

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**ADJUNGOVANÁ TOMOGRAFIA**  
**A JEJ APLIKÁCIA NA MYGDÓNSKY BAZÉN**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

**2013**

**Bc. FILIP KUBINA**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ADJUNGOVANÁ TOMOGRAFIA  
A JEJ APLIKÁCIA NA MYGDÓNSKY BAZÉN

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Štúdijný program: Fyzika Zeme a planét  
Štúdijný odbor: 4.1.1 Fyzika  
Katedra: Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie  
Školiteľ: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

Bratislava, 2013

Bc. Filip Kubina



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Filip Kubina  
**Študijný program:** fyzika Zeme a planét (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 4.1.1. fyzika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Adjungovaná tomografia a jej aplikácia na Mygdónsky bazén

**Cieľ:** Rozpracovať metódy adjungovanej tomografie na prípad lokálnych povrchových sedimentárnych štruktúr, na ktorých možno očakávať anomálne seizmické pohyby. Vyvinutý algoritmus adjungovanej tomografie implementovať do výpočtového programu realizujúceho výpočet pomocou efektívnej konečno-diferenčnej schémy. Algoritmus overiť na kanonických prípadoch a aplikovať na Mygdónsky sedimentárny bazén.

**Vedúci:** prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.  
**Katedra:** FMFI.KAFZM - Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.  
**Dátum zadania:** 29.11.2012

**Dátum schválenia:** 26.04.2013  
prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

# Pod'akovanie

*Ďakujem účastníkom Diplomového semináru za postrehy a pripomienky ku tejto práci, ktoré formovali jej smerovanie a pomáhali pri jej písaní. Moja vd'aka patrí hlavne vedúcemu prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. za rady, ktoré viedli nielen k zvýšeniu výslednej úrovne textu a doc. Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD. za pomoc pri spoznávaní programu na priame výpočty a za otázky, ktoré bolo treba zodpovedať.*

# Abstrakt

Diplomová práca je venovaná rozpracovaniu adjungovanej metódy v seizmickej tomografii v aplikácii na povrchové sedimentárne bazénov. Podobná aplikácia nie je z literatúry známa.

Prvá časť práce je zameraná na porovnanie vlastností jednotlivých druhov misfitu vybraných parametrov seizmogramov a zvolenie najvhodnejšieho druhu misfitu pre inverziu v prípade sedimentárnych bazénov. Analyzuje v nej vplyv váhovania misfitu.

V druhej časti práce vysvetľuje tvar a význam jednotlivých častí kernelov modelových parametrov a navrhuje modifikácie kernelov normovaním vybranými veličinami s cieľom zvýšenia rýchlosti konvergencie a s cieľom konvergencie k fyzikálne opodstatnenejším modelom. Modifikácie metódy testujeme na kanonických modeloch.

V ďalšej časti práce aplikujeme modifikovanú metódu na model Mygdónskeho sedimentárneho bazénu pri meste Thessaloniki v Grécku. Numerické výsledky potvrdzujú, že navrhnuté modifikácie sú zlepšením štandardnej metódy.

**KEÚČOVÉ SLOVÁ: ADJUNGOVANÁ TOMOGRAFIA, KONEČNÉ DIFERENCIE, SEDIMENTÁRNY BAZÉN, NORMOVANIE KERNELOV, VÁHOVANIE MISFITU**

# Abstract

The Thesis is devoted to the elaboration of the adjoint method in seismic tomography in application to surface sedimentary basins. Such application is not known from scientific literature.

The first part of the Thesis is focused on comparison of properties of different kinds of misfits calculated from selected characteristics of seismogram and choice of the most appropriate kind of misfit for inversion in case of sedimentary basins. We analyze an effect of weighting the misfit.

In the second part we explain the form and the meaning of individual parts of kernels of model parameters, and propose modifications of kernels by normalizing kernels with selected quantities – aiming to speed up convergence and reach convergence to physically more meaningful models. We test the proposed modifications using canonical models.

In the next part we apply the modified method to the model of the Mygdonian sedimentary basin near the city of Thessaloniki in Greece. Numerical results confirm that the proposed modifications improve the standard method.

**KEYWORDS:** ADJOINT TOMOGRAPHY, FINITE DIFFERENCES, SEDIMENTARY BASIN, KERNEL NORMALIZATION, MISFIT WEIGHTING

# Predhovor

Tradičné delenie seizmologických úloh na priame a obrátené v poslednej dobe stráca svoje opodstatnenie. Nielenže sa obrátené úlohy nezaobídu bez priamych výpočtových metód, ale aj priame modelovanie čoraz viac vyžaduje využitie výsledkov obrátených úloh. Typickým príkladom je test rôznych metód priameho modelovania v oblasti Mygdónskeho bazénu v rámci projektu E2VP za účelom predikcie seizmického pohybu. Napriek snahe o pripravenie čo najpresnejšieho modelu záujmovej lokality a použitiu najnovších metód priameho numerického modelovania obsahovali výsledné seizmogramy rôznych zúčastnených tímov nezanedbateľné rozdiely. Ukazuje sa, že ďalší pokrok sa nezaobíde bez presnejších modelov danej sedimentárnej štruktúry pripravených s využitím seizmickej tomografie.

Adjungovaná metóda je metóda slúžiaca na efektívny výpočet kernelov, čiže oblastí modelu, ktoré treba pozmeniť, aby sme dosiahli lepšiu zhodu modelu s reálnym prostredím. Adjungovaná metóda využívajúca najnovšie metódy priameho modelovania v posledných rokoch zaznamenala výrazný rozvoj a dosiahla výborné výsledky v seizmickej tomografii 3D prostredí. Využitie adjungovanej metódy na spresnenie modelu a jej kombinácia s priamym modelovaním za účelom dosiahnutia presnejších výsledkov predikcie seizmického pohybu je preto celkom prít'azlivou možnosťou. Aplikácia adjungovanej metódy na povrchové sedimentárne štruktúry, na akých, podľa známej literatúry, doteraz ešte nebola nasadená, však prináša nové výzvy a problémy, ktoré budú musieť byť vyriešené.

# Obsah

<b>Pod'akovanie</b>	<b>iv</b>
<b>Abstrakt</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Predhovor</b>	<b>vii</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
1.1 Historický prehľad seizmickej tomografie . . . . .	1
1.2 Princíp a algoritmus adjungovanej tomografie . . . . .	2
1.2.1 Princíp adjungovanej tomografie . . . . .	2
1.2.2 Algoritmus adjungovanej tomografie . . . . .	3
1.2.3 Vizuálny diagram algoritmu adjungovanej tomografie . . . . .	4
<b>2 Ciele práce</b>	<b>5</b>
<b>3 Priama úloha</b>	<b>6</b>
3.1 Charakterizácia úlohy . . . . .	6
3.1.1 Prostredie . . . . .	6
3.1.2 Zdroje . . . . .	7
3.1.3 Prijímače a dáta . . . . .	7
3.2 Výpočet priamej úlohy metódou konečných diferencií . . . . .	7
<b>4 Adjungovaná metóda</b>	<b>9</b>
4.1 Obrátená úloha . . . . .	9
4.1.1 Explicitný výpočet parametrov modelu . . . . .	9
4.1.2 Iteratívne hľadanie parametrov modelu gradientnými metódami . . . . .	9
4.2 Adjungovaná metóda . . . . .	10
4.2.1 Definície . . . . .	10
4.2.2 Gradient misfitu $\chi(m)$ . . . . .	11



4.2.3	Adjungovaná rovnica pre pohybovú rovnicu kontinua . . . . .	12
4.3	Riešenie adjungovanej úlohy . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Misfit a adjungované zdroje</b>	<b>17</b>
5.1	Pojem misfitu a používané druhy misfitu . . . . .	17
5.1.1	$L_2$ norma rozdielov vektora posunutia . . . . .	18
5.1.2	Misift rozdielu časov šírenia P a S vln . . . . .	19
5.1.3	Časový posun ( <i>cross-correlation time shifts</i> ) vektora posunutia . . . . .	19
5.1.4	$L_2$ norma rozdielov amplitúdy vektora posunutia . . . . .	20
5.1.5	Časovo-frekvenčný misfit . . . . .	21
5.2	Adjungované zdroje . . . . .	22
5.3	Filtrovanie časovej funkcie adjungovaných zdrojov . . . . .	23
5.3.1	Návrh váhovaného misfitu . . . . .	23
5.3.2	Adjungované zdroje vypočítané z váhovaného misfitu . . . . .	24
5.4	Modifikácia vzťahu na výpočet časového posunu . . . . .	24
5.5	Kernely . . . . .	25
5.5.1	Porovnanie výsledných kernelov pre kanonické modely v závislosti od váhovania časovej funkcie adjungovaného zdroja . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Kernely</b>	<b>27</b>
6.1	Fréchetove kernely . . . . .	27
6.2	Vzťahy na výpočet kernelov parametrov $\rho$ , $\lambda$ a $\mu$ . . . . .	27
6.2.1	Kernel hustoty $\rho$ . . . . .	28
6.2.2	Kernel elastických koeficientov $\lambda$ a $\mu$ . . . . .	28
6.3	Výpočet kernelov . . . . .	28
6.3.1	Kompresia dát - <i>accuracy-adaptive time integration</i> . . . . .	30
6.3.2	Návrh na kompresiu dát v priestore - <i>accuracy-adaptive space integration</i> . . . . .	31
6.3.3	Využitie princípu superpozície . . . . .	32
6.4	Typický tvar kernelov . . . . .	32
6.4.1	Tvar . . . . .	32
6.4.2	Amplitúdy kernelov . . . . .	34
6.4.3	Fresnelove zóny . . . . .	34
6.4.4	Ukážka typických vlastností kernelov . . . . .	36
6.5	Úpravy kernelov - regularizácia alebo <i>gradient pre-conditioning</i> . . . . .	37
6.5.1	Orezávanie . . . . .	38
6.5.2	Zhľadzovanie . . . . .	38

6.5.3	<i>Gradient pre-conditioning</i> vzhľadom ku geometrickému rozširovaniu vlnoplochy . . . . .	39
6.6	<i>Gradient pre-conditioning</i> normovaním maximálnou amplitúdou veličiny vlnového poľa . . . . .	40
6.6.1	Normy pre kernely parametrov $\rho$ , $\lambda$ a $\mu$ . . . . .	40
6.6.2	Vplyv rôznych druhov <i>gradient pre-conditioning</i> na výsledné vlastnosti kernelov v kanonických situáciách . . . . .	41
6.7	Výsledky . . . . .	47
6.7.1	Korekcia na bodový zdroj . . . . .	47
6.7.2	Vplyv normovania na výsledný kernel v blízkosti voľného povrchu . . . . .	48
6.7.3	Porovnanie výsledkov pre rôzne rozloženie staníc . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Aplikácia adjungovanej metódy na inverziu parametrov skúmaných prostredí</b>	<b>51</b>
7.1	Prostredie . . . . .	51
7.1.1	Voľba invertovaných parametrov prostredí . . . . .	51
7.1.2	Invariancia veličín vlnového poľa pri zámene $\{\rho, \lambda, \mu\} \rightarrow \{c\rho, c\lambda, c\mu\}$ . . . . .	52
7.1.3	Invariancia P vln pri zámene $\{\lambda, \mu\} \rightarrow \{\lambda + 2\Delta, \mu - \Delta\}$ . . . . .	52
7.2	Všeobecný postup inverzie parametrov modelu . . . . .	53
7.2.1	Výpočet modelu po ďalšej iterácii v prípade inverzie jedného parametra . . . . .	53
7.2.2	Hľadanie optimálnej dĺžky kroku $\Lambda_{opt}^{(i)}$ v jednom rozmere . . . . .	53
7.2.3	Výpočet modelu po ďalšej iterácii v prípade inverzie dvoch parametrov . . . . .	53
7.2.4	Hľadanie optimálnych dĺžok krokov v dvoch rozmeroch . . . . .	54
7.2.5	<i>Multi-scale approach</i> . . . . .	55
7.3	<i>Checkerboard</i> testy inverzie jedného parametra . . . . .	56
7.3.1	Zadanie úlohy . . . . .	56
7.3.2	Spracovanie výsledkov . . . . .	56
7.3.3	Efekt váhovania časovej funkcie adjungovaného zdroja na misift a invertovaný model . . . . .	57
7.3.4	Efekt normovania kernelov na pokles misiftu a invertovaný model . . . . .	58
7.3.5	Závislosť misiftu a invertovaného modelu od počtu iterácií . . . . .	59
7.3.6	Porovnanie presnosti inverzie jedného parametra vybraných testov . . . . .	59
7.3.7	Presnosť inverzie jednotlivých parametrov . . . . .	59
7.4	<i>Checkerboard</i> testy inverzie dvoch parametrov $\lambda$ a $\mu$ . . . . .	60
7.4.1	Výsledky inverzie pri rovnakej dĺžke krokov pre kernely oboch parametrov . . . . .	61
7.4.2	Výsledok inverzie pri striedavých zmenách dvoch parametrov . . . . .	61

7.4.3	Výsledky inverzie pri rôznej dĺžke krokov pre kernely oboch parametrov . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Adjungovaná tomografia 2D rezu Mygdónskym bazénom</b>	<b>65</b>
8.1	2D rez Mygdónskym bazénom . . . . .	65
8.2	Príprava inverzie . . . . .	66
8.2.1	Voľba vhodného misfitu pre lokálne sedimentárne štruktúry . . . . .	66
8.2.2	Inverzia parametrov sedimentárneho bazénu . . . . .	67
8.3	Výsledky . . . . .	68
8.3.1	Efekt zhladzovania . . . . .	69
8.3.2	Efekt normovania . . . . .	70
8.3.3	Počet zdrojov . . . . .	71
8.3.4	Rozloženie prijímačov . . . . .	71
8.3.5	Rýchlosť konvergencie . . . . .	71
8.3.6	Výsledný model . . . . .	72
<b>9</b>	<b>Záver</b>	<b>76</b>

# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Historický prehľad seizmickej tomografie

Seizmológia je pomerne nová veda. Impulzom k jej vzniku bolo pravdepodobne až veľké zemetrasenie v Lisabone v roku 1755. Prvé zdôvodnenie zemetrasení “pohybom skál hlboko pod povrchom” podal John Michell (1761). V rokoch 1850-1860 sa uskutočnili prvé seizmologické merania - Luigi Palmieri meral čas príchodu seizmických vln a Robert Mallet dokonca vypočítal rýchlosť seizmických vln umelo vygenerovaných explóziami, čo možno považovať za prvý prípad obrátenej úlohy v seizmológii.

Obrátené úlohy napredovali spolu s rozvojom teórie riešenia priamych úloh a meracích zariadení. Teoreticky odvodené P a S vlny nameril ako prvý Oldham (1900) a už o šesť rokov neskôr vysvetlil nízke amplitúdy P vln pre epicentrálne vzdialenosti väčšie než  $100^\circ$  a menšie než  $150^\circ$  prítomnosťou zemského jadra, ktorého rozmery určil Gutenberg (1913).

V rovnakom čase pokročili aj obrátené úlohy na regionálnej škále, keď Mohorovičić (1909) po nameraní časov príchodov rôznych typov P a S vln (Pn, Pg, Sn a Sg) zistil existenciu diskontinuity v hĺbke 54km (terajšia Mohorovičićova diskontinuita medzi kôrou a plášťom).

