickú priemernú hodnotu v prostredí. Predpokladáme, že pomer rýchlosti P a S vln nieje homogénny, ale dosahuje veľké variácie. V juhovýchodnej časti prostredia - Poddunajská nížina - so sedimentami a s vysokým obsahom vody môžeme predpokladať vyššie hodnoty tohoto parametra, zatiaľ čo v oblasti Malých Karpát sa pravdepodobne blíži k tradičnej hodnote 1.70.

Používaný program však slúži prioritne na lokalizáciu hypocentier a možné je len iteratívne určenie priemernej hodnoty pomeru  $v_P/v_S$  a jeho variácie v rámci prostredia môžeme len predpokladať.

## 7.4 Výsledky

Tabuľka 7.3: Porovnanie pôvodných a relokalizovaných hypocentier pre zmenený pomer rýchlostí  $v_P/v_S = 1.90$ .

	$x_{pov}$ [km]	$x_{rel}$ [km]	$\Delta x$ [km]	$y_{pov}$ [km]	$y_{rel}$ [km]	$\Delta y$ [km]	$z_{pov}$ [km]	$z_{rel}$ [km]	$\Delta z$ [km]
T01	27.5	27.8	-0.3	17.5	16.0	1.5	3.9	2.2	1.7
U01	22.2	23.6	-1.4	23.7	22.7	1.0	3.9	9.1	-5.2
V03	35.4	36.5	-1.1	19.8	18.8	1.0	9.3	10.1	-0.8
V14	20.5	19.5	1.0	18.7	16.6	2.1	1.0	5.2	-4.2
W05	27.2	27.3	-0.1	23.2	23.2	0.0	8.1	10.3	-2.2

	$t_{pov}$ [s]	$t_{rel}$ [s]	$\Delta t$ [s]
T01	11.58	11.31	0.27
U01	14.27	13.39	0.88
V03	38.75	38.39	0.36
V14	8.98	8.63	0.35
W05	20.15	19.79	0.36

Grafické znázornenie výsledkov sa nachádza na obrázku 9.5 na strane 62. Z tabuľky vidíme, že **relokalizácia viedla k malým ale nezanedbateľným zmenám polohy hypocentier a času vzniku.** Najväčšie nepresnosti a zmeny sú v určení hĺbky. To je dôsledok rozloženia seizmických staníc. Sú len na povrchu okolo epicentier, čiže sú relatívne citlivé na zmeny polohy  $(x, y)$ , ale menej na zmeny hĺbok.

Pre lepšiu predstavu o výpočtovej zložitosti uveďme, že všetky výpočty boli vykonané na notebooku s nasledujúcimi parametrami:

- procesor Intel Celeron,  $1.73GHz$
- RAM  $3.00GB$
- 32-bitový OS

Program bol napísaný v jazyku C/C++, obrázky boli vykreslené za pomoci programovacieho jazyka Java.

Použitý časový krok bol pri lokalizácii  $dt = 0.002s$ , čo zodpovedá typickému priestorovému kroku  $\sim 10m$ , časové okno simulácie trvalo  $6s$ , pracovalo sa so 6 až 1,0000,000 sieťovými bodmi, vzdialenosti medzi susednými sieťovými bodmi boli z intervalu  $50m$  až  $200m$ .

Výpočet jednej priamej úlohy za takýchto podmienok trval približne  $2h$ .

# Kapitola 8

## Záver

Na výpočet časov šírení vln i na lokalizáciu hypocentier sme použili nový postup. Z fyzikálnej stránky je pomerne jednoduchý, riešiaci len kinematický problém šírenia vln. Z algoritmickej stránky však ide o pomerne komplikovanú vec. Napríklad len napísaný program na riešenie priamej úlohy má vyše 2000 riadkov zdrojového kódu. Je to okrem iného dôsledok triangulácie zložitých geometrických tvarov vlnoplochy pri pridávaní a odoberaní bodov zo siete. Napriek tomu je časová zložitosť algoritmu len  $O(N^3)$ , čo je teoretické minimum pre program riešiaci priamu úlohu pre celé 3D prostredie -  $N^3$  bodov.

Testovaním sa tento algoritmus osvedčil pre zložité nehomogénne 3D prostredia, kde nie sú použiteľné mnohé jednoduchšie algoritmy. Nevýhodou je, že umožňuje vyrátať len príchod prvej P a S vlny, čím strácame informácie o ďalších príchodoch.

