

Reológia
viskoplastického kontinua

Mojmír Moravský

Reológia viskoplastického kontinua

Bakalárska práca

Mojmír Moravský

Univerzita Komenského

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

4.1.1. Fyzika

Vedúci: Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2011

Podakovanie:

Autor ďakuje svojmu vedúcemu, profesorovi Moczovi, za trpezlivosť a podporu. Podakovanie patrí aj môjmu otcovi, doktorovi Moravskému, za uvedenie do problematiky a pomoc pri riešení problémov.

Abstrakt

Mojmír Moravský

Reológia viskoplastického kontinua

Univerzita Komenského

Fakulta matematiky fyziky a informatiky

Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie

Vedúci: Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2011

33 strán

Práca poskytuje úvod do problematiky riešenia viskoplastických tokov kvapalín a metódu ich výpočtu. Začína stručným prehľadom základných a viskoplastických reologických modelov. Ďalej detailne popisuje vzťahy napätia, energie a síl v kontrolnom objeme, ktorým reprezentujeme kvapalinu. Aplikáciou vzťahov pre viskoplastický model popisuje kvapalinu podobnú sklu alebo medu a naznačuje možnosti numerickej simulácie ich správania metódou konečných objemov.

Kľúčové slová: reologický model, viskoplastická kvapalina, metóda konečných objemov

Abstract

Mojmír Moravský

Rheology of viscoplastic continuum

Comenius University

Faculty of Mathematics, Physics and Informatics

Department of Astronomy, Physics of the Earth, and Meteorology

Supervisor: Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava 2011

33 pages

The aim of the thesis is to provide an introduction into the viscoplastic flow of fluids, and present a method of its calculation. The thesis starts with a short outline of the basic and viscoplastic rheological models. Later on, it describes in detail the relations between stresses, energy and forces acting in the control volume used to represent the fluid. Through the application of the equations for a viscoplastic model the thesis describes fluids similar to a glass or honey, and outlines the possibility of the numerical simulation of their behavior using the finite-volume method.

Keywords: rheological model, viscoplastic fluid, finite-volume method

Obsah

| | |
|--|-----------|
| 1 Úvod..... | 1 |
| 2 Reologické modely..... | 2 |
| 2.1 Lineárne elastické teleso..... | 2 |
| 2.2 Lineárne viskózne teleso..... | 3 |
| 2.3 Plastické teleso..... | 4 |
| 2.4 Spájanie telies..... | 5 |
| 2.5 Maxwelllove viskoelastické teleso..... | 6 |
| 2.6 Kelvin-Voigtove viskoelastické teleso..... | 9 |
| 2.7 Binghamove viskoplastické teleso..... | 12 |
| 2.8 Zložitejšie viskoplastické teleso..... | 13 |
| 3 Viskoplastické kontinuum..... | 14 |
| 3.1 Kontrolný objem..... | 14 |
| 3.1.1 Zákon zachovania hmoty..... | 15 |
| 3.1.2 Sily a napätia pôsobiace na kontrolný objem..... | 16 |
| 3.1.3 Energia toku..... | 19 |
| 3.1.4 Stavová rovnica..... | 22 |
| 3.2 Aplikácia reologických modelov..... | 23 |
| 4 Záver..... | 26 |

1 Úvod

Reológia je veda popisujúca správanie sa látok pod vplyvom rôznych napätí. Názov je odvodení od gréckeho slova rhei, ktoré v preklade znamená tok. Názov reológia viskoplastického kontinua úplne popisuje zameranie práce, tok viskoplastických látok.

Viskoplasticky sa obyčajne správajú látky ako roztavené sklo a podobné, pri simuláciách takéhoto toku sa zvykne používať pre svoje vlastnosti aj arašidové maslo. Nemôžeme však tvrdiť, že tieto látky sú viskoplastické. Tá istá látka sa môže správať pri určitom type tokov viskoplasticky a pri inom type toku viskoelasticky. Rozhodujúcim faktorom je problematika toku.

Pri mnohých procesoch výroby a spracovania skla potrebujeme použiť jeho hodnoverný fyzikálny model a určitú metódu výpočtu jeho toku, podobne ako aj pri modelovaní zemetrasení, alebo správaní akéhokoľvek iného kontinua. Táto práca ponúka jeden z možných spôsobov výpočtu toku.

Hlavná motivácia výberu témy viskoplastického kontinua bola túžba porozumieť základom výpočtu, numerického modelovania toku skla a možnosť v budúcnosti sa venovať problematike odborne.

2 Reologické modely

Fenomenologické správanie mnohých druhov látok vytvára priestor pre štúdium ich vlastností nahradzáním jednotlivých materiálov ich analógiou vo forme reologických modelov. Jednotlivé reologické modely popisujú reologické vzťahy napätia a deformácie. Reprezentáciou reálneho materiálu s jeho fenomenologickými vlastnosťami (viskozita, elasticita...) reologickým modelom dostaneme dobre definovaný matematický popis. Najjednoduchšie modely predstavujú lineárne reologické telesá, ktoré majú idealizované vlastnosti reálnych materiálov. Pre mnohé telesa budeme uvažovať konštantné pôsobiace jednotkové napätie (Heavisideovu jednotkovú krokovú funkciu v napätí):

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= 1 \quad \text{pre } t \in \langle t_0, t_1 \rangle \\ \sigma(t) &= 0 \quad \text{pre } t \notin \langle t_0, t_1 \rangle\end{aligned}\tag{0.1}$$

t_0 je čas, v ktorom začalo pôsobiť jednotkové napätie a t_1 čas, do ktorého pôsobilo.

2.1 Lineárne elastické teleso

Hookeove teleso (pružinka) predstavuje vlastnosti dokonale elastickej látky.

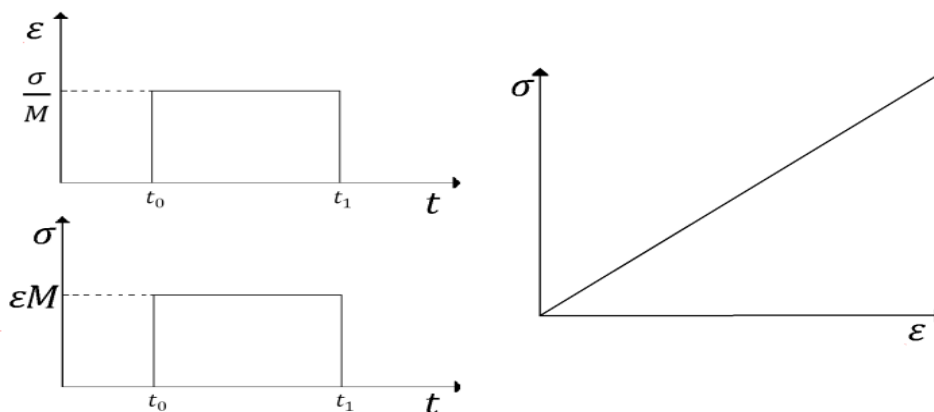


Obr.1 Hookeove teleso

Deformácia takéhoto modelu je lineárne závislá od momentálne pôsobiaceho napätia. Pre Hookeove teleso teda platí

$$\sigma(t) = M \varepsilon(t)\tag{0.2}$$

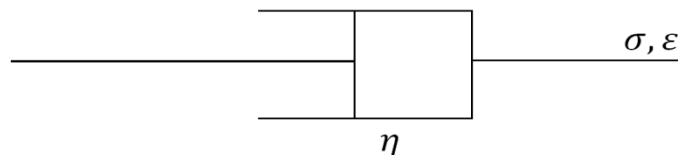
Vo vzťahu (0.2) $\varepsilon(t)$ predstavuje deformáciu telesa v čase t spôsobenú napätím $\sigma(t)$ ako funkciou času. M je časovo nezávislá materiálová konštanta, elastický modul. Správanie Hookeovho telesa je zobrazené na Obr.2. Pri náhlom odstránení napätia sa teleso okamžite vracia do pôvodného stavu s nulovou deformáciou. Deformácia je úplne nezávislá od predchádzajúceho stavu telesa (nemá pamäť), keďže je funkciou len okamžitého napätia.