Následne nastal útlm spôsobený nedostatkom meraní a tým, že analytické riešenia nestačili na výpočet čoraz zložitejších úloh.

Výrazný rozvoj 3D tomografie začal až v 80. rokoch 20. storočia. Presadili sa numerické, hlavne lúčové metódy. Medzi prvé práce na túto tému patria články od Aki et al. (1977) a Dziewonski et al. (1977).

Prvý 1D model celej Zeme, ktorý dával dobrú zhodu pre vypočítané časy príchodu bol model PREM - *Preliminary Reference Earth Model* (Dziewonski et al., 1981).

Obmedzenia lúčovej tomografie pri snahe o zvyšovanie rozlíšenia boli dôvodom pre použitie nových metód. Išlo o *finite-frequency* tomografiu nahrádzajúcu nekonečne tenké lúče konečnými objemami, kde sa šírila vlna. Nakoniec sa začala využívať *full waveform* in-

verzia (FWI) (Bamberger et al., 1982; Tarantola, 1988) pomenovaná podľa využitia údajov z celého priebehu seizmogramu.

Postup na výpočet gradientu misfitu, ktorý sa už blížil dnešným algoritmom, zaviedol do seizmológie Tarantola (1984). Adjungované rovnice na explicitný výpočet gradientu misfitu potom formálne zaviedli Talagrand et al. (1987).

V súčasnosti adjungovaná tomografia sa používa na široké spektrum problémov od exploračnej geofyziky až po tomografiu celého zemského telesa. Rozdiely sú hlavne v použitej metóde na priame výpočty, napríklad konečné diferencie (napr. Igel et al. (1996)), konečné elementy (napr. Akcelik et al. (2003)) alebo spektrálne elementy (napr. Tromp et al. (2005), Capdeville et al. (2005), Liu et al. (2008), Fichtner et al. (2008)). V čoraz väčšej miere sa presadzujú 3D riešenia. Ide však stále o novú oblasť seizmológie s množstvom otvorených problémov.

Virieux et al. (2009) prehlásili za najväčšie problémy súčasnej FWI tieto tri:

- vytvorenie vhodných a presných štartovacích modelov a získanie dostatočných nízko-frekvenčných dát
- definovanie nových minimalizačných kritérií na odstránenie závislosti FWI od chýb amplitúd a zvýšenie robustnosti metódy
- zvýšenie efektívnosti algoritmov a kompresie dát tak, aby 3D elastická tomografia bola uskutočniteľná za rozumných podmienok

## 1.2 Princíp a algoritmus adjungovanej tomografie

### 1.2.1 Princíp adjungovanej tomografie

Seizmická tomografia je proces zisťovania podpovrchových štruktúr s použitím seizmických dát a teoretických modelov. Ide tak o jednu z mnohých obrátených úloh.

Adjungovaná tomografia je špeciálny prípad seizmickej tomografie. Adjungovaná tomografia je iteratívny proces hľadania modelu prostredia s využitím adjungovanej metódy. Adjungovaná metóda sa používa na výpočet gradientu parametrov prostredia. Vynásobením tohto gradientu vhodnou dĺžkou kroku dostaneme hodnoty, o ktoré musíme zmeniť parametre vstupného prostredia, aby sme dosiahli lepšiu zhodu seizmogramov vypočítaných priamym výpočtom s nameranými dátami. Takto zmenený model vstupuje do ďalšej iterácie.

## 1.2.2 Algoritmus adjungovanej tomografie

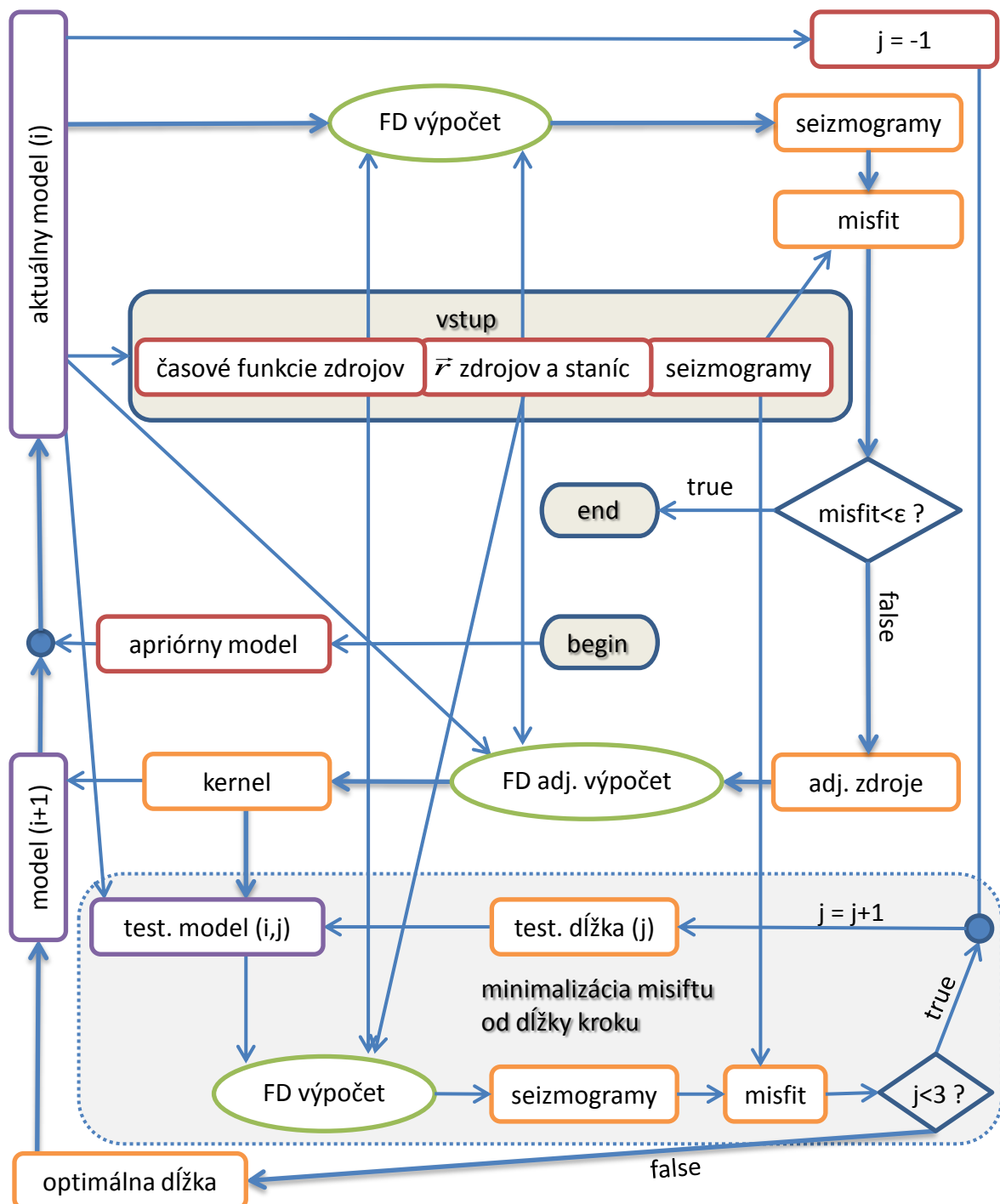
Na začiatku práce by sme radi predostreli čitateľovi náhľad na celý algoritmus adjungovanej tomografie. K jednotlivým častiam sa budeme v tejto práci vyjadrovať podrobnejšie. Tento text má slúžiť len ako mapa algoritmu v jeho súčasnej zaužívanej podobe. Postup je nasledovný:

1. pripravíme a vložíme dáta z reálnych meraní, alebo vypočítame syntetické seizmogramy pre originálny (cieľový) model
2. pripravíme apriórny štartovací model  $\mathbf{m}^{(0)}$
3. zo zadaných vstupných dát zdroja  $s$  (poloha hypocentra, čas aktivácie a jeho časová funkcia) a modelu  $\mathbf{m}^{(i)}$  vypočítame záznamy v prijímačoch a uložíme vlnové pole  $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$  pre neskoršie spracovanie
4. v závislosti od typu misfitu určíme časové funkcie adjungovaných zdrojov
5. riešime adjungovanú úlohu pre model  $\mathbf{m}^{(i)}$  a vypočítame adjungované vlnové pole  $\mathbf{u}^{*(i)}(\mathbf{x}, t)$
6. zo záznamov vlnových polí  $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$  (krok 3) a  $\mathbf{u}^{*(i)}(\mathbf{x}, t)$  (krok 5) vypočítame kernel  $\mathbf{K}^{(i)}$
7. určíme optimálnu dĺžku kroku, ktorou treba prenasobiť vypočítaný kernel na určenie nového modelu:
  - (a) zvolíme dĺžku pokusného kroku  $\Lambda^{(i,j)}$
  - (b) vytvoríme nový model  $\mathbf{m}^{(i,j)} = \mathbf{m}^{(i)} + \Lambda^{(i,j)} \cdot \mathbf{K}^{(i)}$
  - (c) riešime priamu úlohu so zdrojom  $s$  na modeli  $\mathbf{m}^{(i,j)}$  a vypočítame misfit  $\chi^{(i,j)}$
  - (d) vraciame sa k bodu (a) dovtedy, kým nemáme misfity pre tri výpočty ( $j = 0, 1, 2$ )
  - (e) misfity  $\chi^{(i,j)}(\Lambda^{(i,j)})$  pre  $j = 0, 1, 2$  preložíme parabolickou funkciou a nájdeme také  $\Lambda_{opt}^{(i)}$ , pre ktoré je misfit minimálny
  - (f) ak hodnota  $\Lambda_{opt}^{(i)}$  nie je dostatočne presne určená z pokusných krokov  $\Lambda^{(i,j)}$ , tak výpočet zopakujeme od bodu (a) pre vhodnejšie pokusné hodnoty  $\Lambda^{(i,j)}$
8. vytvoríme nový model  $\mathbf{m}^{(i+1)} = \mathbf{m}^{(i)} + \Lambda_{opt}^{(i)} \cdot \mathbf{K}^{(i)}$
9. pokračujeme nasledujúcou iteráciou  $i + 1$  od kroku 3
10. výpočet ukončíme po dosiahnutí terminačných podmienok

### 1.2.3 Vizualný diagram algoritmu adjungovanej tomografie

Pre lepšiu vizuálnu predstaviteľnosť uvádzame aj grafické znázornenie celého algoritmu adjungovanej tomografie, takzvaný *workflow*. Pravidlá pre pohyb v grafe sú nasledovné:

- tok začína vo vrchole *begin* a končí vo vrchole *end*
- informácia vo vrchole sa spracuje až vtedy, keď sú pripravené všetky vstupy
- po spracovaní vo vrchole tečie informácia do všetkých jeho výstupov okrem vrcholu typu *decision* (štvoruholník), z ktorého tečie len po pravdivej vetve
- cez vrchol *or* (krúžok) tečie informácia, keď je pripravený aspoň jeden vstup



# Kapitola 2

## Ciele práce

Ukazuje sa, že tradičné delenie seizmologických úloh na priame a obrátené sa v poslednej dobe blíži ku svojim limitom. Na dosiahnutie presnejších výsledkov priamych výpočtov už nestačí len separátne priame modelovanie. Dlhodobým cieľom je preto postupné vybudovanie teoretického aj programového aparátu, ktorý v kombinácii s už existujúcimi FD metódami priameho numerického modelovania bude viesť k presnejšej predikcii seizmického pohybu pôdy na záujmových lokalitách.

Objektom záujmu sú pre nás povrchové sedimentárne bazény, špeciálne Mygdónsky bazén v severnom Grécku. Na rozdiel od regionálnych a celozemských modelov, kde bola adjungovaná tomografia úspešne aplikovaná, aplikácia adjungovanej tomografie v podmienkach lokálnych štruktúr vedie k množstvu nových problémov, ktoré budú musieť byť vyriešené.

Ciele tejto diplomovej práce sú preto nasledovné:

- vytvorenie programu, ktorý bude riadiť celý proces inverzie a napísanie jednotlivých podprogramov slúžiacich na: priame a adjungované výpočty, výpočty kernelov, výpočty misfitov a adjungovaných zdrojov, hľadanie optimálnej dĺžky kroku a iteratívne zmeny parametrov prostredia
- vykonanie numerických experimentov na kanonických modeloch a navrhnutie možných zlepšení a modifikácií špecifických pre lokálne povrchové sedimentárne štruktúry
- aplikovanie modifikovaného algoritmu v podmienkach Mygdónskeho bazénu a interpretácia výsledkov inverzie.



# Kapitola 3

## Priama úloha

### 3.1 Charakterizácia úlohy

#### 3.1.1 Prostredie

Uvažujeme heterogénne izotropné dokonale elastické 2D kontinuum. V našich výpočtoch je kontinuum nahradené sieťovým 2D modelom rozloženia hustoty  $\rho(\mathbf{r})$ , a elastických koeficientov  $\lambda(\mathbf{r})$  a  $\mu(\mathbf{r})$ .

Model je pravouhlý, jeho rozmery meníme podľa potreby. Ohraničený je zhora rovinným voľným povrchom a na zvyšných troch stranách modelu neodrážajúcimi hranicami. Spodná časť modelu pre  $h > h_{hom}$  je homogénna s hodnotami  $\rho_{hom}$ ,  $\lambda_{hom}$  a  $\mu_{hom}$ .

Metódu adjungovanej tomografie môžeme aplikovať aj na nespojité prostredia. Invertované modely vychádzajúce zo spojitého štartovacieho modelu sú však vždy spojité. Je to dôsledok spojitosti kernelov, ktoré sa po násobení dĺžkou kroku pripočítavajú k aktuálnemu modelu. Nespojitosti parametrov v invertovaných modeloch preto nemôžu vzniknúť.

#### Názvoslovie modelov

Počas inverzie pracujeme s rôznymi modelmi prostredí. Aby sme udržali konzistenciu v ich pomenovaniach, v Tab. 3.1 uvádzame používané názvy pre rôzne modely v celom texte tejto práce.

#### Parametre štartovacieho modelu

Na vstup do inverzie sa snažíme používať model čo najbližší našim apriórnym znalostiam o skutočnom prostredí. Nevhodný štartovací model môže spôsobiť pomalú konvergenciu a v horšom prípade sa inverzia nemusí vôbec podariť. Keďže existuje nejednoznačnosť v škálovaní parametrov (časť 7.1.2), snažíme sa vychádzať z čo najpresnejších modelov

<i>názov</i>	<i>popis</i>
apriórny	model, ktorý vystihuje naše apriórne vedomosti pred začatím inverzie
štartovací	model, ktorý slúži ako vstup do programu na inverziu; môže ním byť napríklad apriórny model
aktuálny	model, ktorý práve využívame v FD výpočte, označujeme ho indexmi aktuálnej iterácie $i$ a pôsobiaceho zdroja $j$
cieľový	model, ku ktorému sa snažíme priblížiť počas inverzie; je to model prostredia z ktorého pochádzajú dáta (namerané alebo syntetické)
výsledný	model, ktorý vzišiel z inverzie po ukončení programu

Tabuľka 3.1: pomenovania modelov, ktoré využívame v tejto práci

hustoty. Potom počas výpočtu môžeme mať hustotu fixovanú a invertovať len parametre  $\lambda(\mathbf{r})$  a  $\mu(\mathbf{r})$ .

