

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANOMÁLNE JAVY SILNÝCH
ZEMETRASENÍ

ŠÍRENIE SEIZMICKÝCH VÍLN V POVRCHOVÝCH
ŠTRUKTÚRACH S NÁHODNE PERTURBOVANÝM
ROZLOŽENÍM RÝCHLOSTI

(BAKALÁRSKA PRÁCA)



1160 FYZIKA

KATEDRA ASTRONÓMIE, FYZIKY ZEME A METEOROLÓGIE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

ANOMÁLNE JAVY SILNÝCH ZEMETRASENÍ

ŠÍRENIE SEIZMICKÝCH VLŇN V POVRCHOVÝCH
ŠTRUKTÚRACH S NÁHODNE PERTURBOVANÝM
ROZLOŽENÍM RÝCHLOSTI

(Bakalárska práca)

SVETLANA STRIPAJOVÁ



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Svetlana Stripajová
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Anomálne javy silných zemetrasení

Cieľ: Práca by mala podať stručný prehľad súčasných poznatkov o zásadných typoch anomálnych javov.

Literatúra: Vybrané súčasné časopisecké články v angličtine. <http://www.nuquake.eu>

Anotácia: K najväčším škodám počas stredne silných a silných zemetrasení dochádza v dôsledku lokalizovaného anomálneho seizmického pohybu a v dôsledku vzájomnej rezonancie povrchovej geologickej štruktúry so stavebnou štruktúrou. Anomálny pohyb povrchu Zeme (napr. zrýchlenie až 1.8 g) môže byť výsledkom interakcie seizmických vln a lokálnej povrchovej štruktúry s výrazne frekvenčne selektívnymi prenosovými vlastnosťami. Chápanie týchto fyzikálnych javov je veľmi dôležité nielen pre správnu interpretáciu seizmických meraní (pri výskume zemetrasného zdroja a vnútornej štruktúry Zeme) ale aj pre projektovanie bezpečných stavieb. Pri ňom je dôležitá efektívna metóda charakterizovania záujmovej lokality z hľadiska možnosti anomálneho seizmického pohybu počas zemetrasení. Metóda, ktorá by bola dostatočne seizmologicky presná a prakticky efektívna, nebola dosiaľ nájdená. Práca je vhodná pre záujemcov o fyziku Zeme (najmä seizmológiu) a geohazard. Práca by mala podať stručný prehľad súčasných poznatkov o zásadných typoch anomálnych javov. Možno sa zamerať alebo na ich pozorovania počas zemetrasení alebo na ich experimentálny výskum alebo na ich numerické modelovanie.


Vedúci: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Dátum zadania: 17.05.2011

Dátum schválenia: 20.10.2011

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu


.....
študent


.....
vedúci

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry

.....

Svetlana Stripajová

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať hlavne svojmu školiteľovi prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. za veľkú dávku trpezlivosti, cenné rady, pomoc a vytvorenie tvorivého prostredia. Veľká vďaka patrí doc. Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD. a Mgr. Martinovi Gálisovi, PhD. za pomoc pri programovaní.

Abstrakt

<i>Autor</i>	Svetlana Stripajová
<i>Názov práce</i>	Anomálne javy silných zemetrasení. Šírenie seizmických vln v povrchových štruktúrach s náhodne perturbovaným rozložením rýchlosti
<i>Škola</i>	Univerzita Komenského v Bratislave
<i>Fakulta</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra</i>	Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie
<i>Školiteľ</i>	prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
<i>Miesto</i>	Bratislava
<i>Rok</i>	2012
<i>Rozsah</i>	51 strán
<i>Odborná kval.</i>	bakalár

Abstrakt: Práca je venovaná šíreniu seizmických vln v prostredí s náhodne perturbovaným priestorovým rozložením rýchlosti. Zahnutie perturbácie s relatívne malou hodnotou korelačnej dĺžky (\sim small-scale perturbation) je potrebné vo viacerých problémoch šírenia seizmických vln. V práci je prezentovaná prvá fáza prípravy na numerické modelovanie šírenia seizmických vln v lokálnych povrchových štruktúrach, ktoré sú spravidla zodpovedné za najväčšie škody pri stredne silných až silných zemetraseniach. V úvode sú uvedené vzťahy, definície a pojmy, ktoré sú použité v práci. Ďalej je vysvetlený postup tvorby náhodne perturbovaného prostredia, najskôr pre spojité hodnoty veličín a potom pre diskkrétne hodnoty. Najdôležitejšiu úlohu pri tvorbe náhodne perturbovaného prostredia zohráva autokorelačná funkcia. Pri výpočtoch boli použité tri autokorelačné funkcie. Na výpočet hodnôt náhodne perturbovanej rýchlosti šírenia S-vln bol vytvorený algoritmus, ktorý bol naprogramovaný v jazyku Fortran 95. Perturbované rozloženie rýchlosti je vstupom pre výpočtový program 1DFD_VS, ktorý realizuje konečno-diferenčnú numerickú simuláciu seizmic-

kého pohybu podľa formulácie v rýchlosti a napätí striedavo usporiadanej siete. Ďalej je popísaná realizácia numerických výpočtov pre neperturovaný a perturovaný model jednorozmernej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore. Nakoniec sú porovnané syntetické seizmogramy neperturovaného modelu a perturovaného modelu pre tri autokorelačné funkcie pri troch rôznych štandardných odchýlkach parametra perturbácie.

Kľúčové slová: náhodne perturované prostredie, rozptyl seizmickej vlny, autokorelačná funkcia, numerické simulovanie, syntetické seizmogramy, metóda konečných diferencií

Abstract

<i>Author</i>	Svetlana Stripajová
<i>Title</i>	Anomalous effects of strong earthquakes. Seismic wave propagation in surface structures with randomly perturbed velocity distribution
<i>University</i>	Comenius University in Bratislava
<i>Faculty</i>	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
<i>Department</i>	Department of Astronomy, Physics of the Earth and Meteorology
<i>Supervisor</i>	prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
<i>Place</i>	Bratislava
<i>Year</i>	2012
<i>Pages</i>	51 pages
<i>Degree of qual.</i>	Bachelor

Abstract: The thesis aims to seismic wave propagation in randomly perturbed media. Addition of the perturbation with relatively small-scale values of correlation length (\sim small-scale perturbation) is needed when attempting to explain seismic wave propagation. The thesis outlines the first preparation step in the numerical modelling of seismic wave propagation in local surface structures that are responsible for the biggest damage caused by strong earthquakes. Mathematical formulas, definitions and terms used in the thesis are explained. Process of generation of randomly perturbed media is described for continuous and discrete values. Autocorrelation function is important for generation of randomly perturbed media. Three autocorrelation functions are applied in computations. The algorithm for randomly perturbed S - wave speed was encoded in the Fortran 95 language. The random S-wave speed distribution is an input for the 1DFD_VS program performing finite-difference numerical simulations of the earthquake motion according to the velocity-stress staggered-grid scheme.

Numerical simulations for unperturbed and perturbed model of a one-dimensional homogeneous layer over homogeneous halfspace are described. The synthetic seismograms of the perturbed model were generated for three autocorrelation functions and three different standard deviations of the perturbation. Synthetic seismograms of unperturbed and perturbed model are compared.

Key words: randomly perturbed media, scattering of seismic wave, autocorrelation function, numerical simulations, synthetic seismograms, finite-difference method

Predhovor

Šírenie seizmických vln v zemskom telese, ktoré vznikajú pri zemetrasení, nám umožňuje skúmať vnútornú štruktúru Zeme, procesy v Zemi a v neposlednom rade efekty zemetrasení. Nenahraditeľným nástrojom pri tomto výskume je numerické modelovanie šírenia seizmických vln a seizmického pohybu.

Bežný typ fyzikálneho modelu prostredia, v ktorom sa šíria seizmické vlny závisí od priestorového rozloženia veličín v prostredí ako hustota, rýchlosť šírenia P a S-vln a kvality voľného povrchu. Predstava homogénneho materiálu v rámci vrstvy bloku alebo predstava hladkej nehomogenity v rámci vrstvy je akceptovateľnou aproximáciou pre dostatočne veľké vlnové dĺžky. Ak však musíme v rôznych prostrediach skúmať šírenie seizmických vln kratších vlnových dĺžok alebo seizmický pohyb na vyšších frekvenciách je realistickejšie predpokladať nehomogenity prostredia vo vrstvách, ktoré možno v niektorých prípadoch aproximovať náhodnou perturbáciou hodnôt materiálového parametra.

Práca predstavuje prvú fázu prípravy na numerické modelovanie šírenia seizmických vln a seizmického pohybu v lokálnych povrchových štruktúrach, ktoré sú spravidla zodpovedné za najväčšie škody pri stredne silných a silných zemetraseniach, ktoré postihujú osídlené alebo zastavané oblasti.

Skúsenosti medzinárodného projektu E2VP (Euroseistest Verification and Validation Project) organizovaného CEA (Commissariat à l'énergie atomique, France) ukazujú, že predpoklad homogénneho alebo jednoducho hladko nehomogénneho prostredia vnútri sedimentárnych vrstiev neumožňuje vysvetliť zložitosť časovej závislosti vektora posunutia na povrchu sedimentárnej štruktúry Mygdónskeho bazéna v Grécku, ktorý bol vybraný ako testovacia lokalita.

Ďalší pokrok v priblížení numerického modelovania skutočným záznamom seizmického pohybu na testovacej lokalite pravdepodobne vyžaduje jednak kombináciu pria-

meho modelovania a tzv. adjungovanej tomografie, jednak zahrnutie náhodnej perturbácie prostredia v povrchových sedimentárnych vrstvách.

V tejto práci sa venujeme najjednoduchšej konfigurácii - jednorozmernému prípadu, v ktorom sa prostredie mení len s hĺbkou. Zovšeobecnenie na trojrozmerný prípad však nebude predstavovať zásadný metodický problém.

Naším cieľom je skúmanie seizmického šumu, coda vĺn, rozptylu a útlmu seizmických vĺn. Lepšie porozumenie procesom rozptylu seizmických vĺn môžeme aplikovať v mnohých seizmologických problémoch vrátane popisu malých heterogenít vo vnútri Zeme a určovania mechanizmu seizmického útlmu pri vysokých frekvenciách v Zemi. Budeme postupovať podľa Frankel a Clayton (1984), ktorí navrhli model konštantného prostredia s pridanými náhodnými perturbáciami rýchlosti šírenia seizmických vĺn.

Uvažujeme náhodne perturbované prostredie, ktoré zahŕňa významné časti jeho materiálových vlastností meniacich sa náhodne v priestore. Materiálové vlastnosti prostredia charakterizuje autokorelačná funkcia, s ktorou pri spektrálnej analýze prechádzame do oblasti vlnových čísiel, čím získavame výkonové spektrum autokorelačnej funkcie rovné kvadrátu amplitúdového spektra. Chýba nám však fázová informácia. Fázu, ktorá je funkciou vlnového čísla, vygenerujeme náhodne s rovnomerným rozdelením. Fázové spektrum nenarúša amplitúdové spektrum, lebo má jednotkovú amplitúdu a zabezpečí nám požadovanú náhodnosť. Po prechode späť do oblasti priestorových súradníc dostávame parameter perturbácie, ktorý charakterizuje náhodnú priestorovú perturbáciu materiálového parametra prostredia.

V tejto práci vyšetříme šírenie seizmických vĺn v jednorozmernej náhodne perturbovanej homogénnej vrstve na homogénnom polpriestore použitím numerickej simulácie, aby sme odhadli rozptylové efekty v reálnom vnútri Zeme.

V súčasnosti je dominantnou metódou numerického simulovania seizmického pohybu metóda konečných diferencií. Hlavným dôvodom je jej robustnosť. Metóda je aplikovateľná na komplexný model vnútra Zeme a v rovnakom čase je relatívne presná a výpočtovo efektívna. Ďalej je relatívne jednoduchá a ľahko implementovateľná do počítačových programov. Aplikáciou metódy konečných diferencií vytvoríme kompletne syntetické seizmogramy pre takéto prostredie. Syntetický seizmogram nám dovoľuje posúdiť ako vlastnosti náhodne perturbovaného prostredia ovplyvňujú merateľné veličiny ako amplitúda a spektrum.

Obsah

Predhovor	viii
1 Úvod	1
1.1 Spojité veličiny	1
1.1.1 Fourierova transformácia	2
1.1.2 Vzájomná korelácia. Autokorelačná funkcia. Výkonové spektrum	4
1.2 Diskrétné hodnoty veličín	7
1.2.1 Diskrétna Fourierova transformácia	8
1.2.2 Vzťah Fourierovej transformácie a diskkrétnej Fourierovej trans- formácie.	12
1.2.3 Numerická realizácia diskkrétnej Fourierovej transformácie	14
2 Náhodne perturbované prostredie	17
2.1 Popis náhodne perturbovaného prostredia	17
2.2 Diskrétné hodnoty veličín náhodne perturbovaného prostredia	22
2.2.1 Popis diskrétnych veličín náhodne perturbovaného prostredia . .	23
2.2.2 Metóda konečných diferencií	26
2.3 Program RANDOM_MEDIA	28
3 Výpočtový program 1DFD_VS	32
3.1 Príprava výpočtového modelu	33
3.2 Postup pri výpočte rýchlosti častí daného modelu	34
4 Numerické výpočty	35
4.1 Neperturovaný model	35
4.2 Pertubovaný model	39

5 Výsledky	40
Záver	44
Literatúra	45
Príloha A	47

Zoznam obrázkov

1.1	Grafická interpretácia diskkrétnej Fourierovej transformácie. (Ondráček 2002)	9
1.2	Funkcia opakujúca sa bez prekrývania a s prekrývaním. (Moczo 1988)	13
2.1	Príklad priebehu perturbovanej rýchlosti šírenia S-vln.	22
4.1	Gaborov signál	36
4.2	Syntetický seizmogram neperturovaného modelu.	38
5.1	Syntetické seizmogramy perturbovaného modelu pre hodnoty štandardnej odchýlky $\mu_c = 10 \%$, 5% , 1% a neperturovaného modelu pre $\mu_c = 0 \%$ pri výpočte s exponenciálnou autokorelačnou funkciou. . . .	41
5.2	Syntetické seizmogramy perturbovaného modelu pre hodnoty štandardnej odchýlky $\mu_c = 10 \%$, 5% , 1% a neperturovaného modelu pre $\mu_c = 0 \%$ pri výpočte s Gaussovou autokorelačnou funkciou.	42
5.3	Syntetické seizmogramy perturbovaného modelu pre hodnoty štandardnej odchýlky $\mu_c = 10 \%$, 5% , 1% a neperturovaného modelu pre $\mu_c = 0 \%$ pri výpočte s von-Kármánovou autokorelačnou funkciou. . . .	43

Zoznam tabuliek

1.1	Veličiny v časovo–frekvenčnej reprezentácii a v reprezentácii priestorových súradníc a vlnových čísiel.	14
2.1	Autokorelačné funkcie a ich výkonové spektrum. (Frankel a Clayton 1986)	21
2.2	Diskrétné výkonové spektrum $S_k^{\mu\mu}$	26

Kapitola 1

Úvod

V úvode uvedieme vzťahy, definície a pojmy, ktoré budú ďalej používané v texte. Budeme manipulovať s náhodnými veličinami, preto si uvedieme matematický aparát používaný pri štatistickom popise náhodných veličín a to ako pre spojité veličiny tak pre diskkrétne hodnoty veličín. Ďalej to bude Fourierova transformácia, vzájomná korelácia, autokorelačná funkcia a výkonové spektrum. Napokon diskrétna Fourierova transformácia a jej numerická realizácia. Pri spracovaní textu sme použili túto literatúru: Červený (1977), Červený (1983), Ondráček (2002), Arfken et al. (2005).

1.1 Spojité veličiny

Uvažujme náhodnú funkciu $\mu(z)$, ktorá je funkciou jednej priestorovej premennej, hĺbky z .