Obr.2. Vľavo: Graf zmeny deformácie pri pôsobení konštantného napätia od času t_0 po t_1 , vpravo: Graf závislosti napätia od deformácie.

2.2 Lineárne viskózne teleso

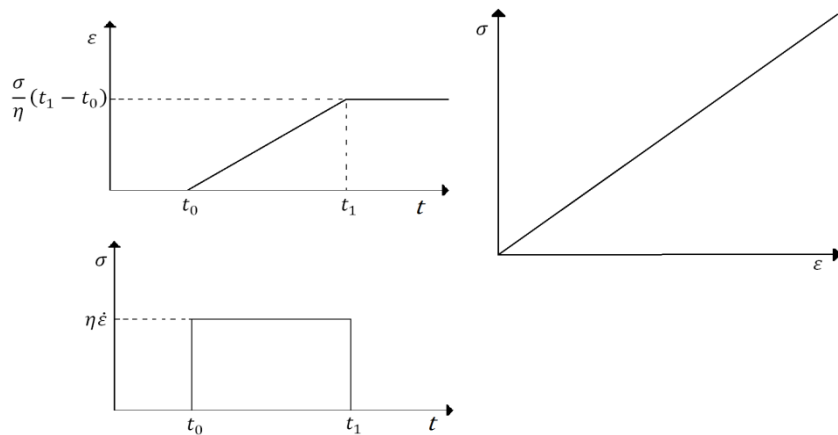
Stokesove teleso (piest) reprezentuje vlastnosti dokonale viskózne kvapaliny. Definuje ho časovo nezávislá materiálová konštanta viskozita η .



Obr.3 Stokesove teleso

Deformácia tohto telesa nezávisí len od predchádzajúceho napätia, nie je schopné okamžite reagovať na zmenu napätia. Model má teda, na rozdiel od Hookeovho telesa, absolútnu pamäť. Správanie takéhoto telesa je zobrazené na Obr.4. Zmena deformácie s časom je priamo úmerná práve pôsobiacemu napätiu

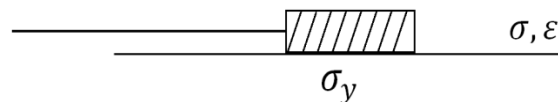
$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (0.3)$$



Obr.4. Vľavo: Graf zmeny deformácie pri pôsobení konštantného napätia od času t_0 po t_1 , vpravo: Graf závislosti napätia od deformácie.

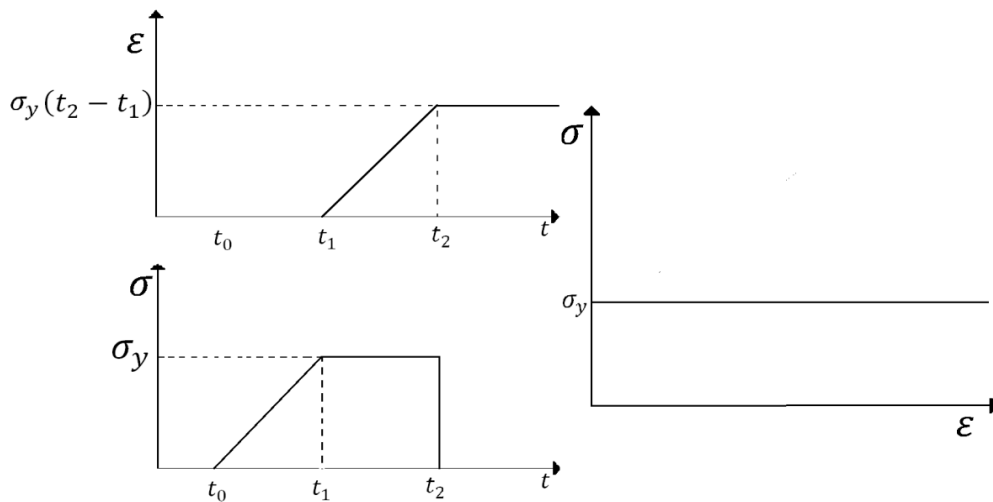
2.3 Plastické teleso

Saint-Venantove teleso (teleso na podložke) reprezentuje vlastnosti dokonale plastickej latky. Definuje ho časovo nezávislá materiálová konštanta medzné napätie σ_y . Saint-Venantove teleso má nulovú deformáciu pokiaľ napätie naň pôsobiace nedosahuje medzné napätie. Ide o analógiu telesa na horizontálnej podložke, ktoré sa nepohne pokiaľ sila pôsobiaca v horizontálnom smere nedosiahne hodnotu statického trenia medzi telesom a podložkou.



Obr.5. Saint-Venantove teleso

Pri dosiahnutí medzného napätia sa teleso začne okamžité deformovať. Pre jednoduchosť Saint-Venantovho modelu sa neuvažuje napätie väčšie než je medzné. Aktuálna deformácia telesa je závislá od pôsobenia predchádzajúceho napätia (rovného medznému), teleso má čiastočnú pamäť. Saint-Venantove teleso sa na rozdiel od Stokesovho nedoformuje pre napätia menšie než medzné.



Obr.6. Vľavo: Graf zmeny deformácie pri pôsobení najskôr lineárne narastajúceho napätia v čase od t_0 po čas t_1 neskôr a konštantného (hraničného) od času t_1 po čas t_2 .

Vpravo: Závislosť napätia od deformácie.

2.4 Spájanie telies

Pre štúdium vlastností mnohých reálnych materiálov potrebujeme modely kombinujúce v sebe viskozitu, elasticitu alebo plasticitu. To je možné dosiahnuť spájaním troch vyššie spomínaných telies. Ich spájaním vytvoríme nové telesá s vlastnými vzťahmi napätia a deformácie. Telesá môžeme spájať paralelne alebo sériovo a tak prispôbiť závislosť konkrétnemu problému. Pre sériové spájanie platí, že celková deformácia kombinovaného telesa je súčtom deformácií jednotlivých telies

$$\epsilon_s = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad (0.4)$$

a na každé teleso tvoriace ho pôsobí celkové napätie

$$\sigma_s = \sigma_i \quad (0.5)$$

n predstavuje počet sériovo spojených telies, ϵ_i deformáciu a σ_i napätie na i -tom telese v tomto spojení. Vzťah (0.4) je zrejмый, ak si predstavíme deformáciu, ako skrátenie (resp. predĺženie) nášho telesa, ktorého zmena dĺžky musí byť rovná súčtu zmeny dĺžok jednotlivých telies. Pre paralelne spojené telesá platí, že napätie rozloží na všetky telesá tvoriace teleso

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (0.6)$$

Pri paralelnom zapojení telies je deformácia každého telesa rovnaká ako deformácia celého zloženého telesa:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_i \quad (0.7)$$

Pre jednoduchšiu predstavu nám prerozdelenie napätia popisuje tabuľka 1.

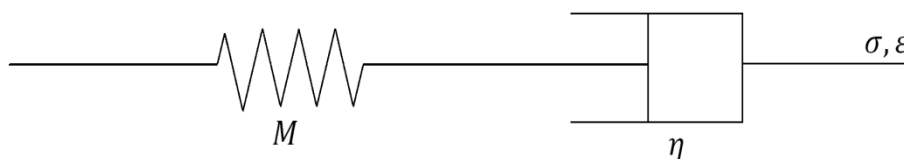
| Spojenie | σ | ε |
|-----------|----------|---------------|
| Sériové | rovné | aditívne |
| Paralelné | aditívne | rovné |

Tabuľka 1. Rozloženie napätia a deformácie pri spájaní telies

Pomocou predchádzajúcich vzťahov si vieme odvodiť rovnice popisujúce vzťahy napätia a deformácie aj pre zložitejšie telesá kombinujúce rôzne typy spojení. Vhodným výberom telies a ich spojení je možné vytvoriť teleso čo najlepšie reprezentujúce vlastnosti vybraného reálneho materiálu.

