

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
KATEDRA ASTRONÓMIE, FYZIKY ZEME A METEOROLÓGIE

**ADJUNGOVANÁ TOMOGRAFIA SEIZMICKÉHO POHYBU
V LOKÁLNYCH POVRCHOVÝCH ŠTRUKTÚRACH**

2013

Filip MICHLÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
KATEDRA ASTRONÓMIE, FYZIKY ZEME A
METEOROLÓGIE

ADJUNGOVANÁ TOMOGRAFIA SEIZMICKÉHO POHYBU
V LOKÁLNYCH POVRCHOVÝCH ŠTRUKTÚRACH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	4.1.1 Fyzika
Študijný odbor:	1160 Fyzika
Pracovisko (katedra/ústav):	Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie
Vedúci diplomovej práce:	doc. Mgr. Jozef Kristek, PhD.

Pod'akovanie

Ďakujem svojmu vedúcemu, doc. Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD., za pripomienky, korekcie a pomoc pri písaní práce. Moja vďaka patrí tiež Bc. Filipovi Kubinovi za užitočné diskusie a pomoc pri spoznávaní adjungovanej tomografie.

Abstrakt

Bakalárska práca je venovaná odvodeniu matematicko-fyzikálneho aparátu adjungovanej tomografie – jednej z metód riešenia inverznej úlohy. Uvádzame spôsob, ako nájsť riešenie pre adjungovanú pohybovú rovnicu spĺňajúcu zavedené koncové podmienky. Riešením je adjungované pole, ktoré nám umožňuje výpočet objemových hostôt derivácie misfitu – kernelov. Odvádzame vzťahy pre výpočet kernelov, ktoré zodpovedajú rôznym parametrizáciám modelu, vzťahy pre výpočet misfitov a príslušných funkcií pre adjungované zdroje. Prezentujeme spôsob iteratívnej minimalizácie misfitu, v ktorom sa používajú vypočítané kernely, a ktorý vedie k nájdeniu optimálneho modelu. V závere práce uvádzame algoritmus pre stručné zhrnutie postupu riešenia inverzie použitím adjungovanej tomografie. Pri odvodzovaní vzťahov používame pre zápis zložiek vektorových veličín kartézske súradnice. Dôvodom voľby súradnicového systému je zámer použiť odvodené teoretické vzťahy na lokálne sedimentárne štruktúry (napríklad na oblasť Mygdónskeho bazénu), t.j. na prostredia s rozmermi, pre ktoré sú vhodné pravouhlé súradnice a nie je potrebné uvažovať zakrivenie zemského povrchu.

Kľúčové slová: inverzná úloha, adjungovaná tomografia, kernely, minimalizácia misfitu

Abstract

This Bachelor thesis is devoted to derivation of mathematical and physical apparatus of adjoint tomography – one of the methods for solving inverse problem. We show how to find a solution for adjoint equation of motion, which satisfies imposed terminal conditions. The solution is the adjoint wave field, which allows us to compute the volumetric densities of misfit functional derivative – the Fréchet kernels. We derive the equations for kernels corresponding to different model parameterizations, the equations for computation misfits and the relevant adjoint sources functions. We present a method of iterative misfit functional minimization. This method uses the computed kernels and leads to finding an optimal model. At the end of the thesis we provide an algorithm as a brief summary of the procedure for solving inverse problem using adjoint tomography. When deriving equations, we use Cartesian coordinate system. The reason is that we intend to apply derived equations to local sedimentary structures (for example the Mygdonian basin area), i.e. the areas with dimensions that allow us to use Cartesian coordinate system so that we do not need to worry about the earth's surface curvature.

Key words: inverse problem, adjoint tomography, kernels, minimization of misfit functional

Obsah

Úvod	7
1 Priama a inverzná úloha v seizmológii.....	8
2 Adjungovaná tomografia.....	9
2.1 Adjungovaná metóda riešenia inverzie	9
2.2 Adjungovaná metóda v seizmológii	9
2.3 Odvodenie adjungovanej rovnice	10
2.3.1 Krátka poznámka k počítaniu prírastku misfitu cez výpočet funkcie $\delta\mathbf{u}$	12
2.3.2 Dôkazy platnosti vzťahov (2.19) a (2.20)	13
2.4 Inverzia zdroja	14
2.5 Fréchetove kernely	15
2.5.1 Ilustrácie tvarov kernelov	16
3 Odvodenie adjungovaného operátora	17
3.1 Riešenie adjungovanej pohybovej rovnice	20
4 Vyjadrenie Fréchetových kernelov pre niektoré modelové parametre	21
4.1 Kernely pre parametre ρ, λ, μ	22
4.2 Kernely pre parametre ρ, v_S, v_P	25
4.3 Kernely pre parametre ρ, κ, μ	26
5 Základné misfity v adjungovanej tomografii a príslušné funkcie adjungovaných zdrojov	27
5.1 Derivácia vlnového poľa a adjungovaná Greenova funkcia.....	28
5.2 L2 norma rozdielov vektorov posunutia (waveform difference).....	29
5.3 Časový posun vektora posunutia (Cross-correlation time shifts).....	30
5.4 L2 norma amplitúdy	32
6 Minimalizácia funkcionálu	34
6.1 Minimá, konvexnosť a (ne)jednoznačnosť riešenia inverznej úlohy	34
6.1.1 Lokálne a globálne minimá funkcionálu.....	34
6.1.2 Konvexnosť funkcionálu.....	35
6.2 Iteratívna metóda minimalizácie funkcionálu	36
6.2.1 Smer najväčšieho poklesu funkcionálu.....	36

6.2.2	Optimálna dĺžka kroku.....	38
6.3	Konvergencia hľadania optimálneho modelu minimalizáciou misfitu	40
6.3.1	Multi-scale approach.....	41
7	Algoritmus riešenia inverzie použitím adjungovanej metódy	42
	Záver	43
	Zoznam použitej literatúry	44

Úvod

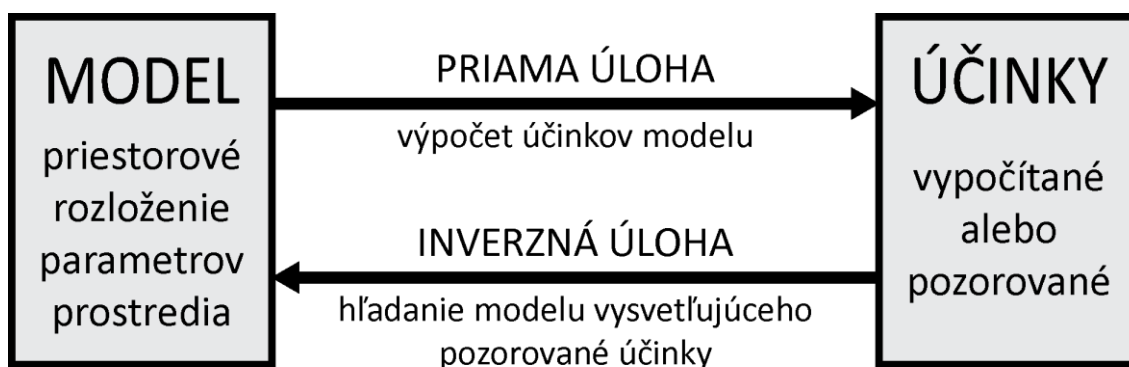
Seizmológia ako súčasť geofyziky je veda zaoberajúca sa zemetraseniami s nimi súvisiacimi javmi. Jej vznik súvisí s dávnou snahou ľudí vysvetliť pôvod prírodných zemetrasení. Prvým impulzom, ktorý vzbudil záujem o štúdium – o objasnenie príčin vzniku zemetrasení bolo veľké zemetrasenie v Lisabone v roku 1755. Následne John Michell v roku 1761 ako prvý prišiel s vysvetlením, že zemetrasenia vznikajú vnútri Zeme a sú to vlny spôsobené „presúvaním skál hlboko pod povrchom“. Ďalším z významných výsledkov seizmológie je objavenie vnútornej štruktúry Zeme. Na prelome 19. a 20. storočia boli zistené zemské jadro, plášť a kôra. Štúdiom pohybovej rovnice kontinua boli nájdené analytické riešenia pre homogénne neohraničené prostredie, ktoré ukázali existenciu P (pozdĺžnych, primárnych) a S (pričných, sekundárnych) vln. Dodnes sa seizmológia zaoberá riešením tejto diferenciálnej rovnice. Pre riešenie v zložitých realistických prostrediach sa používajú rôzne numerické metódy. Okrem týchto priamych úloh sa tiež rieši inverzná úloha (skrátene inverzia) – skúma sa vnútorná štruktúra Zeme na základe seizmogramov získaných meraniami na zemskom povrchu. Jedným zo spôsobov riešenia inverznej úlohy je adjungovaná metóda (metóda adjungovanej tomografie). Tento koncept uviedol do seizmológie Tarantola (1984; 1988). V súčasnosti sa táto metóda používa na rôznych škálach na rozličné účely – od exploračnej geofyziky po tomografiu celého zemského telesa.

Za cieľ tejto práce sme si zvolili odvodenie matematicko-fyzikálneho aparátu adjungovanej tomografie a popis postupu riešenia inverzie touto metódou. Teóriu začíname odvádzať od úplných základov. V kapitolách sa podrobnejšie venujeme jednotlivým krokom a ukazujeme viaceré alternatívy pre jednotlivé kroky. Pri odvodzovaní vzťahov používame pre zápis zložiek vektorových veličín kartézské súradnice. Dôvodom voľby súradnicového systému je zámer použiť odvodené teoretické vzťahy na lokálne sedimentárne štruktúry (napríklad na oblasť Mygdónskeho bazénu), t.j. na prostredia s rozmermi, pre ktoré sú vhodné pravouhlé súradnice a nie je potrebné uvažovať zakrivenie zemského povrchu.

1 Priama a inverzná úloha v seizmológii

Na začiatok rozdelíme úlohy seizmológie na *priamu úlohu* a *inverznú úlohu*.

Pre názorné vysvetlenie, v čom spočívajú obe tieto úlohy, slúži tiež **Obr. 1-1**.



Obr. 1-1 Schematický náčrt inverznej (inverse problem) a priamej (direct/ forward) úlohy, resp. problému.

Model predstavuje náš popis skúmaného prostredia, v ktorom vznikajú a šíria sa seizmické vlny. Ide najmä o priestorové rozloženie parametrov, ktorými popisujeme tento model.

Priama úloha, resp. riešenie priameho problému, je výpočet účinkov pôsobiacich síl na model. V našom prípade účinkami chápeme vlnové pole závislé od polohy a času, ktoré nám dáva informáciu o vektore posunutia.

Inverzná úloha (inverzia), ako kontrast k priamej úlohe, predstavuje hľadanie modelu, ktorý vysvetľuje pozorované efekty.

Adjungovaná metóda riešenia inverznej úlohy je špeciálny postup riešenia inverzie, ktorý používa algoritmy priamej úlohy na výpočet vlnových polí a tiež využíva informácie z celého objemu modelu.

V ďalších kapitolách budeme sledovať výklad a odvodenia prezentované v knihe *Fichtner (2011)*.

2 Adjungovaná tomografia

2.1 Adjungovaná metóda riešenia inverzie

Uvažujme nejakú fyzikálnu veličinu \mathbf{u} , ktorú meriame na určitom mieste v istom časovom intervale, a ktorá je výstupom nejakého dynamického systému. Nech táto veličina závisí od polohy \mathbf{r} ($r \in \mathbf{G} \subset \mathbb{R}^3$), času $t \in \mathbf{T} = \langle t_0, t_1 \rangle \subset \mathbb{R}$ a modelu (modelových parametrov) $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$, od ktorých závisí správanie systému. \mathfrak{M} predstavuje množinu modelových parametrov, ktorá obsahuje všetky prípustné hodnoty týchto parametrov). Vektor \mathbf{m} môžeme zapísať nasledovne

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = (m_1(\mathbf{r}), m_2(\mathbf{r}), m_3(\mathbf{r}), \dots), \quad (2.1)$$

z čoho je zrejmé, že \mathbf{m} obsahuje celú informáciu o priestorovom rozložení modelových parametrov skúmaného systému (napríklad môže ísť o hustotu, rýchlosti P a S vln a pod.). Tieto modelové parametre dáva do vzťahu s pozorovanou veličinou \mathbf{u} teória, ktorú bude symbolizovať operátor \mathbb{L} :

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \mathbf{f}, \quad (2.2)$$

kde operátor \mathbb{L} pôsobí na pozorovanú veličinu \mathbf{u} , model \mathbf{m} . Symbol \mathbf{f} je hustota vonkajších síl.

2.2 Adjungovaná metóda v seizmológii

V seizmológii predstavuje veličina \mathbf{u} vlnové pole, model \mathbf{m} je priestorové rozloženie materiálových parametrov modelu a teóriu predstavuje pohybová rovnica kontinua:

$$\rho(\mathbf{r}) \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

kde pre tenzor napätia $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ platí vzťah:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \sum_{k,l} \overline{\overline{C}}_{ijkl} \mathcal{E}_{kl} = \sum_{k,l} \overline{\overline{C}}_{ijkl} u_{k,l} \equiv \overline{\overline{C}} : (\nabla \mathbf{u}), \quad (2.4)$$

a $\mathbb{L}(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ je teda:

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad (2.5)$$

kde $\mathbf{m} = (\rho, \bar{\bar{C}})$. Materiálové parametre sú: hustota $\rho(\mathbf{r})$ a tenzor elastických koeficientov $\bar{\bar{C}}(\mathbf{r})$. V prípade, ak ide o elastické kontinuum, $\bar{\bar{C}}(\mathbf{r})$ nie je funkciou času, čo však nemusí platiť pre iné reologické modely kontinua ako napr. visko-elastický model.