Stredná hodnota funkcie $\mu(z)$ jednej spojitaj premennej z sa označuje $\langle \mu(z) \rangle$ a je definovaná vzťahom

$$\langle \mu(z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) p(z) dz, \quad (1.1)$$

kde $p(z)$ je hustota pravdepodobnosti, pre ktorú platí normalizačná podmienka

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1. \quad (1.2)$$

Pre varianciu (disperziu) náhodnej funkcie $\mu(z)$ platí

$$\langle (\mu(z) - \langle \mu(z) \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu(z) - \langle \mu(z) \rangle)^2 p(z) dz. \quad (1.3)$$

Štandardná odchýlka $\mu(z)$ je kladnou odmocninou variancie. Budeme ju označovať symbolom μ_c .

1.1.1 Fourierova transformácia

Pri analýze signálu je často potrebné pracovať vo frekvenčnej oblasti. Signál možno z časovej oblasti transformovať do frekvenčnej oblasti pomocou Fourierovej transformácie.

Nech funkcia $x(t)$ je absolútne integrovateľnou funkciou času (vo všeobecnosti môže byť komplexná), t.j. nech existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \leq Q; \quad Q < \infty, \quad (1.4)$$

kde Q je reálna konštanta. Zo vzťahu (1.4) vyplýva

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0. \quad (1.5)$$

Inými slovami, nech $x(t)$ je efektívne nenulová len na konečnom intervale. Ďalej, nech $x(t)$ a jej derivácia sú po častiach spojité na intervale $(-\infty, \infty)$. Potom môžeme dokázať, že platí Fourierov integrál

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau, \quad (1.6)$$

kde ω je uhlová frekvencia. V bodoch nespojitosti bude na ľavej strane

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [x(t + \varepsilon) + x(t - \varepsilon)]. \quad (1.7)$$

Vložením

$$\cos \omega(\tau - t) = \frac{e^{i\omega(\tau-t)} + e^{-i\omega(\tau-t)}}{2} \quad (1.8)$$

do vzťahu (1.6) dostávame

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i\omega(\tau-t)} d\tau + \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega(\tau-t)} d\tau \right]. \quad (1.9)$$

Substitúciou $-\omega$ za ω v druhom integrále predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i\omega(\tau-t)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Fourierova transformácia je definovaná vzťahom

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.11)$$

a inverzná Fourierova transformácia vzťahom

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.12)$$

Integrál (1.12) vyjadruje rozklad neperiodickej a absolútne integrovateľnej funkcie $x(t)$ na funkcie harmonické. Amplitúda každej harmonickej zložky s frekvenciou ω je $S(\omega) d\omega$, časový faktor je $e^{-i\omega t}$. Výpočtom $S(\omega)$ možno zistiť spektrálny obsah funkcie. V praxi sa častejšie používa namiesto uhlovej frekvencie ω frekvencia f , pričom $\omega = 2\pi f$. Ak označíme $X(f) = S(2\pi f)$, vzťahy (1.11) a (1.12) môžeme prepísať

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi f t} dt \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi f t} df. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Podľa Arfken et al. (2005) Fourierova transformácia definovaná vzťahmi (1.13) sprostredkúva vzťah medzi reprezentáciou danej veličiny v časovej a frekvenčnej oblasti. Fourierovu transformáciu možno definovať aj vo vzťahu k priestorovej súradnici z a vl-

novému číslu κ .

$$M(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) e^{i\kappa z} dz, \quad (1.14)$$

$$\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\kappa) e^{-i\kappa z} d\kappa. \quad (1.15)$$

Dokážeme to priamo substituovaním ľavej strany jednej rovnice do integrandu druhej rovnice a použitím jednorozmernej Diracovej delta funkcie

$$\delta(\zeta - z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa(\zeta - z)} d\kappa, \quad (1.16)$$

nasledovne:

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) e^{i\kappa\zeta} d\zeta \right] e^{-i\kappa z} d\kappa = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa(\zeta - z)} d\kappa \right] d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \delta(\zeta - z) d\zeta = \mu(z). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Vzťah (1.14) môže byť interpretovaný ako zastúpenie jednotlivých vlnových čísel funkcie $\mu(z)$. Vo vzťahu (1.15) $M(\kappa) d\kappa$ je amplitúdou každej harmonickej zložky funkcie $\mu(z)$ a $e^{i\kappa z}$ je faktor priestorovej súradnice.

1.1.2 Vzájomná korelácia. Autokorelačná funkcia. Výkonové spektrum

Pri spracovaní geofyzikálnych dát majú zásadný význam vzájomná korelácia dvoch funkcií, autokorelačná funkcia a ich spektrá. Veľký význam má autokorelačná funkcia a jej spektrum. Ako bude ukázané ďalej, ak má funkcia $\mu(z)$ spektrum $M(\kappa)$, autokorelačná funkcia $\mu(z)$ má spektrum $|M(\kappa)|^2$, ktoré sa nazýva výkonovým spektrom funkcie $\mu(z)$. Dôležitosť výkonového spektra je rovnako veľká ako samotného amplitú-

dového spektra, v niektorých prípadoch ešte väčšia. Budeme predpokladať, že funkcia $\mu(z)$ je reálna, keďže v prevažnej väčšine geofyzikálnych aplikácií je funkcia $\mu(z)$ skutočne reálna.

Vzájomná korelácia. Funkciu $B^{\mu\xi}(l)$, danú vzorcom

$$B^{\mu\xi}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \xi(z+l) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z-l) \xi(z) dz, \quad (1.18)$$

nazveme vzájomnou koreláciou funkcií $\mu(z)$ a $\xi(z)$, pričom l udáva priestorový posun. Podobne definujeme aj $B^{\xi\mu}(l)$,

$$B^{\xi\mu}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(z) \mu(z+l) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(z-l) \mu(z) dz. \quad (1.19)$$

mathnormal korelácia má priamy fyzikálny význam - charakterizuje mieru podobnosti či nezávislosti funkcií $\mu(z)$ a $\xi(z)$ v závislosti od posunu l . Ak je vzájomná korelácia dvoch funkcií identicky rovná nule pre všetky l , potom hovoríme, že obe funkcie sú nekorelované. Vzájomné korelácie $B^{\mu\xi}(l)$ a $B^{\xi\mu}(l)$ nie sú nezávislé, sú navzájom viazané jednoduchým vzťahom

$$B^{\mu\xi}(l) = B^{\xi\mu}(-l). \quad (1.20)$$

Autokorelačná funkcia. Vzájomnou koreláciou dvoch funkcií, ktoré sú identicky rovné, napríklad $\mu(z)$ a $\mu(z)$. Podľa vzorca (1.18) resp. (1.19) dostaneme

$$B^{\mu\mu}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z+l) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z-l) \mu(z) dz. \quad (1.21)$$

Funkcia $B^{\mu\mu}(l)$ daná vzorcom (1.21) sa nazýva autokorelačnou funkciou, prípadne autokoreláciou $\mu(z)$. Zo vzťahu (1.21) vyplýva, že autokorelačná funkcia je párna funkcia $B^{\mu\mu}(l) = B^{\mu\mu}(-l)$.

Vieme zistiť, že

$$B^{\mu\mu}(0) \geq |B^{\mu\mu}(l)|, \quad (1.22)$$

z čoho vyplýva, že autokorelačná funkcia má svoje maximum v $l = 0$.

Vieme, že platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mu(z) \pm \mu(z+l)]^2 dz > 0 \quad \text{pre } l \neq 0. \quad (1.23)$$

Z toho, umocnením, vyplýva

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2(z) &> - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z+l) dz, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2(z) &> \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z+l) dz. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Vzhľadom k tomu, že

$$B^{\mu\mu}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2(z), \quad (1.25)$$

zo vzťahu (1.24) vyplýva nerovnosť (1.22).

Pri Fourierovej transformácii autokorelačnej funkcie sa znehodnocuje fázová informácia, výsledkom je iba výkonové spektrum a preto je to nevratná operácia.

S autokorelačnou funkciou úzko súvisí korelačná dĺžka. Korelačná dĺžka je vzdialenosť od daného bodu, za ktorou už hodnota parametra nie je korelovaná s hodnotou parametra v danom bode. Hodnoty parametra za touto vzdialenosťou považujeme za náhodné vzhľadom k hodnote v danom bode. Budeme ju označovať symbolom a .

Výkonové spektrum. Fourierovou transformáciou zistíme spektrum autokorelačnej funkcie $\mu(z)$, ktoré označíme $S^{\mu\mu}(\kappa)$ a platí

$$\begin{aligned} S^{\mu\mu}(\kappa) &= \mathcal{F} \{ B^{\mu\mu}(l) \} = \int_{-\infty}^{\infty} B^{\mu\mu}(l) e^{i\kappa l} dl = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z+l) dz \right] e^{i\kappa l} dl = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(z+l) e^{i\kappa l} dl \right] dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) e^{i\kappa z} M(-\kappa) dz = M(\kappa) M(-\kappa). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Keďže predpokladáme, že $\mu(z)$ je reálne dostávame

$$S^{\mu\mu}(\kappa) = \mathcal{F} \{ B^{\mu\mu}(l) \} = M(\kappa) M^*(\kappa) = |M(\kappa)|^2, \quad (1.27)$$

kde $M(\kappa)$ je amplitúdové spektrum. $M^*(\kappa)$ je komplexne združené k $M(\kappa)$.

Spektrum $S^{\mu\mu}(\kappa)$ dané vzťahom (1.27) sa nazýva výkonovým spektrom funkcie $\mu(z)$. Výkonové spektrum teda dostaneme ako kvadrát modulu amplitúdového spektra. Význam výkonového spektra spočíva v tom, že je spektrom autokorelačnej funkcie, nie v tom, že je kvadrátom amplitúdového spektra. V mnohých aplikáciách, najmä v prípade funkcií zaťažených šumom, je výhodnejšie určiť najskôr autokorelačnú funkciu a potom ju podrobiť spektrálnej analýze. Preto ako bezprostredný výsledok spektrálnej analýzy dostávame výkonové spektrum, nie amplitúdové spektrum. Výkonové spektrum má tendenciu zdôrazňovať najmä oblasti maximálnych hodnôt $|M(\kappa)|$ a potlačovať a vyhladzovať oblasti, kde je $|M(\kappa)|$ malé. Výkonové spektrum nám teda dáva ešte lepšiu možnosť než amplitúdové spektrum zistiť prevládajúce vlnové dĺžky.

1.2 Diskrétne hodnoty veličín

Pri spracovaní signálu sa v mnohých prípadoch stretávame s funkciami, ktoré nie sú spojité, ale nadobúdajú diskrétne hodnoty. Preto predchádzajúce vzťahy definujeme aj pre diskrétne hodnoty veličín.

Uvažujme N sieťových bodov s indexmi $0, 1, \dots, N-1$ ekvidistantne rozložených pozdĺž osi z . Pre strednú hodnotu postupnosti μ_n platí

$$\langle \mu_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n. \quad (1.28)$$

Pre variancia μ_n platí

$$\langle (\mu_n - \langle \mu_n \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\mu_n - \langle \mu_n \rangle)^2. \quad (1.29)$$

Diskrétna autokorelačná funkcia postupnosti μ_n je definovaná vzťahom

$$B_l^{\mu\mu} = \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n \mu_{n+l}. \quad (1.30)$$

Pri korelačnej sumácii robíme tri matematické operácie - posunutie, násobenie a súčet.

1.2.1 Diskrétne Fourierova transformácia

Diskrétne Fourierovu transformáciu odvodíme v časovo - frekvenčnej reprezentácii, ktorá je analógiou k reprezentácii priestorových súradníc a vlnových čísiel.

Podľa Ondráček (2002) funkcia $s(t)$, ktorej spektrum máme zisťovať, nie je zadaná spojitě, ale ako postupnosť hodnôt, ktoré zodpovedajú presne známym bodom, čiže je digitalizovaná. Digitalizačný krok Δt , nazývaný tiež vzorkovací krok resp. vzorkovací interval je väčšinou konštantný. Vzorky $s_{n\Delta t}$, získavame napr. meraním v diskretných bodoch $t = n \Delta t$ na nejakom konečnom časovom intervale T .

V prípadoch, keď je priebeh signálu $s(t)$ daný konečnou diskretnou postupnosťou hodnôt $s_{n\Delta t}$, na výpočet spektra použijeme diskretnú Fourierovu transformáciu. Diskrétne Fourierova transformácia nám umožňuje vypočítať z daných vzoriek konečného intervalu vzorky spektra a opačne z daných vzoriek spektra vypočítať hodnoty vzoriek v časovej oblasti. Keď chceme vyjadriť vzorky v časovej aj vo frekvenčnej oblasti diskretnými hodnotami, musíme sledovanú funkciu v časovej oblasti uvažovať ako periodickú vzorkovanú funkciu. Vzťahy pre diskretnú Fourierovu transformáciu odvodíme využitím vlastností vzorkovacej funkcie $\delta_{\Delta t}(t)$. Podrobný postup vzorkovania funkcie je uvedený v Ondráček (2002).

Uvažujeme spojitý časový signál $s(t)$, ktorého celková doba trvania je T (Obr.1.1a). Predpokladáme, že jeho modulové spektrum $S(\omega)$ je frekvenčne zhora ohraničené medznou uhlovou frekvenciou ω_m . Spojitý priebeh funkcie $s(t)$ nahradíme postupnosťou vzoriek $s_n = s_{n\Delta t}$ v diskretných periodických bodoch $t_n = n \Delta t$, kde Δt je perióda vzorkovania (Obr.1.1b). Celkový počet vzoriek v intervale T bude N

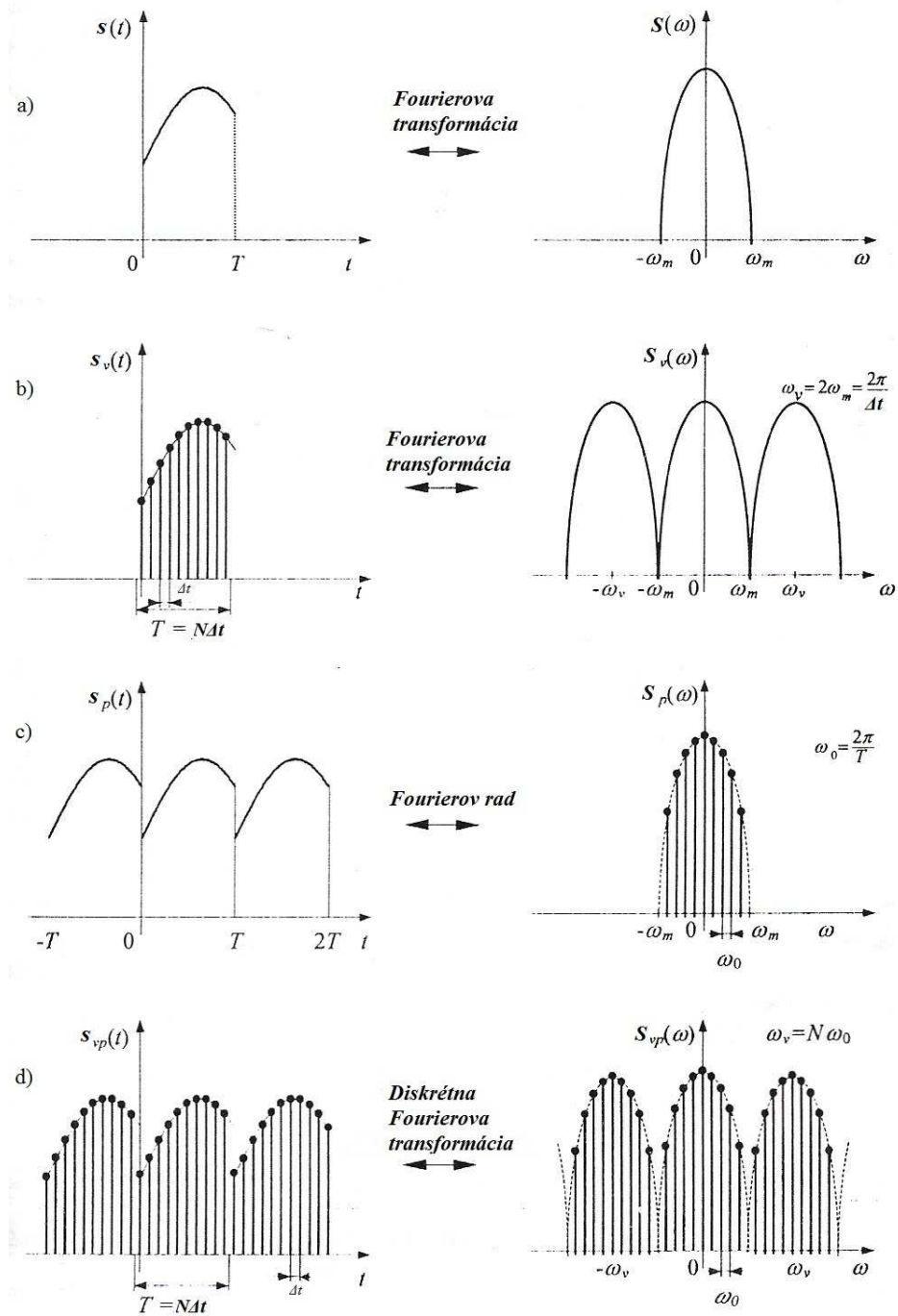
$$T = N \Delta t. \quad (1.31)$$

Postupnosť s_n obsahuje N vzoriek $s_{n\Delta t}$ pre $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Spektrum vzorkovaného signálu je znázornené na Obr.1.1b, kde

$$\omega_v = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (1.32)$$

je uhlovou frekvenciou vzorkovania.