2.5 Maxwellove viskoelastické teleso

Sériovým spojením Hookeovho a Stokesovho telesa vytvoríme Maxwellove teleso zobrazené na obr.8



Obr.8 Maxwellove teleso

Vzťah pre napätie a deformáciu takéhoto viskoelastického telesa si odvodíme zo vzťahov pre sériovo spojené telesá (0.4). Zo vzťahov (0.2) a (0.3) vieme, že

$$\sigma_H = M \varepsilon(t) \quad (0.8)$$

$$\sigma_s(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (0.9)$$

Výsledná diferenciálna rovnica, popisujúca napätie Maxwellovho telesa, je daná ako

$$\sigma(t) = M \varepsilon_H(t) = \eta \dot{\varepsilon}_s(t) \quad (0.10)$$

Celkovú deformáciu Maxwellovho telesa vyjadruje súčet

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s(t) + \varepsilon_H(t) \quad (0.11)$$

Pokiaľ uvažujeme krokovú zmenu napätia z nulového na jednotkové, kde t_0 je čas, v ktorom začalo pôsobiť jednotkové napätie a t_1 čas do kedy pôsobilo. Riešením diferenciálnej rovnice (0.10) dostávame rovnice popisujúce deformácie súčastí. Deformácia Stokesovho telesa je

$$\varepsilon_s(t) = \frac{t_1 - t_0}{\eta} \quad (0.12)$$

Deformácia Hookeovho telesa je

$$\varepsilon_H(t) = \frac{1}{M} \quad (0.13)$$

Dosadením týchto deformácií do vzťahu (0.11) získame celkovú deformáciu Maxwellovho telesa

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{M}{\eta} t \right) \quad (0.14)$$

t predstavuje čas pôsobenia jednotkového napätia

$$t = t_1 - t_0 \quad (0.15)$$

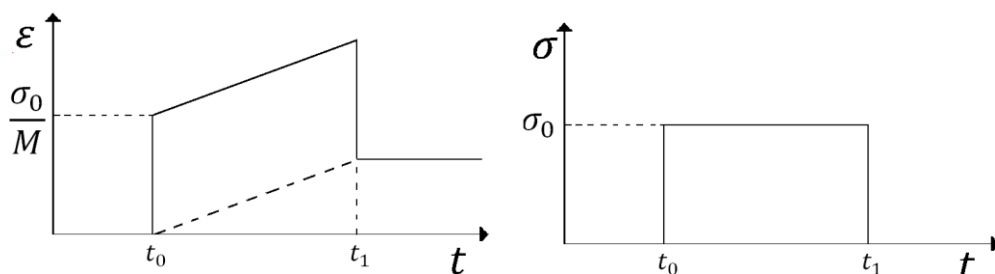
Z rovnice môžeme vidieť, že teleso sa krátko po začatí pôsobenia Heavisidoveho jednotkového napätia správa podobne ako Hookeove teleso a jeho deformácia je úmerná práve pôsobiacemu napätiu. Nárast deformácie po krokovom stúpnutí je však skoro lineárny rovnako ako u Stokesovho telesa a v neskoršom čase je deformácia telesa práve deformácii Stokesovho telesa Obr. 9. Maxwellove teleso sa teda pri rýchlych zmenách napätia správa

elasticky a naopak pri pomalších plasticky. Charakteristický čas tejto zmeny sa nazýva relaxačný čas Maxwellovho telesa a môžeme ho priamo odvodiť z vzťahu pre deformáciu

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{t}{\tau_R} \right) \quad (0.16)$$

τ_R je relaxačný čas

$$\tau_R = \frac{\eta}{M} \quad (0.17)$$



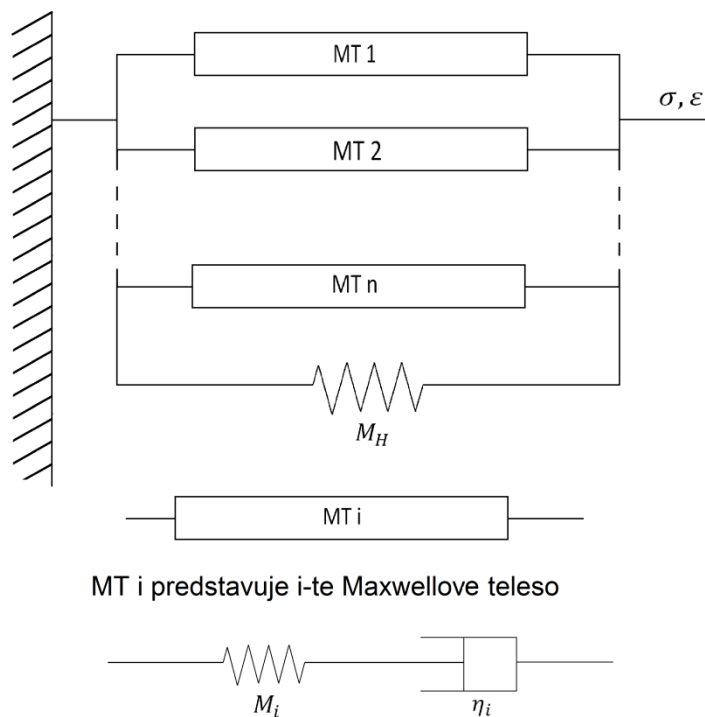
Obr.9 Graf deformácie Maxwellovho telesa spôsobenej konštantným napätím.

Sériovým spojením viacerých Maxwellových telies vytvoríme generalizované Maxwellove teleso Obr.10. Takéto teleso vykazuje často vhodnejšie viskoelastické vlastnosti pre reprezentáciu mnohých materiálov ako Maxwellove teleso samotné. Pre generalizované Maxwellove teleso často uvažujeme jedno Hookeovo teleso paralelne spojené spolu s Maxwellovými telesami. Správanie generalizovaného Maxwellovho telesa teda popisujú vzťahy:

$$\sigma(t) = \varepsilon_H M_H + \sum_{i=1}^n M_i \varepsilon_i = \varepsilon_H M_H + \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\varepsilon}_i \quad (0.18)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{M(n+1)} \left(1 + \frac{M}{\eta} t \right) = \frac{1}{M_H(n+1)} \quad (0.19)$$

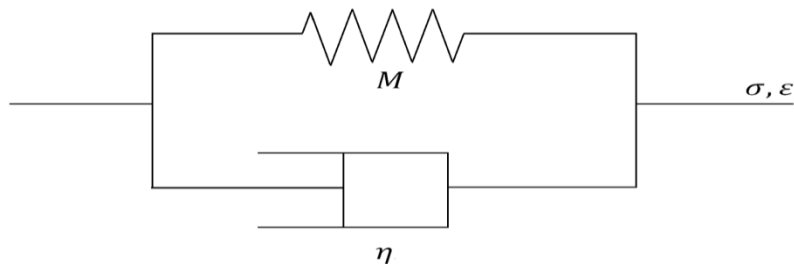
M_i je elastický modul Hookeovho telesa tvoriaceho i-te Maxwellove teleso, η_i je viskozita Stokesovho telesa tvoriaceho i-te Maxwellove teleso a M_H je elastický modul.



Obr.10 Generalizované Maxwelllove teleso

2.6 Kelvin-Voigtove viskoelastické teleso

Paralelným spojením Hookeovho telesa s Stokesovým vytvoríme Kelvin-Voigtove teleso.