Naším cieľom je nájsť také materiálové parametre \mathbf{m} , aby sa systém správal optimálne, t.j. nájsť model, ktorý bude čo najlepšie vysvetľovať namerané dáta. Túto úlohu (úlohu optimalizácie systému) prevedieme na hľadanie minima funkcionálu $\chi(\mathbf{m}) = \chi[\mathbf{u}(\mathbf{m})]$, ktorý bude určovať misfit, teda kvantifikovať nesúlad medzi teoretickou predikciou $\mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t)$ ¹ a nameranými dátami $\mathbf{u}^0(\mathbf{r}, t)$. Optimálne správanie systému potom bude znamenať, že sme našli taký model \mathbf{m} , pre ktorý nadobúda funkcionál misfitu (skrátene len misfit) minimum.

Ako príklad uvedieme misfit, ktorý kvantifikuje kvadrát rozdielu \mathbf{u} a \mathbf{u}^0 , v mieste prijímača \mathbf{r}^p , kde boli namerané dáta \mathbf{u}^0 :

$$\chi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} [\mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{r}, t)]^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p) dV dt. \quad (2.6)$$

Všeobecne budeme misfit $\chi(\mathbf{m})$ zapisovať v tvare:

$$\chi(\mathbf{m}) = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \chi_1[\mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t), \mathbf{u}^0(\mathbf{r}, t)] dV dt = \langle \chi_1(\mathbf{m}) \rangle, \quad (2.7)$$

kde sme zaviedli označenie $\langle \cdot \rangle$ pre integráciu cez časový interval \mathbf{T} a priestor \mathbf{G} .

2.3 Odvodenie adjungovanej rovnice

Prírastok misfitu v smere $\delta\mathbf{m}$, $\delta\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$, pri zmene modelových parametrov z \mathbf{m} na $\mathbf{m} + \varepsilon\delta\mathbf{m}$ aproximujeme diferenciálom misfitu $\chi(\mathbf{m})$:

$$\nabla_m \chi(\mathbf{m}) \delta\mathbf{m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\chi(\mathbf{m} + \varepsilon\delta\mathbf{m}) - \chi(\mathbf{m})]^2. \quad (2.8)$$

¹ \mathbf{m} predstavuje parameter, preto je bodkočiarkou oddelený od nezávislých premenných funkcie \mathbf{u} .

² $\nabla_m \chi(\mathbf{m})$ je Fréchetová derivácia misfitu pre model \mathbf{m} , pričom v ďalšom texte budeme takéto derivácie označovať len $\nabla_m \chi$ - bez označenia modelu, resp. bodu, v ktorom túto deriváciu počítame.

$\nabla_m \chi \delta\mathbf{m}$ pre infinitezimálne $\delta\mathbf{m}$ je diferenciál, ale tento zápis možno tiež chápať ako najlepšiu lineárnu aproximáciu zobrazenia $\chi(\mathbf{m})$ (v našom prípade je zobrazením funkcionál vyjadrujúci misfit) v okolí bodu \mathbf{m} , t.j. lineárne zobrazenie $\varphi: \mathbf{m} \rightarrow K \mathbf{m}$, kde $K = \nabla_m \chi$.

Diferenciál $\nabla_m \chi \delta \mathbf{m}$ misfitu $\chi[\mathbf{u}(\mathbf{m})]$, ako zloženého zobrazenia, môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \nabla_u \chi \delta \mathbf{u} = \langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle, \quad (2.9)$$

pričom

$$\delta \mathbf{u} := \nabla_m \mathbf{u} \delta \mathbf{m} \quad (2.10)$$

je infinitezimálna zmena \mathbf{u} pri zmene modelu o $\delta \mathbf{m}$. Zložitosť rovnice (2.9) spočíva v určení $\delta \mathbf{u}$ ³.

Zdiferencujeme rovnicu $\mathbb{L}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \mathbf{f}$

$$\nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} + \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Pravá strana rovnice (2.11) je rovná $\mathbf{0}$, pretože \mathbf{f} nezávisí na modelových parametroch.

V ďalšom kroku pre násobíme (2.11) ľubovoľnou funkciou \mathbf{u}^\dagger a zintegrujeme cez $\mathbf{T} \times \mathbf{G}$:

$$\langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

Spočítaním rovníc (2.9) a (2.12) dostávame:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle \quad (2.13)$$

Vzťah (2.13) môžeme upraviť použitím adjungovaných operátorov $\nabla_u \chi_1^\dagger$ a $\nabla_u \mathbb{L}^\dagger$, ktoré sú definované:

$$\langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u \chi_1^\dagger \rangle \quad (2.14)$$

$$\langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger \rangle, \quad (2.15)$$

pre ľubovoľné funkcie \mathbf{u}^\dagger a $\delta \mathbf{u}$. Takže dostávame:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla_u \chi_1^\dagger + \nabla_u \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger) \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle. \quad (2.16)$$

Zo vzťahu (2.16) vieme eliminovať $\delta \mathbf{u}$, ak nájdeme funkciu \mathbf{u}^\dagger splňajúcu rovnosť

$$\nabla_u \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger = -\nabla_u \chi_1^\dagger. \quad (2.17)$$

Vzťah (2.17) sa nazýva *adjungovaná rovnica*, \mathbf{u}^\dagger a $-\nabla_u \chi_1^\dagger$ sú *adjungované pole* a *adjungovaný zdroj*. Ak nájdeme riešenie \mathbf{u}^\dagger adjungovanej rovnice, potom prírastok misfitu vieme určiť z nasledujúceho vzťahu:

³ Krátka poznámka ohľadom počítania prírastku misfitu výpočtom $\delta \mathbf{u}$ je obsahom nasledujúcej podkapitoly.

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle. \quad (2.18)$$

V prípade, ak je operátor \mathbb{L} lineárny v \mathbf{u} , platí:

$$\nabla_u \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger = \mathbb{L}^\dagger (\mathbf{u}^\dagger). \quad (2.19)$$

Poznámka: Analogická rovnosť platí aj pre operátor \mathbb{L} a pre priame vlnové pole \mathbf{u} :

$$\nabla_u \mathbb{L} \mathbf{u} = \mathbb{L}(\mathbf{u}). \quad (2.20)$$

Pre lineárne operátory \mathbb{L} sa teda adjungovaná rovnica zjednoduší na tvar:

$$\mathbb{L}^\dagger (\mathbf{u}^\dagger) = -\nabla_u \chi_1^\dagger. \quad (2.21)$$

2.3.1 Krátka poznámka k počítaniu prírastku misfitu cez výpočet funkcie $\delta \mathbf{u}$

Ako ďalej ukážeme, na výpočet derivácie misfitu budeme stále potrebovať dva rovnako náročné simulácie na výpočet vlnových polí. Funkcia $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, daná vzťahom (2.10), vyjadruje lineárne priblíženie zmeny vlnového poľa pri zmene modelu $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ o infinitezimálny krok $\delta \mathbf{m}(\mathbf{r})$.

Rovnako dvoma výpočtami vlnových polí by sme vedeli vypočítať funkciu $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. To by sme si však vopred museli zvoliť funkciu $\delta \mathbf{m}(\mathbf{r})$ vyjadrujúcu malú zmenu modelových parametrov v každom bode priestoru \mathbf{G} . V takom prípade by sme $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ určili ako rozdiel vlnových polí zodpovedajúcich modelom \mathbf{m} a $\delta \mathbf{m}$:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla_m \mathbf{u} \delta \mathbf{m} \approx \mathbf{u}(\mathbf{m} + \delta \mathbf{m}; \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t). \quad (2.22)$$

Tým by sme však vypočítali len prírastok vo vopred zvolenom smere $\delta \mathbf{m}$ ale, ako ďalej ukážeme, je možné pomocou adjungovanej metódy získať z dvoch výpočtov – výpočtu priameho a adjungovaného poľa – oveľa viac informácií (napríklad vypočítame deriváciu misfitu, z ktorej následne vieme určiť aj jeho prírastok v ľubovoľnom smere $\delta \mathbf{m}$).

2.3.2 Dôkazy platnosti vzťahov (2.19) a (2.20)

Najprv dokážeme platnosť rovnosti (2.20) a potom ukážeme, že ak je operátor lineárny, tak aj k nemu adjungovaný operátor je lineárny.

Definícia pre Fréchetovú deriváciu:

$$\lim_{\|\delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbb{L}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \mathbb{L}(\mathbf{u}) - \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u}\|}{\|\delta \mathbf{u}\|} = 0, \quad (2.23)$$

kde $\nabla_u \mathbb{L}$ je Fréchetová derivácia $\mathbb{L}(\mathbf{u})$ (v bode \mathbf{u}). Využitím predpokladu o lineárnosti operátora \mathbb{L} dostávame:

$$\lim_{\|\delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbb{L}(\mathbf{u}) + \mathbb{L}(\delta \mathbf{u}) - \mathbb{L}(\mathbf{u}) - \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u}\|}{\|\delta \mathbf{u}\|} = \lim_{\|\delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbb{L}(\delta \mathbf{u}) - \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u}\|}{\|\delta \mathbf{u}\|} = 0. \quad (2.24)$$

Aby bola táto rovnosť splnená, musí byť čitateľ rovný nule, teda:

$$\mathbb{L}(\delta \mathbf{u}) - \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.25)$$

Úpravou (2.25) a zmenou označenia funkcie dostávame:

$$\mathbb{L}(\mathbf{u}) = \nabla_u \mathbb{L} \mathbf{u}. \quad (2.26)$$

Tým je dokázaná platnosť (2.20).

Poznámka: Alternatívne možno spraviť dôkaz dosadením $\mathbb{L}(\delta \mathbf{u})$ do definície (2.23) Fréchetovej derivácie namiesto $\nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u}$ Fréchetovej derivácie, teda priamo overiť platnosť tvrdenia (2.20).

Majme lineárny operátor \mathbf{A} a funkcie φ, ψ . Adjungovaný operátor k \mathbf{A} označíme \mathbf{A}^\dagger a definujeme vzťahom:

$$\langle \psi (\mathbf{A} \varphi) \rangle = \langle \varphi (\mathbf{A}^\dagger \psi) \rangle. \quad (2.27)$$

Nech pre funkciu ψ platí: $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$, kde c_1 a c_2 sú konštanty. Potom, ak má \mathbf{A}^\dagger byť lineárny, máme ukázať, že platí:

$$\begin{aligned} \langle \varphi (\mathbf{A}^\dagger \psi) \rangle &= \langle \varphi \mathbf{A}^\dagger (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) \rangle \\ &= c_1 \langle \varphi (\mathbf{A}^\dagger \psi_1) \rangle + c_2 \langle \varphi (\mathbf{A}^\dagger \psi_2) \rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

Využitím lineárnosti integrálu môžeme napísať:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}) \rangle &= \langle (c_1\boldsymbol{\psi}_1 + c_2\boldsymbol{\psi}_2)(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}) \rangle \\
&= c_1 \langle \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}) \rangle + c_2 \langle \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}) \rangle \quad . \\
&= c_1 \langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}^\dagger\boldsymbol{\psi}_1) \rangle + c_2 \langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}^\dagger\boldsymbol{\psi}_2) \rangle
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Z rovníc (2.27) až (2.29) potom vyplýva, že ak \mathbf{A} je lineárny, potom aj adjungovaný operátor k \mathbf{A} , teda \mathbf{A}^\dagger , musí byť lineárny.

Nakoniec, ak je \mathbb{L} lineárny operátor, aj \mathbb{L}^\dagger musí byť lineárny, a z toho následne vyplýva aj dokazovaná rovnosť (2.19).

2.4 Inverzia zdroja

Zo vzťahu (2.2) je zrejmé, že vlnové pole \mathbf{u} závisí aj na pravej strane rovnice, od zdroja \mathbf{f} . V tejto kapitole ukážeme, že podobným postupom ako v kapitole 2.3 môžeme odvodiť vzťah na výpočet prírastku misfitu pri zmene zdroja o $\delta\mathbf{f}$.