Obr. 1.1: Grafická interpretácia diskretnej Fourierovej transformácie. (Ondráček 2002)

Z uvažovaného spojitého priebehu $s(t)$ s konečným časom trvania T vytvoríme periodický priebeh $s_p(t)$ s periódou $T = N \Delta t$ (Obr.1.1c). Spektrum $S_p(\omega)$ bude diskrétné a jeho obálkou bude spojité spektrum $S(\omega)$ pričom

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.33}$$

Uvažujme teraz postupnosť vzoriek priebehu $s_p(t)$. Dostaneme vzorkovaný periodický priebeh $s_{vp}(t)$, ktorého spektrum $S_{vp}(\omega)$ bude periodické s periódou zodpovedajúcou frekvencii vzorkovania ω_v (1.32) a s diskretnými frekvenciami $n\omega_0$ (Obr.1.1d). Vzorky časového priebehu $s_{vp}(t)$ majú periódu $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, z čoho vyplýva

$$\omega_v = N\omega_0. \quad (1.34)$$

Vzorkovaný priebeh $s_{vp}(t)$ reprezentuje postupnosť vzoriek periodického priebehu $s_p(t)$ pre $t = n\Delta t$. Diskrétno periodické spektrum $S_{vp}(k\omega_0)$ je dané diskretnými hodnotami spektra $S_v(\omega)$ na kruhových frekvenciách $k\omega_0$. Pre jednotkový (normovaný) interval vzorkovania $\Delta t = 1$ podľa vzťahu (1.31) platí

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{2\pi}{N}. \quad (1.35)$$

Nech je postupnosť N komplexných veličín s_n . Tejto postupnosti môžeme priradiť inú postupnosť komplexných hodnôt S_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) nasledujúcim spôsobom

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{i\frac{2\pi kn}{N}}. \quad (1.36)$$

Uvedené priradenie sa nazýva diskretnou Fourierovou transformáciou postupnosti s_n . Veličiny S_k sa nazývajú koeficienty diskretnej Fourierovej transformácie postupnosti s_n . Uvedená transformácia priraďuje N hodnotám s_n N hodnôt S_k . Vyjadrenie pre veličiny s_n pomocou S_k nájdeme jednoducho tak, že inverzný vzťah má nasledujúci tvar

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}. \quad (1.37)$$

Priradenie (1.37) sa nazýva inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou.

Pôvodná postupnosť s_n je vytvorená ako superpozícia diskretných harmonických postupností $e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$. Zložky spektra S_k udávajú váhy, s ktorými sa jednotlivé harmonické zložky s frekvenciami $k\omega_0$ uplatňujú v pôvodnom signáli. Uhlová frekvencia ω_0 prvej harmonické zložky S_k je daná šírkou intervalu T , v ktorom signál spracovávame. Uhlová frekvencia najvyššej harmonickej zložky $\omega_v = N\omega_0$ je daná frekvenciou vzorkovania $\omega_v = \frac{2\pi}{\Delta t}$. Podľa vzťahov (1.36) a (1.37) je spektrum N vzoriek s_n , vyskytujú-

cich sa v periodických okamihoch $n \Delta t$, vyjadrené N spektrálnymi čiarami S_k , ktorých vzdialenosti $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ sú dané periódou časovej postupnosti vzoriek.

Priamym dôsledkom vzorcov (1.36) a (1.37) je, že postupnosti s_n a S_k , definované ich transformačnými vzťahmi, sú periodické s periódou N , t.j.

$$s_{n+qN} = s_n, \quad S_{k+qN} = S_k, \quad (1.38)$$

kde $q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Vzorce (1.38) nám teda umožňujú dedefinovať formálne hodnoty s_n a S_k pre ľubovoľné hodnoty n, k , kde n a k sú prirodzené čísla. Z periodicity vyplýva, že diskretný Fourierov pár (1.36), (1.37) dáva pre indexy menšie ako 0 alebo väčšie ako N len formálne periodické opakovanie hodnôt s_n a S_k . V dôsledku periodicity tiež platí

$$s_n = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} S_k e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad (1.39)$$

čo však znamená, že s_n je určená len koeficientami S_k pre

$$|k| \leq \frac{N}{2}. \quad (1.40)$$

Ak sú s_n komplexné, potom aj S_k sú vo všeobecnosti komplexné. Ak sú s_n reálne, potom platí

$$S_{-k} = S_k^*. \quad (1.41)$$

Z tohto a z periodicity S_k vyplýva

$$S_{\frac{N}{2}+r} = S_{\frac{N}{2}-r}^*; \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2}. \quad (1.42)$$

To znamená, že v prípade reálnych s_n je schéma koeficientov S_k napríklad pre $N = 8$ nasledovná:

$$S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_3^*, S_2^*, S_1^*. \quad (1.43)$$

$$(4 = 8/2)$$

1.2.2 Vzťah Fourierovej transformácie a diskkrétnej Fourierovej transformácie.

Uvedieme opäť Fourierov pár (1.13):

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi ft} dt, \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi ft} df. \end{aligned}$$

Nech $s(t)$ je funkciou, ktorá vznikne periodickým opakovaním $x(t)$ s periódou $T = N \Delta t$. $x(t)$ diskretizujeme so vzorkovacím krokom Δt (prvá vzorka v časovej nule) a diskkrétne hodnoty označíme s_n

$$s_n = \frac{1}{T} s(n \Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n \Delta t + qT). \quad (1.44)$$

Podobne

$$S_k = S(k \Delta f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(k \Delta f + qF), \quad (1.45)$$

kde Δf je vzorkovací krok a $F = N \Delta f$. Potom pre s_n a S_k definované vzťahmi (1.44) a (1.45) platia vzťahy (1.36) a (1.37):

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, \\ s_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \end{aligned}$$

čo je diskrétny Fourierov pár. Potom platí:

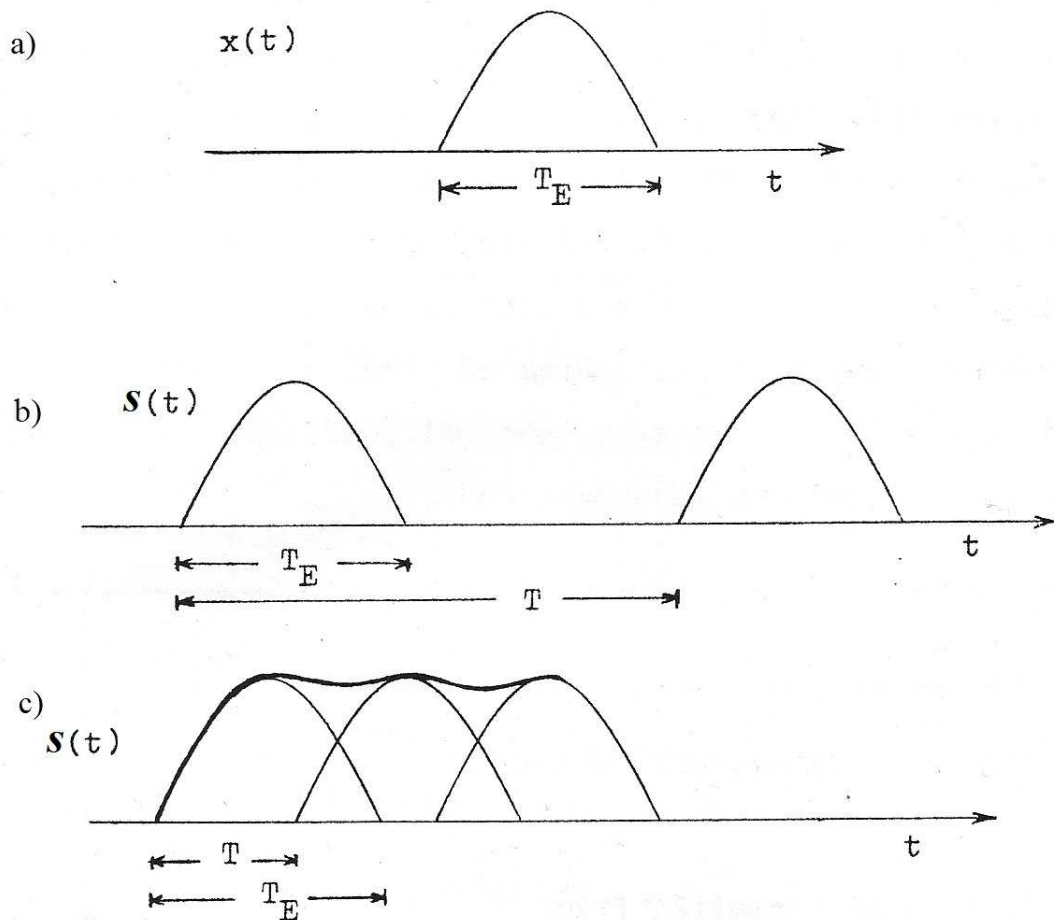
$$T = N \Delta t, \quad F = N \Delta f, \quad \Delta t = \frac{1}{F}, \quad \Delta f = \frac{1}{T}, \quad FT = N. \quad (1.46)$$

Teraz možno vidieť, čo znamená podmienka (1.40) vo frekvenčnej oblasti

$$|k \Delta f| \leq \frac{1}{2} N \Delta f = \frac{1}{2} F = \frac{1}{2 \Delta t} = f_m, \quad (1.47)$$

kde f_m je tzv. Nyquistova frekvencia. Zo vzťahu (1.47) vyplýva, že pre daný vzorkovací krok Δt vieme zistiť hodnoty spektra len pre frekvencie menšie alebo rovné Nyquistovej frekvencii. V schéme koeficientov (1.44) prvý koeficient zodpovedá frekvencii $f = 0$ a koeficient s indexom $\frac{N}{2}$, Nyquistovej frekvencii f_m , ostatné sú rozdelené krokom Δf .

Podľa Moczo (1988) v praktických výpočtoch je teda zásadná voľba N a Δt alebo Δf ; hodnoty T , F , a f_m sú tým podľa predchádzajúcich dvoch vzťahov určené.



Obr. 1.2: Funkcia opakujúca sa bez prekryvania a s prekryvaním. (Moczo 1988)

Voľba N . Algoritmus rýchlej Fourierovej transformácie je zostavený tak, že treba voľiť N ako mocninu 2.

Voľba Δt . Aby sme zistili aj najvyššie frekvencie prítomné v časovej funkcii $x(t)$, treba voľiť Δt tak, aby najmenšiu periódu diskretizovali aspoň v desiatich bodoch. Voľba Δt znamená, podľa (1.47), že v spektre nezistíme frekvencie vyššie ako Nyquistova frekvencia.

K veličine T . Uvažujme časovú funkciu $x(t)$, ktorá je efektívne nenulová na intervale T_E (Obr.1.2a). Ak je $T \geq T_E$, $x(t)$ sa opakuje bez prekryvania (Obr.1.2b) a v definičnom intervale $x(t)$ platí $s(t) = x(t)$. Ak je $T < T_E$, nastáva prekryvanie (\sim aliasing) ako môžeme vidieť na Obr.1.2c a z $s(t)$ teda nemôžeme zistiť pri výpočte inverznej diskkrétnej Fourierovej transformácie hodnoty $x(t)$.

K veličine F a f_m . Podľa (1.47) je $f_m = \frac{1}{2} F$. Nech je spektrum $X(f)$ efektívne nenulové len v intervale $\langle -F_E, F_E \rangle$. Ak je $f_m \geq F_E$, $X(f)$ sa opakuje bez prekryvania a pre $f \in \langle 0, f_m \rangle$ platí $X(f) = T S(f)$. Ak je $f_m < F_E$, nastáva prekryvanie, platí len vzťah (1.45) a z $S(f)$ teda nemožno zistiť pri výpočte diskkrétnej Fourierovej transformácie hodnoty $X(f)$.

Nakoniec si uvedieme k časovo–frekvenčnej reprezentácii analogické vyjadrenie niektorých veličín pre reprezentáciu v priestorových súradniciach a vlnových číslach

čas	poloha	frekvencia	vlnové číslo
t	z	ω	κ
Δt	Δz	Δf	$\frac{\Delta \kappa}{2\pi}$
$N \Delta t$	$N \Delta z$	$f_m = \frac{1}{2\Delta t}$	$\kappa_m = \frac{\pi}{\Delta z}$

Tabuľka 1.1: Veličiny v časovo–frekvenčnej reprezentácii a v reprezentácii priestorových súradníc a vlnových čísiel.

Zo vzťahov (1.46) potom vyplýva, že $\Delta \kappa = \frac{2\pi}{N \Delta z}$. κ_m je Nyquistovo vlnové číslo.

1.2.3 Numerická realizácia diskkrétnej Fourierovej transformácie

Výpočet postupnosti koeficientov diskkrétnej Fourierovej transformácie S_k pomocou vzťahu (1.36) je možné urobiť pomocou algoritmu, ktorý vo všeobecnosti nazývame rýchlou Fourierovou transformáciou. Obdobný algoritmus je možné použiť aj pri numerickej realizácii inverznej diskkrétnej Fourierovej transformácii.