Bez žiadnej apriórnej znalosti používame homogénny štartovací model. Hodnoty veličín v tomto modeli sú  $\rho^{(0)}(\mathbf{r}) = \rho_{hom}$ ,  $\lambda^{(0)}(\mathbf{r}) = \lambda_{hom}$  a  $\mu^{(0)}(\mathbf{r}) = \mu_{hom}$ .

### 3.1.2 Zdroje

Pre testovacie účely používame podľa potreby bodové explozívne alebo double-couple zdroje. Časová funkcia zdrojov v priamej úlohe je Gaborov signál. Časové funkcie adjungovaných zdrojov sú určené z misfitu (5.2).

Presnosť FD výpočtu kladie obmedzenia na maximálne frekvencie v spektre zdrojov. Časové funkcie zdrojov priameho výpočtu sú určené tak, aby tieto obmedzenia splňali. Spektrum adjungovaných zdrojov závisí od misfitu. Vo všeobecnosti má rovnaký rozsah ako spektrum zdrojov priameho výpočtu. Ak sa však vyskytnú vyššie frekvencie (napríklad aj dôsledkom chýb), môžeme aplikovať na časovú funkciu *low-pass* (“dolnopriepustný”) filter.

### 3.1.3 Prijímače a dáta

Na účely inverzie používame celý nameraný alebo syntetický priebeh vektora posunutia. Ide o takzvanú *full waveform inversion* (FWI).

Vďaka možnosti použiť superpozíciu adjungovaných zdrojov (6.3.3) bez zvýšenia výpočtových nárokov je vhodné využiť údaje z čo najväčšieho počtu prijímačov.

Program umožňuje zadať polohy prijímačov nielen na povrchu, ale aj vo vnútri modelu, čo využívame pri testovaní kanonických situácií.

## 3.2 Výpočet priamej úlohy metódou konečných diferencií

Jednou z najdôležitejších súčastí adjungovanej tomografie je program na výpočet priamej úlohy. Počas jednej iterácie pre každý zdroj zvlášť prebehne viacero priamych výpočtov:

- výpočet priamej úlohy na výpočet kernelu
- výpočet adjungovanej úlohy, ktorý sa dá matematicky previesť na priamu úlohu
- viacero ( $N \geq 3$ ) priamych výpočtov na určenie závislosti misfitu od dĺžky kroku

Veľmi dôležitá je tak presnosť aj rýchlosť programu. Tieto výpočty zaberajú väčšinu výpočtového času celej inverzie.

Na priamy výpočet sme napísali nový FD (*finite-differences* - “konečno-diferenčný”) program v nízkoúrovňovom jazyku ANSI C. Ide o modifikáciu fortranovského programu 2DFD\_DVS autorov Franek et al. (2011). Tento nový program bol voči pôvodnému zostručnený a zprehl’adený tak, aby lepšie vyhovoval požiadavkám pre priame výpočty simulujúce seizmické vlnenie v sedimentárnom bazéne. Následne bol tento program vložený do jednotného celku starajúceho sa o celý proces adjungovanej tomografie od načítania vstupných dát, vypočítania syntetických seizmogramov až po vypísanie výsledného invertovaného modelu. Tento celok menej výpočtovo náročný, ale algoritmicky komplikovanejší, sme napísali kvôli prehl’adnosti zdrojového kódu v jazyku C++.

Zložitosť algoritmu a množstvo úloh, ktoré musí program zvládať, ilustruje fakt, že aj našej po snahe o čo najkratší zdrojový kód mal výsledný program vyše 5100 riadkov kódu. Z toho priamy FD výpočet tvorilo 1300 riadkov a rôzne funkcie slúžiace na prípravu modelov, načítavanie vstupov a ukládanie výstupov mali 650 riadkov. Zvyšných 3150 riadkov bol priamo algoritmus adjungovanej tomografie.

Samotný FD program na priamy výpočet počítá so schémou druhého rádu v čase a štvrtého rádu v priestore. Využíva *staggered grid* (“striedavo usporiadanú sieť”) s konštantným sieťovým krokom a *displacement-velocity-stress* (“posunutie-rýchlosť-napätie”) formuláciu pohybovej rovnice:

$$\rho(\mathbf{r}) \cdot \dot{v}_i(\mathbf{r}, t) = \tau_{ij,j}(\mathbf{r}, t) + f_i(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \dot{u}_i(\mathbf{r}, t), \quad (3.2)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{r}, t) = \lambda(\mathbf{r}) \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,k}(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}) \cdot (u_{i,j}(\mathbf{r}, t) + u_{j,i}(\mathbf{r}, t)). \quad (3.3)$$

V FD výpočte používame hranice navrhnuté v práci Emerman et al. (1983) pre maximálny útlm P-vln.

Podrobnejšie a vysvetľujúce informácie k teórii priameho FD modelovania možno nájsť v prácach Moczo et al. (2007), Kristek et al. (2002), Kristek et al. (2003) a Moczo et al. (2004).

# Kapitola 4

## Adjungovaná metóda

### 4.1 Obrátená úloha

#### 4.1.1 Explicitný výpočet parametrov modelu

Majme vektor modelových parametrov  $\mathbf{m}$  prostredia. Ďalej majme dátový vektor  $\mathbf{d}$ , čo sú v našom prípade priebeh vektorov posunutia nameraných na jednotlivých prijímačoch. A nakoniec majme operátor  $G$  popisujúcu šírenie seizmických vln v prostredí pre dané rozloženie staníc a zdrojov.

Priama úloha je úloha, keď operátor  $G$  priradí známym modelovým parametrom  $\mathbf{m}$  dáta  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}). \quad (4.1)$$

Obrátená úloha je úloha, keď hľadáme také modelové parametre  $\mathbf{m}$ , ktoré budú viesť po aplikovaní operátora  $G$  ku známym dátam  $\mathbf{d}$ . Matematicky môžeme tento proces vyjadriť operátorom  $G^{-1}$  inverzným ku  $G$ :

$$\mathbf{m} = G^{-1}(\mathbf{d}). \quad (4.2)$$

Problém spočíva v tom, že operátor  $G^{-1}$  nepoznáme, a preto musíme postupovať ináč.

#### 4.1.2 Iteratívne hľadanie parametrov modelu gradientnými metódami

Pointa iteratívneho hľadania optimálneho modelu spočíva v generovaní modelov, ktoré používame ako vstup do priamej úlohy, ktorú vieme riešiť. Vypočítané dáta s použitím vygenerovaného modelu vedú k dátam  $\mathbf{d} = G(\mathbf{m})$ , ktoré sa vo všeobecnosti líšia od nameraných dát  $\mathbf{d}^0$ . Misfit je veličina, ktorá kvantifikuje mieru nezhody dát  $\mathbf{d}$  a  $\mathbf{d}^0$ . Misfit budeme značiť  $\chi$  a pre pevne zadané parametre zdrojov, staníc a nameraných dát je misfit  $\chi(\mathbf{m})$  funkciou aktuálneho modelu  $\mathbf{m}$ , ktorý vstupuje do priameho výpočtu. Konkrétnym druhom misfitu a jeho vlastnostiam sa venujeme v kapitole 5.

Za výsledný model považujeme taký vygenerovaný model, ktorý spĺňa terminačné podmienky. Terminačné podmienky sú napríklad, že misfit je dostatočne malý. To znamená, že vypočítané seizmogramy sú veľmi podobné tým nameraným.

Keďže priestor možných modelových parametrov je obrovský, nemôžeme otestovať všetky možné modely. Namiesto toho začíname so štartovacím modelom, ktorý v každej iterácii nahradíme novším modelom s malými zmenami voči predchádzajúcemu. Aby táto postupnosť modelov konvergovala k cieľovému modelu, používajú sa gradientné metódy.

Cieľom gradientných metód je nájdenie gradientu misfitu od jednotlivých modelových parametrov. Model v nasledujúcej iterácii sa vypočíta tak, že sa pôvodný model zmení v smere gradientu o takú dĺžku, aby misfit klesol. Na efektívne nájdenie gradientu misfitu slúži adjungovaná metóda.

## 4.2 Adjungovaná metóda

### 4.2.1 Definície

Majme dynamický systém pozorovateľnej fyzikálnej veličiny  $\mathbf{u}$ . Tento systém nech závisí od modelových parametrov  $\mathbf{m}$ . Vývoj systému potom určujú externé sily  $\mathbf{f}$ . Pôsobenie externých síl na systém potom dáva do vzťahu operátor  $L$  symbolizujúci fyzikálnu teóriu. Dostávame tak výsledný vzťah pre vývoj systému

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \mathbf{f}. \quad (4.3)$$

Týmto všeobecným vzťahom a veličinám môžeme priradiť ich seizmologické ekvivalenty. Pozorovaná veličina  $\mathbf{u}$  je v seizmológii vektor posunutia. Modelové parametre sú rozloženia hustoty  $\rho(\mathbf{r})$  a elastických koeficientov  $\lambda(\mathbf{r})$  a  $\mu(\mathbf{r})$ . Sily  $\mathbf{f}$  sú časové funkcie zdrojov. Fyzikálny vzťah, ktorý ich dáva do súvisu je pohybová rovnica kontinua

$$\rho(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \quad (4.4)$$

Veličina  $\boldsymbol{\sigma}$  je tenzor deformácie. Tenzor deformácie má vektorovom zápise tvar

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{r}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \quad (4.5)$$

Po prepísaní do indexového tvaru dostaneme vzťah

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) \cdot \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}, t) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) \cdot u_{k,l}(\mathbf{r}, t), \quad (4.6)$$

kde  $C_{ijkl}$  je tenzor elastických koeficientov

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (4.7)$$

### 4.2.2 Gradient misfitu $\chi(\mathbf{m})$

Našou ďalšou úlohou je vyjadriť závislosť misfitu od modelových parametrov. To nám napovie, ako zmeniť modelové parametre tak, aby misfit v nasledujúcej iterácii klesol.

Podľa definície gradientu platí pre gradient misfitu podľa vektora materiálových parametrov

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\chi(\mathbf{m} + \varepsilon \delta \mathbf{m}) - \chi(\mathbf{m})}{\varepsilon \delta \mathbf{m}}. \quad (4.8)$$

Prírastok misfitu v smere zmeny potom je

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi(\mathbf{m}) \delta \mathbf{m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\chi(\mathbf{m} + \varepsilon \delta \mathbf{m}) - \chi(\mathbf{m})). \quad (4.9)$$

Z matematického pohľadu je výpočet prírustku jasná úloha, stačí vypočítať zmenu misfitu pre zmenu v každom smere zvlášť. Pri praktickom výpočte narazíme na problém obrovského počtu rozmerov vektora modelových parametrov. Prírastok misfitu musíme preto vypočítať ináč.

Substitúciou v tvare  $\delta \mathbf{u} \equiv \nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{u} \delta \mathbf{m}$  dostávame

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi \delta \mathbf{m} = \nabla_{\mathbf{u}} \chi \nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{u} \delta \mathbf{m} = \nabla_{\mathbf{u}} \chi \delta \mathbf{u}. \quad (4.10)$$

Vychádzajúc z rovnice 4.3 pre dynamický systém, môžeme napísať vzt'ahy pre jej diferenciály. Pravá strana rovnice vypadne, pretože externé sily  $\mathbf{f}$  nezávisia od modelových parametrov  $\mathbf{m}$  a funkcie  $\mathbf{u}$ .

$$\nabla_{\mathbf{m}} L \delta \mathbf{m} + \nabla_{\mathbf{u}} L \delta \mathbf{u} = 0. \quad (4.11)$$

Vynásobme rovnicu 4.11 (zatiaľ ľubovoľnou) *dostatočne peknou* testovaciu funkciou  $\mathbf{u}^*$ . Následne vypočítajme skalárny súčin týchto funkcií na celom priestore  $V \times T$  značený zátvorkami  $\langle \cdot \rangle$ . Pravá strana aj po integrácii zostane nulová

$$\langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_{\mathbf{u}} L \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_{\mathbf{m}} L \delta \mathbf{m} \rangle = 0. \quad (4.12)$$

Sčítame rovnice 4.12 a 4.10 a dostaneme

$$\nabla_{\mathbf{m}} \chi \delta \mathbf{m} = \nabla_{\mathbf{u}} \chi \delta \mathbf{u} + \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_{\mathbf{u}} L \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_{\mathbf{m}} L \delta \mathbf{m} \rangle. \quad (4.13)$$

Misfit má podľa definície tvar

$$\chi(\mathbf{m}) = \int_T \int_V \chi_1(\mathbf{m}, \mathbf{u}) d^3r dt \equiv \langle \chi_1 \rangle . \quad (4.14)$$

Po dosadení do rovnice 4.13 dostávame

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_u L \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_m L \delta \mathbf{m} \rangle . \quad (4.15)$$

Zadefinujme adjungované operátory  $\nabla_u \chi_1^*$  a  $\nabla_u L^*$  tak, aby pre každé  $\delta \mathbf{u}$  a  $\mathbf{u}^*$  platilo

$$\langle \nabla_u \chi_1 \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u \chi_1^* \rangle \quad (4.16)$$

a

$$\langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_u L \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u L^* \mathbf{u}^* \rangle . \quad (4.17)$$

Po dosadení do rovnice 4.15 dostávame vzt'ah

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla_u \chi_1^* + \nabla_u L^* \mathbf{u}^*) \rangle + \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_m L \delta \mathbf{m} \rangle . \quad (4.18)$$

Vzt'ah 4.18 sa zjednoduší, ak budeme požadovať, aby doteraz ľubovoľná funkcia  $\mathbf{u}^*$  spĺňala vzt'ah

$$\nabla_u L^* \mathbf{u}^* = -\nabla_u \chi_1^* . \quad (4.19)$$

Rovnica 4.19 sa nazýva *adjungovaná rovnica* ku rovnici 4.3 popisujúcej dynamický systém. Funkcia  $\mathbf{u}^*$  sa nazýva *adjungované pole* a  $-\nabla_u \chi_1^*$  sa nazýva *adjungovaný zdroj*.