Máme teda vlnové pole dané funkciou $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}, \mathbf{m}; \mathbf{r}, t)$ a misfit $\chi(\mathbf{m}, \mathbf{f}) = \chi[\mathbf{u}(\mathbf{f}, \mathbf{m}; \mathbf{r}, t)]$. Zaujímame sa o zmenu misfitu pri zmene \mathbf{f} o $\delta\mathbf{f}$, preto vyjadríme diferenciál χ :

$$\nabla_{\mathbf{f}}\chi\delta\mathbf{f} = \nabla_{\mathbf{u}}\chi\delta\mathbf{u} = \langle \nabla_{\mathbf{u}}\chi_1\delta\mathbf{u} \rangle, \tag{2.30}$$

kde $\delta\mathbf{u}$ je definované:

$$\delta\mathbf{u} := \nabla_{\mathbf{f}}\mathbf{u}\delta\mathbf{f}. \tag{2.31}$$

Zavedieme nový operátor, ktorý bude zahŕňať aj hustotu vonkajších síl \mathbf{f} , a vyjadríme vzťah (2.2) pomocou tohto operátora:

$$\tilde{\mathbb{L}}(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \mathbf{f}) = \mathbb{L}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) - \mathbf{f}, \tag{2.32}$$

$$\tilde{\mathbb{L}}(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \mathbf{f}) = \mathbf{0}. \tag{2.33}$$

Rovnicu (2.33) zderivujeme podľa \mathbf{f} , pričom netreba zabudnúť, že aj \mathbf{u} je funkciou \mathbf{f} :

$$\nabla_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbb{L}}\delta\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{f}}\tilde{\mathbb{L}}\delta\mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{2.34}$$

Zopakujeme postup z kapitoly 2.3, teda rovnicu (2.34) pre násobíme funkciou \mathbf{u}^\dagger a zintegrujeme cez $\mathbf{T} \times \mathbf{G}$:

$$\langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbb{L}}\delta\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_{\mathbf{f}}\tilde{\mathbb{L}}\delta\mathbf{f} \rangle = 0. \tag{2.35}$$

Sčítaním rovníc (2.30) , (2.35) a následným derivovaním operátora $\tilde{\mathbb{L}}$ dostávame:

$$\begin{aligned}\nabla_f \chi \delta \mathbf{f} &= \langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \tilde{\mathbb{L}} \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_f \tilde{\mathbb{L}} \delta \mathbf{f} \rangle \\ &= \langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \delta \mathbf{f} \rangle\end{aligned}\quad (2.36)$$

Opäť využijeme adjungované operátory $\nabla_u \chi_1^\dagger$ a $\nabla_u \mathbb{L}^\dagger$ na úpravu rovnice (2.36):

$$\nabla_f \chi \delta \mathbf{f} = \langle \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla_u \chi_1^\dagger + \nabla_u \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger) \rangle - \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \delta \mathbf{f} \rangle. \quad (2.37)$$

Zo vzťahu (2.37) vidíme, že rovnako ako pri inverzii modelu, dostávame pre prírastok misfitu pri zmene zdroja v smere $\delta \mathbf{f}$ vzťah bez $\delta \mathbf{u}$ (2.38), a to pri splnení tej istej podmienky – nájdení riešenia adjungovanej rovnice (2.17).

$$\nabla_f \chi \delta \mathbf{f} = -\langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \delta \mathbf{f} \rangle \quad (2.38)$$

2.5 Fréchetove kernely

Fréchetove alebo tiež citlivostné kernely (v niektorých článkoch sa vyskytujú aj názvy *event kernels* a *(banana-doughnut) sensitivity kernels*, druhý z názvov hovorí aj o typickom tvare Fréchetových kernelov v homogénnych prostrediach) sú definované ako objemové hustoty Fréchetovej derivácie $\nabla_m \chi$:

$$K_m(\mathbf{r}) := \frac{d}{dV} \nabla_m \chi = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} dt. \quad (2.39)$$

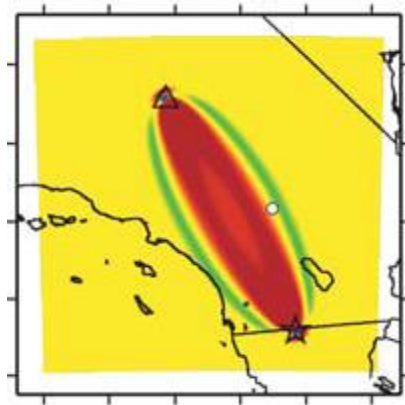
Využitím definičného vzťahu (2.39) môžeme vyjadriť rovnosť (2.18) takto:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \int_{\mathbf{G}} K_m(\mathbf{r}) \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}) dV. \quad (2.40)$$

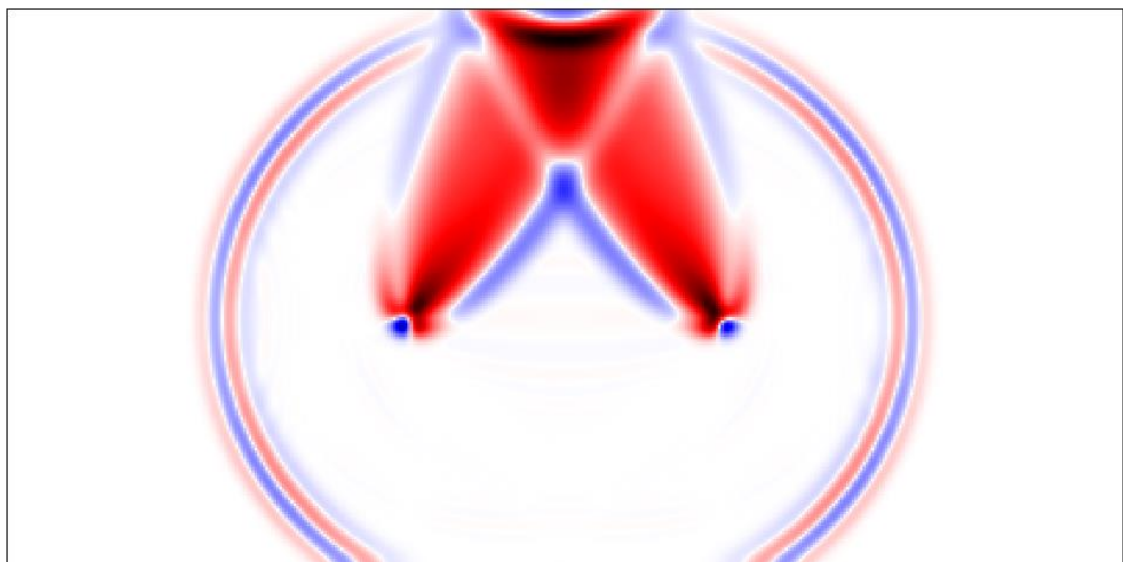
Z predošlých dvoch vzťahov môžeme vidieť aký význam majú Fréchetove kernely. Ide o deriváciu príspevku k misfitu v danom mieste. Čím väčšia bude hodnota tejto derivácie v danom mieste, tým väčší bude prírastok k celkovému diferenciálu misfitu $\nabla_m \chi \cdot \delta \mathbf{m}$ pri fixovanom vektore zmeny modelových parametrov $\delta \mathbf{m}(\mathbf{r})$ v tomto mieste. Z predošlej vety je zrejmý dôvod alternatívneho názvu pre Fréchetove kernely, a to citlivostné kernely (z angl. *sensitivity kernels*). Po vypočítaní kernelov pre jednotlivé modelové parametre v priestore \mathbf{G} dostaneme prírastok misfitu integráciou jednotlivých príspevkov cez tento priestor, čo je vyjadrené vzťahom (2.40).

Vypočítané kernely závisia na voľbe konkrétneho misfitu, a to cez adjungované pole, ktoré získame riešením adjungovanej rovnice so zdrojom určeným práve výberom misfitu.

2.5.1 Ilustrácie tvarov kernelov



Obr. 2-1: Ilustrácia typického tvaru kernelu (*banana-doughnut*) medzi prijímačom (trojuholník) a zdrojom (hviezda). *Doughnut* – kruhový tvar – by sme mohli vidieť v piečnom reze takéhoto kernelu vďaka jeho rotačnej symetrii. (Tape *et al.*, 2007)



Obr. 2-2: Časť kernelu (hore je voľný povrch), na ktorej možno vidieť interakciu vln priameho a adjungovaného poľa odrazených od voľného povrchu. Zdroj a prijímač sú vľavo a vpravo od stredu obrázka. (Kubina, F. 2013)

3 Odvodenie adjungovaného operátora

Výsledkom tejto kapitoly bude rovnica definujúca adjungované pole, ktoré má kľúčovú úlohu v adjungovanej tomografii.

Pripomeňme definičný vzťah pre adjungovaný operátor (2.15): $\langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger \rangle$. Vychádzajúc z tohto vzťahu odvodíme k operátoru $\nabla_u \mathbb{L}$ adjungovaný operátor $\nabla_u \mathbb{L}^\dagger$. Pri odvodzovaní použijeme počiatkové a okrajové podmienky:

$$\mathbf{u}|_{t \leq t_0} = \dot{\mathbf{u}}|_{t \leq t_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}|_{\mathbf{r} \in \partial G} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Budeme sa snažiť v integráloch dostať \mathbf{u} bez derivácií. Dôvod je zrejmy definičného vzťahu adjungovaného operátora.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \mathbf{u} \rangle &= \int_{\mathbf{T}G} \int \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_u \mathbb{L} \mathbf{u} dV dt = \int_{\mathbf{T}G} \int \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbb{L}(\mathbf{u}) dV dt = \\ &= \int_{\mathbf{T}G} \int \mathbf{u}^\dagger \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV dt - \int_{\mathbf{T}G} \int \mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) dV dt = I_1 - I_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Za operátor $\mathbb{L}(\mathbf{u})$ sme dosadili zo vzťahu (2.5) a prepísali ako rozdiel dvoch integrálov, ktoré teraz budeme osobitne počítať. Použitím per-partes dostaneme:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbf{G}} \rho \left(\int_{\mathbf{T}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \ddot{\mathbf{u}} dt \right) dV = \int_{\mathbf{G}} \rho (\mathbf{u}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}})|_{t=t_1} dV - \int_{\mathbf{G}} \rho (\mathbf{u}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}})|_{t=t_0} dV \\ &\quad - \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{T}} \rho \dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}} dt dV = \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vďaka počiatkovým podmienkam (3.1) bude druhý člen rovný nule. Na tretí člen použijeme opäť per-partes:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{\mathbf{G}} \rho (\mathbf{u}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}})|_{t=t_1} dV - \int_{\mathbf{G}} \rho (\dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \mathbf{u})|_{t=t_1} dV + \int_{\mathbf{G}} \rho (\dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \mathbf{u})|_{t=t_0} dV \\ &\quad + \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{T}} \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^\dagger dt dV. \end{aligned} \quad (3.4)$$

V poslednom výraze je tretí člen taktiež rovný nule (z počiatkových podmienok). Posledný člen obsahuje \mathbf{u} bez derivácií, teda tak ako sme chceli. Zavedením koncových podmienok pre adjungované pole:

$$\mathbf{u}^\dagger \Big|_{t \geq t_1} = \dot{\mathbf{u}}^\dagger \Big|_{t \geq t_1} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

vynulujeme vo výraze (3.4) aj prvé dva členy. Prvý integrál, a teda prvá časť adjungovaného operátora je rovná:

$$I_1 = \int \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^\dagger dt dV . \quad (3.6)$$

Ďalej budeme upravovať druhý integrál. Stratégia je nasledovná: odvodíme si rovnosť, v ktorej bude väčšina členov v tvare divergencie nejakého výrazu, z tejto rovnosti dosadíme za podintegrálnu funkciu integrálu I_2 . Následne na členy s divergenciou použijeme Gaussovu vetu.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}}) &= \sum_{i,j} \partial_i (u_j^\dagger \cdot \sigma_{ij}) = \sum_{i,j} [(\partial_i u_j^\dagger) \cdot \sigma_{ij} + u_j^\dagger \cdot \sigma_{ij,i}] \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) \cdot \overline{\overline{\sigma}} + \mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) = (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) \cdot \overline{\overline{C}} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podobne dostaneme aj:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \overline{\overline{C}} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger), \quad (3.8)$$

kde $\overline{\overline{\sigma}}^\dagger$ je tenzor napätia adjungovaného vlnového poľa; $\overline{\overline{\sigma}}^\dagger = \overline{\overline{C}} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger)$. Odčítaním rovníc(3.7), (3.8) dostávame:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}}) - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger) &= (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) \cdot \overline{\overline{C}} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \overline{\overline{C}} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) \\ &\quad + \mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vďaka symetrii tenzora $\overline{\overline{C}}$ platí rovnosť prvých dvoch členov na pravej strane, teda ich rozdiel je rovný nule. Člen z podintegrálnej funkcie I_2 je teda rovný výrazu:

$$\mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) = \nabla \cdot (\mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}}) - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \int_{\mathbf{TG}} \mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) dV dt = \int \int_{\mathbf{TG}} \nabla \cdot (\mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}}) dV dt \\ &\quad - \int \int_{\mathbf{TG}} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger) dV dt + \int \int_{\mathbf{TG}} \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}^\dagger) dV dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Použitím Gaussovej vety na prvé dva členy dostaneme:

$$I_2 = \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\partial \mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt - \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\partial \mathbf{G}} \mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger \cdot \mathbf{n} dS \right) dt + \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger \right) dV dt, \quad (3.12)$$

kde $\partial \mathbf{G}$ je označenie plochy ohraničujúcej objem \mathbf{G} a \mathbf{n} je normálový vektor k tejto ploche. Podľa okrajových podmienok je napätie na okraji, teda ploche $\partial \mathbf{G}$ rovné nule.

Analogické okrajové podmienky zavedieme aj pre napätie v adjungovanom poli:

$$\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger \Big|_{\mathbf{r} \in \partial \mathbf{G}} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

V integráli I_2 budú teda prvé dva členy rovné nule a výsledný tvar integrálu je:

$$I_2 = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger \right) dV dt. \quad (3.14)$$

Oba integrály dosadíme späť do vzťahu (3.2) a dostaneme:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger \rangle &= \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{T}} \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^\dagger dt dV - \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger \right) dV dt \\ &= \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{T}} \mathbf{u} \cdot \left(\rho \ddot{\mathbf{u}}^\dagger - \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger \right) dt dV. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Z posledného vzťahu dostávame adjungovaný operátor $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbb{L}^\dagger$, ktorý je teda daný vzťahom:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbb{L}^\dagger \mathbf{u}^\dagger = \rho \ddot{\mathbf{u}}^\dagger - \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger = \rho \ddot{\mathbf{u}}^\dagger - \nabla \cdot \left[\overline{\overline{\mathbf{C}}} : (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) \right]^4. \quad (3.16)$$

Vzťah (2.17) teraz môžeme prepísať do tvaru pohybovej rovnice pre adjungované pole, z ktorého je tiež vidieť, že operátor $-\nabla_{\mathbf{u}} \chi_1^\dagger$ je adjungovaný zdroj ako sme skôr tvrdili:

$$\rho(\mathbf{r}) \ddot{\mathbf{u}}^\dagger(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\dagger(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{u}} \chi_1^\dagger(\mathbf{r}, t). \quad (3.17)$$

⁴ označenie $A:B$ budeme používať pre sumáciu: $A : B \equiv \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$

3.1 Riešenie adjungovanej pohybovej rovnice

Riešenie adjungovanej rovnice numerickým výpočtom začínajúc v čase t_0 by sme nevedeli splniť koncové podmienky (3.5) pre adjungované vlnové pole $\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, t)$. Aby sme vedeli splniť tieto podmienky, ktoré sme si sami určili v snahe dosiahnuť výslednú rovnicu v tvare analogickom pohybovej rovnici pre priame pole $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, budeme začínať výpočet v konečnom čase t_1 a budeme postupovať opačne v čase, teda $t_1 \rightarrow t_0$.