Rýchla Fourierova transformácia. Podľa Ondráček (2002) nevýhodou diskkrétnej Fourierovej transformácie je zdĺhavosť výpočtu spektra. Na výpočet diskkrétnej Fourierovej transformácie je potrebný veľký počet násobení a sčítaní. Napríklad pre 8-bodovú

diskrétnu Fourierovu transformáciu podľa vzťahu (1.36) platí

$$S_k = \sum_{n=0}^7 s_n e^{-i \frac{2\pi k n}{N}} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, 7 \quad (1.48)$$

Rozvinutím predchádzajúceho vzťahu dostaneme

$$\begin{aligned} S_k = & s_0 e^{-i0} + s_1 e^{-i \frac{2\pi}{N} k} + s_2 e^{-i \frac{2\pi}{N} 2k} + s_3 e^{-i \frac{2\pi}{N} 3k} + s_4 e^{-i \frac{2\pi}{N} 4k} + \\ & + s_5 e^{-i \frac{2\pi}{N} 5k} + s_6 e^{-i \frac{2\pi}{N} 6k} + s_7 e^{-i \frac{2\pi}{N} 7k} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, 7. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Rovnica (1.49) má na pravej strane osem výrazov. Každý z týchto výrazov sa skladá z násobenia komplexnej exponenciálnej časti a časti, ktorá je reálna, imaginárna alebo komplexná a predchádzajúce súčiny sú spolu sčítané. Na výpočet pre jedno k to predstavuje osem komplexných násobení a sedem komplexných súčtov. Pre N -bodovú diskretnú Fourierovu transformáciu to bude N , násobení resp. $N - 1$ súčtov. Pre osem harmonických zložiek bude výpočet realizovaný pre $k = 0, 1, \dots, 7$. Teda výpočet 8-bodovej diskretnéj transformácie vyžaduje $8 \times 8 = 64$ komplexných násobení a $8 \times 7 = 56$ komplexných sčítaní. Pre N -bodovú diskretnú Fourierovu transformáciu to predstavuje N^2 násobení a $N(N - 1)$ súčtov. Z toho vyplýva, že ak máme k dispozícii $N = 1024$ diskretných vzoriek signálu, potom pre klasický výpočet diskretnéj Fourierovej transformácie potrebujeme okolo jedného milióna komplexných operácií. Nájdenie rýchleho algoritmu pre tento výpočet bolo zásadným vývojovým skokom, ktorý podstatne znížil prácnosť výpočtu diskretnéj Fourierovej transformácie, známy pod názvom rýchla Fourierova transformácia. Dnes poznáme celý rad modifikácií tohto algoritmu so spoločnou charakteristikou v podstatnom znížení počtu matematických operácií a tým sa znížil aj čas výpočtu. Najrozšírenejším algoritmom rýchlej Fourierovej transformácie je algoritmus pre N , ktoré sa rovná celočíselnej mocnine dvoch, t. j. $N = 2^{(KN)}$. Pomocou tohto algoritmu možno znížiť počet požadovaných operácií pri výpočte rýchlou Fourierovou transformáciou

- komplexné násobenia $0,5 N \log_2 N = 0,5 N (KN)$
- komplexné súčty $N \log_2 N = N (KN)$

Pre $N = 2^{10} = 1024$ diskretných vzoriek signálu pri použití rýchlej Fourierovej transformácie je potrebných približne 10 240 matematických operácií, čo je vzhľadom na kla-

sický výpočet diskretnou Fourierovou transformáciou približne 100-krát menej. Myšlienka rýchlej Fourierovej transformácie spočíva v tom, že postupnosť vzoriek rozdelíme na dve časti a určíme k nim diskretnú Fourierovu transformáciu. Potrebujeme $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ súčínov pre jednu časť, t. j. celkom $\frac{N^2}{2}$ súčínov, čo je približne polovica pôvodného počtu. Tento postup sa niekoľkokrát opakuje. Podrobnejší popis algoritmu rýchlej Fourierovej transformácie je uvedený v Ondráček (2002).

Podprogram FCOOLR Podprogram **FCOOLR** je jedným s programov, ktorý realizuje algoritmus rýchlej Fourierovej transformácie. V hlavnom programe sa volá príkazom `CALL FCOOLR (KN,S,SN)`. V prípade, že počet hodnôt, ktoré chceme transformovať je N , potom $N = 2^{KN}$, kde $3 \leq KN \leq 15$ S je komplexné pole s dimenziou N a SN je znamienko priamej (+1) resp. inverznej diskretnéj Fourierovej transformácie (-1). Pri výpočte diskretnéj Fourierovej transformácie je v S uložené pole hodnôt v reprezentácii priestorovej súradnice, pri inverznej diskretnéj Fourierovej transformácii S predstavuje spektrum. Po inverznej diskretnéj Fourierovej transformácii hodnoty musíme predeliť dimenziou poľa N , aby bol splnený vzťah (1.37). SP v programe označuje single precision, čo znamená presnosť výpočtu na 7 desatinných miest.

Kapitola 2

Náhodne perturbované prostredie

Heterogenity vo vnútri Zeme sú jednou z príčin rozptylu seizmických vln. V tomto prípade sa pojem rozptyl vzťahuje na interakciu seizmických vln s priestorovými perturbáciami materiálových vlastností prostredia. Jednou z možností, ako popísať perturbované prostredie je skúmať ho ako náhodne perturbované prostredie prostredníctvom jeho parametrov ako rýchlosť šírenia P a S-vln alebo hustota prostredia. V mnohých prácach sa uvádza termín náhodné prostredie (\sim random media), avšak pre nás bude lepšie uvádzať ho ako náhodne perturbované prostredie (\sim randomly perturbed media), lebo máme perturbované prostredie a to je perturbované náhodne.

2.1 Popis náhodne perturbovaného prostredia

Uvažujme homogénny polpriestor, ktorého parametrom je rýchlosť šírenia S-vln $v(z)$. Rýchlosť $v(z)$ je daná súčtom strednej rýchlosti v_{str} a jej perturbácie,

$$v(z) = v_{str} (1 + \mu(z)), \quad (2.1)$$

kde $\mu(z)$ je parameter perturbácie (fluktuácia strednej rýchlosti).

Parameter perturbácie $\mu(z)$ vieme charakterizovať pomocou autokorelačnej funkcie, ktorá je daná vzťahom (1.21). Pri popise náhodne perturbovaného prostredia sa používa stredná hodnota autokorelačnej funkcie

$$\langle B^{\mu\mu}(l) \rangle = \langle \mu(z) \mu(z+l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z+l) p(z) dz. \quad (2.2)$$

Pri výpočtoch používame strednú hodnotu autokorelačnej funkcie, ale v texte ju budeme označovať pre jednoduchosť len ako autokorelačnú funkciu.

Autokorelačná funkcia $B^{\mu\mu}(l)$

- je štatistickou mierou priestorovej korelácie a rozsahu fluktuácie v prostredí,
- pre danú funkciu závisí iba od priestorového posunu,
- popisuje mieru podobnosti parametra perturbácie v závislosti od posunu l .

Liu et al. (2010) uvádza, že podľa matematickej konvencie náhodná priestorová perturbácia je vždy pokladaná za stacionárny proces v širšom zmysle, t.j. hustota pravdepodobnosti $p(z)$ je nezávislá od priestorového posunu, teda je konštantná. Z toho vyplýva, že stredná hodnota parametra perturbácie a variancia sú konštantné a musia byť splnené nasledovné podmienky

a) stredná hodnota parametra perturbácie je nulová: $\langle \mu(z) \rangle = 0$,

b) pre varianciu na základe podmienky a) platí $\langle (\mu(z) - \langle \mu(z) \rangle)^2 \rangle = \langle \mu(z)^2 \rangle$.

Keďže variancia je konštantná potom aj štandardná odchýlka $\mu(z)$, ktorú si zvolíme, je konštantná: $\sqrt{\langle \mu(z)^2 \rangle} = \text{konšt.} = \mu_c$.

V prípade, keď posun l je nulový, potom stredná hodnota autokorelačnej funkcie je rovná variancii podľa vzťahu (1.3) a zároveň druhej mocniny štandardnej odchýlky μ_c^2 podľa podmienky b)

$$\begin{aligned} \langle B^{\mu\mu}(0) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z) p(z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu(z))^2 p(z) dz = \langle \mu(z)^2 \rangle = \mu_c^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Fourierovou transformáciou autokorelačnej funkcie dostaneme spektrum autokorelačnej

funkcie $\mu(z)$, ktoré je rovné výkonovému spektru $S^{\mu\mu}(\kappa)$ perturbácie $\mu(z)$ a platí

$$\begin{aligned}
S^{\mu\mu}(\kappa) &= \mathcal{F} \{ \langle B^{\mu\mu}(l) \rangle \} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle B^{\mu\mu}(l) \rangle e^{i\kappa l} dl = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \mu(z+l) p(z) dz \right] e^{i\kappa l} dl = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(z+l) e^{i\kappa l} dl \right] p(z) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) e^{i\kappa z} M(-\kappa) p(z) dz. \qquad = M(\kappa) M(-\kappa) p(z). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Keď $\mu(z)$ je reálne, potom podľa vzorca (1.27) výkonové spektrum je rovné kvadrátu amplitúdového spektra vynásobeného hustotou pravdepodobnosti, keďže uvažujeme strednú hodnotu autokorelačnej funkcie.

$$S^{\mu\mu}(\kappa) = |M(\kappa)|^2 p(z) \qquad (2.5)$$

Fourierovou transformáciou autokorelačnej funkcie prechádzame do oblasti vlnových čísiel, v ktorej môžeme dobre kontrolovať splnenie podmienok a) a b).

Na vytvorenie náhodnej perturbácie s požadovanými vlastnosťami k amplitúdovému spektru $|M(\kappa)|$ potrebujeme ešte fázovú časť. Preto amplitúdovú časť $|M(\kappa)|$ vynásobíme spektrom s náhodne vygenerovanou fázou $\varphi(\kappa)$ a jednotkovou amplitúdou, čím zostane amplitúdové spektrum zachované a zabezpečíme tým požadovanú náhodnosť. Definujeme spektrum $\tilde{M}(\kappa)$

$$\tilde{M}(\kappa) = |M(\kappa)| e^{i\varphi(\kappa)}, \qquad (2.6)$$

kde $|M(\kappa)| = \sqrt{S^{\mu\mu}(\kappa)/p(z)}$, čo vyplýva zo vzťahu (2.5). Fáza $\varphi(\kappa)$ je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, má rovnomerné rozdelenie a je antisymetrická $\varphi(-\kappa) = -\varphi(\kappa)$, aby sme pri inverznej Fourierovej transformácii dostali reálne hodnoty.

Parameter perturbácie $\mu(z)$ dostaneme inverznou Fourierovou transformáciou spek-

tra $\tilde{M}(\kappa)$

$$\begin{aligned}
\mu(z) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \tilde{M}(\kappa) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{M}(\kappa) e^{-i\kappa z} d\kappa = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\kappa)| e^{i\varphi(\kappa)} e^{-i\kappa z} d\kappa. &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{S^{\mu\mu}(\kappa)}{p(z)}} e^{i\varphi(\kappa)} e^{-i\kappa z} d\kappa. & (2.7)
\end{aligned}$$

Fourierovou transformáciou $\mu(z)$ dostaneme spektrum $M(\kappa)$. Z podmienky a) pre $\kappa = 0$ vyplýva

$$\begin{aligned}
M(0) &= \mathcal{F} \left\{ \mu(z) \right\} \Big|_{\kappa=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) e^{i\kappa z} p(z) dz \Big|_{\kappa=0} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) p(z) dz = \langle \mu(z) \rangle = 0. & (2.8)
\end{aligned}$$

Avšak zo vzťahu (2.5) pre $\kappa = 0$ vyplýva

$$M(0) = \sqrt{\frac{S^{\mu\mu}(0)}{p(z)}} \neq 0, \quad (2.9)$$

lebo $S^{\mu\mu}(0)$ vo všeobecnosti nemusí byť rovné nule. Preto zdefinujeme $\tilde{S}^{\mu\mu}(\kappa)$

$$\tilde{S}^{\mu\mu}(\kappa) = \begin{cases} 0 & \kappa = 0 \\ c S^{\mu\mu}(\kappa) & \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

kde c je konštanta. $\tilde{S}^{\mu\mu}(\kappa)$ musí tiež spĺňať podmienky a) a b) a z nich určíme konštantu c , ktorej odvodenie ukážeme neskôr, keď sa budeme zaoberať diskretnými hodnotami veličín.

Po splnení všetkých podmienok vypočítame parameter perturbácie

$$\mu(z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{S}^{\mu\mu}(\kappa)}{p(z)}} e^{i\varphi(\kappa)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\tilde{S}^{\mu\mu}(\kappa)}{p(z)}} e^{i\varphi(\kappa)} e^{-i\kappa z} dz, \quad (2.11)$$

čo dosadíme do vzťahu (2.1) a dostaneme perturbovanú rýchlosť šírenia S-vĺn $v(z)$ s požadovanými vlastnosťami.

Autokorelačné funkcie. Pri charakteristike zemského vnútra sú podľa Frankel a Clayton (1986) používané tri autokorelačné funkcie: exponenciálna, Gaussova a von-Kármánova autokorelačná funkcia. Autokorelačné funkcie a im zodpovedajúce výkonové spektrá sú uvedené v Tab. 2.1

Typ	Autokorelačná funkcia	Výkonové spektrum $S^{\mu\mu}(\kappa)$
exponenciálna	$e^{-\frac{l}{a}}$	$\frac{2a}{1+\kappa^2 a^2}$
Gaussova	$e^{-\frac{l^2}{a^2}}$	$\sqrt{\pi} a e^{-\frac{\kappa^2 a^2}{4}}$
von-Kármánova	$K_0\left(\frac{l}{a}\right)$	$\frac{a}{\sqrt{1+\kappa^2 a^2}}$

Tabuľka 2.1: Autokorelačné funkcie a ich výkonové spektrum. (Frankel a Clayton 1986)

V Tab. 2.1 korelačná dĺžka a priamo udáva charakteristickú priestorovú škálu prostredia a teda charakterizuje hladkosť perturbácie.

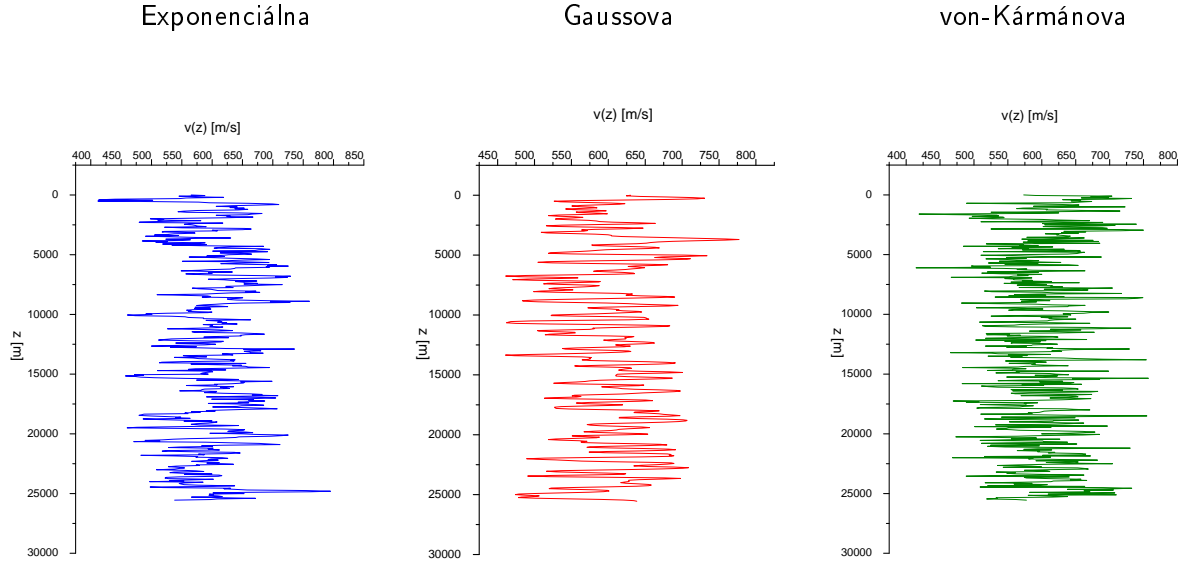
Funkcia $K_0\left(\frac{l}{a}\right)$ je modifikovaná Besselova funkcia druhého druhu nultého rádu a podľa Arfken et al. 2005 jej integrálová reprezentácia je

$$K_0\left(\frac{l}{a}\right) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{l}{a} \sinh x\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{l}{a} x\right) dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad l > 0. \quad (2.12)$$

Gaussova autokorelačná funkcia je chudobná na krátke vlnové dĺžky a preto pri modelovaní vnútra Zeme je vhodnejšie používať von-Kármánovu alebo exponenciálnu autokorelačnú funkciu, ktoré sú bohaté na zložky krátkych vlnových dĺžok.

Pri tvorení programu na výpočet hodnôt náhodne perturbovanej rýchlosti šírenia S-vĺn budeme používať už priamo výkonové spektrum $S^{\mu\mu}(\kappa)$. V prípade nulového posunu l má autokorelačná funkcia svoje maximum podľa vzťahu (1.22) a teda Gaussova a exponenciálna funkcia sú v oblasti polohových súradníc rovné jednej. To však neplatí pre von-Kármánovu funkciu, keďže $K_0(0) \rightarrow \infty$ a preto by nemohla byť splnená podmienka b), lebo variancia v tomto prípade nie je definovaná. Frankel a Clayton (1986) detailnejšie uvádzajú akým spôsobom je možné splniť podmienku b).