Z praktických dôvodov najdôležitejšou časťou je lokalizácia zemetrasení. Lokalizácia 3D algoritmami nie je v dnešnej dobe ešte veľmi zaužívaná. Náš program ukazuje, že výpočtové nároky už nemusia odrádzať od tejto úlohy a dnešné počítače sú ju schopné bez problémov zvládať. Stále však narážame na problém nedostatku dát a trojrozmerných modelov rýchlostí šírenia.

Lokalizačný program sme aplikovali na ohniskovú oblasť Dobrá Voda. Výber tejto oblasti ovplyvnila jej štruktúrna zložitosť zahrnutá v existujúcom

modeli, ktorá priam volá po použití *3D* algoritmov. Zároveň je to jedna z najaktívnejších zdrojových oblastí Slovenska a mohli sme si zvoliť na analýzu viacero záznamov.

Analyzovali sme päť vybraných zemetrasení, z ktorých sme mali dostatok údajov o časoch príchodov. Relokalizácia viedla k nezanedbateľným zmenám hypocentier a k aspoň približnému odhadu neurčitosti lokalizácie. Ukazuje sa, že stále máme veľké nepresnosti v určovaní hĺbky hypocentra.

Za tieto nepresnosti je z veľkej časti zodpovedná aj nepresná znalosť prostredia. Ukázali sme, že zmenením uvažovaného pomeru medzi rýchlosťami P a S vlnami dosiahneme oveľa lepšiu zhodu nameraných a vypočítaných časov príchodov.

Vypočítané údaje o časoch šírenia seizmických vĺn v zdrojovej oblasti Dobrá Voda pre použitých jedenásť staníc bude možné využiť aj na lokalizáciu budúcich zemetrasení.

# Literatúra

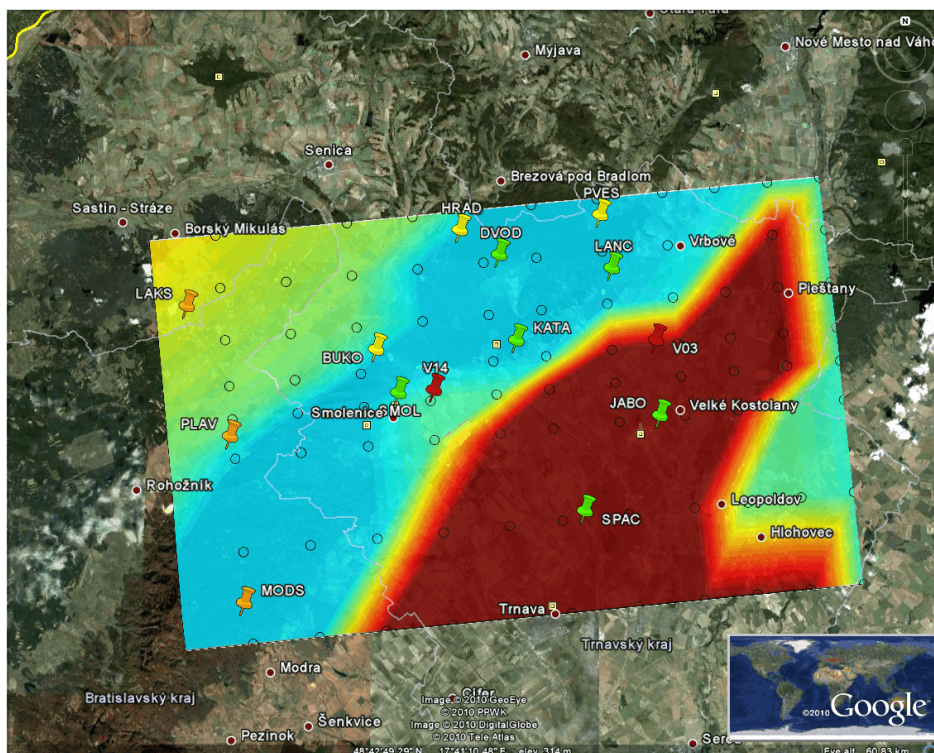
- [1] GEIGER, L., 1910. *Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten*, K. Ges. Wiss. Gött. 4.
- [2] GEOFYZIKA BRNO, 1985. *Rýchlostný model JAB90\_3D\_B.MOD*.
- [3] HAVSKOV et al, 2002 P. Havskov, P. Bormann and J. Schweitzer, *Earthquake location*. In: New Manual of Seismological Observatory Practice Information Sheet 11.1 vol. 1, GeoForschungsZentrum, Potsdam, 2002.
- [4] JULIAN, B.R. - GUBBINS, D., 1977. *Three-Dimensional Seismic Ray Tracing*. In: J. Geophysics, 43, pp. 95-113, 1977.
- [5] LOMAX et al, 2000. *Probabilistic earthquake location in 3D and layered models*. In: Advances in seismic event location, pp. 101-134.
- [6] MOCZO, P., 2006. *Introduction to Theoretical Seismology*. [online]. Bratislava. Dostupné na [http://www.fyzikazeme.sk/mainpage/stud\\_mat/seis.htm](http://www.fyzikazeme.sk/mainpage/stud_mat/seis.htm)
- [7] MOCZO, P. - KRISTEK, J. - HALADA, L., 2004. *The Finite-Difference Method for Seismologists. An Introduction*. Comenius University, Bratislava. 158 pp. ISBN 80-223-2000-5.
- [8] MOSER, T. J., 1991. *Shortest path calculation of seismic rays*. In: Geophysics, 56, pp. 59-67.
- [9] QIN et al, 1992. *Finite-difference solution of the eikonal equation along expanding wavefronts*. In: Geophysics, 57, pp. 478-487.