Teraz ukážeme, že vyššie popísaným postupom dostaneme správne riešenie rovnice (3.17). Použijeme substitúciu $t = t_1 - \tau$; $t \in \mathbf{T} = \langle t_0, t_1 \rangle \Rightarrow \tau \in \langle 0, t_1 - t_0 \rangle$, pričom $dt^2 = d\tau^2$, preto prvý člen (3.17) nezmení znamienko. $\mathbf{u}^\dagger(t) \rightarrow \mathbf{u}^\dagger(t_1 - \tau) \equiv \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tau)$, a teda počiatočné podmienky pre $\tilde{\mathbf{u}}^\dagger$ sú: $\mathbf{u}^\dagger|_{t=t_1} = \mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}^\dagger|_{\tau=0} = \mathbf{0}$; $\dot{\mathbf{u}}^\dagger|_{t=t_1} = \mathbf{0} \rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^\dagger|_{\tau=0} = \mathbf{0}$.

Dôležité je pri simulácii zameniť chod času pre vypočítanú zdrojovú funkciu: $-\nabla_u \chi_1^\dagger(t) \equiv \mathbf{f}^\dagger(t) \rightarrow \mathbf{f}^\dagger(t_1 - \tau) \equiv \tilde{\mathbf{f}}^\dagger(\tau)$. Riešime teda rovnicu $\rho \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^\dagger - \nabla \cdot \overline{\tilde{\sigma}}^\dagger = \tilde{\mathbf{f}}^\dagger$ s nulovými počiatočnými podmienkami. Hľadané vlnové pole $\mathbf{u}^\dagger(t)$ dostaneme zámenou $\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tau) \rightarrow \mathbf{u}^\dagger(t)$, $\tau = t_1 - t$, pričom smer plynutia času τ je $\tau : t_1 - t_0 \rightarrow 0$.

4 Vyjadrenie Fréchetových kernelov pre niektoré modelové parametre

Obsahom tejto kapitoly je odvodenie vzťahov pre výpočet Fréchetových kernelov pre zvolené parametrizácie modelu.

Pripomeňme definičný vzťah (2.39): $K_m(\mathbf{r}) := \int_{\mathbf{T}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} dt$ a vzťah (2.40):

$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \int_{\mathbf{G}} K_m(\mathbf{r}) \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}) dV$ pre výpočet prírastku misfitu, z ktorých budeme vychádzať. Keďže vo všeobecnosti sú modelovými parametrami objemová hustota prostredia $\rho(\mathbf{r})$ a tenzor elastických koeficientov $\overline{\overline{C}}(\mathbf{r})$, vyjadríme prírastok misfitu v smere $\delta \mathbf{m} = (\delta \rho, \overline{\overline{\delta C}})$:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \nabla_\rho \chi \delta \rho + \nabla_c \chi \overline{\overline{\delta C}}, \quad (4.1)$$

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle. \quad (4.2)$$

Vyjadríme prírastok $\nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m}$ a dosadíme do rovnice (4.2):

$$\nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} = \delta \rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\overline{\overline{\delta C}} : \nabla \mathbf{u}), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \nabla_m \chi \delta \mathbf{m} &= \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \delta \rho \ddot{\mathbf{u}} dV dt - \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \left[\nabla \cdot (\overline{\overline{\delta C}} : \nabla \mathbf{u}) \right] dV dt \\ &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_\rho \mathbb{L} \delta \rho \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_c \mathbb{L} \overline{\overline{\delta C}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Druhý člen rovnice (4.4) upravíme integráciou per-partes, najskôr však odvodíme ako bude vyzerat' per-partes pre integrál typu $\iiint_{\mathbf{V}} h(\mathbf{r}) dV$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{x} : \overline{\overline{\Lambda}}) &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \Lambda_{ij}) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_j \right) \Lambda_{ij} + \sum_{i,j} x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_{ij} \right) \\ &= (\nabla \mathbf{x}) : \overline{\overline{\Lambda}} + \mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\Lambda}}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{r})$ predstavuje nejakú vektorovú funkciu a $\overline{\overline{\Lambda}} = \overline{\overline{\Lambda}}(\mathbf{r})$ je tenzor 2. rádu, pričom \mathbf{x} aj $\overline{\overline{\Lambda}}$ závisia od polohy. Rovnicu (4.5) upravíme a preintegrujeme cez \mathbf{G} :

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\Lambda}}) dV = \int_{\mathbf{G}} (\nabla \mathbf{x}) : \overline{\overline{\Lambda}} dV - \int_{\mathbf{G}} \nabla \cdot (\mathbf{x} : \overline{\overline{\Lambda}}) dV. \quad (4.6)$$

Teraz aplikujeme per-partes (odvodený vzťah (4.6)) na druhý člen pravej strany rovnice (4.4), potom použijeme Gaussovú vetu a okrajovú podmienku – nulovosť normálového napätia na povrchu objemu \mathbf{G} – $\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \Big|_{\mathbf{r} \in \partial \mathbf{G}} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) dV dt &= - \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\overline{\delta C}} : (\nabla \mathbf{u}) dV dt + \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \nabla \cdot (\mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}}) dV dt \\ &= I_1 + \int_{\mathbf{T}} \left[\int_{\partial \mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot d\mathbf{S} \right] dt \\ &= I_1 + \int_{\mathbf{T}} \left[\int_{\partial \mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS \right] dt \\ &= - \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\overline{\delta C}} : (\nabla \mathbf{u}) dV dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Prvý člen na pravej strane použijeme v tvare:

$$\int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger \cdot \delta \rho \ddot{\mathbf{u}} dV dt = - \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \delta \rho \dot{\mathbf{u}} dV dt, \quad (4.8)$$

ktorý je odvodený v 0. Ak dáme dokopy vyššie odvodené vzťahy, môžeme pre podintegrálnu funkciu na pravej strane vzťahu (4.2) písať nasledujúci vzťah:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle = \langle -\dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}} \delta \rho + (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\overline{\delta C}} : (\nabla \mathbf{u}) \rangle \quad (4.9)$$

4.1 Kernely pre parametre ρ , λ , μ

Pre elastické izotrópne kontinuum platí pre tenzor $\overline{\overline{C}}$ vzťah:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.10)$$

kde $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ a $\mu = \mu(\mathbf{r})$ sú Lamého koeficienty, ktoré charakterizujú elastické správanie daného prostredia (materiálu). Z (4.10) vidíme, že tenzor $\overline{\overline{C}}(\lambda, \mu)$ môžeme

rozdeliť na dva tenzory⁵ $\overline{\overline{C}}(\lambda, \mu) = \overline{\overline{\Lambda}}(\lambda) + \overline{\overline{M}}(\mu)$, pričom každý je závislý práve od jedného modelového parametra; $[\overline{\overline{\Lambda}}(\lambda)]_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}$, $[\overline{\overline{M}}(\mu)]_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

Kernely pre modelové parametre ρ , λ , μ označíme K_ρ^0 , K_λ^0 , K_μ^0 , pričom horný index ⁰ značí fundamentálnu parametrizáciu modelu. Pre takúto parametrizáciu vyjadríme prírastok misfitu nasledovne:

$$\begin{aligned} \nabla_m \chi \delta \mathbf{m} &= \nabla_\rho \chi \delta \rho + \nabla_\lambda \chi \delta \lambda + \nabla_\mu \chi \delta \mu \\ &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_\rho \mathbb{L} \delta \rho \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_\lambda \mathbb{L} \delta \lambda \rangle + \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_\mu \mathbb{L} \delta \mu \rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Začneme najjednoduchším – odvodením vzťahu pre výpočet kernelu pre hustotu K_ρ^0 . Porovnaním vzťahov (4.9), (4.11) a uvážením, že pri tejto parametrizácii modelu tenzor elastických koeficientov $\overline{\overline{C}}$ nezávisí od hustoty prostredia ρ , dostávame nasledujúcu rovnosť:

$$\nabla_\rho \chi \delta \rho = \int_{\mathbf{G}} K_\rho \delta \rho dV = \langle -\dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}} \delta \rho \rangle. \quad (4.12)$$

Výsledný vzťah pre výpočet kernelu K_ρ^0 je:

$$K_\rho^0 = - \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}} dt. \quad (4.13)$$

Pre vyjadrenie kernelov K_λ^0 , K_μ^0 ďalej upravíme vzťah (4.1) nasledovne:

$$\begin{aligned} \nabla_m \chi \delta \mathbf{m} &= \nabla_\rho \chi \delta \rho + \nabla_c \chi \overline{\overline{\delta C}} \\ &= \nabla_\rho \chi \delta \rho + \nabla_c \chi \left(\nabla_\lambda \overline{\overline{C}} \delta \lambda + \nabla_\mu \overline{\overline{C}} \delta \mu \right) \\ &= \nabla_\rho \chi \delta \rho + \nabla_\lambda \chi \delta \lambda + \nabla_\mu \chi \delta \mu; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$[\nabla_\lambda \overline{\overline{C}} \delta \lambda]_{ijkl} = \delta \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} = \Lambda_{ijkl}(\delta \lambda); \quad (4.15)$$

$$[\nabla_\mu \overline{\overline{C}} \delta \mu]_{ijkl} = \delta \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = M_{ijkl}(\delta \mu). \quad (4.16)$$

⁵ Toto rozdelenie robíme iba kvôli zápisom nasledujúcich vzťahov.

Zo vzťahov (4.4), (4.8) dostávame nasledujúcu rovnosť:

$$\begin{aligned}
\nabla_c \chi \overline{\delta C} &= \int_{\mathbf{T G}} (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\delta C} : (\nabla \mathbf{u}) dV dt \\
&= \int_{\mathbf{T G}} (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\Lambda}(\delta \lambda) : (\nabla \mathbf{u}) dV dt + \\
&\quad + \int_{\mathbf{T G}} (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\mathbf{M}}(\delta \mu) : (\nabla \mathbf{u}) dV dt
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dosadením (4.15), (4.16) do (4.17) dostávame:

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda \chi \delta \lambda &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_\lambda \mathbb{L} \delta \lambda \rangle = \left\langle \sum_{i,j,k,l} u_{i,j}^\dagger (\delta \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) u_{k,l} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i,k} \delta \lambda u_{i,i}^\dagger u_{k,k} \right\rangle \\
&= \langle \delta \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \rangle;
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \chi \delta \mu &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_\mu \mathbb{L} \delta \mu \rangle = \left\langle \sum_{i,j,k,l} u_{i,j}^\dagger [\delta \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] u_{k,l} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i,j} \delta \mu (u_{i,j}^\dagger u_{i,j} + u_{i,j}^\dagger u_{j,i}) \right\rangle \\
&= \langle \delta \mu [(\nabla \mathbf{u}^\dagger) : (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u}^\dagger)^T : (\nabla \mathbf{u})^T] \rangle.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Z rovností (4.18) a (4.19) dostávame konečné podoby vzťahov pre výpočet kernelov parametrov λ a μ :

$$K_\lambda^0 = \int_{\mathbf{T}} (\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger) (\nabla \cdot \mathbf{u}) dt; \tag{4.20}$$

$$K_\mu^0 = \int_{\mathbf{T}} [(\nabla \mathbf{u}^\dagger) : (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u}^\dagger)^T : (\nabla \mathbf{u})^T] dt. \tag{4.21}$$

Vzťahy (4.20), (4.21) – kernely pre λ a μ – môžeme vyjadriť aj cez tenzor deformácie $\varepsilon = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T]$ a adjungovaný tenzor deformácie

$$\varepsilon^\dagger = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}^\dagger) + (\nabla \mathbf{u}^\dagger)^T]:$$

$$K_\lambda^0 = \int_{\mathbf{T}} (tr \varepsilon) (tr \varepsilon^\dagger) dt, \tag{4.22}$$

$$K_\mu^0 = \int_{\mathbf{T}} 2\varepsilon^\dagger : \varepsilon dt, \tag{4.23}$$

kde $tr \varepsilon \equiv \sum_i \varepsilon_{ii}$ je stopa matice tenzoru deformácie. Odvodenie vzťahu (4.23) možno spraviť nasledovne:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} (u_{i,j}^\dagger u_{i,j} + u_{i,j}^\dagger u_{j,i}) &= \sum_{i,j} u_{i,j}^\dagger (u_{i,j} + u_{j,i}) = \sum_{i,j} u_{i,j}^\dagger 2\varepsilon_{ij} = \\
&= \sum_{i,j} u_{i,j}^\dagger 2\varepsilon_{ij} + u_{j,i}^\dagger \varepsilon_{ij} - u_{j,i}^\dagger \varepsilon_{ij} = \sum_{i,j} (u_{i,j}^\dagger + u_{j,i}^\dagger) \varepsilon_{ij} + (u_{i,j}^\dagger - u_{j,i}^\dagger) \varepsilon_{ij} = \\
&= \sum_{i,j} 2\varepsilon_{ij}^\dagger \varepsilon_{ij} = 2\varepsilon^\dagger : \varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

V (4.24) je suma $\sum_{i,j} (u_{i,j}^\dagger - u_{j,i}^\dagger) \varepsilon_{ij} = A : \varepsilon$ rovná nule, pretože ide o sumáciu prvkov symetrickej matice ε a antisymetrickej matice A .