Uvedené autokorelačné funkcie sú tzv. nenormované autokorelačné funkcie, ktoré budeme používať aj v programe. Normované autokorelačné funkcie sú pre násobené kvadrátom štandardnej odchýlky μ_c^2 , aby spĺňali vzťah (2.3).



Obr. 2.1: Príklad priebehu perturbovanej rýchlosti šírenia S–vln. Rýchlosť šírenia S–vln v prostrediach popísaných exponenciálnou, Gaussovou a von-Kármánovou autokorelačnou funkciou pri korelačnej dĺžke $a = 150 \text{ m}$, strednej rýchlosti $v_{str} = 600 \text{ m.s}^{-1}$ a štandardnej odchýlke $\mu_c=10\%$. Sieťový krok $\Delta z = 50 \text{ m}$, počet sieťových bodov $N = 512$.

2.2 Diskrétne hodnoty veličín náhodne perturbovaného prostredia

Vnútro Zeme je vo veľkej miere heterogénne so zložitou geometriou rozhraní medzi rôznymi materiálovými vrstvami a horninovými blokmi ako aj s náhodnými perturbáciami materiálových parametrov vo vnútri týchto vrstiev a blokov. Analytické metódy neumožňujú riešenie pohybových rovníc (elastodynamických rovníc) pre komplexný alebo dostatočne realistický model zemského vnútra. Z tohto dôvodu používame približné numerické metódy riešenia týchto rovníc. Numerickými metódami transformujeme pôvodný diferenciálny problém na systém algebrických rovníc. V numerických metódach spojitá funkcia v diferenciálnej rovnici musí byť reprezentovaná konečnou množinou čísiel. Preto sa na vnútro Zeme nebudeme pozeráť ako na spojité prostredie, ale budeme skúmať diskkrétne hodnoty veličín v jednotlivých bodoch. Podobne ako

v predchádzajúcej časti uvedieme vzťahy a definície, ktoré popisujú náhodne perturbované prostredie, ale pre diskkrétne hodnoty veličín.

2.2.1 Popis diskrétnych veličín náhodne perturbovaného prostredia

Uvažujme N sieťových bodov s indexmi $0, 1, \dots, N-1$ ekvidistantne rozložených pozdĺž osi z . V každom bode je perturbovaná rýchlosť v_n daná súčtom strednej rýchlosti v_{str} a jej perturbácie,

$$v_n = v_{str} (1 + \mu_n), \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (2.13)$$

kde μ_n je postupnosť hodnôt parametra perturbácie.

Stredná hodnota diskkrétnej autokorelačnej funkcie postupnosti μ_n je daná predpisom

$$\langle B_l^{\mu\mu} \rangle = \langle \mu_n \mu_{n+l} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n \mu_{n+l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (2.14)$$

pričom l udáva priestorový posun. Rovnako ako v časti 2.1 platia nasledovné podmienky

a) stredná hodnota postupnosti hodnôt parametra perturbácie μ_n je nulová:

$$\langle \mu_n \rangle = 0,$$

b) pre varianciu na základe podmienky a) platí $\langle (\mu_n - \langle \mu_n \rangle)^2 \rangle = \langle \mu_n \rangle^2$ a pre štandardnú odchýlku μ_n platí $\sqrt{\langle \mu_n \rangle^2} = \text{konšt.} = \mu_c$, ktorá je konštantná a zvolíme si ju.

Diskrétnou Fourierovou transformáciou diskkrétnej autokorelačnej funkcie dostaneme spektrum $S_k^{\mu\mu}$, ktoré je výkonovým spektrom μ_n a platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \langle B_l^{\mu\mu} \rangle \} &= \sum_{l=0}^{N-1} \langle B_l^{\mu\mu} \rangle e^{i \frac{2\pi k l}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n \mu_{n+l} \right] e^{i \frac{2\pi k l}{N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mu_{n+l} e^{i \frac{2\pi k l}{N}} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n e^{i \frac{2\pi k n}{N}} M_{-k} = \\ &= \frac{|M_k|^2}{N} = S_k^{\mu\mu}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Kvadrát amplitúdového spektra $|M_k|^2$ predelený počtom sieťových bodov N je rovný výkonovému spektru $S_k^{\mu\mu}$. Keďže autokorelačná funkcia nám znehodnocuje fázovú informáciu k amplitúdovému spektru potrebujeme ešte fázovú časť. Chceme vytvoriť ná-

hodne perturbované prostredie, preto fázu φ_k vygenerujeme náhodne s rovnomerným rozdelením. Fázové spektrum $e^{i\varphi_k}$ má jednotkovú amplitúdu a preto nám samotné amplitúdové spektrum nezmení. Definujeme spektrum \tilde{M}_k :

$$|M_k| e^{i\varphi_k} = \tilde{M}_k, \quad (2.16)$$

pričom $M_k = \sqrt{S_k^{\mu\mu} N}$, čo vyplýva zo vzťahu (2.15). Postupnosť hodnôt parametra perturbácie μ_n dostaneme inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou spektra \tilde{M}_k

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{M}_k \} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{M}_k e^{-i \frac{2\pi k n}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |M_k| e^{i\varphi_k} e^{-i \frac{2\pi k n}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{S_k^{\mu\mu} N} e^{i\varphi_k} e^{-i \frac{2\pi k n}{N}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Amplitúdové spektrum dostaneme diskretnou Fourierovou transformáciou parametra perturbácie a z podmienky a) pre $k = 0$ vyplýva

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathcal{F} \{ \mu_n \} |_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n e^{i \frac{2\pi k l}{N}} \Big|_{k=0} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n \right) N = \langle \mu_n \rangle N = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Avšak zo vzťahu (2.15) pre $k = 0$ vyplýva

$$M_0 = \sqrt{S_0^{\mu\mu} N} \neq 0, \quad S_0^{\mu\mu} \neq 0, \quad (2.19)$$

pretože vo všeobecnosti $S_0^{\mu\mu}$ nemusí byť rovné nule. Preto definujeme $\tilde{S}_k^{\mu\mu}$

$$\tilde{S}_k^{\mu\mu} = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ c S_k^{\mu\mu} & k \neq 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

kde c je konštanta. $\tilde{S}_k^{\mu\mu}$ musí tiež spĺňať podmienky a) a b) a z toho určíme konštantu c . Hodnota diskretnej autokorelačnej funkcie pre nulový posun $l = 0$ je podľa pod-

mienky b) rovná kvadrátu štandardnej odchýlky μ_n

$$B_0^{\mu\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^2 = \langle \mu_n \rangle = \mu_c^2. \quad (2.21)$$

$B_0^{\mu\mu}$ dostaneme aj inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou $S_k^{\mu\mu}$ pre $l = 0$

$$\mu_c^2 = B_0^{\mu\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k^{\mu\mu} e^{-i \frac{2\pi k l}{N}} \Big|_{l=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k^{\mu\mu}. \quad (2.22)$$

To isté platí aj pre $\tilde{S}_k^{\mu\mu}$

$$\begin{aligned} \mu_c^2 &= B_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}_k^{\mu\mu} e^{-i \frac{2\pi k l}{N}} \Big|_{l=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}_k^{\mu\mu} = \\ &= c \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k^{\mu\mu} - \frac{S_0^{\mu\mu}}{N} \right) = c \left(\mu_c^2 - \frac{S_0^{\mu\mu}}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Zo vzťahu (2.23) určíme konštantu c

$$c = \frac{\mu_c^2}{\mu_c^2 - \frac{S_0^{\mu\mu}}{N}}. \quad (2.24)$$

Po splnení všetkých podmienok vieme vypočítať inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou postupnosť hodnôt parametra perturbácie μ_n

$$\mu_n = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sqrt{\tilde{S}_k^{\mu\mu} N} e^{i\varphi_k} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\tilde{S}_k^{\mu\mu} N} e^{i\varphi_k} e^{-i \frac{2\pi k n}{N}}, \quad (2.25)$$

čo dosadíme do vzťahu (2.13) a dostaneme postupnosť hodnôt perturbovanej rýchlosti šírenia S-vln v_n s požadovanými vlastnosťami.

Diskrétné autokorelačné funkcie postupnosti μ_n . Pri výpočte postupnosti hodnôt parametra perturbácie μ_n budeme používať priamo výkonové spektrum $S_k^{\mu\mu}$, preto si uvedieme iba výkonové spektrum diskretnéj autokorelačnej funkcie. Predpis výkonového spektra $S_k^{\mu\mu}$ doplníme do periodickej postupnosti, pretože podľa časti 1.2.1 uvažujeme periodickosť funkcie aby sme vzorky spektra vedeli vyjadriť v oblasti polohových súradníc.

Typ	Výkonové spektrum $S_k^{\mu\mu}$
exponenciálna	$\frac{2a}{1+(k\Delta\kappa)^2a^2} + \frac{2a}{1+[(k-N)\Delta\kappa]^2a^2}$
Gaussova	$\sqrt{\pi} a e^{-\frac{(k\Delta\kappa)^2a^2}{4}} + \sqrt{\pi} a e^{-\frac{[(k-N)\Delta\kappa]^2a^2}{4}}$
von-Kármánova	$\frac{a}{\sqrt{1+(k\Delta\kappa)^2a^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+[(k-N)\Delta\kappa]^2a^2}}$

Tabuľka 2.2: Diskrétne výkonové spektrum $S_k^{\mu\mu}$

Diskrétnu autokorelačnú funkciu uvažujeme iba na konečnom intervale. Keďže vyjadruje vzájomnú koreláciu v závislosti na posune postupností parametrov perturbácie μ_n a μ_{n+l} , keby sme pri ich vzájomnom posúvaní prešli mimo interval $0, 1, \dots, N$, tak by nedochádzalo ku prekryvu bodov ak by sme funkciu nedoplnili na periodickú a nebola by splnená podmienka b).

2.2.2 Metóda konečných diferencií

Metóda konečných diferencií je numerickou metódou na približné riešenie diferenciálnych rovníc pričom sa používajú konečno-diferenčné rovnice na aproximovanie derivácií. Podľa Moczo et al. (2004) počítaná oblasť je pokrytá priestorovo—časovou sieťou a každá funkcia je reprezentovaná jej hodnotou v danom bode siete.

Metóda konečných diferencií je jednou z najdôležitejších numerických metód využívaných v seizmológii a určite stále dominantnou metódou pri modelovaní pohybu Zeme pri zemetrasení.

Pohybová rovnica a Hookeov zákon (konštitučný vzťah) spolu s počiatočnými a hraničnými podmienkami plne popisujú šírenie seizmických vln a seizmický pohyb. Ak aplikujeme časovú deriváciu na Hookeov zákon dostaneme formuláciu v rýchlosti a napätí.

Pohybová rovnica a Hookeov zákon. Uvažujeme dokonale elastické izotrópne prostredie s hustotou ρ a s Lamèovými elastickými koeficientami $\mu_{Lamè}$ a $\lambda_{Lamè}$ spojitej funkcie $\mu(z)$. Potom šírenie rovinnej vlny v smere osi z je popísané pohybovou rovnicou a Hookeovým zákonom a pre formuláciu v rýchlosti a napätí platí

$$\rho \dot{v} = \tau_{,z} + f_{obj} \qquad \dot{\tau} = C v_{,z} \qquad (2.26)$$

kde $v(z, t)$ je rýchlosť v smere osi z , \dot{v} je časová derivácia rýchlosti a $v_{,z}$ je priestorová derivácia podľa z , $\tau(z, t)$ je zz – komponenta tenzora napätia, $\tau_{,z}$ je priestorová derivácia podľa z tenzora napätia, $f_{obj}(z, t)$ je objemová sila na jednotku objemu v smere osi z a pre Hookeov zákon platí

$$C(z) = \lambda_{Lamè} + 2\mu_{Lamè} \quad (2.27)$$

Rovnicu (2.26) riešime metódou konečných diferencií. Nech Δz a Δt sú sieťový krok a časový krok. Nech V_i^m , T_i^m a $(F_{obj})_i^m$ sú diskkrétne aproximácie k $v_i^m(i\Delta z, m\Delta t)$, $\tau_i^m(i\Delta z, m\Delta t)$ a $(f_{obj})_i^m(i\Delta z, m\Delta t)$. Označíme taktiež $\rho_i = \rho(i\Delta z)$ a $C_i = C(i\Delta z)$. Potom rovnice, ktoré riešia formuláciu v rýchlosti a napätí sú

$$\begin{aligned} T_{i+1/2}^m &= T_{i+1/2}^{m-1} + C_{i+1/2}^H \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[-\frac{1}{24} (V_{i+2}^{m-1/2} - V_{i-1}^{m-1/2}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (V_{i+1}^{m-1/2} - V_i^{m-1/2}) \right] \\ V_i^{m+1/2} &= V_i^{m-1/2} + \frac{1}{\rho_i^A} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[-\frac{1}{24} (T_{i+3/2}^m - T_{i-3/2}^m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} (T_{i+1/2}^m - T_{i-1/2}^m) \right] + \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\rho_i^A} (F_{obj})_i^m, \end{aligned} \quad (2.28)$$

pričom ρ_i^A je aritmetický priemer hustoty

$$\rho_i^A = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \rho(z) dz \quad (2.29)$$

a $C_{i+1/2}^H$ je harmonický priemer elastických modulov

$$C_{i+1/2}^H = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{1}{C(z)} dz \quad (2.30)$$

Presnosť konečno-diferenčnej schémy je štvrtého rádu v čase aj priestore. Podrobnejšie je metóda konečných diferencií popísaná v Moczo et al. (2004).

2.3 Program RANDOM_MEDIA

Na výpočet hodnôt rýchlostí v_n náhodne perturbovaného prostredia bol naprogramovaný v jazyku Fortran 95 program RANDOM_MEDIA, ktorého výpis je uvedený v Prílohe A.

Na začiatku programu deklarujeme premenné a konštanty, ktoré budeme používať v programe. Program vyžaduje dva vstupné textové súbory, do ktorých zadávame parametre polpriestoru a vrstvy na polpriestore. Súbor najskôr otvoríme príkazom

```
OPEN ( 20, FILE = '''názov súboru''.TXT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
```

a parametre uložené v súbore sa načítajú príkazom

```
READ ( 20, NML = '''názov súboru'' )
```

Vstupné dáta súboru “PARAMETRE.TXT”. Súbor je typu ASCII a obsahuje riadiace premenné polpriestoru, a určujeme v ňom autokorelačnú funkciu, ktorú používame na výpočet a veľkosť štandardnej odchýlky parametra perturbácie.

NAMELIST / PARAMETRE / KN, MIC, A, DZ, VHALF, ACF_FUNKCIA,
HUSTOTAPOLPRIESTOR

<i>Meno premennej</i>	<i>Typ</i>	<i>Popis</i>
KN	integer	dimenzia poľa $N = 2^{KN}$, kde $3 \leq KN \leq 15$
MIC	real	štandardná odchýlka μ_c
A	real	korelačná dĺžka a v metroch
DZ	real	sieťový krok v metroch
VHALF	real	rýchlosť šírenia S-vln v polpriestore
ACF_FUNKCIA	integer	číslo autokorelačnej funkcie, 1 - exponenciálna, 2 - Gaussova, 3 - von-Kármánova
HUSTOTAPOLPRIESTOR	real	hustota polpriestoru

Vstupné dáta súboru “VRSTVA.TXT”. Súbor je typu ASCII a obsahuje riadiace premenné vrstvy na polpriestore.

NAMELIST / VRSTVA / HLBKA, VSTR, HUSTOTAVRSTVA

<i>Meno premennej</i>	<i>Typ</i>	<i>Popis</i>
HLBKA	real	mocnosť vrstvy na polpriestore, celé násobky sieťového kroku DZ
VSTR	real	stredná hodnota rýchlosti šírenia S–vln vo vrstve
HUSTOTAVRSTVA	real	hustota vrstvy

V nasledujúcom kroku vygenerujeme náhodné čísla. Vo Fortrane funkciu na generovanie náhodných čísiel voláme príkazom `CALL RANDOM_NUMBER (RND)`. Táto funkcia používa postupnosť hodnôt seed, ktorú voláme príkazom `CALL RANDOM_SEED (PUT = SEED)`, kde seed je premenná typu integer používaná na generovanie postupnosti náhodných čísiel s rovnomerným rozdelením na intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Ak program používa ten istý seed tak generuje iba tzv. pseudonáhodné čísla, t.j. pri každom spustení programu vygeneruje tie isté čísla. Keď chceme, aby program generoval pri každom spustení rôzne náhodné čísla, seed zdefinujeme ako funkciu závislú od dňa a času použitím funkcie `SECNDS (T)`. Predtým si čas T nastavíme na nulu.