Obr.11 Kelvin-Voigtove teleso

Vzťah pre napätie a deformáciu takéhoto viskoelastického telesa si odvodíme zo vzťahov pre paralelne spojené telesá (0.6) a (0.7). Pre napätia teda máme

$$\sigma_1(t) = M \varepsilon(t) \quad (0.20)$$

$$\sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (0.21)$$

Výsledná diferenciálna rovnica, vyjadrujúca vzťah napätia a deformácie, má tvar

$$\sigma(t) = M \varepsilon_H(t) + \eta \dot{\varepsilon}_S(t) \quad (0.22)$$

Pričom pre deformáciu platí

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_S(t) = \varepsilon_H(t) \quad (0.23)$$

Podobne ako pre Maxwellove teleso, pokiaľ uvažujeme krokovú zmenu napätia s nulového na jednotkové. Výsledná diferenciálna rovnica je

$$1 = M \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (0.24)$$

t predstavuje čas pôsobenia Heavisideovej jednotkovej funkcie napätia

$$t = t_1 - t_0 \quad (0.25)$$

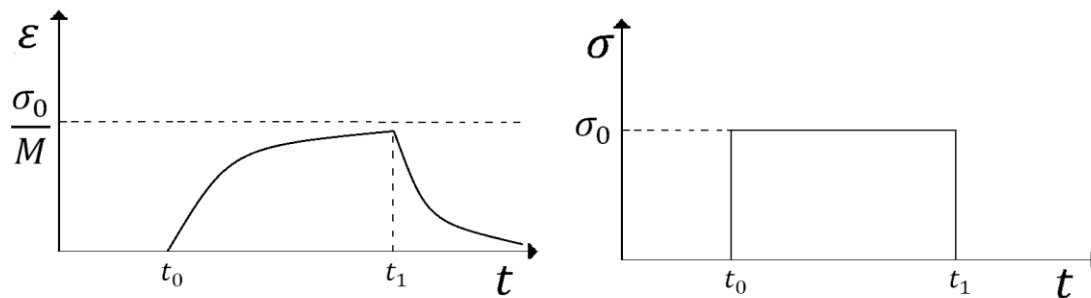
Kelvin-Voigtovo teleso sa začína postupne deformovať v momente ako naň začne pôsobiť napätie. Vzťah popisujúci deformáciu v závislosti od pôsobiaceho napätia v čase získame riešením diferenciálnej rovnice (0.24), má tvar

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{M} \left[1 - e^{\left(\frac{-M}{\eta} t \right)} \right] \quad (0.26)$$

Zo vzťahu môžeme vidieť, že teleso sa pre neskoršie časy správa ako Hookeove teleso, pokiaľ sa pôsobiace napätie nemení a naopak, pre menšie časy sa správa podobne ako Stokesove teleso. Takéto teleso sa správa viskózne pri rýchlych zmenách napätia a naopak pri pomalších sa správa elasticky Obr.12. Podobne ako pri Maxwellovom telese charakteristický čas tejto premeny nazývame relaxačný čas Kelvin-Voigtovho telesa.

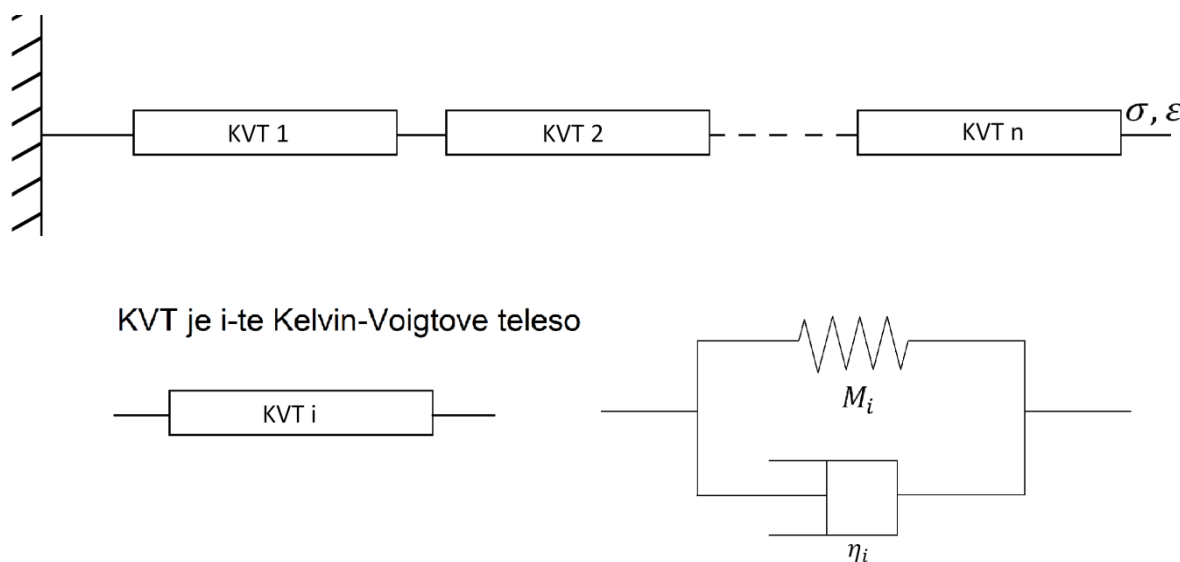
$$\tau_R = \frac{\eta}{M} \quad (0.27)$$

Kelvin-Voigtovo teleso teda časom nadobúda pôvodnú deformáciu.



Obr.12 Graf zobrazujúci deformáciu Kelvin-Voigtovho telesa.

Pre lepšiu zhodu s reálnymi materiálmi sa používa Generalizované Kelvin-Voigtovo teleso. Takéto teleso vytvoríme sériovým spojením viacerých Kelvin-Voigtových telies.



Obr.13 Generalizované Kelvin-Voigtovo teleso

Napätie pri sériovom spojení je rovnaké pre všetky Kelvin-Voigtovo telesa:

$$\sigma(t) = \sigma_{Si}(t) + \sigma_{Hi}(t) \quad (0.28)$$

$$\sigma(t) = M_i \varepsilon_i(t) + \eta_i \dot{\varepsilon}_i(t) \quad (0.29)$$

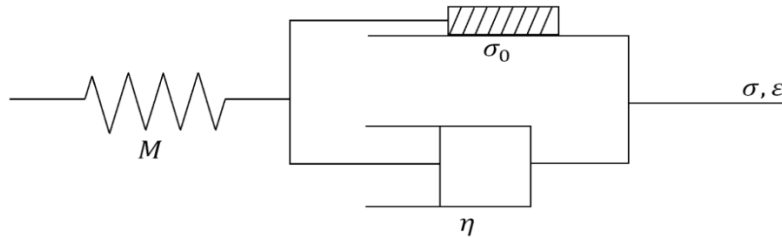
Celková deformácia môže byť vyjadrená ako:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{M_i} \left[1 - e^{\left(-\frac{M_i t}{\eta_i} \right)} \right] \quad (0.30)$$

Pri pôsobení Heavisideovej funkcie napätia.

2.7 Binghamove viskoplastické teleso

Seriovým spojením paralelne prepojeného Saint-Venantovho a Stokesovho telesa s Hookeovým telesom vytvoríme Binghamove teleso.