4.2 Kernely pre parametre ρ , v_S , v_P

Rýchlosti P v_P a S-vln v_S možno vyjadriť ako funkcie parametrov ρ , λ , μ nasledovne:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \tag{4.25}$$

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{4.26}$$

Vyjadrením λ a μ z rovníc (4.25), (4.26) ($\lambda = \rho(v_P^2 - 2v_S^2)$, $\mu = \rho v_S^2$) a ich dosadením do (4.10) dostávame pre tenzor $\overline{\overline{C}}$ vzťah:

$$C_{ijkl}(\rho, v_P, v_S) = \rho(v_P^2 - 2v_S^2) \delta_{ij} \delta_{kl} + \rho v_S^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \tag{4.27}$$

Prírastok misfítu pre parametrizáciu modelu $\mathbf{m} = (\rho, v_P, v_S)$ má tvar:

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi \delta \mathbf{m} = \nabla_{\rho} \chi \delta \rho + \nabla_{v_P} \chi \delta v_P + \nabla_{v_S} \chi \delta v_S, \tag{4.28}$$

kde

$$\begin{aligned}
\nabla_{\rho} \chi \delta \rho &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_{\rho} \mathbb{L} \delta \rho \rangle = \langle (\dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}}) \delta \rho \rangle + \langle (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\overline{\delta C_{\rho}}} : (\nabla \mathbf{u}) \rangle \\
&= \langle (\dot{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{u}}) \delta \rho \rangle + \langle (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \nabla_{\rho} \overline{\overline{C}} \delta \rho : (\nabla \mathbf{u}) \rangle,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{v_P} \chi \delta v_P &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_{v_P} \mathbb{L} \delta v_P \rangle = \langle (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\overline{\delta C_{v_P}}} : (\nabla \mathbf{u}) \rangle \\
&= \langle (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \nabla_{v_P} \overline{\overline{C}} \delta v_P : (\nabla \mathbf{u}) \rangle,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{v_S} \chi \delta v_S &= \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_{v_S} \mathbb{L} \delta v_S \rangle = \langle (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \overline{\delta C_{v_S}} : (\nabla \mathbf{u}) \rangle \\ &= \langle (\nabla \mathbf{u}^\dagger) : \nabla_{v_S} \overline{C} \delta v_S : (\nabla \mathbf{u}) \rangle.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Vychádzajúc zo vzťahu (4.27) vypočítame diferenciály $\overline{\delta C_\rho}$, $\overline{\delta C_{v_P}}$, $\overline{\delta C_{v_S}}$ vystupujúce vo vzťahoch (4.29) až (4.31), pričom ich súčet je totálny diferenciál $\overline{\delta C}$:

$$\left[\overline{\delta C_\rho} \right]_{ijkl} = \nabla_\rho C_{ijkl} \delta \rho = \left[(v_P^2 - 2v_S^2) \delta_{ij} \delta_{kl} + v_S^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \delta \rho, \quad (4.32)$$

$$\left[\overline{\delta C_{v_P}} \right]_{ijkl} = \nabla_{v_P} C_{ijkl} \delta v_P = 2\rho v_P \delta_{ij} \delta_{kl} \delta v_P, \quad (4.33)$$

$$\left[\overline{\delta C_{v_S}} \right]_{ijkl} = \nabla_{v_S} C_{ijkl} \delta v_S = \left[-4\rho v_S \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\rho v_S (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \delta v_S. \quad (4.34)$$

Dosadením (4.32) až (4.34) do (4.29), (4.30), (4.31) už ľahko nájdeme hľadané vzťahy pre kernely K_ρ , K_{v_P} , K_{v_S} , ktoré vyjadríme využitím kernelov z predošlej podkapitoly:

$$K_\rho = K_\rho^0 + (v_P^2 - 2v_S^2) K_\lambda^0 + v_S^2 K_\mu^0, \quad (4.35)$$

$$K_{v_P} = 2\rho v_P K_\lambda^0, \quad (4.36)$$

$$K_{v_S} = 2\rho v_S K_\mu^0 - 4\rho v_S K_\lambda^0. \quad (4.37)$$

4.3 Kernely pre parametre ρ , κ , μ

Pre parametrizáciu modelu použitím *modulu objemovej rozťažnosti* κ , pre ktorý platí vzťah:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad (4.38)$$

je odvedenie príslušných kernelov analogické predchádzajúcim odvedeniam, preto uvedieme už len výsledné vzťahy:

$$K_\rho = K_\rho^0, \quad (4.39)$$

$$K_\kappa = K_\lambda^0, \quad (4.40)$$

$$K_\mu = K_\mu^0 - \frac{2}{3} K_\lambda^0. \quad (4.41)$$

5 Základné misfity v adjungovanej tomografii a príslušné funkcie adjungovaných zdrojov

V tejto kapitole sa budeme venovať základným misfitom, ktoré boli navrhnuté pre potreby adjungovanej tomografie, a príslušným zdrojovým funkciám, pričom obsahom sú najmä odvodenia adjungovaných zdrojov.

Ako prípravný krok najprv zavedieme koncept *adjungovanej Greenovej funkcie*, ktorá bude mať dôležitú úlohu v odvodeniach nasledujúcich rovníc, najmä pri odvodzovaní adjungovaných zdrojov.

Adjungovanú Greenovu funkciu, $\mathbf{g}_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{r}, t)$, definujeme ako riešenie adjungovanej rovnice (2.21) so zdrojom pôsobiacim v smere \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_i je jednotkový vektor v smere osi x_i) v mieste $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi}$ a v čase $t = \tau$:

$$\mathbb{L}^\dagger[\mathbf{g}_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{r}, t)] := \mathbf{e}_i \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau). \quad (5.1)$$

Dôležitosť definície (5.1) spočíva v tom, že nám umožní vyjadriť adjungované pole \mathbf{u}^\dagger zodpovedajúce ľubovoľnému adjungovanému zdroju $\mathbf{f}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1,2,3} \mathbf{e}_j f_j^\dagger(\mathbf{r}, t)$ ako funkciu \mathbf{g}_i^\dagger . Aby sme dostali toto vyjadrenie, vynásobíme (5.1) $f_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ a sčítame cez index i od 1 po 3:

$$\sum_{i=1}^3 f_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau) \mathbb{L}^\dagger[\mathbf{g}_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{r}, t)] := \mathbf{f}^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau) \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau). \quad (5.2)$$

Keďže operátor \mathbb{L}^\dagger je lineárny a neobsahuje derivácie podľa premenných $\boldsymbol{\xi}$ a τ , môžeme prepísať rovnicu (5.2) do tvaru:

$$\mathbb{L}^\dagger \left[\sum_{i=1}^3 f_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau) \mathbf{g}_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{r}, t) \right] := \mathbf{f}^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau) \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau). \quad (5.3)$$

Rovnicu (5.3) preintegrujeme cez čas, τ , a priestor, $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbb{L}^\dagger \left[\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{TG}} \int f_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau) \mathbf{g}_i^\dagger(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi} d\tau \right] := \mathbf{f}^\dagger(\mathbf{r}, t). \quad (5.4)$$

Porovnaním vzťahov (5.4) a (2.21) dostávame hľadané vyjadrenie pre adjungované pole \mathbf{u}^\dagger s adjungovaným zdrojom \mathbf{f}^\dagger :

$$\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \iint_{\mathbf{T G}} f_i^\dagger(\xi, \tau) \mathbf{g}_i^\dagger(\xi, \tau; \mathbf{r}, t) d^3\xi d\tau. \quad (5.5)$$

Vzťah (5.5) predstavuje *teorému reprezentácie* pre adjungované vlnové polia.

5.1 Derivácia vlnového poľa a adjungovaná Greenova funkcia

Zvoľme si ako misfit χ i -tú zložku vlnového poľa \mathbf{u} meranú na mieste prijímača $\mathbf{r} = \mathbf{r}^p$ v čase $t = t^p$:

$$\chi(\mathbf{m}) = u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t^p). \quad (5.6)$$

Pre odvodenie adjungovaného zdroja zodpovedajúceho misfitu definovaného vzťahom (5.6), prepíšeme tento misfit χ do integrálneho tvaru, tak ako vo vzťahu (2.7):

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{m}) = \langle \chi_1(\mathbf{m}) \rangle &= \iint_{\mathbf{T G}} \chi_1(\mathbf{m}) dV dt \\ &= \iint_{\mathbf{T G}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p) \delta(t - t^p) dV dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Z (5.7) potom vyplýva, že podintegrálna funkcia χ_1 je daná vzťahom:

$$\chi_1(\mathbf{m}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p) \delta(t - t^p). \quad (5.8)$$

Aplikovaním vzťahu (2.17) na funkciu χ_1 dostávame adjungovaný zdroj \mathbf{f}^\dagger prislúchajúci misfitu definovaného (5.6):

$$\mathbf{f}^\dagger(\mathbf{r}, t) = -\nabla_u \chi_1 = -\mathbf{e}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p) \delta(t - t^p). \quad (5.9)$$

Ako je vidieť z (5.9), adjungovaný zdroj je lokalizovaný v priestore – v mieste \mathbf{r}^p – a v čase – t^p . Dosadením (5.9) do (2.21) získavame adjungovanú rovnicu:

$$\mathbb{L}^\dagger(\mathbf{u}^\dagger) = -\mathbf{e}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p) \delta(t - t^p). \quad (5.10)$$

Porovnaním vzťahov (5.10), (5.1) zistujeme, že adjungované pole \mathbf{u}^\dagger je rovné opačne vzatej adjungovanej Greenovej funkcii:

$$\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t^p; \mathbf{r}, t). \quad (5.11)$$

Prírastok misfitu $\nabla_m \chi \delta \mathbf{m}$ môžeme pomocou (5.11) napísať v tvare:

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \nabla_m u_i(\mathbf{r}^p, t^p) \delta \mathbf{m} = \left\langle -\mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t^p) \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \right\rangle. \quad (5.12)$$

5.2 L_2 norma rozdielov vektorov posunutia (waveform difference)

Tento misfit, klasicky používaný pri inverzii – *full waveform inversion* (inverzia využívajúca informáciu z celého nameraného vlnového poľa), je štvorec vzdialenosti (označovaný aj ako L_2 norma) medzi nameranými dátami \mathbf{u}^0 a syntetickým seizmogramom \mathbf{u} v mieste prijímača \mathbf{r}^p :

$$\chi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} [\mathbf{u}^0(\mathbf{r}^p, t) - \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t)]^2 dt. \quad (5.13)$$

V hypotetickom prípade, ak by bol misfit rovný nule, znamenalo by to, že náš model úplne vysvetľuje namerané dáta. Podintegrálna funkcia χ_1 odpovedajúca misfitu χ je:

$$\chi_1[\mathbf{u}(\mathbf{m})] = \frac{1}{2} [\mathbf{u}^0(\mathbf{r}^p, t) - \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t)]^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p). \quad (5.14)$$

Použitím vzťahu (2.17) na (5.14) dostávame vzťah pre príslušný adjungovaný zdroj:

$$\mathbf{f}^\dagger(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{u}} \chi_1 = [\mathbf{u}^0(\mathbf{r}^p, t) - \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p). \quad (5.15)$$

Ako vidíme z (5.15), zdroj je lokalizovaný v priestore – v mieste prijímača \mathbf{r}^p a časový vývoj je daný sledom rezíduí $\mathbf{u}^0(t) - \mathbf{u}(t)$.

Na prvý pohľad tento misfit dobre kvantifikuje nesúlad nameraných dát a dát získaných z numerického výpočtu. Sčítanie štvorcov rezíduí však nie je robustná metóda, to znamená, že vybočujúce dáta sa môžu stať dominantné. Hodnota tohto misfitu je z väčšej časti tvorená príspevkom vln s veľkou amplitúdou, teda cenné informácie, ako napríklad časový posun P-vln s nízkou amplitúdou, sa úplne stratia. Navyše L_2 norma ešte zvyšuje nelineárnosť misfitu. Dôsledkom je vznik viacerých lokálnych miním misfitu, čo je v kontexte gradientných minimalizačných algoritmov misfitu nevýhodná vlastnosť (viac sa minimalizácii misfitu budeme venovať v kapitole 6).

5.3 Časový posun vektora posunutia (Cross-correlation time shifts)

Veľký krok vpred k cieľu získať čo najviac informácií z rozdielov medzi pozorovanými a syntetickými (pochádzajúce z numerických simulácií) seizmogramami predstavovala metóda autorov *Luo & Schuster (1991)*, ktorí si uvedomili, že informácia o fáze musí byť explicitne zahrnutá do predpisu funkcionálu.

Uvažujme i -tú zložku pozorovaných posunutí $u_i^0(\mathbf{r}^p, t)$ a príslušných syntetických posunutí $u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t)$ v mieste prijímača \mathbf{r}^p . Implicitne budeme predpokladať separáciu špecifických foriem vln, ako napríklad P alebo S-vln, z pozorovaného aj syntetického seizmogramu. Kroskorelačný časový posun \mathcal{T} je definovaný ako čas τ , pre ktorý nadobúda kroskorelačná funkcia $C(u_i^0, u_i)(\tau)$ maximum:

$$C(u_i^0, u_i)(\tau) := \int_{\mathbf{T}} u_i^0(\mathbf{r}^p, t) u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t + \tau) dt. \quad (5.16)$$

Kladná hodnota $\mathcal{T} > 0$ znamená, že príchod syntetických vln je neskorší ako príchod pozorovaných vln. Naopak záporná hodnota $\mathcal{T} < 0$ je dôsledkom skoršieho príchodu syntetických vln oproti pozorovaným vlnám. Funkcionál vyjadrujúci misfit na základe porovnávania časov príchodov má tvar:

$$\chi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \mathcal{T}^2(\mathbf{m}). \quad (5.17)$$

Vzťah (5.16) nie je explicitným vyjadrením pre čas \mathcal{T} . Ak existuje práve jedno maximum, teda ak je \mathcal{T} časom zodpovedajúcim globálnemu maximu kroskorelačnej funkcie, potom využitím vlastnosti derivácie funkcie v maxime vieme napísať implicitné vyjadrenie času \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\tau} C(u_i^0, u_i)(\tau) \Big|_{\tau=\mathcal{T}} &= \int_{\mathbf{T}} u_i^0(\mathbf{r}^p, t) \dot{u}_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t + \mathcal{T}) dt \\ &= - \int_{\mathbf{T}} \dot{u}_i^0(\mathbf{r}^p, t - \mathcal{T}) u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) dt, \end{aligned} \quad (5.18)$$

pričom posledné vyjadrenie dostaneme deriváciou vzťahu (5.16) po substitúcii $t \rightarrow t - \tau$.