Príkazom `ALLOCATE` vytvoríme pole fázy `PHI (N)`, ktorému priradíme hodnoty náhodne vygenerovaných čísiel vynásobené 2π , keďže fáza je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Antisymetricky doplníme zápornú časť fázy tak, že hodnotám fázy pre $I = 2 + N/2$ priradíme `PHI(N/2+I) = -PHI(N/2+2-I)`. Ďalej vytvoríme pole hodnôt spektra fázy $e^{i\varphi_k}$ nasledovne `F(I) = CMPLX (COS(PHI (I)), SIN(PHI (I))`). Aby sme dostali reálne výsledky tak prvý a $N/2 + 1$ -vý prvok položíme rovné iba ich reálnej časti. Zapíšeme reálne a imaginárne hodnoty spektra do súboru `RANDOM_MEDIA_F.DAT` príkazom `WRITE (100,*) REAL(F (I)), ', ', IMAG(F (I))`.

Vytvoríme pole výkonového spektra `S (N)`. Určíme sieťový krok DK v reprezentácii vlnových čísiel. Do príkazu `SELECT CASE` vložíme vzťahy pre tri autokorelačné funkcie a podľa toho, ktorú z funkcií vyberieme v textovom súbore `PARAMETRE.TXT`,

tak s tou funkciou bude program počítať. Jednotlivé autokorelačné funkcie sú v programe vynásobené sieťovým krokom DZ, aby sme pri vypočítaní hodnôt postupnosti parametra perturbácie μ_n inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou podprogramom FCOOLR dostali správne výsledky (pozri Moczo (1988)). Hodnoty výkonového spektra zapíšeme do súboru RANDOM_MEDIA_S.DAT. Určíme konštantu $C = 1. / (1. - S(1)/N/dz)$, ktorá nezodpovedá vzťahu (2.24), lebo program počíta s nenormovanou autokorelačnou funkciou a požadovanú štandardnú odchýlku dodefinujeme neskôr. Prvý prvok poľa S(1), ktorý zodpovedá nulovému vlnovému číslu, položíme rovný nule podľa vzťahu (2.20).

Vytvoríme pole amplitúdového spektra M (N), ktorému priradíme hodnoty $ABS(SQRT ((C*S (I+1)) * N))$ a zapíšeme do súboru RANDOM_MEDIA_M.DAT.

Ďalej vytvoríme pole hodnôt MNEW (N), do ktorého priradíme súčin hodnôt poľa amplitúdového spektra M (I) a fázového spektra F (I) a zapíšeme do súboru RANDOM_MEDIA_MNEW.DAT.

Pole MI (N) dostaneme inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou príkazom CALL FCOOLR(KN, MNEW, -1.) a MI (I) priradíme hodnoty $MI (I) = MNEW (I)/N/DZ$. Dodefinujeme si varianciu VAR μ_n , aby mala nami zvolenú varianciu rovnú kvadrátu štandardnej odchýlky μ_c^2 a pre μ_n s požadovanou varianciou platí $MI = MI/SQRT(VAR)*MIC$. Zapíšeme hodnoty poľa MI (N) do súboru RANDOM_MEDIA_MI.DAT.

Vytvoríme pole rýchlostí VZ (N) a pole hustôt DEN (N). Určíme počet bodov pripadajúcich na vrstvu. Priradíme tomuto počtu bodov hodnoty perturbovanej rýchlosti $VZ (I) = VSTR*(1 + MI (I))$ a pre hustotu platí $DEN(I) = HUSTOTAVRSTVA$. Ostatným bodom polpriestoru priradíme konštantnú hodnotu rýchlosti šírenia S—vln a hustote danú hustotu polpriestoru. Pole rýchlostí zapíšeme do súboru RANDOM_MEDIA_VZ.DAT.

Vypíšeme hodnoty štandardnej odchýlky MIC, časového kroku, ktorý sa vypočíta podľa vzťahu

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{\Delta z}{\max(v_n)} \quad (2.31)$$

a maximálnu frekvenciu, po ktorú je výpočet dostatočne presný, podľa

$$f_{AC} = \frac{\min(v_n)}{6 \Delta z}. \quad (2.32)$$

Hodnoty časového kroku a maximálnej frekvencie budeme potrebovať pri numerickej simulácii seizmického pohybu 1DVD_VS programom.

Nakoniec zapíšeme hodnoty rýchlosti do binárneho súboru EX_02_RNM.MO, ktorý budeme vstupným súborom vo výpočtovom programe 1DFD_VS

```
WRITE (17) (DEN(I), DEN(I)*REAL ( VZ (I) )*REAL ( VZ (I) ),I = 1, N).
```

DEN(I)*REAL (VZ (I))*REAL (VZ (I)) je elastický modul. V prípade ak uvažujeme rýchlosť S - vln je to modul torzie, ak rýchlosť P - vln je to Lamého elastický modul podľa vzťahu (2.27).

Kapitola 3

Výpočtový program 1DFD_VS

Podľa Moczo et al. (2004) program 1DFD_VS realizuje výpočet rýchlosti častíc metódou konečných diferencií podľa formulácie v rýchlosti a napätí striedavo usporiadanej siete pre jednorozmerné vlnové pole v jednorozmernom heterogénnom viskoelastickom prostredí. Ďalšie dva programy realizujú prípravu výpočtového modelu (MODEL_PREP_1D) a časovej funkcie zdroja (SOURTF) ako vstupných dát do programu 1DFD_VS.

Prostredie je ohraničené z jednej strany (v programe je to horná horizontálna rovina $z = 0$) voľným povrchom (s nulovým napätím) a z druhej strany (spodná horizontálna rovina $z = z_{MAX} > 0$) neodrážajúcou hranicou. Prostredie je elastické a homogénne. Program 1DFD_VS požaduje päť vstupných súborov

- pomocný súbor, ktorý obsahuje iba názov súčasného výpočtu (HF_1DFD_VS)
- vstupný súbor s riadiacimi parametrami pre výpočet
- súbor obsahujúci elastické materiálové parametre modelu
- súbor obsahujúci anelastické materiálové parametre modelu
- súbor obsahujúci časovú funkciu zdroja

Podrobne sú vyššie uvedené súbory popísané v Moczo et al. (2004).

3.1 Príprava výpočtového modelu

Použijeme príklad, ktorý je uvedený v Moczo et al. (2004) až na úpravy, na základe ktorých dostávame nami uvažovaný model náhodne perturbovanej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore. V prvom kroku vytvoríme neperturovaný model homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore a v druhom kroku perturbovaný model.

Parametre modelu homogénnej elastickej vrstvy na polpriestore:

	Vrstva	Polpriestor
Rýchlosť P-vln	$v_P = 1125 \text{ m s}^{-1}$	$v_P = 5468 \text{ m s}^{-1}$
Rýchlosť S-vln	$v_{str} = 625 \text{ m s}^{-1}$	$v_{str} = 3126 \text{ m s}^{-1}$
Hustota	$\rho = 1600 \text{ kg m}^{-3}$	$\rho = 1800 \text{ kg m}^{-3}$

Zdroj:

Vlnové pole je generované objemovou silou – rovinná S - vlna, ktorej časová funkcia zdroja je definovaná Gaborovým signálom

$$s(t) = e^{-\left(\frac{2\pi f_P(t-t_S)}{\gamma}\right)} \cos(2\pi f_P(t - t_S) + \psi), \quad (3.1)$$

kde f_P je (pre určité hodnoty γ a ψ) dominantná frekvencia, parameter γ kontroluje šírku obálky signálu, ψ je fáza, pre časový posun platí $t_S = 0,45 \frac{\gamma}{f_P}$ a signál je definovaný na intervale $\langle 0, 2t_S \rangle$. V našom prípade parametre sú: $\gamma = 1,0$, $f_P = 0,45 \text{ Hz}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $t_S = 1,0 \text{ s}$. Rovinná vlna je excitovaná v hĺbke 2500 m , čiže v homogénnom polpriestore.

Výpočtový model:

Mocnosť vrstvy	2000 m
Veľkosť výpočtového modelu	25550 m
Sieťový krok	$\Delta z = 50 \text{ m}$
Časový krok	podľa vzťahu (2.31) $\Delta t = 0,0137 \text{ s}$
Horná hranica výpočtového modelu	voľný povrch s nulovým napätím
Dolná hranica výpočtového modelu	neodrážajúce hranice podľa Emerman & Stephen (1983)
Pozícia objemovej sily v sieti	LS = 50
Maximálna frekvencia	podľa vzťahu (2.32) $f_{AC} \approx 2 \text{ Hz}$

Výstup:

Prijímače, ktoré zaznamenávajú rýchlosť častíc, sú umiestnené v prvých desiatich bodoch siete od vrchnej vrstvy modelu.

3.2 Postup pri výpočte rýchlosti častí daného modelu

Pri výpočte postupujeme nasledovne

- zkompilujeme spomínané počítačové programy
- vygenerujeme pole rýchlostí náhodne perturbovanej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore programom RANDOM_MEDIA
- vygenerujeme časovú funkciu zdroja programom SOURTF
- vygenerujeme výpočtový model programom MODEL_PREP_1D
- vypočítame rýchlosti častíc metódou konečných diferencií programom 1DFD_VS
- vykreslíme syntetické seizmogramy

Výstupom programu RANDOM_MEDIA je okrem ASCII súborov typu dat spomenutých v časti 2.3 aj binárny súbor EX_02_RNM.MO, ktorého dáta sa načítajú v programe 1DFD_VS príkazom

```
READ (17) (DEN(I), DEN(I)*REAL ( VZ (I) )*REAL ( VZ (I) ), I = 1, N).
```

Kapitola 4

Numerické výpočty

Numerickými výpočtami, ktoré sme realizovali prostredníctvom vyššie uvedených programov, získavame syntetické seizmogramy. V nasledujúcej časti uvedieme príklad homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore a prípad keď je homogénna vrstva náhodne perturbovaná.

4.1 Neperturovaný model

Na vytvorenie neperturovaného modelu homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore používame pri simulácii výpočtovú programy SOURTF, MODEL_PREP_1D, 1DFD_VS.

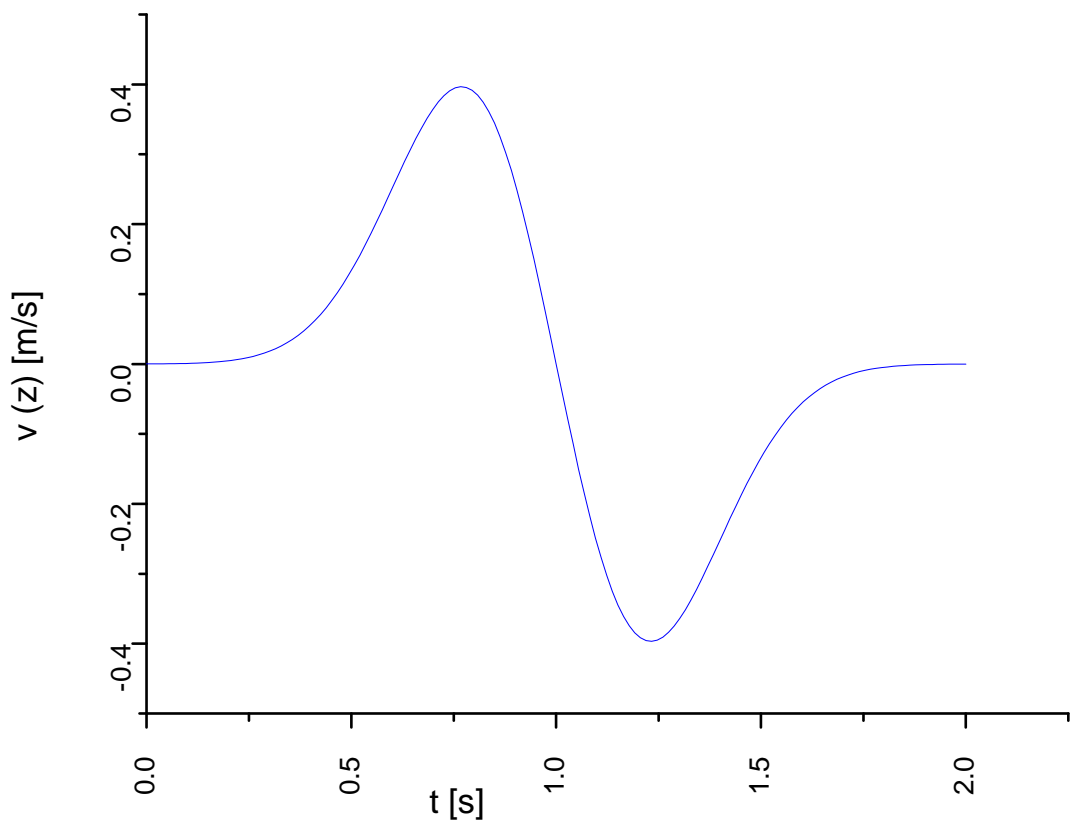
Generovanie časovej funkcie zdroja. Časovú funkciu zdroja popísanú Gaborovým signálom generujeme použitím programu SOURTF. Program načítava dáta zo súboru SOURTF.IN.

SOURTF.IN	
&INPUT	NSIG = 3, DT = 0.0137 /
&SIGNAL_3	GAMA = 1.0, FP = 0.45, PSI = 1.570796, TS = 1.0 /

NSIG - číslo časovej funkcie zdroja, 3 - Gaborov signál (pozri Moczo et al. 2004 str. 105 - 111), DT - časový krok. Ďalšie vstupné údaje sú popísané v časti 3.1.

Program generuje tri výstupné súbory

- STF.DAT obsahuje časovú funkciu zdroja, ktorú môže načítať program na výpočet metódou konečných diferencií
- SOURTF.DAT obsahuje časovú funkciu zdroja - Gaborov signál (Obr.4.1) a jej obálku
- SPECTR.DAT obsahuje výkon, amplitúdu a fázu Fourierovho spektra časovej funkcie zdroja



Obr. 4.1: Gaborov signál

Generovanie výpočtového modelu. Na generovanie výpočtového modelu použijeme program MODEL_PREP_1D. Fyzikálne parametre musia byť predpísané v programe mod_func.f90 (pozri Moczo et al. 2004 str. 124). Riadiace parametre sa načítavajú zo súboru MODEL.IN.

```

                                MODEL.IN
&CONTROL          H = 50, ZMAX = 25550, PTS = 100, KEY_Q = F /
&OUT_FILES        MO_FILE_NAME = 'EX_02_HOM.MO',
                  Q_FILE_NAME  = 'EX_02_HOM.Q' /
&PARAMS          FRJMAX = 5, FRANGE = 2, FREF = 0.5, NRFREQ = 1 /

```

Program generuje ASCII súbor typu log a dva binárne súbory EX_02_HOM.MO a EX_02_HOM.Q, ktoré slúžia ako vstupné súbory pre výpočet konečno-diferenčným programom.