Po vyriešení adjungovanej rovnice a nájdení adjungovaného poľa  $\mathbf{u}^*$  môžeme vypočítať prírastok misfitu z rovnice 4.18

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m} = \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_m L \delta \mathbf{m} \rangle . \quad (4.20)$$

### 4.2.3 Adjungovaná rovnica pre pohybovú rovnicu kontinua

Operátor  $L$  definovaný vzt'ahom

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \mathbf{f} , \quad (4.21)$$

je v prípade pohybovej rovnice rovný

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \rho(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot (\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) . \quad (4.22)$$

Aby sme našli deriváciu misfitu  $\chi$  podľa modelových parametrov, musíme nájsť adjun-

govaný operátor  $\nabla_u L^*$  definovaný rovnicou 4.17

$$\langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u L^* \mathbf{u}^* \rangle = \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_u L \delta \mathbf{u} \rangle . \quad (4.23)$$

Po rozpísaní pre prípad pohybovej rovnice dostávame

$$\langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_u L \delta \mathbf{u} \rangle = \int_T \int_V \mathbf{u}^* \cdot \nabla_u L \delta \mathbf{u} d^3 r dt = \int_T \int_V \mathbf{u}^* \cdot \left( \rho \cdot \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla (C : \nabla \delta \mathbf{u}) \right) d^3 r dt . \quad (4.24)$$

**Úpravy prvého člena pravej strany rovnice 4.24, terminačné podmienky adjungovanej rovnice**

Prvý člen na pravej strane

$$\left\langle \mathbf{u}^* \cdot \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} d^3 r dt \quad (4.25)$$

môžeme integrovať dvakrát per-partes a dostaneme

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} d^3 r dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} d^3 r dt + \left[ \int_V \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} d^3 r \right]_{t_0}^{t_1} - \left[ \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} d^3 r \right]_{t_0}^{t_1} . \quad (4.26)$$

Po aplikovaní počiatočných podmienok pre  $\delta \mathbf{u}$ :

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t = t_0) = \partial_t \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t = t_0) = 0 \quad (4.27)$$

sa vzt'ah 4.26 zjednoduší na

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} d^3 r dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} d^3 r dt + \int_V \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} d^3 r \Big|_{t_1} - \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} d^3 r \Big|_{t_1} . \quad (4.28)$$

Aby sme sa zbavili aj zvyšných dvoch členov, požadujeme, aby  $\mathbf{u}^*$  spĺňalo terminačné podmienky

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t = t_1) = \partial_t \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t = t_1) = 0 . \quad (4.29)$$

Potom dostávame konečný vzt'ah pre prvú časť pravej strany

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} d^3 r dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} d^3 r dt . \quad (4.30)$$



### Úpravy druhého člena pravej strany rovnice 4.24, okrajové podmienky adjungovanej rovnice

Druhý člen na pravej strane je

$$\langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) \rangle = \int_T \int_V \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) d^3 r dt. \quad (4.31)$$

Po roznásobení nasledujúceho vzťahu dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u})) - \nabla (\delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*)) = \\ \nabla \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) + \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) \\ - \nabla \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*) - \delta \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Zo symetrie tenzora elastických parametrov vyplýva

$$\nabla \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) = \nabla \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*), \quad (4.33)$$

preto sa vzťah 4.32 zjednoduší na

$$\nabla (\mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u})) - \nabla (\delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*)) = \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) - \delta \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*). \quad (4.34)$$

Dosadíme vzťah 4.34 do 4.31 a dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) \rangle = & \int_T \int_V \nabla (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) d^3 r dt \\ & - \int_T \int_V \nabla (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*) d^3 r dt \\ & + \int_T \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*) d^3 r dt. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Na vzt'ah 4.35 aplikujeme Gaussovu identitu a dostaneme všeobecný vzt'ah

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) \rangle &= \int_T \int_{\partial V} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d^2 r dt \\ &- \int_T \int_{\partial V} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} d^2 r dt \\ &+ \int_T \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*) d^3 r dt \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} &= \int_T \int_{\partial V} \mathbf{u}^* \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2 r dt \\ &- \int_T \int_{\partial V} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} d^2 r dt \\ &+ \int_T \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}^* d^3 r dt, \end{aligned} \quad (4.37)$$

kde sme zaviedli *adjungovaný tenzor napätia*  $\boldsymbol{\sigma}^*$ .

Hranica oblasti  $V$  je voľný povrch, na ktorom platí podmienka nulového napätia

$$\delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.38)$$

Prvý člen na pravej strane vzt'ahu 4.37 je preto nulový. Ak rovnakú hraničnú podmienku budeme požadovať od adjungovaného poľa

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.39)$$

tak sa vzt'ah 4.37 zjednoduší na

$$\langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{C} : \nabla \delta \mathbf{u}) \rangle = \int_T \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}^* d^3 r dt. \quad (4.40)$$

### Výsledný vzt'ah

Dosad' me teraz upravené vzt'ahy 4.30 a 4.40 do pôvodných vzt'ahov 4.23 a 4.24 a dostaneme

$$\langle \delta \mathbf{u} \cdot \nabla_u L^* \mathbf{u}^* \rangle = \langle \mathbf{u}^* \cdot \nabla_u L \delta \mathbf{u} \rangle = \int_T \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} - \nabla \boldsymbol{\sigma}^* \right) d^3 r dt. \quad (4.41)$$

Platí teda

$$\nabla_u L^* \mathbf{u}^* = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} - \nabla \boldsymbol{\sigma}^*, \quad (4.42)$$

čiže operátor  $L$  je *samoadjungovaný*

$$L = L^*. \quad (4.43)$$

Odvodili sme tak veľmi dôležitý záver:

Riešenie adjungovanej rovnice je riešenie vlnovej rovnice s adjungovanými zdrojmi

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = -\nabla_u \chi_1^*, \quad (4.44)$$

za použitia terminačných a hraničných podmienok:

$$\mathbf{u}^*|_{t \geq t_1} = \partial_t \mathbf{u}^*|_{t \geq t_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*|_{r \in \partial V} = \mathbf{0}. \quad (4.45)$$

Vďaka tejto vlastnosti môžeme na výpočet priamych aj adjungovaných úloh používať tie isté numerické metódy.

### 4.3 Riešenie adjungovanej úlohy

Pri pohľade na zvýraznenú časť predchádzajúceho záveru vidíme, že adjungovaná úloha (v nedisipatívnom prostredí) sa od bežnej priamej úlohy líši jedine v nahradení počiatočných podmienok konečnými. Vyzerá to ako veľká komplikácia - dopredu musíme uhádnuť nejaké štartovacie podmienky v čase  $t_0$  tak, aby následne vypočítané vlnové pole v čase  $t_1$  splnilo terminačné podmienky.

Našťastie tento problém vieme riešiť otočením celého výpočtu v čase. Výpočet adjungovanej úlohy začína v čase  $t_1$  s použitím terminačných podmienok a postupne počítame až do času  $t_0$ .

Po otočení výpočtu v čase sú priama a adjungovaná úloha z algoritmického hľadiska totožné.

# Kapitola 5

## Misfit a adjungované zdroje

### 5.1 Pojem misfitu a používané druhy misfitu

Misfit  $\chi(\mathbf{m})$  je funkcia závisiaca od modelu  $\mathbf{m}$  kvantifikujúca rozdiel medzi vypočítaným vlnovým pol'om s použitím modelu  $\mathbf{m}$  a nameraným vlnovým pol'om v reálnom prostredí  $\mathbf{m}_{orig}$  v mieste prijímačov. Cieľom adjungovanej tomografie je práve hľadanie takého modelu, ktorý bude dávať najmenšiu hodnotu misfitu. Teda ide o hľadanie modelu, ktorý bude pre zadané zdroje viesť k čo najmenším rozdielom medzi vypočítanými a nameranými seizmogramami.

Misfit sa vo všeobecnosti počíta zo vzťahu

$$\chi(\mathbf{m}) = \int_T \chi_1(\mathbf{q}(t, \mathbf{m}) - \mathbf{q}_0(t)) dt, \quad (5.1)$$

kde  $\mathbf{q}$  je nejaká meraná veličina, napríklad vektor posunutia  $\mathbf{u}$  a  $\chi_1$  funkcia, ktorá kvantifikuje rozdiel medzi vypočítaným a nameraným vlnovým pol'om.

Takáto “voľná” definícia misfitu umožňuje použiť ako misfit rôzne funkcie. Mala by to byť však funkcia, ktorá dokáže rozumne kvantifikovať rozdiel medzi nameraným a vypočítaným seizmogramom.

Treba si uvedomiť, že cieľ minimalizovať misfit ešte nezaručuje, že samotný invertovaný model bude podobný reálnemu. Často sa môžu líšiť napríklad v oblastiach, kde neprechádzajú žiadne namerané seizmické vlny. Z matematického hľadiska nemusí existovať ostré globálne minimum misfitu a riešenie nemusí byť jednoznačné.

Keďže adjungované zdroje sú definované pravou stranou vzťahu 4.19

$$\mathbf{f}(t) = -\nabla\chi_1(t), \quad (5.2)$$

tak je potrebné, aby sa tieto funkcie dali derivovať podľa vektora posunutia. Vždy závisí od konkrétneho problému, použitej metódy priameho výpočtu, dostupných dát a ďalších

faktorov, aký misfit je v danej situácii najvhodnejší.

Keďže hodnoty misfitu sa v priebehu inverzie menia, označme misfit indexami  $i$  a  $j$

$$\chi^{(i,j)}(\mathbf{m}^{(i,j)}). \quad (5.3)$$

Indexy  $i, j$  zodpovedajú aktuálnemu modelu  $\mathbf{m}^{(i,j)}$  v  $i$ -tej iterácii počas pôsobenia  $j$ -teho priameho zdroja. Index  $n$  budeme používať na očíslovanie jednotlivých  $N$  prijímačov. Polohu prijímača značíme  $\mathbf{r}_n$ .

### 5.1.1 $L_2$ norma rozdielov vektora posunutia

$L_2$  norma rozdielov vektora posunutia (z anglického názvu  $L_2$  waveform difference, čiže  $L_2$  rozdiel vlnových polí) je suma pre všetky stanice z  $L_2$  vzdialenosti medzi nameraným  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_n, t)$  a vypočítaným  $\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t)$  vektorom posunutia v mieste stanice  $n$ .

Misfit vychádzajúci z definície  $L_2$  normy má tvar

$$\chi_n^{(i,j)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t))^2 dt, \quad (5.4)$$

$$\chi^{(i,j)} = \sum_{n=1}^N \chi_n^{(i,j)}. \quad (5.5)$$

Ako druh misfitu pre potreby *full waveform inversion* (FWI - inverzie využívajúcej informáciu z celého nameraného vlnového pol'a) bol zavedený už v prácach Bamberger et al. (1982) a Tarantola (1984). A aj v súčasnosti patrí medzi najpoužívanejšie druhy misfitu. Jeho výhody sú využívanie informácie z celého vlnového pol'a, jednoduchosť jeho implementácie do programu pre adjungovanú tomografiu a to, že sa veľmi ľahko a intuitívne predstavuje.

$L_2$  norma má však aj mnohé problémy. Nie je to robustná metóda, väčšina misfitu môže pochádzať z malého počtu veľkých rozdielov napríklad dôsledkom šumu. Ďalší súvisiaci problém spočíva v tom, že po umocnení rozdielov na druhú sa časti seizmogramu s najväčšími amplitúdami (často súvisiace s príchodom S vln) stanú dominantnými a vplyv zvyšnej časti seizmogramu sa stane zanedbateľný. Tak sa napríklad stráca prvý príchod P vln a spolu s ním informácia o elastickej parametre  $\lambda$ , ktorú samotné S vlny neobsahujú.

Veľké problémy nastanú, keď štartovací model a reálny sa priveľmi líšia. Zmena modelu hoci aj v správnom smere nemusí znamenať zvýšenie podobnosti nameraných a vypočítaných seizmogramov. V takýchto prípadoch inverzia vôbec nekonverguje, prípadne skonverguje do lokálneho minima.

### 5.1.2 Misfit rozdielu časov šírenia P a S vln

Misfit rozdielu časov šírenia je definovaný

$$\chi^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (T_{nm}^{(i,j)} - T_{nm}^0)^2. \quad (5.6)$$

Index  $m$  čísľuje jednotlivé fázy, ktoré berieme do úvahy.

Hoci je hodnota misfitu určená len ako druhá mocnina čísla vyjadrujúceho časový posun, ako ukážeme v časti 5.2, v adjungovaných zdrojoch sa explicitne prejaví informácia z celého seizmogramu.

Keďže na použitie tohoto misfitu musíme presne poznať časy šírenia jednotlivých fáz, v adjungovanej tomografii sa častejšie zaužíval ďalší, veľmi podobný druh misfitu - misfit časových posunov.

### 5.1.3 Časový posun (*cross-correlation time shifts*) vektora posunutia

Časový posun ako miera misfitu sa v oblasti FWI začal používať o desať rokov neskôr ako misfit  $L_2$  rozdielov vektora posunutia. Bol zavedený v práci autorov Luo et al. (1991), ktorí si uvedomili potrebu využívať informáciu o fáze a nie informáciu pochádzajúcu z amplitúd, ktoré sú zvyčajne určené nepresnejšie a v prípade použitia  $L_2$  normy vedú k výrazným nelinearitám pri inverziách. Na prípade reálnych dát použili misfit vychádzajúci z časového posunu až vo svojej práci Zhou et al. (1995).

Pre dostatočne blízke modely je hodnota časového posunu ekvivalentná s rozdielom časov príchodov nameraných a vypočítaných vlnových polí. Líši sa však v spôsobe výpočtu. Na rozdiel od času príchodu, ktorý zodpovedá času vynorenia signálu z okolitého šumu, časový posun získame z kroskorelácie medzi nameraným a vypočítaným vlnovým poľom v mieste stanice.

Kroskorelácia je definovaná vzt'ahom

$$cc(\Delta t_n^{(i,j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t + \Delta t_n^{(i,j)})] dt. \quad (5.7)$$

Časový posun  $\tau_n^{(i,j)}$  je potom definovaný ako hodnota  $\Delta t_n^{(i,j)}$  pre ktorú kroskorelácia  $cc(\Delta t_n^{(i,j)})$  dosahuje maximum. Kladná hodnota časového posunutia znamená, že vypočítané vlnenie prišlo neskôr ako namerané. Záporná hodnota znamená, že vypočítané vlnenie sa šírilo rýchlejšie. Podľa toho potom vieme, ako zmeniť rýchlosti šírenia seizmických vln v modeli.

Výhoda používania časového posunu voči rozdielom v časoch príchodov je v tom, že na určenie  $\tau_n^{(i,j)}$  využívame celý záznam a je to algoritmicke jasne definovaná a jednoduchá úloha, zatiaľ čo správne určenie času príchodu vyžaduje špecializované techniky alebo

pozorné oko seizmológa.

Kroskoreláciu môžeme robiť pre celý seizmogram, alebo ju môžeme robiť tak, že nameraný seizmogram rozložíme na jednotlivé vlny a pre každú z nich vypočítame časové posunutie zvlášť. Takéto rozseparovanie vedie k lepším výsledkom. Časové posunutie totiž závisí od doby šírenia, vlny čo sa šíria pomalšie a po dlhšom lúči budú mať vo všeobecnosti inú (väčšinou väčšiu) hodnotu časového posunu. Na druhej strane správne rozloženie seizmogramu môže byť obtiažne a často si vystačíme bez neho.

Možnosť použitia kroskorelácie je však obmedzená len na prípady, kedy sú namerané a vypočítané seizmogramy dostatočne podobné. V iných prípadoch dostávame hodnotu časového posunu, ktorá nemá fyzikálny zmysel.

Misfit môžeme následne zdefinovať ako druhú mocninu rozdielov v časových posunoch nameraných a vypočítaných vln:

$$\chi^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\tau_n^{(i,j)})^2. \quad (5.8)$$

Misfit časového posunu je teda v istom pohľade podmnožinou misfitu rozdielov časov šírení, ktorý výpočet tohoto rozdielu realizuje pomocou kroskorelácie.