Obr.14 Binghamove teleso

Takéto teleso má viskózne i plastické vlastnosti. Celková deformácia je tvorená deformáciou Hookeovho telesa a viskoplastickej časti Binghamovho telesa:

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_{vp}. \quad (0.31)$$

Pre Binghamove teleso uvažujeme len celkové napätia, pri ktorých je napätie na Saint-Venantovom telese nanajvyš rovné medznému. Viskoplastická časť sa nedeformuje, pokiaľ nie je napätie na Saint-Venantovom telese rovné medznému a teda pre menšie napätia sa správa Binghamovo teleso rovnako ako Hookeovo teleso:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{M}, |\sigma| < \sigma_y. \quad (0.32)$$

Pokiaľ je napätie na Saint-Venantovom telese rovné medznému napätiu, deformuje sa aj visko-plastická časť. Napätie sa rozdeľuje podľa vzťahu (0.6) na napätie na Stokesovom telese a Saint-Venantovom telese

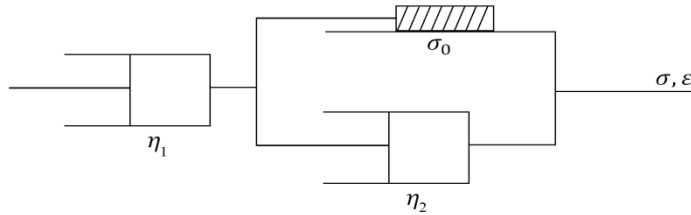
$$\sigma_s = \begin{cases} \sigma - \sigma_y & \text{pre } \sigma \geq \sigma_y \\ \sigma + \sigma_y & \text{pre } \sigma \leq -\sigma_y \end{cases} = (|\sigma| - \sigma_y) \text{sign}(\sigma). \quad (0.33)$$

Pričom napätie je definované ako

$$\sigma_s(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t). \quad (0.34)$$

2.7 Zložitejšie viskoplastické teleso

Pre vhodnú reprezentáciu viskoplastických materiálov si definujeme teleso vytvorené sériovým spojením Stokesovho telesa a viskoplastickej časti Binghamovho telesa.



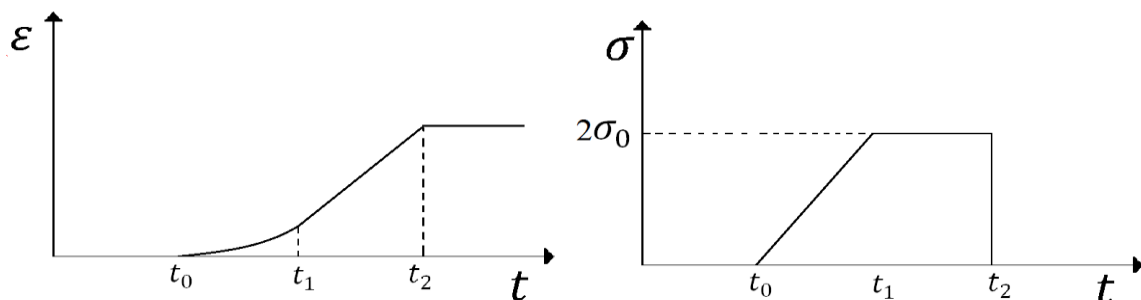
Obr.15 Viskoplastické teleso

Toto teleso sa v praxi používa len zriedka ale je vhodným objektom na uvedenie do problematiky viskoplastického kontinua a je úplne postačujúce pre náš záujem. Teleso sa správa ako Stokesove telo s viskozitou η_1 , kým hodnota napätia na Saint-Venantovom telese nedosiahne medzné napätie σ_0

$$\sigma(t) = \eta_1 \dot{\varepsilon}(t) \text{ pre } |\sigma| < 2\sigma_0 \quad (0.35)$$

Akonáhle je hodnota napätia rovná medznému tak sa teleso začína deformovať opäť ako Stokesovo teleso ale odlišnou viskozitou

$$\sigma(t) = \left(\frac{2\eta_1\eta_2}{\eta_1 + 2\eta_2} \right) \dot{\varepsilon}(t) \text{ pre } |\sigma| = 2\sigma_0 \quad (0.36)$$



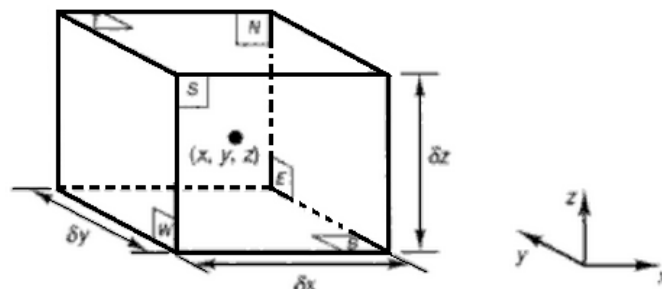
Obr. 16. Graf zobrazujúci deformáciu viskoplastického telesa

3 Viskoplastické kontinuum

Viskoplastické kontinuum si vyjadríme pomocou jeho diskretizácie do kontrolných objemov, ktoré ho budú plne reprezentovať.

3.1 Kontrolný objem

Pre analýzu kvapalných tokov na makroskopickej škále môžeme zanedbať molekulárnu štruktúru hmoty a molekulárny pohyb častíc, ktorými je tvorený. Kontinuum budeme popisovať ako kvapalinu. Správanie kvapaliny popisujeme na úrovni jej makroskopických, vlastností ako sú rýchlosť, tlak, hustota, teplota a napätie. Kontrolný objem kvapaliny je teda najmenší objem, ktorého makroskopické vlastnosti neovplyvnia fluktuácie na molekulárnej úrovni.



Obr.17. Kontrolný objem

Kontrolný objem má rozmery strán δx , δy a δz . Jednotlivé strany pomenovávame N, S, E, W, T a B, ktorých názvy symbolizujú North (sever), South (juh), East (východ), West (západ), Top (vrch) a Bottom (dno). Pričom za stred objemu považujeme bod (x,y,z) znázornený na Obr.17. Všetky vlastnosti kvapaliny, ktoré budeme uvažovať sú funkciou času a polohy a teda ich budeme zapisovať ako hustotu $\rho(x,y,z,t)$, tlak $p(x,y,z,t)$, teplotu $T(x,y,z,t)$ a vektor rýchlosti $\mathbf{u}(x,y,z,t)$.

Pre správnu reprezentáciu kvapaliny musíme ďalej uvažovať tri zákony zachovania: Hmota kvapaliny sa zachováva (zákon zachovania hmoty). Rýchlosť zmeny hybnosti je rovná sume všetkých síl pôsobiacich na kvapalný element (Newtonov druhý zákon). Rýchlosť zmeny energie je rovná nárastu tepla a práce vykonanej na kvapalnom objeme (prvý zákon termodynamiky).

3.1.1 Zákon zachovania hmoty

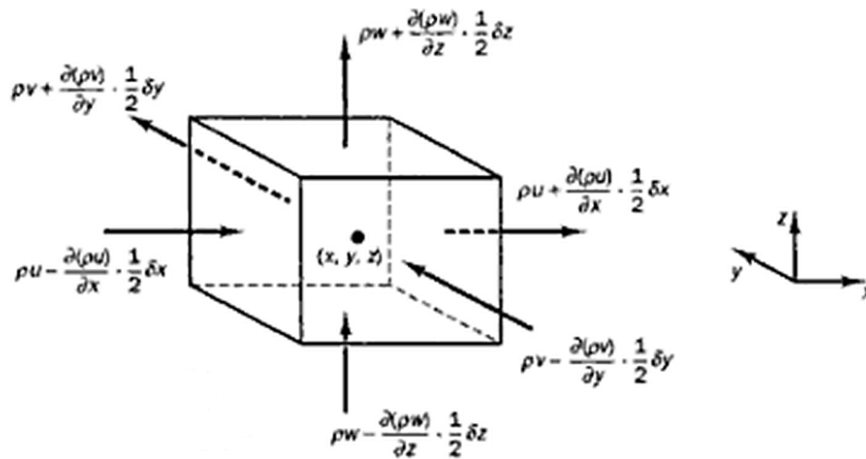
Základom aplikácie zákona zachovania hmoty je zapísanie rovnosti nárastu hmoty v objeme s tokom hmoty cez hranice nášho kontrolného objemu. Nárast hmoty v kontrolnom objeme kvapaliny je

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z. \quad (0.37)$$

Nárast hmoty kvapaliny v dôsledku toku $\mathbf{u}(x,y,z)$ vypočítame sčítaním tokov cez jednotlivé hranice objemu

$$\begin{aligned} & \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \cdot \\ & + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (0.38)$$

Prítokom do kvapalného objemu je priradené kladné znamienko a odtokom z objemu je priradené záporné znamienko, Obr. 18.