Ďalej sa budeme snažiť vyjadriť diferenciál misfitu:

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi \delta \mathbf{m} = \mathcal{T} \nabla_{\mathbf{m}} \mathcal{T}(\mathbf{m}) \delta \mathbf{m}. \quad (5.19)$$

Pre deriváciu funkcie $f(x)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej implicitne⁶ platí nasledujúci vzťah:

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = - \frac{\frac{\partial F[x_0, f(x_0)]}{\partial x}}{\frac{\partial F[x_0, f(x_0)]}{\partial f(x)}}, \quad (5.20)$$

pričom musí pre $F[x, f(x)]$ v bode $(x_0, f(x_0))$ platiť: $F[x_0, f(x_0)] = 0$. V našom prípade je analógiou funkcie F funkcia $\Gamma[\mathbf{m}, \mathcal{T}(\mathbf{m})]$, ktorú predstavuje pravá strana rovnice (5.18), pričom rozdiel je vo funkcii $\mathcal{T}(\mathbf{m})$, $\mathcal{T}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Podobne ako je vyjadrená derivácia funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – vzťah (5.20), vieme vyjadriť aj deriváciu funkcie $\mathcal{T}(\mathbf{m})$, čo využijeme na vyjadrenie diferenciál misfitu:

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi \delta \mathbf{m} = \frac{\mathcal{T} \int_{\mathbf{T}} \dot{u}_i^0(\mathbf{r}^p, t - \mathcal{T}) \nabla_{\mathbf{m}} u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \delta \mathbf{m} dt}{\int_{\mathbf{T}} \ddot{u}_i^0(\mathbf{r}^p, t - \mathcal{T}) u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) dt}. \quad (5.21)$$

Za predpokladu, že funkcie u_i^0 a u_i sú len časovo posunuté, platí: $u_i^0(\mathbf{r}^p, t - \mathcal{T}) = u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t)$ a vzťah (5.21) sa zjednoduší na tvar:

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi \delta \mathbf{m} = - \frac{\mathcal{T}}{\|\dot{u}_i\|_2^2} \int_{\mathbf{T}} \dot{u}_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \nabla_{\mathbf{m}} u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \delta \mathbf{m} dt, \quad (5.22)$$

pričom $\|\dot{u}_i\|_2^2$ je rovné:

$$\|\dot{u}_i\|_2^2 = \int_{\mathbf{T}} u_i^2(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) dt \quad (5.23)$$

a menovateľ z (5.22) sme upravili použitím per-partes a zanedbali sme člen $\dot{u}_i(t_1)u_i(t_1)$.

⁶ podmienky pre existenciu takejto derivácie sú($y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$): 1) V bode $A = (x_0, f(x_0))$ je $F[x_0, f(x_0)] = 0$. 2) Na istom okolí bodu A je funkcia F spojitá a má tam spojitú parciálne derivácie $F_y(x, y)$, $F_x(x, y)$. 3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$; viac o derivácii funkcie zadanej implicitne nájde čitateľ v I. Kluvánek et al.1959.

Výraz $\nabla_m u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \delta \mathbf{m}$ vo vzťahu (5.22) nahradíme výsledkom (5.12), čím pre $\nabla_m \chi \delta \mathbf{m}$ dostávame:

$$\begin{aligned} \nabla_m \chi \delta \mathbf{m} &= -\frac{\mathcal{T}}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|_2^2} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \langle -\mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t) \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle dt \\ &= \frac{\mathcal{T}}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|_2^2} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t; \mathbf{r}, \tau) \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} dV d\tau dt. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Definovanie adjungovaného poľa:

$$\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) := \frac{\mathcal{T}}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|_2^2} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t; \mathbf{r}, \tau) dt \quad (5.25)$$

nám umožní prepísať diferenciál χ v kanonickej forme – vid' (2.18):

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} dV dt. \quad (5.26)$$

Vzťah (5.26) má tvar teóremy reprezentácie (5.5), v ktorom adjungované pole je vyjadrené integrálom zo súčiny adjungovaného poľa a adjungovanej Greenovej funkcie. Z predošlého teda vyplýva, že adjungovaný zdroj zodpovedajúci misfitu (5.17) je (po sumácii cez voľný index i) daný vzťahom:

$$\mathbf{f}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{T}}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|_2^2} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p). \quad (5.27)$$

Opäť dostávame bodový zdroj v mieste prijímača. Jeho časová závislosť je daná rýchlosťou posunutia syntetického vlnového poľa v mieste prijímača. Faktor $\|\dot{\mathbf{u}}_i\|_2^{-2}$ normalizuje kernely. Zdrojová funkcia sa zdá byť nezávislá od zaznamenaných dát \mathbf{u}^0 , pretože informácia zo seizmogramu je obsiahnutá iba vo faktore \mathcal{T} .

5.4 L2 norma amplitúdy

L₂ norma amplitúdy pozorovaných posunutí \mathbf{u}^0 je definovaná takto:

$$A^0 := \sqrt{\int_{\mathbf{T}} [u_i^0(\mathbf{r}^p, t)]^2 dt}. \quad (5.28)$$

Opäť implicitne predpokladáme, že posunutia zodpovedajúce typu vln, ktoré nás zaujímajú boli zo seizmografu odčlenené. Ďalej budeme výrazy označované A nazývať amplitúdou. Analogicky k vzťahu (5.28) definujeme amplitúdu príslušného syntetického seizmografu:

$$A(\mathbf{m}) := \sqrt{\int_{\mathbf{T}} [u_i(\mathbf{r}^p, t)]^2 dt}. \quad (5.29)$$

Misfit amplitúd, ktorý chceme minimalizovať, je definovaný:

$$\chi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \frac{(A - A^0)^2}{(A^0)^2}. \quad (5.30)$$

Diferencovaním vzťahu (5.30) dostávame pre prírastok misfitu:

$$\begin{aligned} \nabla_m \chi \delta \mathbf{m} &= \frac{A - A^0}{(A^0)^2} \nabla_m A \delta \mathbf{m} \\ &= \frac{A - A^0}{A(A^0)^2} \int_{\mathbf{T}} u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \nabla_m u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \delta \mathbf{m} dt. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Výraz $\nabla_m u_i \delta \mathbf{m}$ opäť nahradíme výsledkom z (5.12):

$$\begin{aligned} \nabla_m \chi \delta \mathbf{m} &= -\frac{A - A^0}{A(A^0)^2} \int_{\mathbf{T}} u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \langle \mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t) \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle dt \\ &= -\frac{A - A^0}{A(A^0)^2} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{G}} u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t; \mathbf{r}, \tau) \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} dV d\tau dt. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Aby sme mohli vzťah (5.32) napísať v kanonickej forme $\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \mathbf{u}^\dagger \cdot \nabla_m \mathbb{L} \delta \mathbf{m} \rangle$, definujeme adjungované pole nasledovne:

$$\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) = -\frac{A - A^0}{A(A^0)^2} \int_{\mathbf{T}} u_i(\mathbf{m}; \mathbf{r}^p, t) \mathbf{g}_i^\dagger(\mathbf{r}^p, t; \mathbf{r}, \tau) dt. \quad (5.33)$$

Z porovnania (5.33) s teorémou reprezentácie (5.5) opäť usudzujeme, že adjungovaný zdroj pre misfit amplitúd je daný vzťahom:

$$\mathbf{f}^\dagger(\mathbf{r}, t) = -\frac{A - A^0}{A(A^0)^2} \mathbf{u}(\mathbf{m}; \mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^p), \quad (5.34)$$

pričom sme sčítali cez voľný index i .

Ako sme očakávali, dostávame zdroj lokalizovaný v mieste prijímača \mathbf{r}^p . Jeho časová závislosť je, až na smer, ktorý je opačný, daná posunutiami syntetického vlnového poľa v \mathbf{r}^p a amplitúda je normovaná faktom $(A - A^0)/A(A^0)^2$. Časová závislosť tohto zdroja je nezávislá na dátach \mathbf{u}^0 .

6 Minimalizácia funkcionálu

Adjungovaná metóda nám dáva návod na výpočet prírastku (tiež Fréchetovej derivácie) misfítu. Aby sme mohli nájsť optimálne modelové parametre, potrebujeme nájsť nejaký postup ako túto metódu použiť na jeho minimalizáciu.

Obsahom tejto kapitoly je stručný úvod do minimalizácie funkcionálu v kontexte adjungovanej tomografie.

Pre potreby tejto kapitoly definujeme pre prvky \mathbf{m} priestoru \mathfrak{M} normu L_1 :

$$\|\mathbf{m}\|_1 := \sum_k \int_G |m_k(\mathbf{r})| dV, \quad (6.1)$$

a L_2 normu:

$$\|\mathbf{m}\|_2 := \sqrt{\sum_k \int_G m_k^2(\mathbf{r}) dV}. \quad (6.2)$$

6.1 Minimá, konvexnosť a (ne)jednoznačnosť riešenia inverznej úlohy

6.1.1 Lokálne a globálne minimá funkcionálu

Pre optimálny model, teda taký, v ktorom nadobúda funkcionál χ minimum, zavedieme označenie $\tilde{\mathbf{m}}$ ($\tilde{\mathbf{m}} \in \mathfrak{M}$).

Uvažujme okolie $O_r(\tilde{\mathbf{m}})$ s polomerom r okolo optimálneho modelu $\tilde{\mathbf{m}}$:

$$O_r(\tilde{\mathbf{m}}) := \{\mathbf{m} \in \mathfrak{M} \mid \|\mathbf{m} - \tilde{\mathbf{m}}\|_2 < r\}. \quad (6.3)$$

Model $\tilde{\mathbf{m}}$ je *lokálnym minimom* funkcionálu χ , ak existuje aspoň malé okolie $O_r(\tilde{\mathbf{m}})$, kde $\chi(\tilde{\mathbf{m}})$ je menšie alebo rovné $\chi(\mathbf{m})$, t.j.

$$\forall \mathbf{m} \in O_r(\tilde{\mathbf{m}}): \chi(\tilde{\mathbf{m}}) \leq \chi(\mathbf{m}). \quad (6.4)$$

Model $\tilde{\mathbf{m}}$ nazývame *ostrým lokálnym minimom*, ak $\chi(\tilde{\mathbf{m}})$ je menšie ako $\chi(\mathbf{m})$ aspoň v malom okolí $O_r(\tilde{\mathbf{m}})$:

$$\forall \mathbf{m} \in O_r(\tilde{\mathbf{m}}): \chi(\tilde{\mathbf{m}}) < \chi(\mathbf{m}). \quad (6.5)$$

Funkcionál môže mať niekoľko lokálnych miním, v ktorých nemusí mať rovnaké funkčné hodnoty.

Pre *globálne minimum* $\tilde{\mathbf{m}}$ platí, že hodnota funkcionálu pre tento model $\chi(\tilde{\mathbf{m}})$ je menšia alebo rovná ako jeho hodnota $\chi(\mathbf{m})$ pre ľubovoľný iný model $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$, nielen pre malé okolie ako to je v prípade lokálnych miním:

$$\forall \mathbf{m} \in \mathfrak{M}: \chi(\tilde{\mathbf{m}}) \leq \chi(\mathbf{m}). \quad (6.6)$$

Model $\tilde{\mathbf{m}}$ je ostrým lokálnym minimom funkcionálu χ , ak jeho hodnota $\chi(\tilde{\mathbf{m}})$ je menšia než pre ľubovoľný iný model $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$, t.j.

$$\forall \mathbf{m} \in \mathfrak{M}: \chi(\tilde{\mathbf{m}}) < \chi(\mathbf{m}). \quad (6.7)$$

Rozdiel medzi minimom a ostrým minimom je minimálny, ale z pohľadu riešenia inverznej úlohy je to otázka jednoznačnosti riešenia, čiže ide o dôležitý aspekt riešenia inverzie.