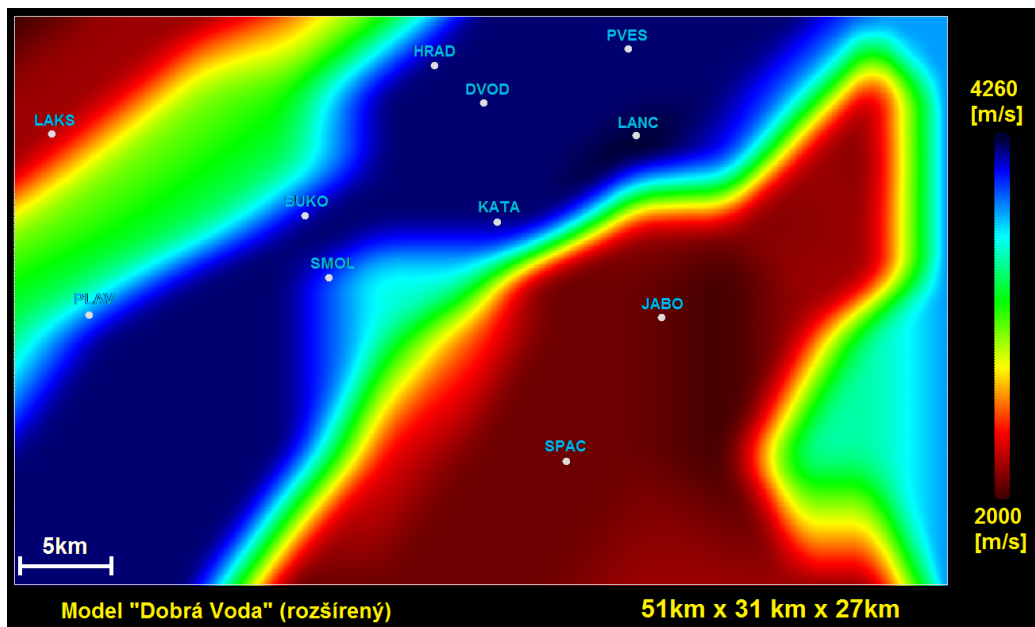
- [10] RŮŽEK, B. - KVASNIČKA, M., 2001. *Differential Evolution Algorithm in the Earthquake Hypocenter Location*. In: Pure and Applied Geophysics, Vol. 158, pp. 667-693, 2001. Issn 0033-4553.
- [11] SHEARER, P., 2009. *Introduction to Seismology*, 2nd edition. Cambridge University Press, 2009, 414 pp. ISBN 978-0-521-70842-5.
- [12] THURBER, C.H. - KISSLING, E., 2000. *Advances in travel-time calculations for three-dimensional structures*. In: Advances in Seismic Event Location, pp. 71-99, 2000. ISBN 978-0-7923-6392-7.
- [13] VIDALE, J. E., 1988. *Finite-difference calculations of traveltimes*. In: BSSA, 78, pp. 2062–2076.
- [14] WADATI, K., 1933. *On travel time of earthquake waves*, Part II. Geophys. Mag. 7 (1933), pp. 101–111.
- [15] WALDHAUSER, F. - ELLSWORTH, L., 2000. *A Double-Difference Earthquake Location Algorithm: Method and Application to the Northern Hayward Fault, California*. In: BSSA, 90, 6, pp. 1353–1368, December 2000
- [16] WESSON, R.L., 1971. *Travel-time inversion for laterally inhomogeneous crustal velocity models*. In: BSSA, 61, pp. 729-746, 1971.