Obr.18. Tokom spôsobený nárast a pokles hmotnosti kvapaliny.

Nárast hmoty (0.37) je rovný nárastu hmoty v dôsledku toku (0.38). Využitím tejto rovnosti získame vzťah popisujúci zákon zachovania hmoty pre našu kvapalinu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (0.39)$$

alebo v upravenej forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (0.40)$$

Rovnica (0.40), popisujúca nestacionárnu, trojrozmernú rovnicu zachovania hmoty, je taktiež známa aj ako rovnica kontinuity.

3.1.2 Sily a napätia pôsobiace na kontrolný objem

Zákony zachovania energie a hybnosti platia rovnako pre všetky kvapaliny nezávisle od polohy v kvapaline, avšak každá vlastnosť častice je funkciou polohy a času. Hodnotu danej vlastnosti na jednotku hmoty budeme ďalej značiť ako ϕ . Definujeme vzťah popisujúci zmenu ϕ na jednotku hmoty ako totálnu deriváciu

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi. \quad (0.41)$$

Na základe tohto prístupu je možné vybudovať numerické metódy pre výpočet pohybu sústavy častíc samotných. Avšak pre náš záujem je vhodnejšie sústrediť sa na kontrolné objemy kvapaliny čo nám neskôr poskytne jednoduchšie riešenia problémov aj pre uzavreté objemy. Podobne ako pri zákone zachovania hmoty je nevyhnutné si vyjadriť rovnicu (0.41) pre jednotkový objem. Zmena ϕ na jednotku objemu je daná ako

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi \right). \quad (0.42)$$

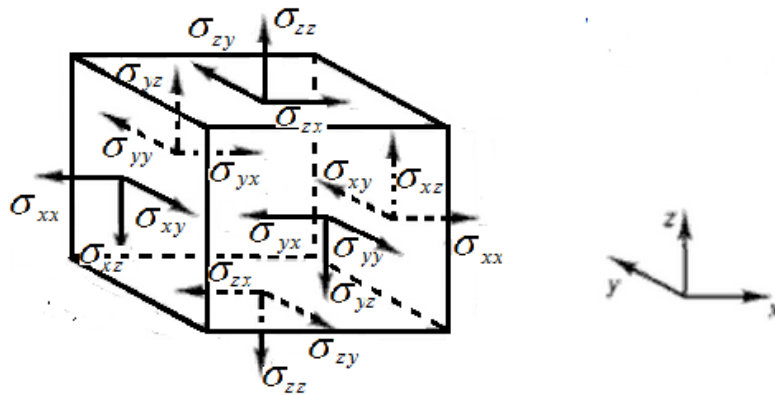
Druhý Newtonov zákon hovorí že, zmena hybnosti kvapalnej častice je rovná sume síl pôsobiacich na ňu. Využitím predchádzajúcich vzťahov môžeme tento zákon zapísať ako

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = \rho \frac{Du}{Dt}, \quad \frac{\partial p_y}{\partial t} = \rho \frac{Dv}{Dt}, \quad \frac{\partial p_z}{\partial t} = \rho \frac{Dw}{Dt}. \quad (0.43)$$

p_x , p_y a p_z predstavujú hybnosti v smere osí x, y a z.

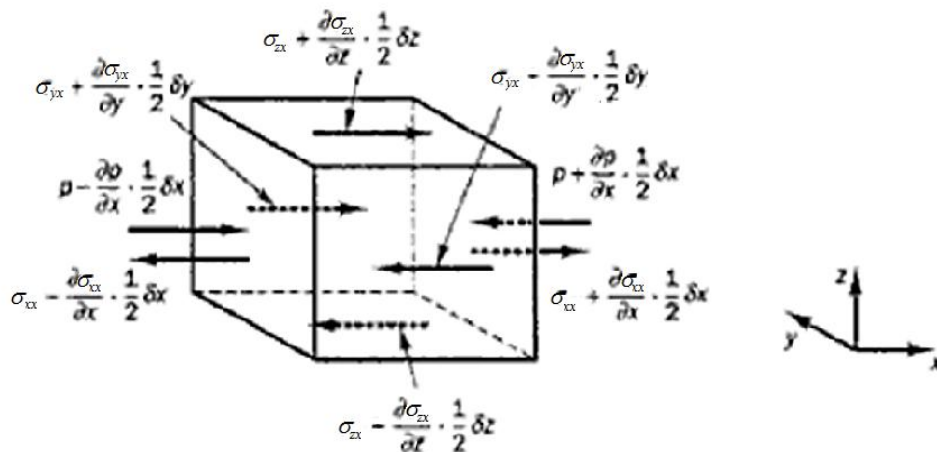
Pre kvapalnú element rozlišujeme dva typy pôsobiacich síl. Prvé sú povrchové (napr. tlakové a viskózne) sily. Druhé sú objemové (napr. odstredivé a Coriolisove) sily.

Napätie na kontrolnom objeme je definované pomocou tlaku a deviatich viskózných napät'ových komponentov. Týchto deväť zložiek tenzoru napätia budeme ďalej značiť ako σ_{ij} . Indexy i a j definujú smer pôsobenia tak ako je to zobrazené na obr. 19.



Obr.19. Zložky tenzoru napätia σ_{ij}

Uvažujme najprv len x-ové zložky hybností a síl, spôsobené tlakom p a zložkami napätia σ_{xx} , σ_{yx} a σ_{zx} . Rozmer sily spôsobenej povrchovým napätím získame s rozmerov plochy a napätí. Sily pôsobiace v smere osí budeme uvažovať ako kladne orientované, naopak sily pôsobiace v protismere osí budú záporne orientované. Celková sila v smere x je sumou všetkých síl pôsobiacich v danom smere na kontrolný objem.



Obr. 20. Zložky celkovej sily pôsobiacej v smere x .

Na stranách W a E teda platí, že celková sila je

$$\begin{aligned}
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
& + \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \quad . \quad (0.44) \\
& = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial (\sigma_{xx} - p)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z
\end{aligned}$$

Na stranách N a S platí, že celková sila je

$$- \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (0.45)$$

Na stranách N a S platí, že celková sila je

$$- \left(\sigma_{zx} - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (0.46)$$

Celková sila ako súčet parciálnych síl pôsobiacich na jednotkový objem, spôsobených povrchovými napätiami, je

$$\frac{\partial (\sigma_{xx} - p)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad (0.47)$$

Keď definujeme S_{Mx} ako zložku objemových síl na jednotku objemu v smere osi x. Pre celkovú silu pôsobiacu na kvapalnú element, v smere osi x, platí rovnosti vzťahov (0.43) a (0.47) a teda aj nasledujúci vzťah

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial (\sigma_{xx} - p)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (0.48)$$

Analogický postup ako pri odvodení celkovej sily, v smere x, môžeme použiť aj v smere y a z. Pre celkovú silu v smere osi y na jednotkový objem teda platí

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{yy} - p)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (0.49)$$

Podobne v smere osi z platí

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{zz} - p)}{\partial z} + S_{Mz} \quad (0.50)$$