6.1.2 Konvexnosť funkcionálu

Aby sme mohli definovať konvexnosť funkcionálu pre $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$, je nutné, aby táto množina bola konvexná. Množinu \mathfrak{M} nazývame konvexnou, ak všetky body ležiace na úsečke spájajúcej body $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}$ sú tiež prvkami množiny \mathfrak{M} :

$$(1 - \varepsilon)\mathbf{m}_1 + \varepsilon\mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}, \text{ pre všetky } \varepsilon \in [0, 1] \text{ a } \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}. \quad (6.8)$$

Rozlišujeme konvexnosť a striktnú konvexnosť funkcionálu. O konvexnom funkcionále hovoríme, ak všetky hodnoty funkcionálu medzi bodmi $\chi(\mathbf{m}_1), \chi(\mathbf{m}_2)$ ležia pod alebo na úsečke spájajúcej tieto dva body.

$$\chi[(1 - \varepsilon)\mathbf{m}_1 + \varepsilon\mathbf{m}_2] \leq (1 - \varepsilon)\chi(\mathbf{m}_1) + \varepsilon\chi(\mathbf{m}_2) \quad (6.9)$$

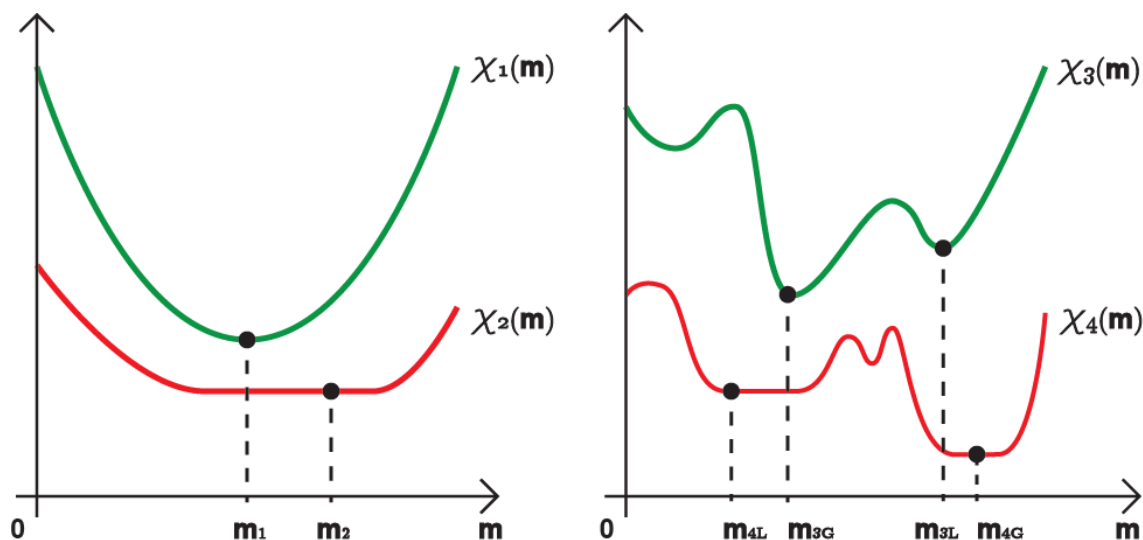
Funkcionál je striktné konvexný, ak platí:

$$\chi[(1 - \varepsilon)\mathbf{m}_1 + \varepsilon\mathbf{m}_2] < (1 - \varepsilon)\chi(\mathbf{m}_1) + \varepsilon\chi(\mathbf{m}_2), \quad (6.10)$$

pre všetky $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathfrak{M}$ a $\varepsilon \in [0, 1]$.

Z konvexnosti vyplýva tiež, že akákoľvek lineárna aproximácia funkcionálu nám dá hodnotu nižšiu ako je jeho skutočná hodnota (pre nie striktné konvexný funkcionál môžeme dostať aj skutočnú hodnotu tohto funkcionálu).

Z hľadiska konvexnosti funkcionálu by bolo ideálne, aby bol striktnie konvexný, pretože by to znamenalo jednoznačnosť riešenia inverznej úlohy. Naopak, ak by funkcionál nebol striktnie konvexný, znamenalo by to nejednoznačnosť riešenia, teda rovnaké hodnoty by mal misfit pre viac rôznych modelov.



Obr. 6-1: Minimá a konvexnosť funkcionálov: *ľavá časť*: striktnie konvexný funkcionál χ_1 s ostrým minimom v bode \mathbf{m}_1 a konvexný funkcionál χ_2 s minimom v bode \mathbf{m}_2 ; *pravá časť*: funkcionál χ_3 so ostrými minimami – lokálnym v bode \mathbf{m}_{3L} , globálnym v bode \mathbf{m}_{3G} a funkcionál χ_4 s lokálnym minimom v bode \mathbf{m}_{4L} a globálnym minimom v bode \mathbf{m}_{4G} .

6.2 Iteratívna metóda minimalizácie funkcionálu

Ako je zrejmé z prvej kapitoly a predošlého textu, minimalizovať funkcionál budeme práve zmenou modelových parametrov (hoci, ako sme ukázali v časti 2.4, minimalizácia misfitu je možná aj zmenou zdrojovej funkcie). Preto nás bude zaujímať smer zmeny parametrov $\delta\mathbf{m}(\mathbf{r})$ a optimálna dĺžka kroku $\|\delta\mathbf{m}(\mathbf{r})\|$.

6.2.1 Smer najväčšieho poklesu funkcionálu

Aby sme optimalizovali model \mathbf{m}_0 najviac ako sa dá, a na čo najmenej iterácií, potrebujeme nájsť smer, v ktorom bude maximálne klesať hodnota misfitu. Nový model vyjadríme nasledovne:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \gamma_0 \mathbf{h}_0, \quad (6.11)$$

kde γ_0 je dĺžka kroku a \mathbf{h}_0 je smer klesania, pričom tento smer definujeme tak, že jeho L_2 norma je rovná jednej: $\|\mathbf{h}_0\|_2 = \|\mathbf{h}_0\|_1 = 1$. Funkcionál χ budeme (pre malé hodnoty γ_0) aproximovať jeho lineárnou časťou:

$$\chi(\mathbf{m}_1) - \chi(\mathbf{m}_0) = \chi(\mathbf{m}_0 + \gamma_0 \mathbf{h}_0) - \chi(\mathbf{m}_0) \approx \gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0). \quad (6.12)$$

Teraz budeme hľadať smer klesania \mathbf{h}_0 taký, že prírastok funkcionálu bude v tomto smere najmenší, teda \mathbf{h}_0 je vlastne smerom najväčšieho poklesu funkcionálu.

$$\text{prírastok funkcionálu} = \chi(\mathbf{m}_0 + \gamma_0 \mathbf{h}_0) - \chi(\mathbf{m}_0) \approx \gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)$$

Najmenší prírastok môžeme hľadať tak, že nájdeme \mathbf{h}_0 taký, pre ktorý bude výraz $\gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)$ nadobúdať najnižšiu možnú hodnotu. Posledný výraz je vlastne skalárny súčin zmeny modelu $\gamma_0 \mathbf{h}_0$ a derivácie misfítu podľa modelových parametrov pre model \mathbf{m}_0 , $\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)$. Preto využijeme *Cauchyho-Schwartzovu nerovnosť*, ktorá platí vo všeobecnosti pre skalárny súčin:

$$|\gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)| \leq \|\gamma_0 \mathbf{h}_0\|_2 \|\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)\|_2, \quad (6.13)$$

pričom $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \equiv \|\mathbf{m}\|_1 = \|\mathbf{m}\|_2^2$. Rovnosť vo vzťahu (6.13) nastane pre dve hodnoty výrazu v absolútnej hodnote na ľavej strane tohto vzťahu.

$$-\gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0) \leq \|\gamma_0 \mathbf{h}_0\|_2 \|\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)\|_2 \leq \gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0) \quad (6.14)$$

Nás však zaujíma práve záporná hodnota, ktorá znamená záporný prírastok, teda (maximálny) pokles funkcionálu. Túto hodnotu dosiahneme pre \mathbf{h}_0 , ktorý spĺňa nasledujúcu rovnosť:

$$\gamma_0 \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0) = -\|\gamma_0 \mathbf{h}_0\|_2 \|\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)\|_2 = -\gamma_0 \|\mathbf{h}_0\|_2 \|\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)\|_2. \quad (6.15)$$

Po prenasobení rovnice (6.15) výrazom $1/\gamma_0$ nám z nej vypadne γ_0 a tiež využijeme, že norma $\|\mathbf{h}_0\|_2$ je rovná jednej:

$$\mathbf{h}_0 \cdot \nabla_m \chi(\mathbf{m}_0) = -\|\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)\|_2. \quad (6.16)$$

Z rovnice (6.16) už ľahko nahliadneme, že ju spĺňa práve \mathbf{h}_0 :

$$\mathbf{h}_0 = -\frac{\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)}{\|\nabla_m \chi(\mathbf{m}_0)\|_2}, \quad (6.17)$$

Keďže ide len o lineárnu aproximáciu funkcionálu $\chi(\mathbf{m})$ v okolí bodu \mathbf{m}_0 , bude pokles funkcionálu najpresnejšie aproximovaný pre malú hodnotu dĺžky kroku γ_0 .

Poznanie spôsobu, akým vypočítať smer najstrmšieho poklesu funkcionálu, nám ukazuje jednoduchý spôsob ako minimalizovať funkcionál. Tento spôsob možno zapísať pomocou nasledujúceho algoritmu:

1. Začneme s najlepším modelom \mathbf{m}_i ($i = 0$), aký máme k dispozícii.
2. Správime simuláciu a vypočítame funkciu \mathbf{h}_i .
3. Zmeníme model: $\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m}_i + \gamma_i \mathbf{h}_i$, pričom volíme malé hodnoty dĺžky kroku, aby sme zabezpečili: $\chi(\mathbf{m}_{i+1}) < \chi(\mathbf{m}_i)$.
4. $i \rightarrow i + 1$, a pokračujeme opäť krokom 2), kým nedostaneme model, ktorý bude dostatočne presne vysvetľovať dáta.

Tento algoritmus je však napohľad veľmi neefektívny. Ak je náš model veľmi odlišný od optimálneho modelu, potom bude takýto algoritmus konvergovať veľmi pomaly, čo bude zrejme problém kvôli časovej náročnosti každej jednej iterácie.

Táto neefektivita nás núti nájsť postup, ktorý bude konvergovať k optimálnemu modelu rýchlejšie. Jednu takúto možnosť nám ukazuje nasledujúca podkapitola.

6.2.2 Optimálna dĺžka kroku

Pri hľadaní optimálnej dĺžky kroku γ_i fixujeme smer zmeny parametrov \mathbf{h}_i a vypočítame hodnotu misfitu pre n dĺžok krokov $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \dots, \gamma_i^{(n)}$. Dĺžku prvého kroku je výhodné zvoliť $\gamma_i^{(1)} = 0$, pretože na zistenie hodnoty misfitu pre nulovú dĺžku kroku $\chi(\mathbf{m}_i + \gamma_i^{(1)} \mathbf{h}_i) = \chi(\mathbf{m}_i)$ nepotrebujeme zvlášť simuláciu. Funkcionál $\chi(\mathbf{m}_i + \gamma_i \mathbf{h}_i)$ potom môžeme zapísať ako funkciu premennej γ_i (model \mathbf{m}_i je pri výpočte dĺžky kroku v i -tej iterácii tiež fixovaný)

$$\chi(\mathbf{m}_i + \gamma_i^{(k)} \mathbf{h}_i) \rightarrow \xi_i(\gamma_i), \quad (6.18)$$

pričom hodnotu funkcie $\xi_i(\gamma_i)$ poznáme v n bodoch. Ďalším krokom je interpolácia. Známe body $(\gamma_i^{(1)}, \xi_i(\gamma_i^{(1)})), \dots, (\gamma_i^{(n)}, \xi_i(\gamma_i^{(n)}))$ interpolujeme polynómom $n-1$. stupňa a následne vypočítame optimálnu dĺžku kroku – to znamená, že treba nájsť γ_i , v ktorom nadobúda funkcia $\xi_i(\gamma_i)$ globálne minimum.

Numerické výpočty ukazujú, že funkcia $\xi_i(\gamma_i)$ je často približne kvadratická, preto je zvyčajne dostatočné použiť interpoláciu polynómom druhého stupňa, teda kvadratickou funkciou.

Použitím Newtonovej interpolácie kvadratickou funkciou teraz vyjadríme optimálnu dĺžku kroku. Funkciu $\xi_i(\gamma_i)$ zapíšeme:

$$\xi_i(\gamma_i) = a_0 + a_1(\gamma_i - \gamma_i^{(1)}) + a_2(\gamma_i - \gamma_i^{(1)})(\gamma_i - \gamma_i^{(2)}), \quad (6.19)$$

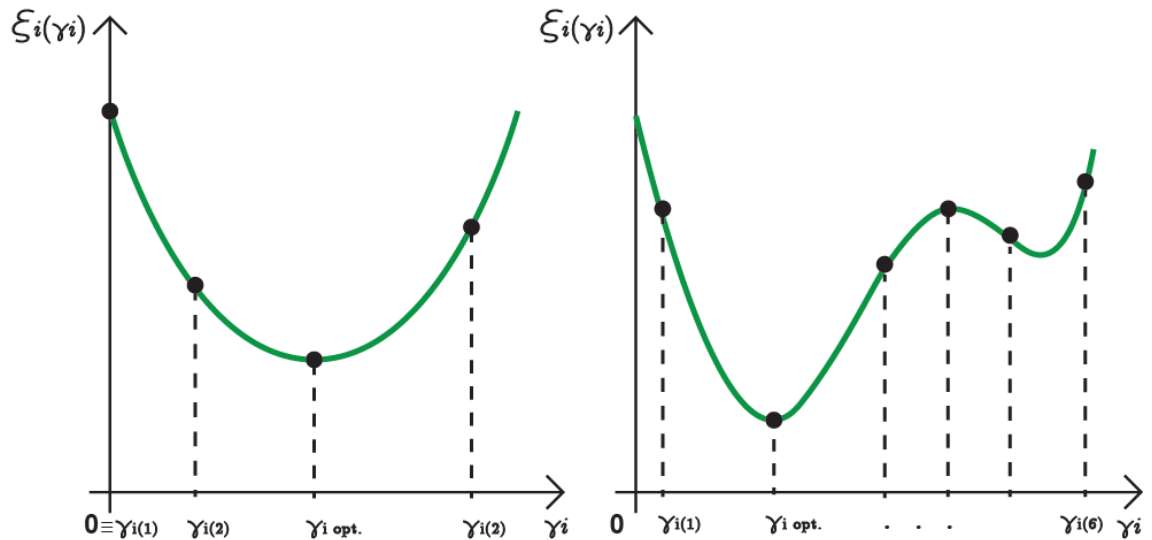
kde konštanty a_n ($n = 0, 1, 2$) vieme vyjadriť pomocou troch známych bodov:

$$\begin{aligned} a_0 &= \xi_i(\gamma_i^{(1)}); & a_1 &= \frac{\xi_i(\gamma_i^{(2)}) - \xi_i(\gamma_i^{(1)})}{\gamma_i^{(2)} - \gamma_i^{(1)}}; \\ a_2 &= \frac{1}{\gamma_i^{(3)} - \gamma_i^{(1)}} \left(\frac{\xi_i(\gamma_i^{(3)}) - \xi_i(\gamma_i^{(2)})}{\gamma_i^{(3)} - \gamma_i^{(2)}} - a_1 \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