Výpočet konečno-diferenčným programom. Posledným krokom je výpočet rýchlosti častíc programom 1DFD_VS. Riadiace parametre pre konečno-diferenčný program sú načítané z jedného súboru. Názov vstupného súboru je načítaný z pomocného súboru HF_1DFD_VS. Konečno-diferenčný program načítava vstupné údaje zo súboru E_VS_02.IN.

```

                                E_VS_02.IN
&NAMES           MO_FILE_NAME = 'EX_02_HOM.MO',
                  Q_FILE_NAME  = 'EX_02_HOM.Q' /
&KEYS            KEY_TLV = T, KEY_SNV = F /
&CONTROLDATA     MT1 = 1, MT2 = 3000, IPAS1 = 1,
                  MZ = 511, H = 50, DT = 0.0137 /
&ATTEN           FRJMAX = 0., FRANGE = 2., NRFREQ = 1 /
&NONREF          OMG = 3.14, WB = 0.4, KTTO = -1, KTBO = 4 /
&TXT             TEXT = 'EXAMPLE 02' /
&SNAP            IPAS2 = 1 /
&SOURCE          LS = 12 /
&REC             MR = 10 /
                  9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

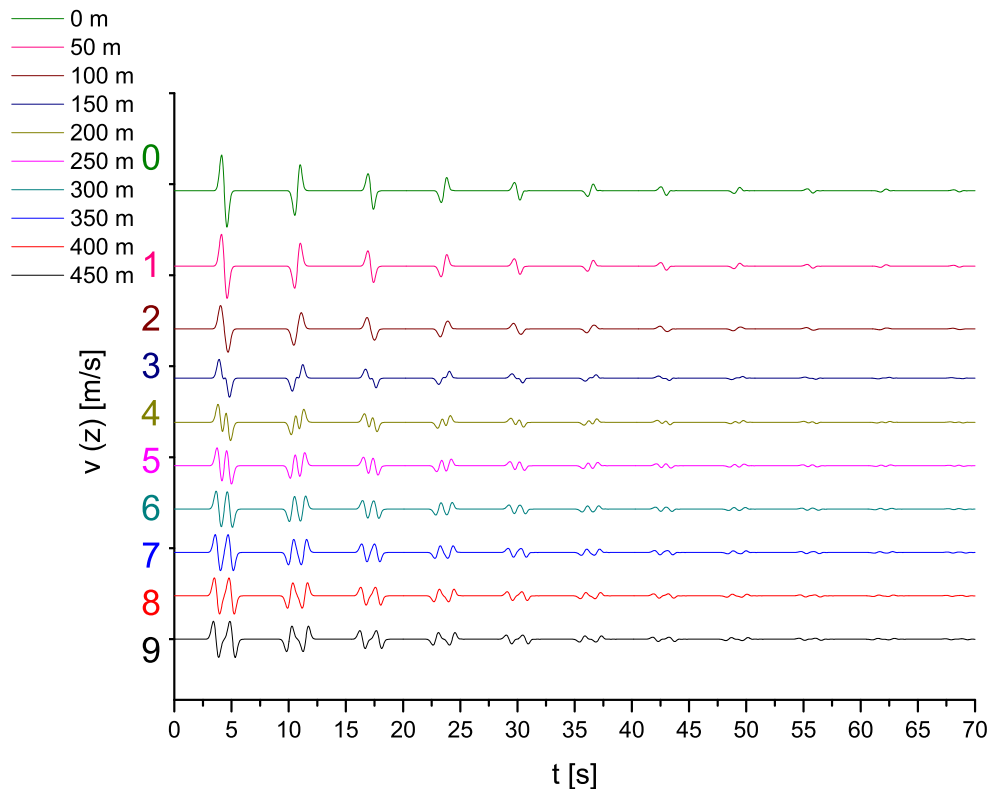
```

Výstupom programu sú dva súbory. Jeden súbor typu log E_VS_02.LOG a druhý E_VS_02_V.DAT, kde sú uložené hodnoty rýchlosti častíc v závislosti od času v jed-

notlivých prijímačoch. Tieto súbory sa generujú iba ak $KEY_TLV = T$ ($T = true$). Rýchlosť častíc je zaznamenaná v každom časovom okamihu ($IPAS1 = 1$). Výstupné dáta sú uložené v stĺpcoch týmto spôsobom

Čas	Rýchlosť častíc	Rýchlosť častíc	...	Rýchlosť častíc
	v prvom prijímači (9)	v druhom prijímači (8)		v poslednom prijímači (0)

Zelený seizmogram zobrazuje rýchlosť posunutia na voľnom povrchu. Prvý signál predstavuje dopad priamej seizmickej vlny na voľný povrch a ďalšie signály sú odrazené vlny od voľného povrchu a rozhrania vrstvy a polpriestoru, ktoré nastupujú s časovým odstupom 6,4 sekundy. Je to čas prechodu vlny od voľného povrchu k rozhraniu a naspäť. Amplitúda odrazených signálov sa postupne znižuje dôsledkom útlmu až kým neklesne na nulovú hodnotu.



Obr. 4.2: Syntetický seizmogram neperturovaného modelu. Graf zobrazuje rýchlosti častíc v jednotlivých prijímačoch, ktoré sú umiestnené od voľného povrchu až do hĺbky 450 m ako je uvedené v legende.

4.2 Pertubovaný model

V tejto časti uvedieme model náhodne perturbovanej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore. Časová funkcia zdroja je rovnaká ako pre nepertubovaný model. Vstupným súborom programu na numerické modelovanie seizmického pohybu náhodne perturbovanej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore bude EX_02_RNM.MO.

Vo vstupnom súbore pre program MODEL_PREP_1D s riadiacimi parametrami MODEL.IN nahradíme EX_02_HOM.Q nasledovne (vyznačené červeným)

```
&OUT_FILES      MO_FILE_NAME = 'EX_02_HOM.MO',  
                Q_FILE_NAME = 'EX_02_RNM.Q' /
```

Program generuje ASCII súbor typu log a dva binárne súbory EX_02_HOM.MO a EX_02_RNM.Q, ktoré slúžia ako vstupné súbory pre výpočet konečno-diferenčným programom. Súbory EX_02_HOM.MO, ktorý predstavuje nepertubovaný model, a EX_02_RNM.MO musia mať rovnakú veľkosť.

V súbore E_VS_02.IN, ktorý je vstupom pre konečno-diferenčný výpočtový program 1DFD_VS, nahradíme vstupné súbory nepertubovaného modelu perturbovaným.

```
&NAMES          MO_FILE_NAME = 'EX_02_RNM.MO',  
                Q_FILE_NAME = 'EX_02_RNM.Q' /
```

Výpočty budeme realizovať pre tri rôzne autokorelačné funkcie - exponenciálna, Gaussova a von-Kármánova a pre štyri rôzne štandardné odchýlky parametra perturbácie - 10 %, 5 %, 1 % a 0 %. Pri štandardnej odchýlke 0 % sú výsledky identické s nepertubovaným modelom uvedeným v predchádzajúcej časti.

Kapitola 5

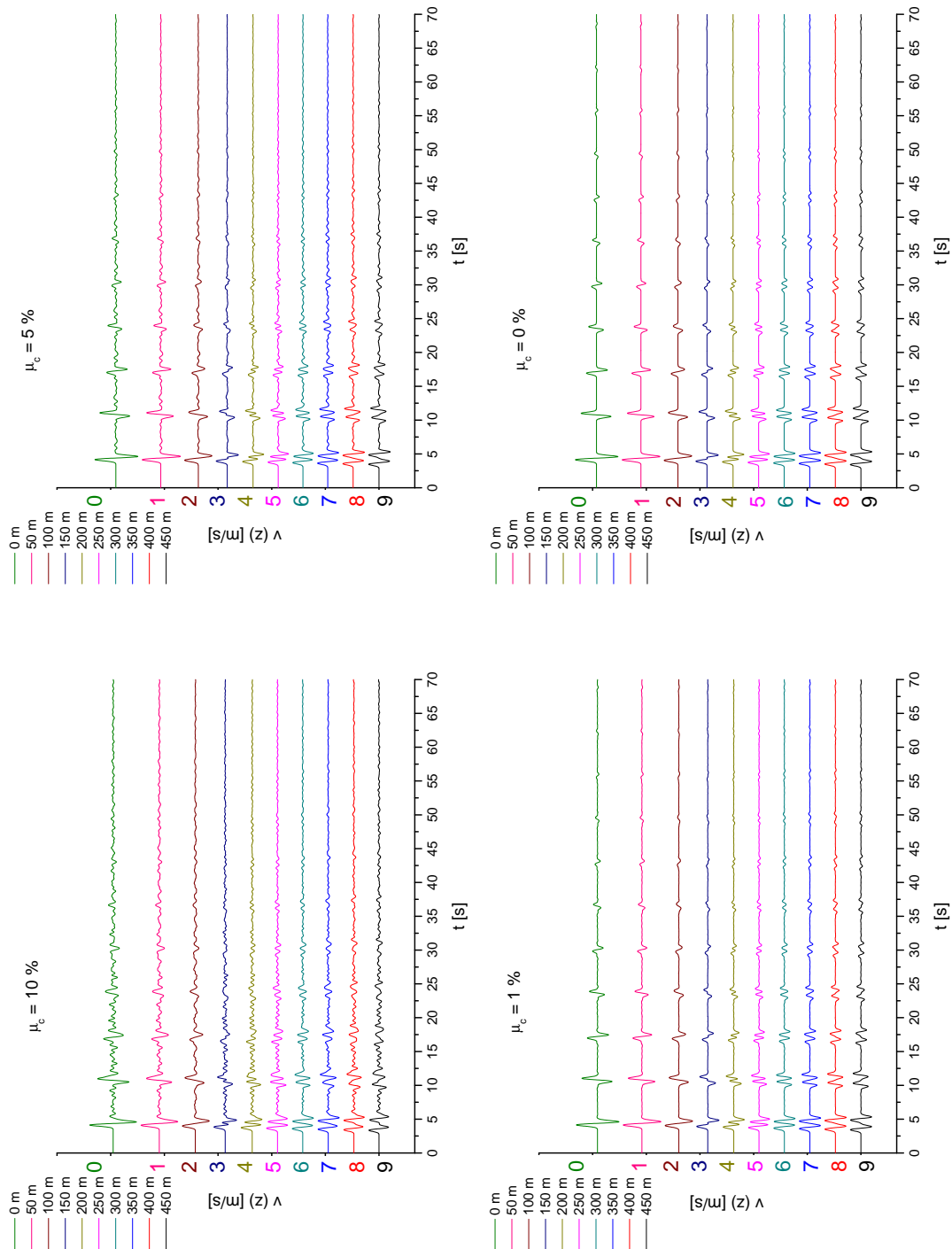
Výsledky

Simulovali sme prípady šírenia seizmických vln v prostredí s náhodne perturbovaným rozložením rýchlosti, keď dané prostredie charakterizuje exponenciálna, Gaussova a von-Kármánova autokorelačná funkcia a postupne sme menili veľkosť štandardnej odchýlky parametra perturbácie od 10 % na 5 %, 1 % až na 0 %. Pri postupnom znižovaní štandardnej odchýlky sa perturbovaný model približuje neperturovanému modelu. Pri štandardnej odchýlke parametra perturbácie 0 % dostávame neperturovaný model.

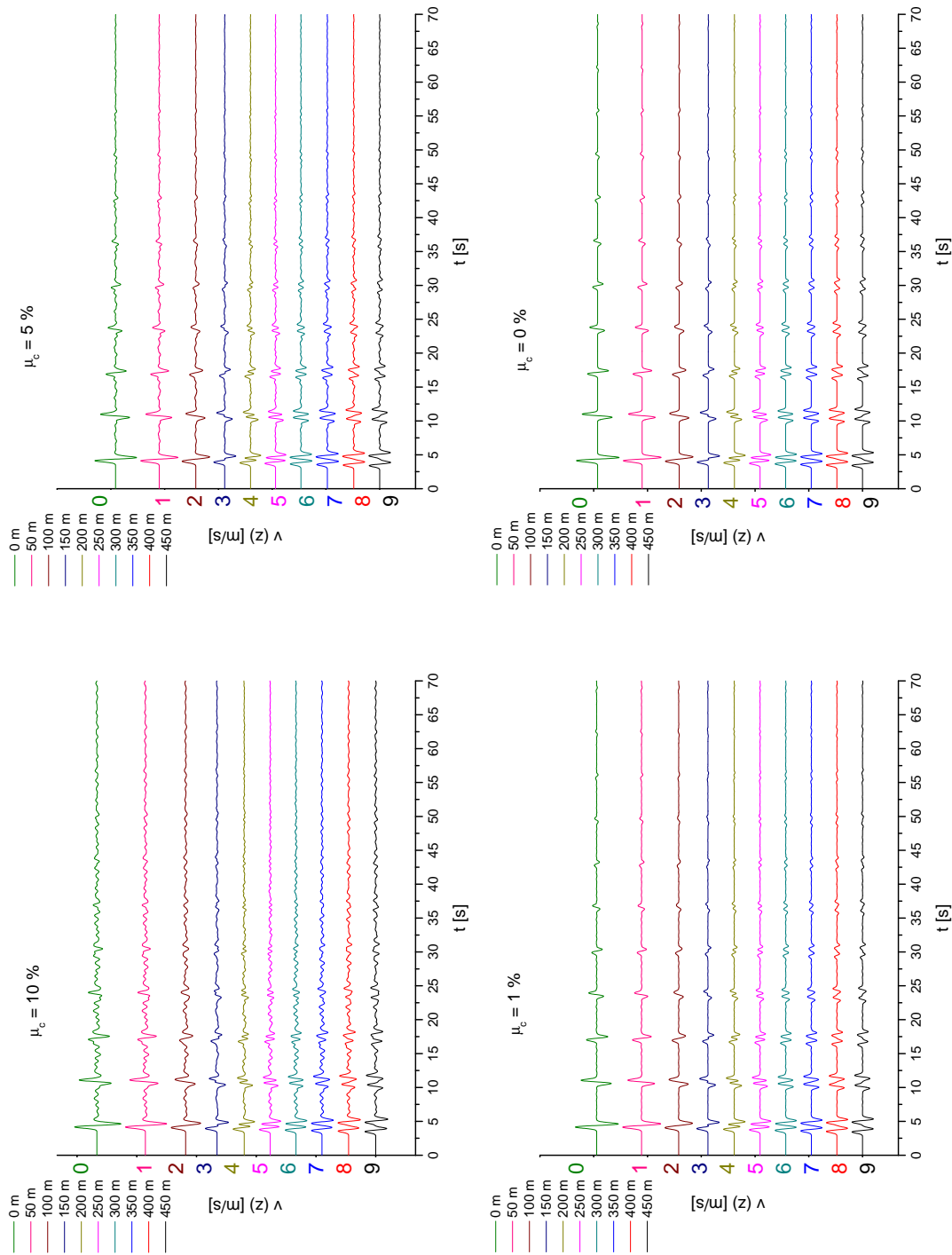
Nehomogenity vo vrstvách spôsobujú zašumenie seizmogramov pre perturbované modely. Najvyššia miera zašumenia je pri štandardnej odchýlke 10 % a znižovaním odchýlky zašumenie postupne zaniká. Seizmogramy pre perturbovaný model sú zložitejšie ako pre neperturovaný model tvorený v čase dobre separovanými signálmi, ktoré zodpovedajú priamej vlne a potom vlnám odrazeným od rozhrania vrstvy a polpriestoru.

Na ďalších stranách môžeme vidieť vykreslené syntetické seizmogramy šírenia seizmických vln pre vyššie spomenuté prípady programom Origin 8.0.