### 5.1.4 $L_2$ norma rozdielov amplitúdy vektora posunutia

V posledných rokoch sa v adjungovanej tomografii začali využívať aj amplitúdy vlnových polí (Tibuleac et al., 2003; Sigloch et al., 2006).  $L_2$  norma amplitúd je definovaná vzt'ahom

$$A_n^{(i,j)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t)|^2 dt}, \quad (5.9)$$

kde  $\mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t)$  je vypočítaný vektor posunutia v mieste prijímača  $n$ . Analogický vzt'ah pre amplitúdy  $A_n^0$  nameraného vlnového poľa dostaneme, keď  $\mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t)$  vo vzt'ahu 5.9 nahradíme nameraným vektorom posunutia  $\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t)$ .

Misfit amplitúdy na  $n$ -tom prijímači, ktorý používame v inverzii, má potom tvar

$$\chi_n^{(i,j)}(m) = \frac{1}{2} \frac{(A_n^{(i,j)} - A_n^0)^2}{(A_n^0)^2}. \quad (5.10)$$

Celkový misfit je opäť

$$\chi^{(i,j)} = \sum_{n=1}^N \chi_n^{(i,j)}. \quad (5.11)$$

Podobne ako misfit časového posunu, aj misfit  $L_2$  normy rozdielov amplitúd vektora posunutia je robustnejším druhom misfitu ako bežnejšia  $L_2$  norma rozdielov celého priebehu

vektora posunutia. Nevýhodou však je, že aby misfit amplitúd viedol k rozumným výsledkom, musíme presne poznať vlastnosti zdroja, hlavne orientáciu a veľkosť momentu. Toto môžu byť nepresne určené veličiny a inverzia môže byť problematická.

### 5.1.5 Časovo-frekvenčný misfit

Čoskoro po tom, ako sa zaviedli časovo-frekvenčné misfity (Kristeková et al., 2006) na porovnanie misfitov seizmogramov, zaviedlo sa ich používanie aj pre potreby adjungovanej tomografie (Fichtner et al., 2009).

K misfitu sa dostaneme tak, že spravíme Fourierovu transformáciu vektora posunutia vynásobeného filtrom v tvare okna  $h(t - \tau)$

$$\mathbf{u}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|h\|_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_i(\tau) \cdot h^*(\tau - t) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (5.12)$$

kde  $L_2$  norma filtrovacej funkcie  $\|h\|_2$  má tvar

$$\|h\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt}. \quad (5.13)$$

Dostávame tak závislosť frekvenčného obsahu signálu v čase. Analogický výpočet môžeme urobiť aj pre nameraný vektor posunutia  $\mathbf{u}^0$ .

Podobne ako Fichtner et al. (2008) označme misfit obálky  $\chi_e$  a misfit fázy  $\chi_p$ . Misfit obálky je  $L_2$  norma rozdielu  $|\mathbf{u}| - |\mathbf{u}^0|$

$$\chi_e^2(\mathbf{m}) = \iint_{-\infty}^{\infty} (|\mathbf{u}| - |\mathbf{u}^0|)^2 dt d\omega. \quad (5.14)$$

Misfit fázy je  $L_2$  norma rozdielu  $\Phi - \Phi^0$

$$\chi_p^2(\mathbf{m}) = \iint_{-\infty}^{\infty} (\Phi - \Phi^0)^2 dt d\omega. \quad (5.15)$$

Aby sa napríklad eliminoval vplyv šumu, do vzťahov pre misfit môžeme pridať váhovanie  $w$ . Výsledný tvar potom bude

$$\chi_e^2(\mathbf{m}) = \iint_{-\infty}^{\infty} w_e^2 (|\mathbf{u}| - |\mathbf{u}^0|)^2 dt d\omega \quad (5.16)$$

$$\chi_p^2(\mathbf{m}) = \iint_{-\infty}^{\infty} w_p^2 (\Phi - \Phi^0)^2 dt d\omega. \quad (5.17)$$

Časovo-frekvenčný misfit zachováva výhody a eliminuje nevýhody misfitu časového posunutia a  $L_2$  amplitúd za cenu zložitejších vzťahov pre misfit a adjungované zdroje. Je prav-



depodobné, že s použitím takéhoto misfitu dostaneme najlepšie výsledky.

Pre podrobnejší prehl'ad časovo-frekvenčného misfitu odkazujeme čitateľa na knihu *Full seismic waveform modelling and inversion* (Fichtner, 2011).

## 5.2 Adjungované zdroje

Adjungované zdroje sú bodové sily, ktoré sa nachádzajú v mieste každého prijímača. Tieto sily vybudia adjungované vlnové pole. Časová funkcia adjungovaného zdroja je určená typom misfitu a rozdielmi v nameraných a vypočítaných dátach podľa vzťahu pre adjungovaný zdroj v adjungovanej rovnici 4.19

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{r}, t) = - \sum_{n=1}^N \nabla_u \chi_n \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}). \quad (5.18)$$

Ak za misfit použijeme  $L_2$  normu, tak pre adjungované zdroje dostávame vzťah

$$\mathbf{f}^{*(i,j)}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{n=1}^N \nabla_u \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t))^2 dt \right) \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}) \quad (5.19)$$

$$= \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t)) dt \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}). \quad (5.20)$$

Pri pohľade na tento vzťah si môžeme všimnúť, že adjungované zdroje pre prípad  $L_2$  normy zodpovedajú šíreniu rezíduí  $(\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t))$ .

Misfit rozdielu časov príchodov (a misfit časového posunu) závisí od  $\mathbf{u}$  implicitne, dá sa odvodiť nasledovný vzťah

$$\mathbf{u}^{*(i,j)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^{(i,j)}}{\|\dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{g}^{*(i,j)}(\mathbf{r}_n, t, \mathbf{r}, \tau_n^{(i,j)}) dt, \quad (5.21)$$

kde  $\mathbf{g}^{*(i,j)}(\mathbf{r}_n, t, \mathbf{r}, \tau_n^{(i,j)})$  je adjungovaná Greenova funkcia. Potom pre časovú funkciu adjungovaného zdroja dostávame priamo vzťah

$$\mathbf{f}^{*(i,j)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^{(i,j)}}{\|\dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}\|_2^2} \dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (5.22)$$

Celé odvedenie si môže čitateľ nájsť v dostupnej literatúre (napr. Fichtner 2011).

### 5.3 Filtrovanie časovej funkcie adjungovaných zdrojov

Pri počítaní kernelov (kapitola 6) vo všeobecnosti platí, že čím je zložitejšie vlnové pole a čím viac lúčov existuje medzi zdrojom a prijímačmi, tým bude kernel zložitejší a bude v ňom aj viac nežiaducich artefaktov ako dôsledok interakcie nesúvisiacich vlnení priameho a adjungovaného vlnového poľa. Viac sa tejto problematike venujeme v časti 6.4.3.

Práve týmto nežiaducim vplyvom sa snažíme vyhnúť aplikovaním Gaussovho filtra na adjungovanú časovú funkciu zdroja, čím skrátime jej trvanie, zmenšíme počet rôznych vln a celkovo zjednodušíme tvar kernelu.

Výber filtra so stredom v čase prvého príchodu vlny  $t_n$  na prijímač  $n$  je opodstatnený tým, že skôr vypočítaná časť seizmogramu býva väčšinou presnejšie určená, zatiaľ čo neskoršia časť je viac ovplyvnená rôznymi nepresnosťami.

Násobenie takouto Gaussovou funkciou je teda váhovanie, ktoré dáva väčšiu váhu hodnotám časovej funkcie adjungovaného zdroja tesne po príchode prvej vlny k prijímaču a menšiu váhu tým hodnotám, ktoré vzniknú až neskôr.

#### 5.3.1 Návrh váhovaného misfitu

Keďže adjungované zdroje sú vypočítané z definície misfitu, potrebujeme nájsť taký vhodný tvar misfitu, ktorý bude viesť k filtrovanej časovej funkcii adjungovaného zdroja.

##### $L_2$ norma vektora posunutia

Uvažujme násobenie druhých mocnín rozdielu nameraných a vypočítaných hodnôt vektora posunutia Gaussovou funkciou centrovanou okolo času  $t_n$  so zvolenou šírkou filtra  $\tau$ . Pre misfit počítaný z váhovanej  $L_2$  normy dostávame vzťah

$$\chi^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t))^2 \cdot e^{-\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right)^2} dt. \quad (5.23)$$

##### Misfit časového posunu

Ak požadujeme váhovanie pre zdrojovú funkciu určenú misfitom časového posunu, tak samotný misfit (rovnica 5.8) sa nezmení. Zmení sa však vzťah na výpočet kroskorelácie

$$cc(\Delta t_n^{(i,j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t + \Delta t_n^{(i,j)})] \cdot e^{-\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right)^2} dt. \quad (5.24)$$

### 5.3.2 Adjungované zdroje vypočítané z váhovaného misfitu

Opäť vychádzame zo vzťahu pre adjungovaný zdroj

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{r}, t) = - \sum_{n=1}^N \nabla_u \chi_n \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}). \quad (5.25)$$

Časovú funkciu adjungovaných zdrojov nájdeme výpočtom gradientu misfitu podľa vektoru posunutia.

Pre  $L_2$  normu (rovnica 5.23) dostaneme

$$\mathbf{f}^{*(i,j)}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{n=1}^N \nabla_u \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t))^2 \cdot e^{-\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right)^2} dt \right) \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}) \quad (5.26)$$

$$= \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}^0(\mathbf{r}_n, t) - \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t)) \cdot e^{-\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right)^2} dt \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}). \quad (5.27)$$

Pre misfit rozdielov časov šírení alebo časového posunu majú časové funkcie zdroja tvar (analogicky s výpočtom 5.21)

$$\mathbf{f}^{*(i,j)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\tau_n^{(i,j)}}{\|\dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}\|_2^2} \dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot e^{-\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right)^2} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (5.28)$$

## 5.4 Modifikácia vzťahu na výpočet časového posunu

Cieľom časového posunu je výpočet toho, o koľko prišlo vypočítané vlnové skôr alebo neskôr voči nameranému vlnovému poľu dôsledkom nepresnej rýchlosti šírenia vln v aktuálnom modeli. Na prvý pohľad je však zjavné, že hodnota časového posunu je pre rôzne časti seizmogramu rôzna a používanie zaužíwanej definície 5.7 na určenie jediného čísla vedie k nepresnostiam.

Skrátenie trvania signálu (napríklad filtrovaním) rieši tento problém. Kroskoreláciou časti signálu dostaneme presnejšiu hodnotu časového posunu zodpovedajúcej časti signálu.

Ak však chceme aplikovať kroskoreláciu na celé alebo príliš dlhé trvanie signálu, tak navrhujeme nasledujúcu modifikáciu. Počítajme kroskoreláciu dvoch signálov z ktorých je jeden  $k$ -krát rozťahnutý v čase so spoločným začiatkom v čase excitácie priameho zdroja. Motivácia za touto modifikáciou je nasledovná: ak má aktuálne prostredie  $k$ -krát pomalšiu rýchlosť šírenia vln ako reálne prostredie, tak hodnota časového posunu  $\Delta t_n^{(i,j)}$  je priamoúmerná času šírenia, trvanie vypočítaného signálu bude  $k$ -krát dlhšie. Maximum kroskorelácie dvoch signálov - čiže hodnota  $\kappa = \max(k)$  kedy sa dva signály na seba najviac podobajú je rovná priemernému podhodnoteniu rýchlostí šírenia vln v aktuálnom modeli oproti rýchlostiam

v reálnom prostredí. Modifikovaný vzťah teda je

$$cc'(k_n^{(i,j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{u}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, k_n^{(i,j)} \cdot t)] dt. \quad (5.29)$$

Namiesto misfitu časového posunu potom použijeme misfit

$$\chi^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\kappa_n^{(i,j)} - 1)^2, \quad (5.30)$$

čiže rozdiel  $\kappa$  od presnej hodnoty 1.

Časová funkcia zdroja potom bude mať analogicky ku vzťahu 5.28 tvar

$$\mathbf{f}^{*(i,j)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\kappa_n^{(i,j)}}{\|\dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}\|_2^2} \dot{\mathbf{u}}^{(i,j)}(\mathbf{r}_n, t) \cdot e^{-\left(\frac{t-t_n}{\tau}\right)^2} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (5.31)$$

## 5.5 Kernely

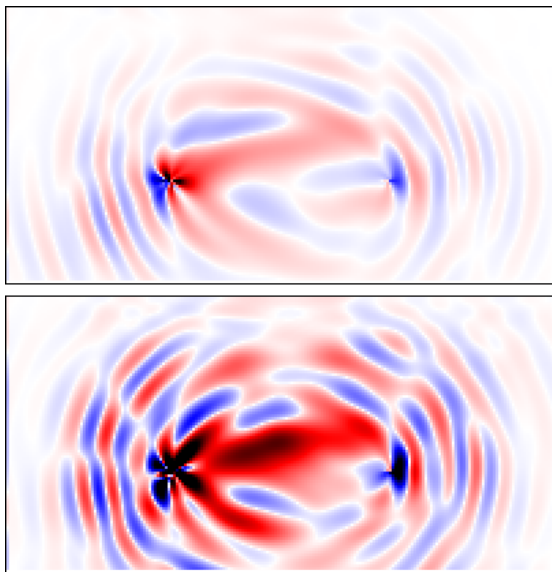
Hoci sa tematike kernelov venujeme podrobne až v nasledujúcej kapitole, považujeme za vhodné ukázať vplyv váhovania časovej funkcie adjungovaných zdrojov na výsledné hodnoty a tvar vypočítaných kernelov.

Kernel je podľa definície objemová hustota gradientu misfitu podľa parametrov prostredia. V praxi teda hodnoty kernelu určujú, ako treba zmeniť prostredie, aby sa znížila hodnota misfitu. Kernely vznikajú interakciou priameho vlnového poľa a adjungovaného vlnového poľa, ktoré vybudili adjungované zdroje. Časová funkcia adjungovaných zdrojov určená misfitom teda priamo ovplyvní tvar výsledných kernelov.