3.1.3 Energia toku

Rovnicu popisujúcu energiu v kontrolnom objeme odvodíme z prvého termodynamického zákona. Podobne ako pri predchádzajúcich odvozeniach nás bude zaujímať nárast energie kvapalnej častice na jednotkový objem

$$\rho \frac{DE}{Dt} \quad (0.51)$$

Množstvo práce, vykonanej kvapalnou časticou v kontrolnom objem povrchovými silami, môžeme určiť zo sily a rýchlostnej zložky v smere sily. Pre silu v smere osi x vychádzame zo vzťahov (0.44), (0.45) a (0.46). Práca vykonaná týmito silami je

$$\begin{aligned} & \left[\left(pu - \frac{\partial (pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\sigma_{xx} u - \frac{\partial (\sigma_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ & + \left[- \left(pu + \frac{\partial (pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\sigma_{xx} u + \frac{\partial (\sigma_{xx} u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ & + \left[- \left(\sigma_{yx} u - \frac{\partial (\sigma_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) + \left(\sigma_{yx} u - \frac{\partial (\sigma_{yx} u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \right] \delta x \delta z \\ & + \left[- \left(\sigma_{zx} u - \frac{\partial (\sigma_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) + \left(\sigma_{zx} u - \frac{\partial (\sigma_{zx} u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \right] \delta x \delta y \end{aligned} \quad (0.52)$$

Upravením vzťahu (0.52) si vyjadríme celkovú prácu vykonanú silami v smere osi x vo forme vzťahu

$$\left\{ \frac{\partial [u(\sigma_{xx} - p)]}{\partial x} + \frac{\partial (u\sigma_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\sigma_{zx})}{\partial z} \right\} \delta x \delta y \delta z \quad (0.53)$$

Analogicky môžeme vyjadriť celkové práce konané silami v smere osi y a smere osi z:

$$\left\{ \frac{\partial (v\sigma_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial [v(\sigma_{yy} - p)]}{\partial y} + \frac{\partial (v\sigma_{zy})}{\partial z} \right\} \delta x \delta y \delta z \quad (0.54)$$

$$\left\{ \frac{\partial(w\sigma_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\sigma_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial[w(\sigma_{zz} - p)]}{\partial z} \right\} \delta x \delta y \delta z \quad (0.55)$$

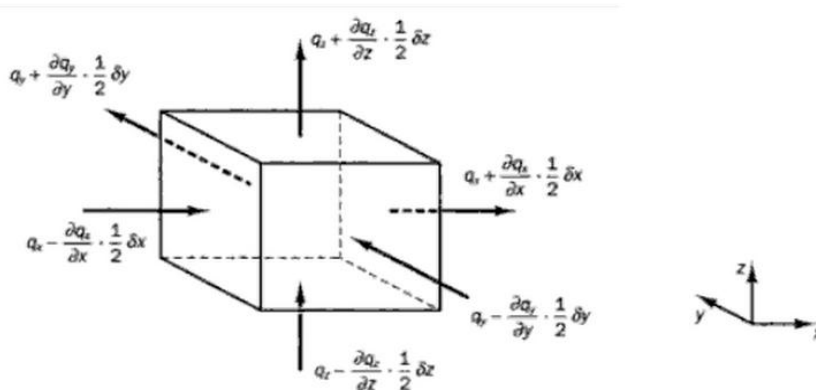
Celková práca, vykonaná v jednotkovom objeme povrchovými silami, je súčtom jednotlivých prác vykonaných povrchovými silami (0.53), (0.54) a (0.55) predelená objemom $\delta x \delta y \delta z$. Členy obsahujúce tlak môžu byť vyňaté a spolu zapísané v úspornejšej forme

$$-\frac{\partial(pu)}{\partial x} - \frac{\partial(pv)}{\partial y} - \frac{\partial(pw)}{\partial z} = -\text{div}(p\mathbf{u}). \quad (0.56)$$

Použitím zápisu (0.56) môžeme vyjadriť celkovú prácu vykonanú v jednotkovom objeme na kontrolný objem spôsobenú povrchovými silami v tvare

$$\begin{aligned} [-\text{div}(p\mathbf{u})] + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\sigma_{xy})}{\partial x} \\ + \frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\sigma_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\sigma_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\sigma_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z} \end{aligned} \quad (0.57)$$

Vektor tepelného toku \mathbf{q} tri zložky q_x , q_y a q_z .



Obr. 21 Tepelný tok

Celkový tepelný prenos na kontrolný objem kvapaliny spôsobený tepelným tokom v smere osi x je definovaný ako rozdiel tepelného vstupu na strane W a tepelného výstupu na strane E kontrolného objemu.

$$\left[\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z. \quad (0.58)$$

Analogicky v smeroch osí y a z je celkový prenos tepla vyjadrený vzťahmi:

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (0.59)$$

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (0.60)$$

Celkové teplo vykonané na kvapalnej častici v jednotkovom objeme, spôsobené tepelným tokom skrz hranice objemu, je dané súčtom

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (0.61)$$

Fourierov zákon tepelnej vodivosti spája tepelný tok s lokálnym teplotným gradientom

$$\mathbf{q} = -k \cdot \operatorname{grad}(T). \quad (0.62)$$

Spojením rovníc (0.61) a (0.62) dostávame vzťah popisujúci celkový nárast tepla na kontrolnom objeme v dôsledku tepelného toku na hraniciach vo forme

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}[k \cdot \operatorname{grad}(T)] \quad (0.63)$$

Celková energia kvapaliny sa skladá z vnútornej (tepelnej) energie i , kinetickej energie $1/2(u^2 + v^2 + w^2)$ a potenciálnej (napr. gravitačnej) energie. Pre správne pochopenie pôsobenia potenciálnej energie v konečnom objeme je nutné predstaviť si, že kontrolný objem v sebe uchováva túto energiu. Podobne ako pri predchádzajúcich vzťahoch, definujeme veličinu zdroj energie S_E na jednotkovom objeme. Zachovanie energie kvapaliny je dané rovnosťou nárastu energie na jednotkový objem častice (0.51) s celkovou prácou vykonanou (0.57), celkovým nárastom tepla a celkovým nárastom energie spôsobeným zdrojmi. Energetická rovnica je

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} = & -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(u\sigma_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_{yy})}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(u\sigma_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial(u\sigma_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_{zz})}{\partial z} + \operatorname{div}[k \cdot \operatorname{grad}(T)] + S_E \end{aligned} \quad (0.64)$$

Bežnejšie sa používa forma rovnice popisujúca len vnútornú energiu. Takúto rovnicu dosiahneme odčítaním kinetickej energie od celkovej (0.64). Predelením vzťahov (0.48)

zložkou rýchlosti u , (0.49) zložkou rýchlosti v a (0.50) zložkou rýchlosti w si pomôžeme jednoduchšie vyjadriť kinetickú energiu. Kinetická energia na jednotku objemu je

$$\begin{aligned} \rho \frac{D \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]}{Dt} = & -\mathbf{u} \cdot \text{grad}(p) + u \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \\ & + v \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M \end{aligned} \quad (0.65)$$

Odčítaním kinetickej energie(0.65) od celkovej (0.64) a zavedením novej veličiny $S_i = S_E - \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M$ dostaneme vzťah popisujúci vnútornú energiu

$$\begin{aligned} \rho \frac{Di}{Dt} = & -p \cdot \text{div}(\mathbf{u}) + \text{div} [k \cdot \text{grad}(T)] + \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zx} \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zy} \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma_{xz} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \end{aligned} \quad (0.66)$$

Pričom pre nestlačiteľné kvapaliny platí zjednodušená verzia vzťahu (0.66), kde $\text{div} \mathbf{u} = 0$ a $i = cT$ (c je merná tepelná kapacita)

$$\begin{aligned} \rho c \frac{DT}{Dt} = & \text{div} [k \cdot \text{grad}(T)] + \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zx} \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zy} \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma_{xz} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \end{aligned} \quad (0.67)$$