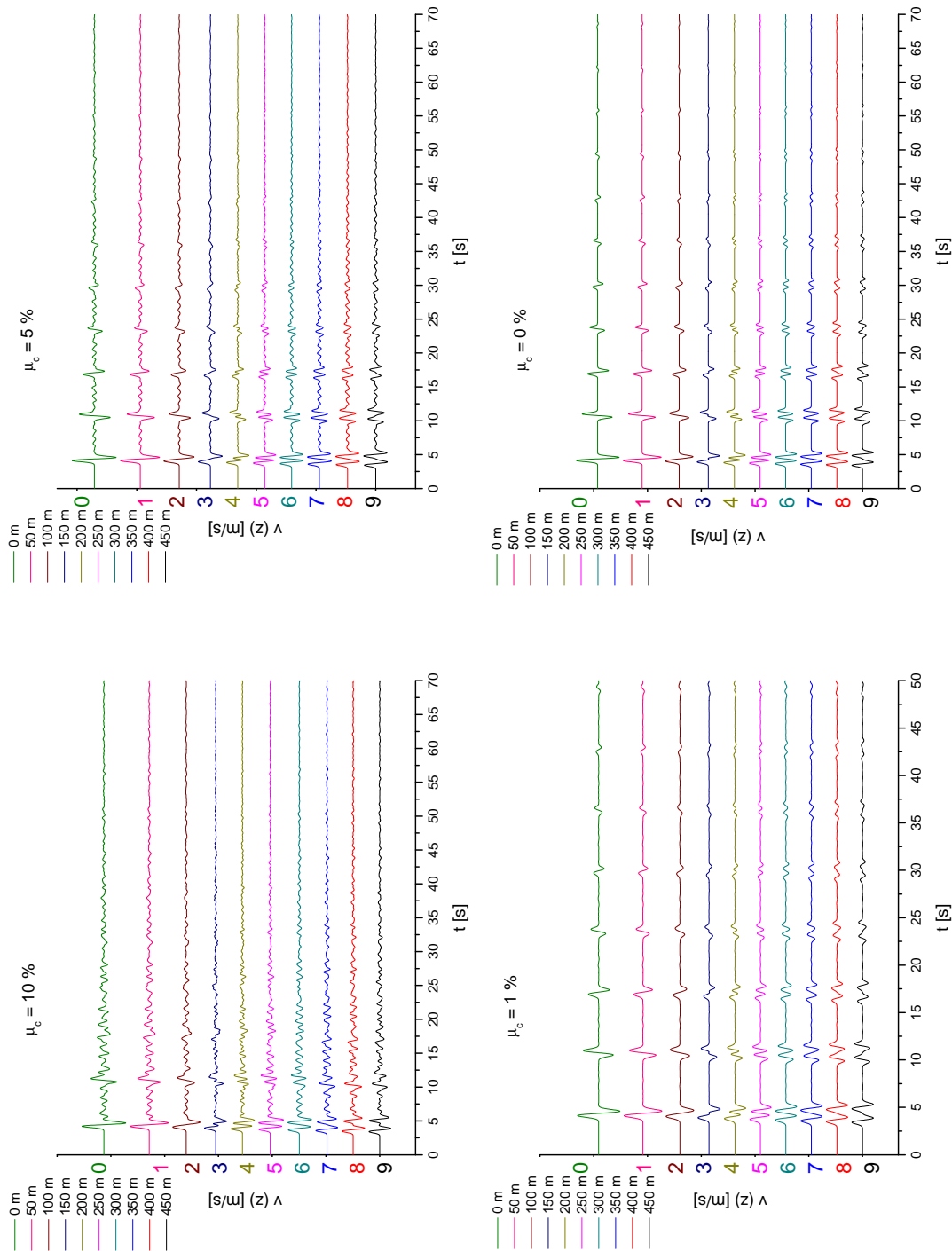
Seizmogramy nie sú výsledkom numerickej simulácie reálneho modelu prostredia. V práci sme prezentovali metodický postup ako nehomogenity vo vrstve môžeme aproximovať náhodnou perturbáciou hodnôt rýchlosti šírenia S-vln, ktorý slúži ako ilustrácia riešenia problematiky šírenia seizmických vln v povrchových štruktúrach s náhodne perturbovaným rozložením rýchlosti.



Obr. 5.1: Syntetické seizmogramy perturbovaného modelu pre hodnoty štandardnej odchýlky $\mu_c = 10\%$, 5% , 1% a neperturbovaného modelu pre $\mu_c = 0\%$ pri výpočte s exponenciálnou autokorelačnou funkciou.



Obr. 5.2: Syntetické seizmogramy perturbovaného modelu pre hodnoty štandardnej odchýlky $\mu_c = 10\%$, 5% , 1% a neperturbovaného modelu pre $\mu_c = 0\%$ pri výpočte s Gaussovou autokorelačnou funkciou.



Obr. 5.3: Syntetické seizmogramy perturbovaného modelu pre hodnoty štandardnej odchýlky $\mu_c = 10\%$, 5% , 1% a neperturbovaného modelu pre $\mu_c = 0\%$ pri výpočte s von-Kármánovou autokorelačnou funkciou.

Záver

Pri skúmaní šírenia seizmických vln kratších vlnových dĺžok alebo seizmického pohybu na vyšších frekvenciách v rôznych prostrediach je reálne predpokladať nehomogenity prostredia vo vrstvách, ktoré možno v niektorých prípadoch aproximovať náhodnou perturbáciou hodnôt materiálového parametra.

Vytvorili sme program na výpočet hodnôt náhodne perturbovanej rýchlosti šírenia S-vln. Tieto hodnoty sme použili ako vstupné dáta na numerickú simuláciu seizmického pohybu modelu náhodne perturbovanej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore.

Porovnali sme model homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore a náhodne perturbovanej homogénnej vrstvy na homogénnom polpriestore pre rôzne hodnoty štandardnej odchýlky parametra perturbácie.

Seizmogramy pre neperturovaný model sú veľmi jednoduché, keďže sú tvorené v čase dobre separovanými signálmi, ktoré zodpovedajú priamej vlne a potom vlnám odrazeným od rozhrania vrstvy a polpriestoru. Seizmogramy pre perturbované modely sú zašumené v dôsledku nehomogenity vo vrstve. Miera zašumenia je vyššia pre vyššie hodnoty štandardnej odchýlky zvolenej pri generovaní náhodnej perturbácie.

V práci sme prezentovali prvú fázu prípravy na numerické modelovanie šírenia seizmických vln a seizmického pohybu v lokálnych povrchových štruktúrach. Venovali sme sa jednorozmernému prípadu, ale aby sme mohli seizmický pohyb skúmať komplexne, zovšeobecňíme problém do všetkých troch rozmerov. Ako testovaciu lokalitu použijeme Mygdónsky bazén v Grécku, v ktorom nehomogenity sedimentárnych štruktúr budeme aproximovať náhodnou perturbáciou hodnôt materiálového parametra.

Literatúra

- [1] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J., 2005. Mathematical methods for physicist, sixth edition. *Elsevier Academic Press*.
- [2] BRACEWELL, R. N., 2000. Fourier transform and its applications, third edition. *McGraw-Hill Higher Education*.
- [3] ČERVENÝ, V., 1977. Fourierova spektrální analýza. *Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze, Praha*.
- [4] ČERVENÝ, V., 1983. Spektrální analýza v geofyzice I. *Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze, Praha*.
- [5] FRANKEL, A. - CLAYTON, R. W., 1984. A finite difference simulation of wave propagation in two-dimensional random media. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 74, 2167 - 2186.
- [6] FRANKEL, A. - CLAYTON, R. W., 1986. Finite difference simulations of seismic scattering: implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *J. Geophys. Res.* 91, 6465 - 6489.
- [7] HARTZELL, S. - HARMSSEN, S. - FRANKEL, A., 2010. Effects of 3D random correlated velocity perturbation on predicted ground motion. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 100, 1425 - 1426.
- [8] HOSHIBA, M., 2000. Large fluctuation of wave amplitude produced by small fluctuation of velocity structure. *Phys. Earth Planet. Int.* 120, 201 - 217.
- [9] HVODŽARA, M. - PAŠTEKA, R., 2000. Matematické základy teórie geofyzikálnych metód II. *Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského, Bratislava*.

- [10] IMHOF, M. G. - TOKSÖZ, M. N., 1995. An approach for random media parameter estimation using seismic reflection data. *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing - ICASSP*, vol. 5, 2825 - 2828. Dostupné na <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=479433>
- [11] LIU, J. - BA, J. - MA, J. - YANG, H., 2010. An analysis of seismic attenuation in random porous media. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 53, 628 - 637.
- [12] OBERMAN, A. - CAMPILLO, M. - LAROSE, E., 2011. Numerical modelling.
- [13] ONDRÁČEK, O., 2002. Diskrétne signály a sústavy. *Slovenská technická univerzita*, Bratislava.
- [14] MOCZO, P., 1988. Fourierova transformácia a jej numerický výpočet podprogramom FCOOLR. *Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského*, Bratislava.
- [15] MOCZO, P. - KRISTEK, J. - HALADA, L., 2004. The finite-difference method for seismologist. An Introduction. *Comenius University*, Bratislava.
- [16] SAITO, T. - SATO, H. - TAKAHASHI, T., 2008. Direct simulation methods for scalar-wave envelopes in two-dimensional layered random media based on the small-angle scattering approximation. *Commun. Comput. Phys.* 3, 63-84.
- [17] SHAPIRO, S. A. - HUBRAL, P., 1998. Elastic waves in random media: fundamentals of seismic stratigraphic filtering. *Springer*.
- [18] YOON, M., 2003. Deep seismic imaging in the presence of a heterogeneous overburden: numerical modelling and case studies from the central Andes and Southern Andes. Dissertation thesis. *Freie Universität*, Berlín.

Príloha A

```
PROGRAM RANDOM_MEDIA
IMPLICIT NONE
REAL , PARAMETER :: PI=3.141592653589793
INTEGER, PARAMETER :: SP = SELECTED_REAL_KIND (6,30)
INTEGER, PARAMETER :: DP = SELECTED_REAL_KIND (13,60)
INTEGER, PARAMETER :: WP = SP
REAL :: RND, T, MIC, A, DZ, C, VSTR, DK, VAR, HUSTOTAPOLPRIESTOR, HLBKA
REAL :: HUSTOTAVRSTVA, VHALF, GRIDPOINTHLBKA
REAL (KIND=WP), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: PHI, DEN
COMPLEX (KIND=WP), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: F,B,S,M,MNEW,MI,VZ
INTEGER :: KN,N, I, ACF_FUNKCIA
INTEGER, DIMENSION(2) :: SEED
NAMELIST / PARAMETRE / KN,MIC,A, DZ,VHALF,ACF_FUNKCIA,
HUSTOTAPOLPRIESTOR
NAMELIST / VRSTVA / HLBKA , HUSTOTAVRSTVA , VSTR
!nacistame jednotlive parametre
OPEN ( 20, FILE = 'PARAMETRE.TXT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
READ ( 20, NML = PARAMETRE )
OPEN ( 30, FILE = 'VRSTVA.TXT' , FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
READ ( 30, NML = VRSTVA )
N=2**KN !dimenzia pola
!nadstavime cas na nulu
T=0.0
```

```

!inicializujeme generator nahodnych cisel
SEED = SEED + 2*INT(SECONDS(T)) !pri kazdom pokuse rozdielne nahodne
cisla
CALL RANDOM_SEED(PUT=SEED)
ALLOCATE(PHI(N)) !do pola priradime hodnoty
DO I = 1,N/2+1
CALL RANDOM_NUMBER(RND)
PHI(I) = 2*PI*RND
END DO

!doplname antisymetricky zapornu cast
DO I = 2,N/2
PHI(N/2+I) = -PHI(N/2+2-I)
END DO

!vytvorme pole s nahodnymi fazami
ALLOCATE(F(N))
DO I = 1,N
F(I) = CMPLX( COS( PHI (I) ), SIN ( PHI (I) ) )
END DO

!aby vysledok bol realny
F(1) = REAL( F (1) )
F(N/2+1) = REAL( F (N/2+1) )

!zapiseme fazovu cast do .dat suboru
DO I = 1,N
OPEN ( 100, FILE = 'RANDOM_MEDIA_F.DAT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
!zapiseme fazove spektrum do .dat suboru
WRITE (100,*) REAL( F (I) ),',',IMAG( F (I) )
END DO
CLOSE (100)

!predpis pre delta k
DK = 1/(N*DZ)

! pole hodnot vo frekvencnej oblasti dane funkciami 1-3

```

```

ALLOCATE( S (N) )
DATN ( 11, FILE = 'RANDOM_MEDIA_S.DAT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
DO I = 0,N-1
SELECT CASE (ACF_FUNKCIA)
CASE (1)
S(I+1) = CMPLX( DZ*( 2*A/( 1+ ( ( I*2*PI*DK )**2 ) *A**2 ) ) +
DZ*( 2*A/( 1+ ( ( ( I-N ) *2*PI*DK )**2 ) *A**2 ) ) ,0 )
CASE (2)
S(I+1) = CMPLX( DZ*( SQRT(PI) ) *A* EXP( -( I*PI*DK )**2 *A**2 ) +
DZ*( SQRT(PI) ) *A* EXP( -( ( I-N ) *PI*DK )**2 *A**2 ) ,0 )
CASE (3)
S(I+1) = CMPLX( DZ*( PI*A/SQRT( 1+ ( ( I*2*PI*DK )**2 ) *A**2 ) ) +
DZ*( PI*A/SQRT ( 1+ ( ( ( I-N ) *2*PI*DK )**2 ) *A**2 ) ) ,0 )
END SELECT
!zapiseme do suboru vykonove spektrum
WRITE(11,*) REAL( S (I+1) )
END DO
CLOSE(11)
!dodefinovanie S, splnenie podm b)
C = 1. / ( 1. - S(1)/N/dz )
WRITE (*,*) 'CONST = ',C
PRINT *, ""
!polozime S pre k=0 nule
S(1)=0
!kvadrat amplitudoveho spektra M
ALLOCATE ( M (N) )
OPEN ( 13, FILE = 'RANDOM_MEDIA_M.DAT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
DO I = 0,N-1
!amplitudove spektrum sa rovna odmocnine vykonove spektra nasobeneho
dimenziou pola

```



```

M(I+1) = ABS( SQRT ( (C*S (I+1) ) * N ) )
WRITE(13,*) REAL( M (i+1) ),',',IMAG( M (i+1) )
END DO
CLOSE(13)
!amplitudove spektrum vynasobene fazovym spektrom
ALLOCATE ( MNEW (N) )
OPEN ( 14, FILE = 'RANDOM_MEDIA_MNEW.DAT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
DO I = 1,N
MNEW(I)= M(I)*F(I)
WRITE(14,*) REAL( MNEW (I) ),',',IMAG( MNEW (I) )
END DO
CLOSE(14)
!perturbacia cez IFFT
ALLOCATE( MI (N) )
CALL FCOOLR( KN,MNEW,-1. ) !zavolame inverznu FFT
OPEN ( 15, FILE = 'RANDOM_MEDIA_MI.DAT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
DO I = 1,N
MI(I) = MNEW(I)/N/DZ
END DO
!dodefinovanie si pozadovanej variancie
VAR = SUM ( (REAL (MI) )**2 ) / ( N-1 )
MI = MI/SQRT(VAR)*MIC
!pole rychlosti
ALLOCATE ( VZ (N))
ALLOCATE ( DEN(N))
GRIDPOINTHLBKA = HLBKA/DZ
WRITE (*,*)'POCET BODOV POLA PRIPADAJUCICH NA VRSTVU = ',
GRIDPOINTHLBKA
PRINT *, ""

```

```

OPEN ( 16, FILE = 'RANDOM_MEDIA_VZ.DAT', FORM = 'FORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
DO I = 1,GRIDPOINTHLBKA
VZ (I) = VSTR*( 1+ MI (I) )
DEN(I) = HUSTOTAVRSTVA
END DO
DO I = GRIDPOINTHLBKA+1,N
VZ (I) = VHALF
DEN(i) = HUSTOTAPOLPRIESTOR
END DO
DO I =1,N
WRITE(16,*) REAL( VZ (I) ),',' ,IMAG( VZ (I) )
WRITE(15,*) REAL( MI (I) ),',' ,IMAG( MI (I))
END DO
CLOSE(15)
CLOSE(16)
WRITE (*,*)'STAND. ODCHYLKA = ', MIC
PRINT *,""
WRITE (*,*)'CASOVY KROK = ',( 6*DZ )/7/( MAXVAL ( REAL( VZ (:) ) ) ) )
!casovy krok
PRINT *,""
WRITE (*,*)'MAX. FREKVENCIA = ',( MINVAL (REAL( VZ (:) ) )/( 6*DZ ) ) )
!maximalna frekvencia
!subor, ktory budeme pouzivat v 1DFD_VS modele
OPEN ( 17, FILE = 'EX_02_RNM.MO', FORM = 'UNFORMATTED',
STATUS='UNKNOWN' )
WRITE (17) (DEN(I), DEN(I)*REAL ( VZ (I) )*REAL ( VZ (I) ),I = 1, N)
CLOSE (17)
END PROGRAM RANDOM_MEDIA

```