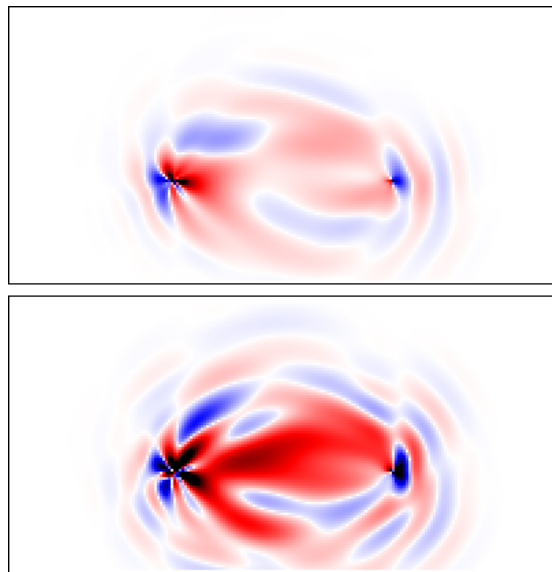
### 5.5.1 Porovnanie výsledných kernelov pre kanonické modely v závislosti od váhovania časovej funkcie adjungovaného zdroja

Uvažujme homogénne prostredie rozmerov  $l \times h$  s hustotou  $\rho_0$  a elastickými koeficientami  $\lambda_0$  a  $\mu_0$ . Štartovací apriórny model sa od originálneho modelu, z ktorého pochádzajú syntetické merania, líši v parametroch  $\lambda$  a  $\mu$ , ktoré majú o 10% znížené hodnoty. V hĺbke  $0.7h$  sa nachádza rozhranie, pod ktorým sa parametre zhodujú s testovacím modelom. Zdroj - double-couple - je v ľavej časti na polohe  $[0.3l, 0.45h]$ , prijímač je v pravej na polohe  $[0.7l, 0.45h]$ . Nasledujúce obrázky sú kernely  $\lambda$  a  $\mu$  po prvej iterácii. Prvá štvorica kernelov (Obr. 5.1 a Obr. 5.2) vznikla za použitia adjungovaných zdrojov určených misfitom časového posunutia, druhá štvorica kernelov (Obr. 5.3 a Obr. 5.4) vznikla za použitia adjungovaných zdrojov určených  $L_2$  misfitom. V oboch prípadoch môžeme vidieť, že použitie váhovania adjungovaných zdrojov výrazne zjednodušilo výsledné kernely a odstránilo ma-

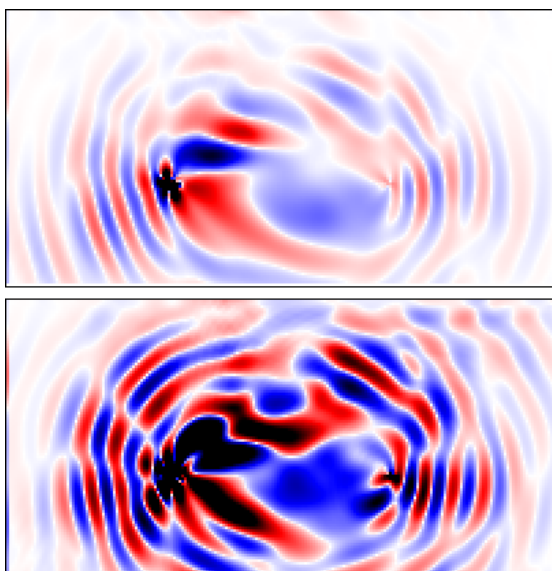
loškálové kmitanie, čo je nežaduca súčasť kernelov. Podrobnejšie sa takýmto artefaktom výpočtu venujeme v časti 6.4.3.



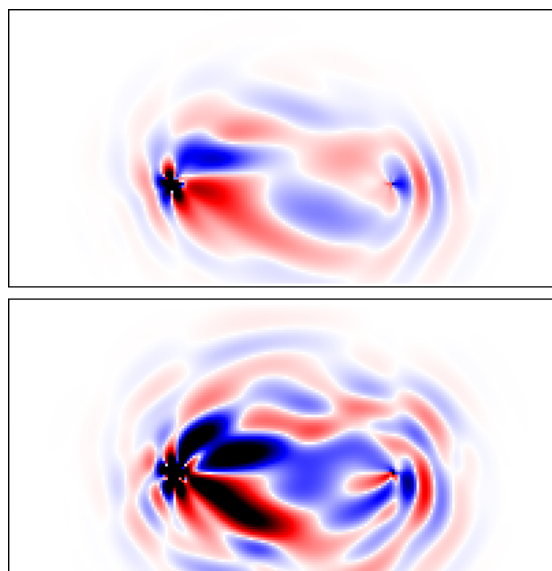
Obr. 5.1: hore: kernel  $\lambda$  vypočítaný z adjungovaných zdrojov misfitu časového posunu, dole: kernel  $\mu$  pre rovnaké podmienky



Obr. 5.2: hore: kernel  $\lambda$  vypočítaný z adjungovaných zdrojov misfitu časového posunu s váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja, dole: kernel  $\mu$  pre rovnaké podmienky



Obr. 5.3: hore: kernel  $\lambda$  vypočítaný z adjungovaných zdrojov misfitu  $L_2$ , dole: kernel  $\mu$  pre rovnaké podmienky



Obr. 5.4: hore: kernel  $\lambda$  vypočítaný z adjungovaných zdrojov misfitu  $L_2$  s váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja, dole: kernel  $\mu$  pre rovnaké podmienky

# Kapitola 6

## Kernely

### 6.1 Fréchetove kernely

Cieľom adjungovanej metódy je zistenie, ktoré materiálové parametre prostredia treba zmeniť, aby misfit v nasledujúcej iterácii klesol. Na tento cieľ počítame *Fréchetove kernely*. Fréchetove kernely sú definované ako objemové hustoty *Fréchetovej derivácie*  $\nabla_m \chi$

$$\mathbf{K}_m \equiv \frac{d}{dV} \nabla_m \chi. \quad (6.1)$$

Po dosadení vzťahu 4.20 dostaneme

$$\mathbf{K}_m = \int_T \mathbf{u}^* \cdot \nabla_m L dt. \quad (6.2)$$

Intuitívnejší výsledok dostaneme po zintegrovaní vzťahu 6.1

$$\nabla_m \chi \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{K}_m(\mathbf{r}) \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (6.3)$$

Fréchetove kernely sú teda mierou citlivosti misfitu  $\chi$  na zmenu parametrov v mieste  $\mathbf{r}$ . Preto sa pre Fréchetove kernely používa často aj názov *sensitivity kernel*. Vo zvyšku práce pojmom *kernely* máme na mysli práve Fréchetove kernely.

### 6.2 Vzťahy na výpočet kernelov parametrov $\rho$ , $\lambda$ a $\mu$

V tejto časti budeme vychádzať zo všeobecného definičného vzťahu 6.2 a vyjadríme vzťahy pre výpočet kernelov jednotlivých parametrov prostredia. Dosadíme do vzťahu 6.2 operátor  $L$  (4.22) a dostaneme všeobecný vzťah pre kernely materiálových parametrov

$$\mathbf{K}_m = \int_T \mathbf{u}^* \cdot \nabla_m \left( \rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - \nabla (C : \nabla \mathbf{u}) \right) dt. \quad (6.4)$$

### 6.2.1 Kernel hustoty $\rho$

Kernel hustoty dostaneme zo všeobecného vzťahu 6.4 tak, že vyberieme zložky celkového kernelu vypočítané deriváciou podľa hustoty

$$\mathbf{K}_\rho = \int_T \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} dt. \quad (6.5)$$

Integráciou vzťahu 6.5 per-partes a aplikovaním počiatkových podmienok pre  $\mathbf{u}$  (4.27) a terminačných podmienok pre  $\mathbf{u}^*$  (4.29) dostaneme častejšie používaný, symetrický vzťah pre kernel hustoty

$$\mathbf{K}_\rho = - \int_T \partial_t \mathbf{u}^* \cdot \partial_t \mathbf{u} dt. \quad (6.6)$$

### 6.2.2 Kernel elastických koeficientov $\lambda$ a $\mu$

Postupujeme rovnako ako pre hustotu, ale vyberieme zložky kernelu vypočítané deriváciou podľa  $\lambda$  a  $\mu$ . Prvý člen pravej strany vzťahu 6.4 od nich nezávisí, druhý člen upravíme pomocou Gaussovej identity s využitím hraničných podmienok (4.38, 4.39) na vzťahy:

$$\mathbf{K}_\lambda = \int_T (\nabla \mathbf{u}^*) \cdot \nabla_\lambda (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) dt \quad (6.7)$$

$$\mathbf{K}_\mu = \int_T (\nabla \mathbf{u}^*) \cdot \nabla_\mu (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) dt. \quad (6.8)$$

Po výpočte derivácií dostaneme výsledné vzťahy:

$$\mathbf{K}_\lambda = \int_T (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) dt \quad (6.9)$$

$$\mathbf{K}_\mu = \int_T (\nabla \mathbf{u}^*) : (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u}^*) : (\nabla \mathbf{u})^T dt. \quad (6.10)$$

## 6.3 Výpočet kernelov

Jednotlivé kernely sa môžu počítat' priamo zo vzťahov 6.6, 6.9 a 6.10 alebo sa tieto vzťahy môžu ešte upraviť, aby využili veličiny explicitne vystupujúce v danom type schémy priameho výpočtu. V našom prípade používame vo výpočtovej schéme *displacement-velocity-stress* formuláciu pohybovej rovnice. V nej počítame zložky tenzora deformácie. Upravíme vzťahy pre kernely tak, aby sme túto vlastnosť využili.

Dosadením definície tenzora deformácie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (6.11)$$

tak dostávame

$$\mathbf{K}_\rho = - \int_T \partial_t \mathbf{u}^* \cdot \partial_t \mathbf{u} dt \quad (6.12)$$

$$\mathbf{K}_\lambda = \int_T (\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}^*) \cdot (\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}) dt \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K}_\mu = \int_T 2\boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\varepsilon} dt. \quad (6.14)$$

Tieto vzťahy už priamo ukazujú ako postupujeme pri výpočte kernelov. Potrebujeme poznať hodnoty vektora posunutia a jeho časovej derivácie priameho aj adjungovaného poľa v celom priestore *súčasne* v každej časovej hladine a výsledné súčiny sčítať dokopy.

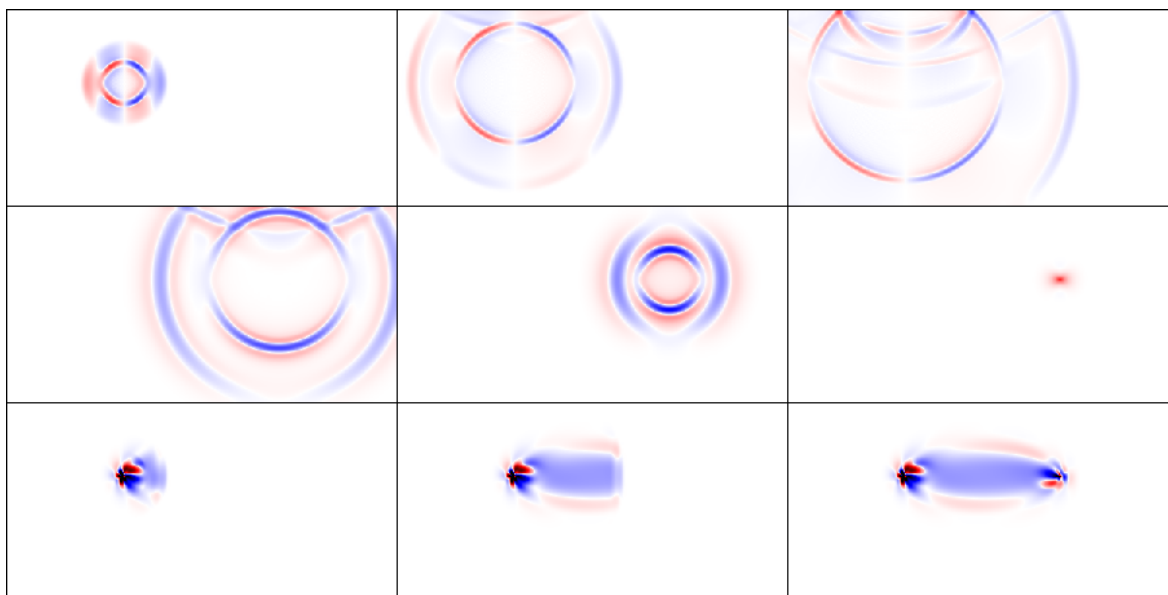
Ideálny postup by preto bol spustiť priamy a adjungovaný výpočet súčasne v rovnakých časových hladinách a vzťahy pre kernely priebežne integrovať. Ako však píšeme v časti 4.3, adjungovaný výpočet prebieha v čase dozadu a preto treba výpočet kernelov urobiť sofistikovanejšie. Možné riešenia tejto situácie sú teda nasledovné:

- (A) spraviť najprv priamy výpočet, uložiť si konečný stav poľa a následne spustiť adjungovaný výpočet a súčasne *priamy výpočet v čase dozadu* s počiatočnými podmienkami rovnými konečnému stavu prvého výpočtu. Takéto riešenie však vyžaduje jeden priamy výpočet navyše a jeho aplikácia nie je taká priamočiara, ako sa zdá. Výpočet v prípade disipatívneho prostredia alebo absorbujúcich hraníc sa ešte viac skomplikuje, preto táto možnosť asi nie je perspektívna do budúcnosti.
- (B) spraviť najprv priamy výpočet, zapamätať si celé vlnové pole v každej časovej hladine a následne načítavať tieto údaje počas výpočtu adjungovanej úlohy a integrovať s adjungovaným poľom. Takéto riešenie je extrémne náročné na pamäťové nároky.
- (C) keď zlyhajú predchádzajúce možnosti, dá sa mať spustený adjungovaný výpočet a priame pole vždy dopočítavať od začiatku do potrebnej časovej hladiny. Výpočet sa zrýchli, keď sa uloží úplná informácia (*snapshot*) o vlnovom poli v zopár význačných časových hladinách (*checkpointoch*) a následne bude stačiť dopočítavať priame vlnové pole od najbližšieho menšieho checkpointu. Celkové pamäťové nároky voči prvej možnosti výrazne klesnú za cenu dlhšieho CPU času.

Vlastnosti týchto troch možností a možnosti (B) navyše s kompresiou dát vysvetlenou v nasledujúcich častiach 6.3.1 a 6.3.2 sumarizuje tabuľka Tab. 6.1 na konci tejto sekcie. Existujú aj zložitejšie postupy, napríklad kombinácia možností (A) a (C). Problematike *checkpoint algoritmov* sa venujú napríklad Griewank et al. (2000) a Charpentier (2001). My sme si zvolili postup (B) s kompresiou, ktorý je dostatočne presný, rýchly a nemá problémy s kapacitou pamäte pevného disku.



To, ako sa postupne sčítávajú príspevky od súčínov veličín priamej a adjungovanej vlny do výsledného kernelu ilustruje Obr. 6.1.



Obr. 6.1: Ilustrácia vzniku kernelu. Stĺpce sa týkajú časových okamihov v  $t = 200ms$  (vľavo),  $t = 500ms$  (v strede) a  $t = 800ms$  (vpravo), horný riadok zodpovedá  $x$  zložke vektora posunutia priameho poľa, stredný riadok  $x$  zložke vektora posunutia adjungovaného poľa a spodný riadok zodpovedá aktuálnym hodnotám kernelu počítaných od  $t_0 = 0ms$  do príslušného času.

### 6.3.1 Kompresia dát - *accuracy-adaptive time integration*

V priamom výpočte musíme používať kvôli zachovaniu dostatočnej presnosti pomerne malú hodnotu časového kroku  $\Delta t$ . Prípadné chyby sa totiž prenášajú vo výpočte ďalej. Naopak, chyby pri výpočte kernelov sa nešíria a výsledné kernely nakoniec ešte zhladzujeme. Preto až takú presnosť nepotrebujeme. Stačí, ak namiesto každej časovej hladiny spočítame príspevok len v každej  $N$ -tej časovej hladine pre dostatočne malé  $N$ . Ak ukladáme dáta z priameho výpočtu, ako v možnosti (B), tak týmto spôsobom dokážeme zredukovať celkové pamäťové nároky na  $1/N$  a zrýchliť výpočet. Potrebujeme teda zistiť, aké najväčšie  $N$  bude ešte dostatočne presne aproximovať hodnoty kernelov.