# Kapitola 9

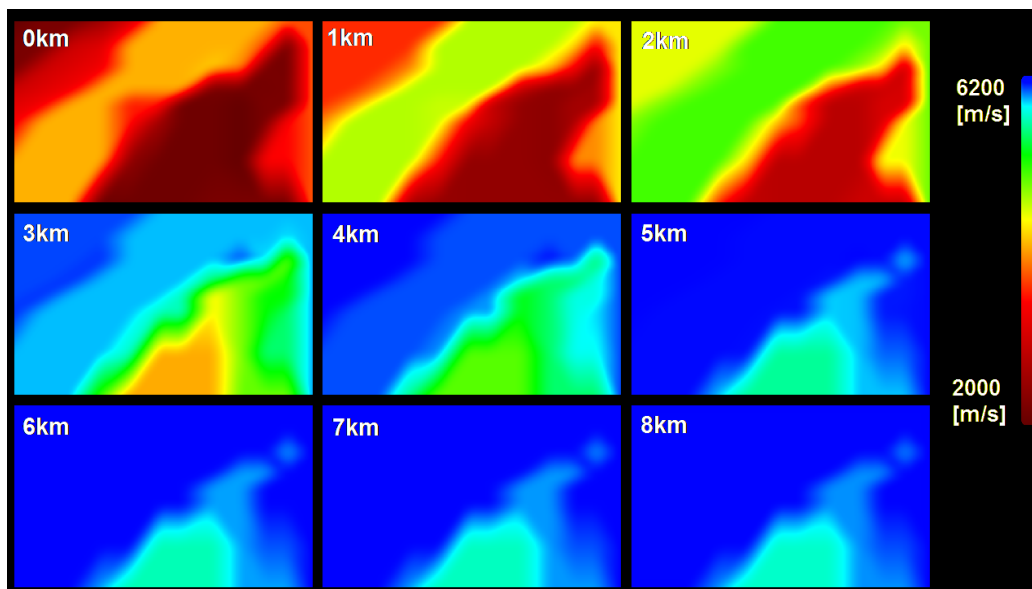
## Prílohy



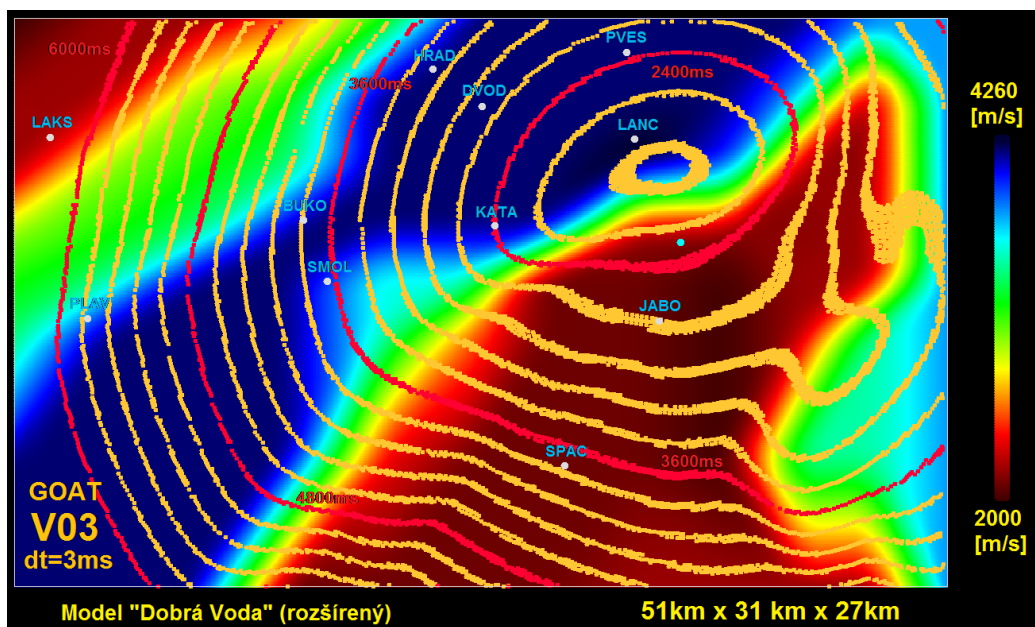
Obr. 9.1: Poloha záujmovej oblasti Dobrá Voda s vyznačenými stanicami lokálnej siete Jaslovské Bohunice a modelom, ktorému sa podrobnejšie venujeme v ďalších obrázkoch.