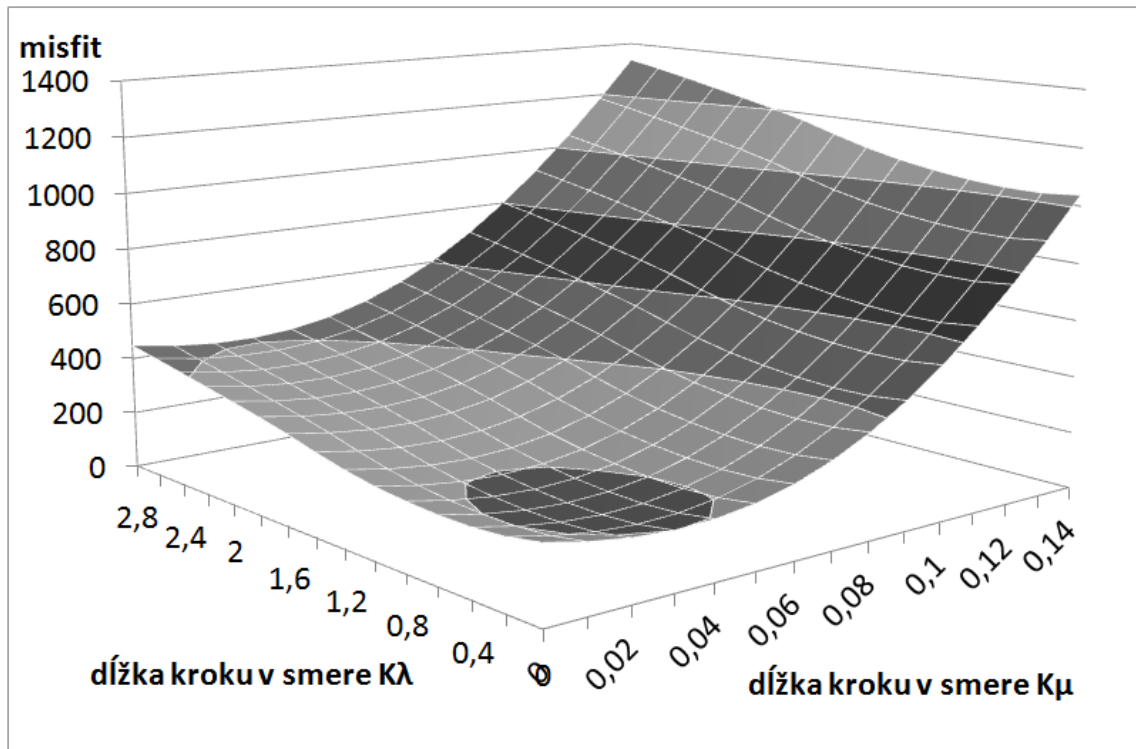
Pre minimum funkcie $\xi_i(\gamma_i)$ zo vzťahu $\frac{d}{d\gamma_i} \xi_i(\gamma_i) = 0$ dostávame:

$$\gamma_i^{opt.} = \frac{\gamma_i^{(1)} + \gamma_i^{(2)} - a_1}{2a_2}, \quad (6.21)$$

pričom $\gamma_i^{opt.}$ je optimálnou dĺžkou kroku, pre ktorú nadobúda funkcia $\xi_i(\gamma_i)$ globálne minimum.



Obr. 6-2: Interpoláčn e polynomicke funkcie a optimálna dĺžka kroku: ľavá časť: interpolácia kvadratickou funkciou, kde dĺžka 1. kroku je nulová; pravá časť: interpolácia polynómom vyššieho stupňa.



Obr. 6-3: Závislosť misfitu od dĺžok krokov násobiacich kernely $K\lambda$ a $K\mu$. Vidíme, že v okolí optimálnych dĺžok krokov v jednotlivých smeroch sa misfit podobá paraboloidu (Kubina F., 2013)

6.3 Konvergencia hľadania optimálneho modelu minimalizáciou misfitu

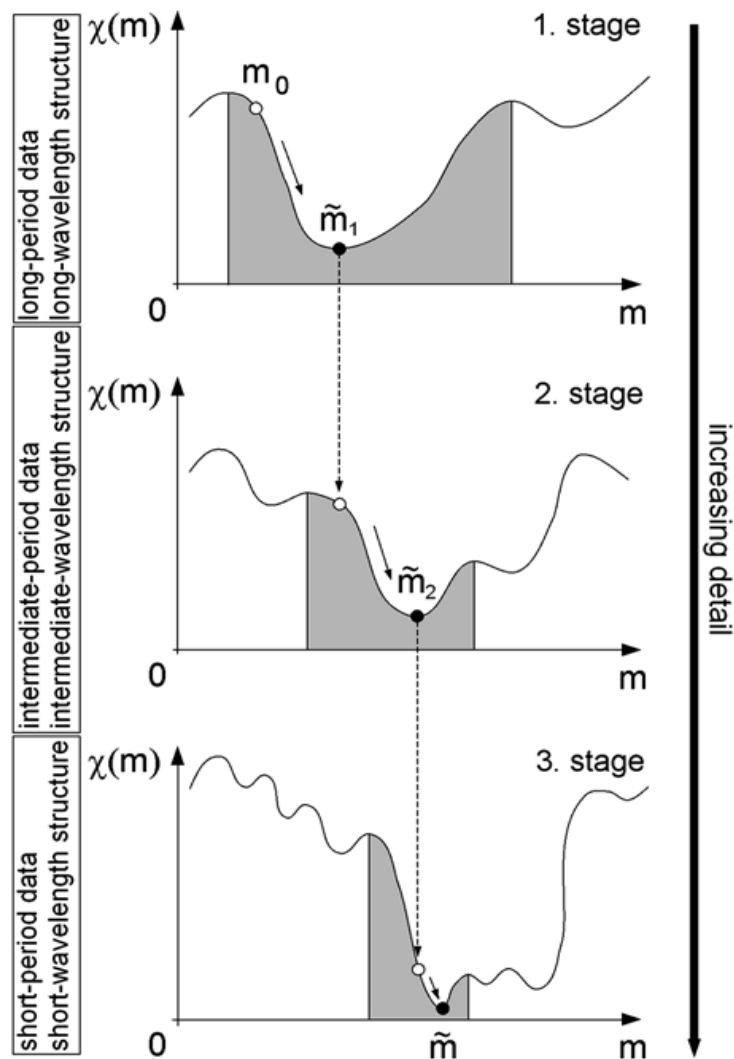
Pre riešenie inverznej úlohy minimalizáciou misfitu v praxi je charakteristická prítomnosť viacerých lokálnych miním. Navyše existuje možnosť nesprávneho určenia globálneho minima, k čomu prispieva skutočnosť, že misfit sa kvôli časovej náročnosti výpočtu určuje len pre niekoľko modelov.

Ak je náš štartovný model značne odlišný od optimálneho modelu, môže mať misfit pre modely ležiace medzi týmito modelmi niekoľko lokálnych miním, do ktorých sa potenciálne môžeme dostať a tam inverziu ukončiť, pričom nemusíme vedieť, že sme v lokálnom minime. Preto je výhodou mať štartovací model \mathbf{m}_0 čo najmenej odlišný od optimálneho modelu $\tilde{\mathbf{m}}$.

Aby sme zabránili konvergencii do nesprávneho – lokálneho minima, môžeme použiť napríklad metódu *multi-scale approach* (metóda viacerých škál), ktorá je popísaná v nasledujúcej podkapitole.

6.3.1 Multi-scale approach

Jednoducho povedané, v tejto metóde sa využíva, že čím členitejší je model, tým aj zodpovedajúci misfit je členitejší, teda má aj viac lokálnych miním. Prvú fázu iteratívnej minimalizácie preto začneme analýzou dát s veľkou periódou, čo zabezpečí vyhladenie misfitu, menej lokálnych miním a tiež širšiu jamu v okolí globálneho minima. To nám dáva väčšiu šancu nespadnúť do lokálneho minima. Keď už po niekoľkých iteráciách náš model dobre vysvetľuje nízkofrekvenčné dáta, ukončíme túto fázu a náš aktuálny model použijeme ako štartovací model pre ďalšiu fázu, v ktorej budeme analyzovať dáta s kratšou vlnovou dĺžkou. Takto pokračujeme až po najkratšie vlnové dĺžky.



Obr. 6-4: Multi-Scale approach - príklad trojfázovej inverzie
(A. Fichtner, 2011)

7 Algoritmus riešenia inverzie použitím adjungovanej metódy

Použitím teórie popísanej v tejto práci a za použitia algoritmu na riešenie priamej úlohy vieme riešiť inverzný problém. V niekoľkých bodoch tu zhrnieme postup – algoritmus, ktorý predstavuje použitie adjungovanej metódy a vedie k nájdeniu optimálneho modelu prostredia:

- 1) Pripravíme štartovací model \mathbf{m}^0 ; $i = 0$.
- 2) Zadáme funkciu popisujúcu zdroj \mathbf{f} – polohu hypocentra, čas aktivácie zdroja a jeho časový vývoj.
- 3) Zadáme vstupné dáta \mathbf{u}^0 pochádzajúce z reálnych meraní alebo syntetické dáta pochádzajúce z cieľového modelu, ktorý sa potom snažíme z mierne odlišného štartovacieho modelu dosiahnuť.
- 4) Zo zadaných vstupných dát – modelu \mathbf{m}^i a zdroja \mathbf{f} – vypočítame priame vlnové pole $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ a záznamy v prijímačoch.
- 5) Zvolíme si misfit χ a určíme príslušné adjungované zdroje.
- 6) Použitím algoritmu na výpočet priameho vlnového poľa vypočítame adjungované vlnové pole $\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, t)$.
- 7) Z priameho $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ a adjungovaného poľa $\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ vypočítame kernely K_m^i .
- 8) Určíme optimálnu dĺžku kroku. Použijeme ďalšie výpočty pre rôzne dĺžky krokov γ^j a modely $\mathbf{m}^{i,j} = \mathbf{m}^i + \gamma^j K_m^i$, $j = 0, \dots, N$. Dostaneme závislosť misfitu χ od dĺžky kroku, pričom optimálnu dĺžku γ^{opt} určíme ako minimum tejto závislosti.
- 9) Z vypočítaných kernelov K_m^i a optimálnej dĺžky kroku γ^{opt} určíme nový model $\mathbf{m}^{i+1} = \mathbf{m}^i + \gamma^{opt} K_m^i$; $i := i + 1$.
- 10) Výpočet ukončíme po splnení terminačných podmienok (napr. $\chi < \delta$, kde δ má vopred zvolenú hodnotu). Inak sa vrátíme na krok 4.

Záver

V práci sme od základov odvodili adjungovanú metódu riešenia inverznej úlohy – metódu adjungovanej tomografie. Ukázali sme spôsob hľadania riešenia pre adjungovanú pohybovú rovnicu spĺňajúcu zavedené koncové podmienky. Riešením je adjungované vlnové pole, ktoré umožňuje výpočet Fréchetových kernelov. Odvodili sme vzťahy pre výpočet kernelov, ktoré zodpovedajú rôznym parametrizáciám modelu, vzťahy pre výpočet misfitov a príslušných funkcií pre adjungované zdroje. Ukázali sme, ako sa dá minimalizovať misfit, teda ako nájsť optimálny model. Pre stručné zhrnutie postupu riešenia inverzie použitím adjungovanej tomografie slúži algoritmus uvedený v závere práce. Pri odvádzaní jednotlivých vzťahov sme pre zápis zložiek vektorových veličín používali pravouhlý súradnicový systém. Dôvodom voľby súradnicového systému bol zámer ďalej použiť odvodené teoretické vzťahy na lokálne sedimentárne štruktúry (akou je napríklad oblasť Mygdónskeho bazénu), t.j. na prostredia s rozmermi, pre ktoré sú vhodné pravouhlé súradnice a nie je potrebné uvažovať zakrivenie zemského povrchu.

1 Zoznam použitej literatúry

- Fichtner, A. (2011). „*Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*“. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. Springer. ISBN: 978-3-642-15806-3.
- Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M. (1971). „*Matematika I*“. 4. vydanie. Bratislava: ALFA, 1971. 760 s.
- Kubina, F. (2013). „*Adjungovaná tomografia a jej aplikácia na Mygdónsky Bazén*“: diplomová práca. Bratislava : UNIVERZITA KOMENSKÉHO, 2013. 77 s.
- Luo, Y., Schuster, G. T. (1991). „*Wave-equation travelttime inversion*“. In: Geophysics 56, pp. 645 – 653.
- Tape, C. – Liu, Q. – Tromp, J. (2007). „*Finite-frequency tomography using adjoint methods—Methodology and examples using membrane surface waves*“. In: Geophysics. J. Int. 168, pp. 1105–1129.
- Tarantola, A. (1984). „*Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation*“. In: Geophysics 49, pp. 1259–1266.
- Tarantola, A. (1988). „*Theoretical background for the inversion of seismic waveforms, including anelasticity and attenuation*“. In: Pure Appl. Geophys.128, pp. 365 – 399.