*Accuracy-Adaptive Time Integration* navrhnutá v práci Fichtner (2011) je metóda na určenie takej maximálnej dĺžky časového kroku pri integrácii kernelov, ktorá ešte dostatočne presne určí hodnoty  $m$ -tej Fresnelovej zóny (6.4.3) kernelu. V našej práci zvolíme  $m = 1$ , keďže sme názoru, že vyššie Fresnelove zóny sú nežiaduce (6.4.3). Líšime sa v zavedení minimálnej dĺžky  $d_{min}$  a aj v použití maximálnej rýchlosti P vln  $v_{max}$  namiesto charakteristickej rýchlosti S vln  $v_S$ , ktorá (minimálne pre sedimentárne bazény s veľkými kontrastami rýchlostí) nevedie k správny výsledkom.

Nech  $d$  je šírka 1. Fresnelovej zóny. Jej charakteristická šírka je približne (Fichtner, 2011)

$$d \approx \frac{1}{4} \sqrt{v_s T_d l}, \quad (6.15)$$

kde  $T_d$  je dominantná perióda a  $l$  dĺžka lúča. Je to charakteristická škála, ktorú chceme presne modelovať. Dĺžka  $d_{min}$  potom hodnota  $d$  pre minimálnu rýchlosť  $v_{min}$ . Integráciu teda musíme robiť minimálne vždy, keď vlna prejde vzdialenosť  $d_{min}$ . Maximálny možný interval je preto  $t_a = \frac{d_{min}}{v_{max}}$ . Počet iterácií je potom  $n = \frac{t_a}{\Delta t}$ , kde  $\Delta t$  je časový krok schémy. Časový krok schémy je podľa CFL podmienky stability s využitím podmienky pre sieťový krok rovný

$$\Delta t \approx k \frac{h}{v_{max}} \approx k \frac{T_d v_{min}}{10 v_{max}}. \quad (6.16)$$

Odhad pre  $n$  teda je

$$n \approx \frac{t_a}{\Delta t} \approx \frac{d_{min}}{v_{max} \Delta t} \approx \frac{\sqrt{v_{min} T_d l}}{4} \frac{1}{v_{max}} \frac{10 v_{max}}{k T_d v_{min}} \approx \frac{5}{2k} \sqrt{\frac{l}{v_{min} T_d}}. \quad (6.17)$$

Po dosadení typických hodnôt  $v_{min} = 500\text{m/s}$ ,  $k = 0.3$ ,  $l = 10\text{km}$  a  $T_d = 1\text{s}$  dostávame

$$n \approx 40. \quad (6.18)$$

Dostávame významný výsledok: stačí uložiť len 1/40 dát a tiež stačí spraviť len 1/40 načítaní súborov, ktoré výrazne spomaľujú algoritmus.

### 6.3.2 Návrh na kompresiu dát v priestore - *accuracy-adaptive space integration*

Analogicky ku kompresii dát v čase navrhujeme kompresiu dát v priestore. Výsledné kernely sa na konci zhladzujú, takže nie je dôvod neurobiť kompresiu už pred ich výpočtom. Vo výpočte používame sieť s priestorovým krokom  $h$ . Pri výpočte kernelov však stačí aproximovať charakteristické dĺžky  $d$ . Nech teda berieme do úvahy len každý  $m$ -tý bod siete tak, aby na minimálnu dĺžku  $d_{min}$  pripadli aspoň 3 body. Potom

$$m \approx \frac{d_{min}}{3h} \approx \frac{\sqrt{v_{min} T_d l}}{4} \frac{10}{3 v_{min} T_d} \approx \frac{5}{6} \sqrt{\frac{l}{v_{min} T_d}}. \quad (6.19)$$

Po dosadení charakteristických hodnôt z predchádzajúcej časti dostávame

$$m \approx 4. \quad (6.20)$$

Keďže dáta v 3D sieti rastú s tret'ou mocninou, celkovo zredukujeme potrebné pamäťové požiadavky na  $1/64$ .

Pre ilustračný príklad siete s  $2000 \times 2000 \times 1000$  bodmi a priamym výpočtom s 10000 iteráciami by sme na uloženie hodnôt vektora posunutia a jeho časovej derivácie s presnosťou *float* (4 byty) potrebovali 960TB. S časovou kompresiou sa dáta pre daný príklad zredukujú na 24TB a po priestorovej kompresii na výsledných 375GB pamäte na pevnom disku. Zároveň sa dátový prenos medzi CPU a pevným diskom zníži na  $1/2500$  pôvodnej hodnoty a prestane byť najpomalšou časťou (*bottleneck*) výpočtu. Je to zároveň malé množstvo oproti nárokom na pamäť RAM, ktoré sú asi 210GB na počítanie s hodnotami  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\lambda(\mathbf{r})$  a 3 rôznymi  $\rho(\mathbf{r})$  a  $\mu(\mathbf{r})$  v striedavo usporiadanej sieti.

	CPU	RAM	HDD	disipácia
(A) oba súčasne	$O(N^3 T)$	$2 \cdot O(N^3)$	$\emptyset$	problém
(B) ukladanie na HDD	$O(N^3 T)$	$O(N^3)$	$O(N^3 T)$	OK
(B) + kompresia	$O(N^3 T)$	$O(N^3)$	malé	OK
(C) checkpointy	$O(N^3 T \log(T))$	$O(N^3)$	$O(N^3 \log(T))$	OK

Tabuľka 6.1: Časové a pamäťové náročnosti rôznych algoritmov na výpočet kernelov z časti 6.3.  $N$  je počet bodov siete v jednom rozmere,  $T$  je počet časových hladín výpočtu. Tabuľka ukazuje, že rôzne algoritmy sú vhodné na rôzne situácie. V stĺpci pamäťovej zložitosti RAM je explicitne vypísaný koeficient 2 zodpovedajúci dvom súčasným výpočtom, keďže práve dostupná pamäť RAM je najčastejšie limitujúcim parametrom a táto konštanta môže hrať veľkú rolu.

### 6.3.3 Využitie princípu superpozície

Takmer vždy využívaný princíp výrazne redukovajúci výpočtové nároky je princíp superpozície. Všetky adjungované zdroje v adjungovanom výpočte môžu pôsobiť súčasne. Preto stačí spraviť jediný spoločný adjungovaný výpočet namiesto  $N$  výpočtov pre každý prijímač (adjungovaný zdroj) zvlášť. Automaticky tak dochádza k sčítovaniu kernelov od rôznych adjungovaných zdrojov s váhou zodpovedajúcou amplitúde príslušnej časovej funkcie adjungovaného zdroja.

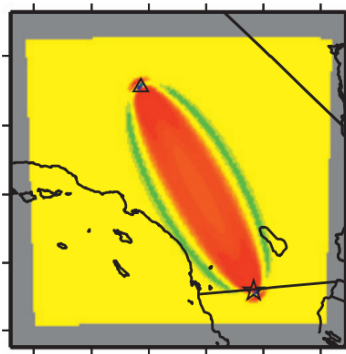
## 6.4 Typický tvar kernelov

### 6.4.1 Tvar

Tvar kernelu závisí od prostredia, od rozloženia zdrojov a prijímačov a aj od časovej funkcie zdroja. Vo všeobecnosti platí, že časť kernelu s najväčšími hodnotami sa vyskytuje v okolí lúčov, na ktorých leží zdroj a prijímač. Šírka kernelu závisí hlavne od frekvenčného

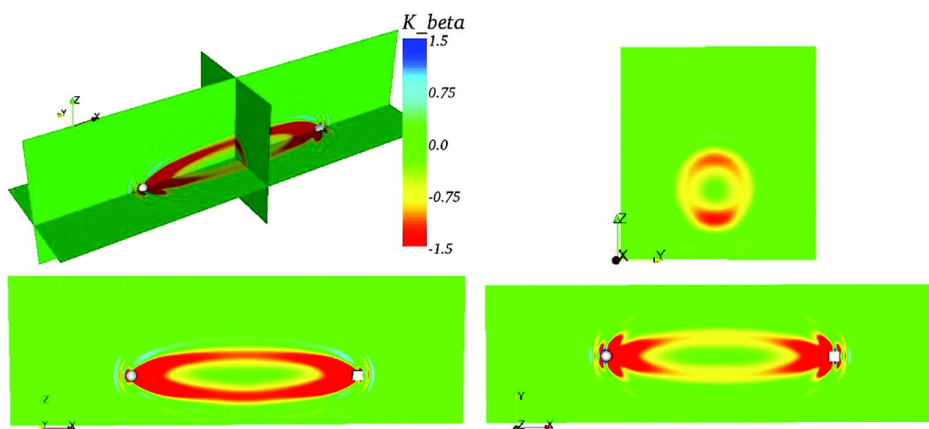
obsahu vlnenia. Čím obsahuje vlnenie väčšie vlnové dĺžky, tým bude mať väčšie rozmery aj vypočítaný kernel.

Pre tvar kernelov sa ustálili rôzne pomenovania v závislosti od počtu rozmerov, v ktorých sa úloha rieši. Kernel v 2D bol pomenovaný podľa cigary (*cigar-shaped kernel*). Cigara (dvojrozmerná) má svoje špičky v mieste zdroja a prijímača a rozširuje sa smerom do stredu. Tento tvar ilustruje Obr. 6.2.



Obr. 6.2: Ilustrácia bežného, “cigarového” tvaru kernelu v 2D homogénnom prostredí (Tape et al., 2007).

V 3D je tvar kernelu podobný, používa sa preň názov *banana-doughnut*, čiže kernel v tvare banánu (pozdĺžne) a šišky (v priereze). Tento tvar ilustruje Obr. 6.3. Prierez kernelov je oválny, centrovanej okolo lúča. V prípade, že rýchlosť šírenia vln v modeli je väčšia ako v skutočnom prostredí, majú miesta priamo na samotnom lúči zníženú citlivosť. Z tejto “diery” vychádza názov šiška pre tvar prierezu. Diera je dôsledok časového posunutia priameho vlnového pol'a voči skutočnému nameranému vlnovému pol'u dôsledkom odchýlok modelových parametrov. K presnému prekryvu, čiže kmitaniu priameho aj adjungovaného vlnenia vo fáze, potom dôjde na miestach ležiacich pri, ale nie na, lúči a práve na týchto miestach bude kernel dosahovať najväčšie hodnoty.



Obr. 6.3: Ilustrácia bežného, *banana-doughnut* tvaru kernelu v 3D homogénnom prostredí (Liu et al., 2006).

### 6.4.2 Amplitúdy kernelov

Kernely, bez ujmy na všeobecnosti, vznikajú integráciou v čase súčiny vybraných veličín priameho a adjungovaného poľa. Pre kernely elastických koeficientov  $\lambda$  a  $\mu$  ide o súčin zložiek tenzora deformácie, pre kernel hustoty sú danými veličinami časové derivácie vektora posunutia.

Všetky tieto veličiny však v mieste bodového zdroja (priameho aj adjungovaného) dosahujú nekonečné hodnoty, čo sa po výpočte prejaví nekonečnou hodnotou kernelu v mieste zdroja. Ani situácia v diskrétnych, sieťových modeloch nie je oveľa lepšia, veličiny dosahujú v sieťových bodoch v blízkosti zdroja hodnoty o niekoľko rádov vyššie ako inde. Šíri sa tadeť veľká časť energie seizmickej vlny. Zmenou parametrov prostredia v danom mieste ovplyvníme veľkú časť výsledného seizmogramu. Misfit je teda veľmi citlivý na dané miesto. Výsledkom je kernel, ktorý má v mieste zdroja a prijímačov veľmi veľké hodnoty.

Lokálne väčšie hodnoty dosahuje kernel všade tam, kde je z nejakého dôvodu väčšia hodnota danej fyzikálnej veličiny než v blízkom okolí, či už v dôsledku geometrie, interferencie, zmeny parametrov prostredia, ... Napríklad hodnoty veličín priameho aj adjungovaného poľa na voľnom povrchu sú dvojnásobné ako pod povrchom. Preto hodnoty výsledného kernelu (súčiny dvojnásobných hodnôt) budú na povrchu približne štvornásobné ako jeho hodnoty pod povrchom.

### 6.4.3 Fresnelove zóny

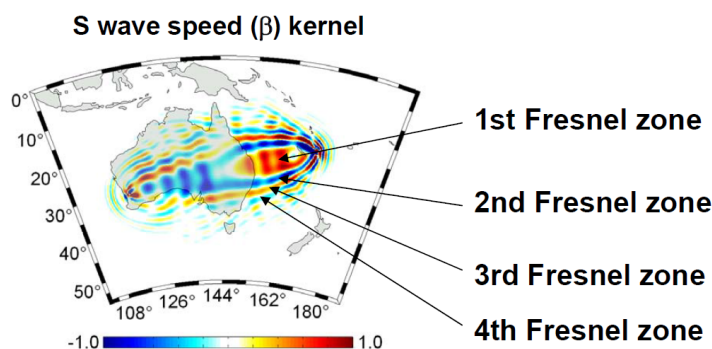
Prvou Fresnelovou zónou sa nazýva časť kernelu, ktorá sleduje vysokofrekvenčný lúč. Zvyčajne je to dominantná časť celého kernelu. Práve výpočet prvej Fresnelovej zóny je cieľom pri výpočte kernelu. Prvá Fresnelova zóna je práve tá oblasť, v ktorej musíme zmeniť parametre modelu, aby sme dostali lepšiu zhodu s nameranými dátami.

Ďalej od lúča sa nachádzajú vyššie Fresnelove zóny. Prejavujú sa ako krátkovlnné rozkmitanie hodnôt kernelu po okrajoch jeho prvej Fresnelovej zóny. Ich amplitúdy veľmi rýchlo klesajú s rastúcou vzdialenosťou od lúča. V priečnom reze tak kernel môže pripomínať funkciu  $\text{sinc}(r)$ . Vyššie Fresnelove zóny majú v podstate tvar plôch obalujúcich prvú Fresnelovú zónu v ich vnútri.

Ukážku Fresnelových zón môžeme vidieť na Obr. 6.4.

### Príčiny vzniku maloškálových artefaktov v kerneloch a Fresnelových zón

Prekrývanie vlnení - čiže situácie, že na rovnakom mieste v rovnakom čase kmitá aj priame aj adjungované vlnenie - sú nutnou podmienkou ku vzniku nenulových hodnôt kernelu, ktorý vo všeobecnosti vzniká ako súčin vybraných veličín oboch vlnení. Často však dochádza ku súčasnému rozkmitaniu prostredia v danom mieste vlneniami, ktorá sa tam ocitli v



Obr. 6.4: Ukážka znázorňujúca jednotlivé Fresnelove zóny. Vyššie Fresnelove zóny sú nežiaducou, súčasťou vypočítaných kernelov. Autorom prezentácie, z ktorej pochádza táto ukážka, je Andreas Fichtner (2013).

rovnakom čase len čistou náhodou. Vznikajú tak náhodné, nežiaduce príspevky k výslednej hodnote kernelu.