3.1.4 Stavová rovnica

Pohyb kvapaliny v troch rozmeroch je popísaný predchádzajúcimi vzťahmi. Neznáme ostávajú štyri termodynamické veličiny: p , ρ , i a T . Pre plnohodnotné vyjadrenie viskoplastického kontinua, v ktorom uvažujeme konanie tepla, je nutné uvážiť vzájomné vzťahy medzi týmito veličinami. Tieto vzťahy získame použitím termodynamickej rovnováhy. Rýchlosť tokov, ktoré nás zaujímajú, je zanedbateľná v porovnaní s rýchlosťami častíc a teda môžeme tvrdiť, že kvapalina sa stále nachádza v stave termodynamickej rovnováhy. Jedinou výnimkou sú toky, v ktorých sa šíria silné nárazové vlny, ale i pri mnohých takých prípadoch sa neuvažuje narušenie termodynamickej rovnováhy. Stav látky môžeme plne popísať pomocou dvoch premenných stavových veličín. Stavová rovnica priradí

hodnoty zvyšných veličín. Ak si ρ a T stanovíme ako premenné veličiny, dostávame stavovú rovnicu pre daný tlak p a vnútornú energiu i

$$p = p(\rho, T) \text{ a } i = i(\rho, T) \quad (0.68)$$

Na vyjadrenie stavovej rovnice kontinua si môžeme pomôcť stavovou rovnicou ideálneho plynu

$$p = \rho RT \text{ a } i = C_v T \quad (0.69)$$

Pre viskoplastické kontinuum, ako sklo, med a ďalšie, sa často neuvažuje stlačiteľnosť kvapaliny. Pre tieto kvapaliny je plne postačujúci popis pomocou rovníc zachovania hmoty a hybností, avšak stavová rovnica je nutná vo všetkých prípadoch, kde uvažujeme konanie tepla. Pri numerickej simulácii výroby sklenených predmetov je teda nevyhnutné tieto vzťahy zohľadniť.

3.2 Aplikácia reologických modelov

V predchádzajúcich rovniciach popisujúcich kontrolný objem vystupujú zatiaľ nedefinované napätia σ_{ij} . Tieto napätia si môžeme odvodiť zo vzťahov pre jednotlivé reologické telesá a vytvoriť tak kontinuum charakterizované konkrétnym reologickým telesom.

V trojrozmernom modeli kvapaliny má deformácia deväť zložiek, pričom v izotropických kvapalinách je šesť zložiek nezávislých. Diagonálne zložky napätia sú:

$$s_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad s_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad s_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (0.70)$$

Šesť zvyšných zložiek má tvar:

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad s_{xz} = s_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad s_{zy} = s_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (0.71)$$

Viskoplastické kontinuum podobne ako pri (0.67) budeme brať za nestlačiteľné

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (0.72)$$

Pre napätia budeme uvažovať viskoplastické reologické vzťahy (0.35) a (0.36):

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} & \sigma_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} & \sigma_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \\
\sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\sigma_{zy} = \sigma_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{0.73}$$

Pričom pre viskozitu η platí vzťah popisujúci plasticitu toku

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_1 & \text{pre } |\sigma| < 2\sigma_0 \\
\eta &= \frac{2\eta_1\eta_2}{\eta_1 + 2\eta_2} & \text{pre } |\sigma| > 2\sigma_0
\end{aligned} \tag{0.74}$$

Viskoplastické napätia sú presne dvojnásobne väčšie než napätia pri lokálnej deformácii, ktorú pre nestlačiteľnosť (0.72) zanedbávame.

Dosadením napät'ových vzťahov (0.73) do rovníc (0.48), (0.49) a (0.55) dostaneme Navier-Stokesove rovnice, pomenované po dvoch významných vedcoch, ktorí ich navzájom nezávisle odvodili:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + S_{Mx} \tag{0.75}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + S_{My} \tag{0.76}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{Mz} \tag{0.77}$$

Predefinovaním S_{Mx}

$$S_{Mx} = S_{Mx} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{0.78}$$

Rovnicu (0.75) si môžeme vyjadriť v užitočnejšej a používanejšej skrátenej forme

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div} \left[\eta \cdot \text{grad} (u) \right] + S_{Mx} \tag{0.79}$$

Predefinovaniami analogickými k (0.78) upravíme rovnice (0.76) a (0.77):

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}[\eta \cdot \text{grad}(v)] + S_{My} \quad (0.80)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}[\eta \cdot \text{grad}(w)] + S_{Mz} \quad (0.81)$$

Pre vnútornú energiu platí vzťah

$$\rho \frac{Di}{Dt} = \text{div}[k \cdot \text{grad}(T)] + \Phi + S_i \quad (0.82)$$

Strata energie je v dôsledku viskoplastických napätí vyjadrená disipačnou funkciou Φ vo forme vzťahu

$$\Phi = \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (0.83)$$

Pričom treba neustále brať do úvahy závislosť viskozity od napätia (0.74), ktorá odlišuje viskoplastický model od Newtonovho modelu viskóznej kvapaliny. Predchádzajúce vzťahy úplne popisujú viskoplastické kontinuum definované nami vybraným reologickým modelom.

4 Záver

Na základe prezentovaných vzťahov a vyjadrení môžeme vytvoriť program na výpočet toku viskoplastickej kvapaliny metódou konečných objemov. Pre kvalitnú simuláciu takýchto tokov sa zväčša požívajú algoritmy SIMPLE a SIMPLER. Tieto algoritmy postupne prebiehajú celým objemom, v ktorom je to simulovaný a prepočítavajú hodnoty veličín popisujúcich ho. Hodnoty pri správnom výpočte začnú konvergovať k hodnotám, ktoré môžeme považovať za konečné. Jednotlivé algoritmy sa líšia dobou výpočtu tokov, presnosťou a vstupnými parametrami. Pri výbere algoritmu a postupu simulácie rozhoduje typ toku, požadovaná presnosť a rýchlosť výpočtu.

V praxi takéto vyjadrenie toku pomáha riešiť napríklad problém tzv. plastického tlaku v potrubiach a nájsť kritické body. Rovnako pomocou vybraného modelu a algoritmu je možné zvýšiť výrobnú efektívnosť a kvalitu výroby napr. sklenených predmetov. Rozhodujúci je vhodný výber reologického modelu pre daný problém. Nami vybraný model sa správa v prvom priblížení veľmi podobne ako Newtonova kvapalina. Je nutné si uvedomiť plasticitu toku. Plastická kvapalina bude disponovať inými pamäťovými vlastnosťami než viskózna.

V práci sa venujeme aj šíreniu energie a toku tepla v kvapaline, čo je kľúčové pre výpočet, pretože viskozita a aj medzné napätie sú závislé od tepla. Nevenujeme sa však ich tepelnej závislosti. Otázka tepelnej závislosti viskozity je špecifická pre každé viskoplastické kontinuum.

Použitá literatura

- [1] **Frank M. W. 1991**, Viscous fluid flow, *McGraw-Hill*, 59-69

- [2] **Moczo P., Kristek J. a Franek P. 2008**, Lecture Notes on Rheological Models, *DAPEM FMPI CU 2006*, 5-8, 14-21

- [3] **Schill F. 1993**, Chlazení skla, *Informatorium*, 51-62

- [4] **Sherman F. S. 1990**, Viscous Flow, *McGraw-Hill*, 1-11

- [5] **Simo J.C. a Hughes T.J.R. 1998**, Computational Inelasticity, *SPRINGER*, 4-6, 8-12

- [6] **Verhas J. 1997**, Thermodynamics and Rheology, *SPRINGER -VERLAG NEW YORK, LLC*, 26-33

- [7] **Versteeg H. K. a Malalasekera W. 2007**, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, second edition, *Pearson Education*, 7-24