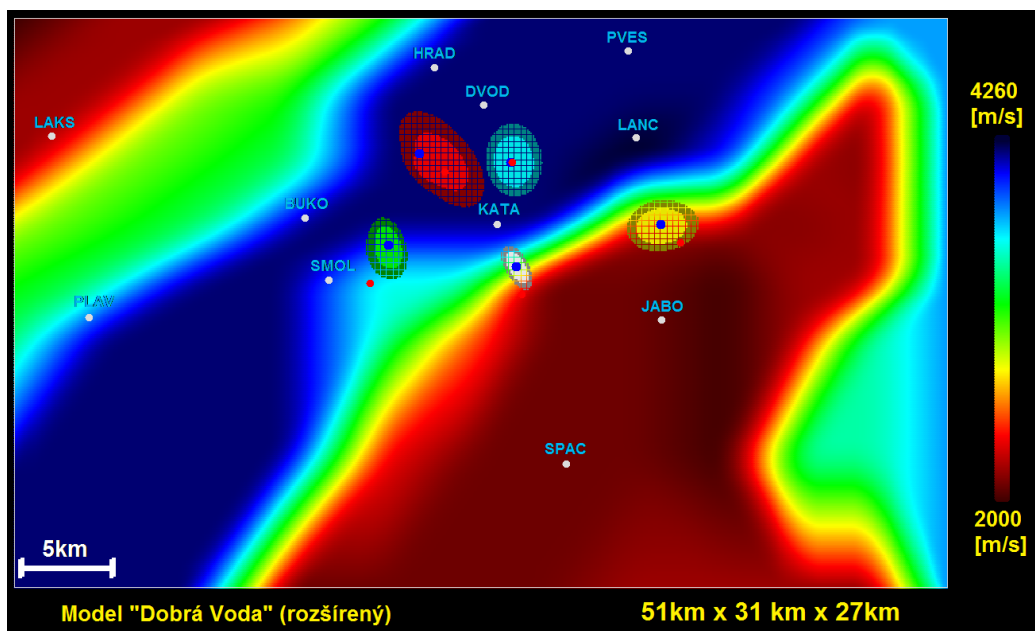
Obr. 9.2: Model podľa veľkostí rýchlostí šírenia P vln v oblasti Dobrá Voda vo vybranej hĺbke  $h = 0$  a seizmické stanice lokálnej siete elektrárne Bohunice.



Obr. 9.3: Horizontálne rezy modelom podľa veľkostí rýchlostí šírenia P vln v oblasti Dobrá Voda vo vybraných hĺbkach.



Obr. 9.4: Izochrony časov príchodov na zemský povrch pre zemetrasenie V03.



Obr. 9.5: Výsledky lokalizácie pre pomer  $v_P/v_S = 1.90$ . Modré body sú relokizované epicentrá, červené body sú pôvodné polohy epicentier podľa tabuľky 7.2. Farebné oblasti okolo epicentier sú odhadom nepresnosti lokalizácie. Jasnejšia vnútorná farba zodpovedá oblasti, kde vypočítané reziduum je  $\leq 2 \cdot Res_{min}$ , tmavšia vonkajšia farba je oblasť, kde platí  $2 \cdot Res_{min} \leq Res \leq 3 \cdot Res_{min}$ .