Rozoznávame dva hlavné nežiaduce príspevky. Spôsobuje ich:

- prekryv priamej a korešpondujúcej adjungovanej vlny s fázovým posunutím. Práve v takomto prípade vzniká výrazná prvá Fresnelova zóna ležiaca v blízkosti lúča medzi zdrojom a prijímačom, ktorej výpočet je našim cieľom. No okrem nej v jej okolí, dôsledkom fázového posunutia predĺženou dráhou šírenia, vznikajú nežiaduce vyššie Fresnelove zóny.
- prekryv priamej a nesúvisiacej adjungovanej vlny. Vznikajú tak umelé artefakty, ktoré môžu spôsobovať problémy a nemajú žiadny vzťah s gradientom misfitu.

Obe nežiaduce príspevky rozoberieme podrobnejšie v nasledujúcich dvoch sekciách.

### Vyššie Fresnelové zóny

Vznikajú akonáhle priamy alebo adjungovaný zdroj spôsobí vlnenie, ktoré naozaj kmitá (čiže nejde len o jediný výkmit hore a späť). Pri vzájomnej integrácii súčiny priameho a adjungovaného vlnového poľa dochádza k vzájomnému prekryvaniu aj tých častí vlnení, ktoré sú priamo na lúči fázovo posunuté. K prekryvaniu týchto častí vlnení dochádza zvyčajne v istej vzdialenosti od lúča na ploche, na ktorej body prídu súčasne v dôsledku rôzne predĺženej dráhy. Ich prekryv spôsobí nenulové hodnoty kernelu v tejto oblasti - vyššej Fresnelovej zóne.

Fázové posunutie spôsobuje, že hodnoty kernela v nepárnych a párnych Fresnelových oblastiach majú opačné znamienka.

Vyššie Fresnelove zóny sú nežiaducim artefaktom výpočtu kernelu. Spôsobujú výrazné zvyšovanie zložitosti modelu zvyšovaním gradientov hodnôt parametrov v modeli a ich

vplyv len málokedy zníži misfit a niekedy spôsobí problémy. Napríklad v prípade, že prostredie je pomalé, prvá Fresnelova oblasť (a všetky nepárne) bude oblasť, ktorú bude treba na zníženie misfitu zrýchliť. Druhá Fresnelova oblasť sa po zmene modelu spomalí. V prvej Fresnelovej oblasti tak vznikne kladný rýchlostný kanál voči blízkeho okoliu, na ktorý sa naviažuju lúče a v neskorších iteráciách ho len ťažko opustia, aj keby to bolo žiaduce. Opusteniu tohoto rýchlostného kanála totiž zabránia pomalé hodnoty rýchlosti šírenia v obkolesujúcej, druhej Fresnelovej oblasti.

### Ďalšie artefakty

Typický prípad ich vzniku je súčasný prechod  $P$  vlny priameho vlnového poľa a  $S$  vlny adjungovaného vlnového poľa alebo naopak. Súčinom priamych a adjungovaných veličín tak vznikajú vo výslednom kerneli rôzne artefakty. Často sú na miestach, ktoré sa priečia fyzikálnej intuícii a na prvý pohľad je zjavné, že nesúvisia s fyzikálnym procesom a nemajú žiadny vplyv na výsledný misfit.

Pri zložitejších prípadoch však môže byť obtiažne oddeliť tieto artefakty od iných, žiaducich častí. Filtrovanie a celkové zjednodušenie časových funkcií adjungovaných zdrojov môže pomôcť tomu, aby týchto artefaktov vznikalo čo najmenej.

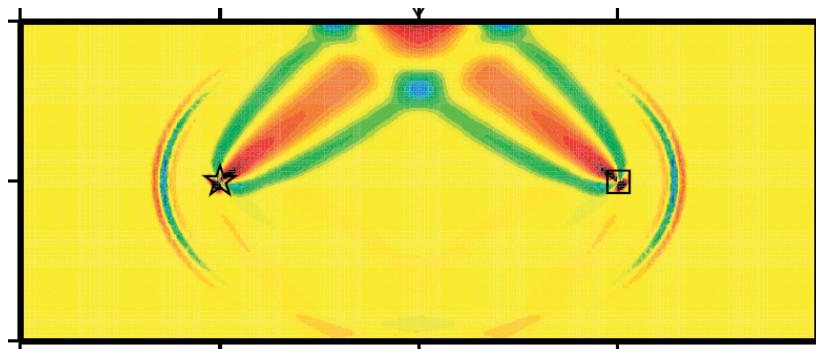
### Odstraňovanie vyšších Fresnelových zón a ďalších nežiaducich artefaktov

Vznik vyšších Fresnelových zón a aj v predchádzajúcej časti spomínaných artefaktov je v podstate dôsledok súhry náhod, keď sa v rovnakom čase a na rovnakom mieste ocitnú často vôbec nesúvisiace časti priameho a adjungovaného vlnenia. Mávajú väčšinou tvar tenkých objemov sledujúcich plochu, kde došlo ku kmitaniu vo fáze priameho a adjungovaného vlnového poľa.

V kerneli tak vznikajú oblasti s hodnotami, ktoré vôbec nesúvisia s počítaným fyzikálnym procesom. Hrúbka týchto oblastí je však často veľmi malá a preto sa pomerne ľahko odstraňujú zhladzovaním (zhladzovaniu sa venujeme v časti 6.5.2). Spolu so zhladzovaním sa však stráca aj časť vypočítanej informácie, priveľké množstvo artefaktov tak dokáže znehodnotiť výsledok.

#### 6.4.4 Ukážka typických vlastností kernelov

Obrázok 6.5 ukazuje len časť kernelu. Z pôvodného kernelu bola kvôli prehl'adnosti ofiltrovaná časť kernelu pochádzajúca z priameho lúča a zostala iba časť súvisiaca s lúčom odrazeným od voľného povrchu. Na obrázku je tiež viditeľná veľmi slabá časť odrazená od spodnej časti výpočtového modelu ako dôsledok slabo odrážajúcej spodnej hranice modelu. Na obrázku si môžeme všimnúť všetky spomínané efekty a vlastnosti kernelov:



Obr. 6.5: Ukážka z práce Liu et al. (2006) na ktorej môžeme vidieť všetky spomínané vlastnosti kernelov: tvar, amplitúdy, viaceré Fresnelove zóny, ďalšie artefakty výpočtu a lokálne zvýšené hodnoty.

- tvar kernelu sledujúci lúč medzi zdrojom a prijímačom (v tomto prípade odrazený od voľného povrchu)
- kernel môžeme rozdeliť na prvú hlavnú (hrubá červená) a vedľajšiu druhú Fresnelovu zónu (výrazné zelené čiary)
- extrémne veľké hodnoty v mieste zdroja (hviezdička) a prijímača (štvorec)
- lokálne väčšie hodnoty pri voľnom povrchu
- ďalšie artefakty výpočtu kernelu (trojica čiar pri zdroji a prijímači)

## 6.5 Úpravy kernelov - regularizácia alebo *gradient pre-conditioning*

Ako sme spomenuli v predchádzajúcich častiach, kernely majú dve vlastnosti, ktoré spôsobujú problémy pri hľadaní nového modelu. Sú to veľmi veľké amplitúdy v malých oblastiach a tiež oblasti s rozkmitanými hodnotami. Aby boli kernely očistené od týchto nežiaducich vplyvov používajú sa rôzne formy regularizácie. Často sa pre ne používa aj názov *gradient pre-conditioning*.

Na rozdiel od bežného predpodmienenia (*pre-conditioning*), cieľom *gradient pre-conditioning* nie je zrýchlenie konvergence minimalizačnej úlohy, ale zmena gradientu tak, aby úloha konvergovala k fyzikálne rozumným modelom. Nepriamym dôsledkom tejto zmeny je však často aj rýchlejšia konvergencia.

Zďaleka najčastejšie používanými úpravami sú orezávanie a zhladzovanie.



### 6.5.1 Orezávanie

I malý počet bodov kernelu s nekonečnými (alebo príliš veľkými) hodnotami v blízkosti zdroja a prijímačov dokáže znehodnotiť výpočet. Uvažujme nasledujúci ilustratívny príklad.

Aby sme zachovali rozumné hodnoty parametrov aj v týchto miestach, dĺžka kroku, ktorou budeme násobiť kernel, musí byť veľmi malá. Môžeme si napríklad zvoliť nejakú hranicu, ktorú nechceme prekonať. Je napríklad očakávateľné, že žiadny parameter prostredia ( $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ) nebude mať zápornú hodnotu. Nech sa hodnota nejakého parametra  $\phi$  nesmie zmeniť po jednej iterácii o viac ako  $k$ -násobok. Potom pre maximálnu dĺžku kroku dostávame ohraničenie

$$k \geq \max \left( \frac{\Delta \phi(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})} \right) = \max \left( \frac{\lambda \cdot \mathbf{K}_\phi(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})} \right) = \lambda \cdot \max \left( \frac{\mathbf{K}_\phi(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})} \right)$$

$$\lambda \leq k \cdot \min \left( \frac{\phi(\mathbf{x})}{\mathbf{K}_\phi(\mathbf{x})} \right),$$

kde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{max}$  je poloha, v ktorej je pomer  $\frac{\mathbf{K}_\phi(\mathbf{x}_{max})}{\phi(\mathbf{x}_{max})}$  maximálny.

Často je maximálna dovolená dĺžka kroku  $\lambda$  veľmi malé číslo. To má však následok, že v ostatných miestach, kde hodnoty kernelu sú oveľa menšie, bude zmena parametrov  $\lambda \cdot \mathbf{K}_\phi(\mathbf{x})$  voči predchádzajúcej iterácii zanedbateľne malá, model sa takmer nezmení a výpočet nikam nepovedie. Misift bude síce klesať, ale bude to len dôsledkom zmeny parametrov v tesnej blízkosti zdroja a prijímača. Najjednoduchšou cestou ako zabrániť týmto problémom je teda všetky “uletené” hodnoty orezať. Hranicu orezávania si však už musí každý zvoliť sám.

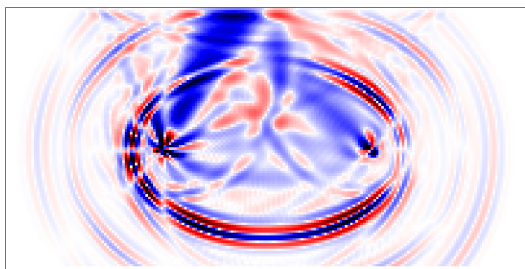
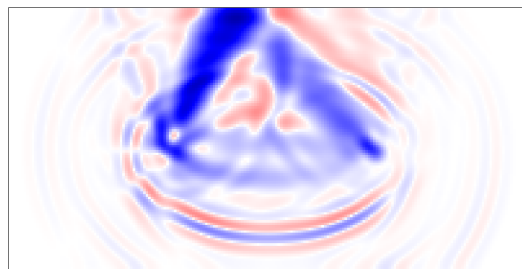
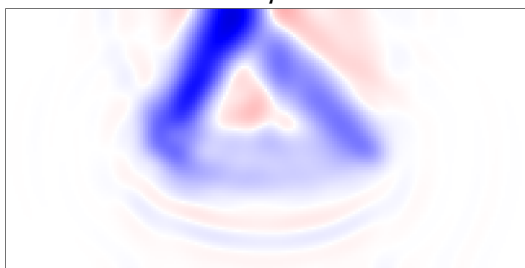
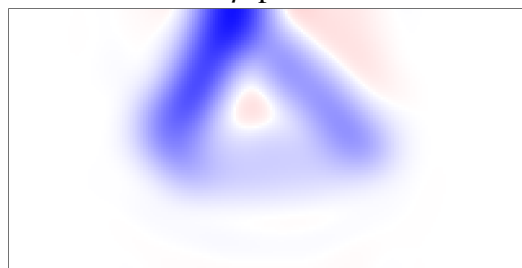
### 6.5.2 Zhľadzovanie

Ďalšou možnosťou namiesto orezávania je zhľadzovanie kernelu. Zhľadzovanie má okrem vyriešenia problémov s uletenými hodnotami aj ďalšie pozitívum - hladením sa stierajú maloškálové nehomogenity, ktoré sú často len dôsledkom nepresností dát a výpočtu a tiež sa vyrušia maloškálové vyššie Fresnelove zóny. Zlepšuje sa tak konvergencia k fyzikálne odpodstatnenejším modelom.

V našich výpočtoch používame zhľadzovanie 2D Gaussovou funkciou s  $\Lambda \sim 5$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\iint_V e^{-\frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2}{\Lambda^2}} d^2\mathbf{r}'} \iint_V e^{-\frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2}{\Lambda^2}} \rho(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}'. \quad (6.21)$$

Zhľadzovanie musíme robiť opatrne, malé zhľadzovanie nemusí stačiť a priveľkým zhľadzovaním zas stratíme aj údaje, ktoré sa snažíme získať. Vidíme to napríklad na kerneli na Obr. 6.9, ktorý by veľmi dobre fungoval pre hladké modely, ale neinvertoval by žiadne ostré nehomogenity. Naopak, kernel na Obr. 6.7 by dokázal invertovať aj menšie nehomogenity,

Obr. 6.6: kernel  $\mu$  bez zhladeniaObr. 6.7: kernel  $\mu$  po zhladení s  $\Lambda = 3$ Obr. 6.8: kernel  $\mu$  po zhladení s  $\Lambda = 6$ Obr. 6.9: kernel  $\mu$  po zhladení s  $\Lambda = 10$ 

ale okrem nich by sa vo výslednom modeli prejavili aj umelé odchýlky nesúvisiace s reálnym modelom. Kernel bez zhladenia (6.6) by pre viac zdrojov viedol k výpočtu, ktorý by ani nekonvergoval.

Do problémov sa dostávame, ak nechceme alebo nemôžeme mať príliš veľké zhladzovanie, ale zároveň sú v kerneli miesta s extrémne veľkými hodnotami. Vtedy sa ukazuje ako najlepšia kombinácia zhladzovania s orezávaním. Najskôr sa orežú uletené hodnoty a následne sa ešte výsledný kernel zhladí.

### 6.5.3 Gradient pre-conditioning vzhľadom ku geometrickému rozšírovaniu vlnoplochy

Efekt geometrického rozširovania vlnoplochy, ktorý spôsobuje problémy s amplitúdami spomínané v 6.4.2 sa bežne rieši len orezaním a následným zhladením kernelu. Liu et al. (2012) sa efektu geometrického rozširovania vo svojom prehľade regularizácií vôbec nevenuje, Fichtner (2011) spomína len prácu *Waveform inversion of marine reflection seismograms for P impedance and Poisson's ratio* (Igel et al., 1996), v ktorej sa jedinou vetou spomína, že použili korekciu na tento efekt bez ďalšieho vysvetlenia. Podobne okrajovo sa tejto problematike venuje vo svojej prezentácii aj Tromp et al. (2011), ktorý použil na predpokladenie gradientu “mapu hustoty lúčov vedúcu k čiastočnému zrušeniu efektu geometrického rozširovania”.

Dôkladnejšie sa geometrickému rozširovaniu budeme venovať v nasledujúcej časti.

## 6.6 Gradient pre-conditioning normovaním maximálnou amplitúdou veličiny vlnového pol'a

Kernel je (podľa Kap. 4) rovný gradientu misiftu. To však neznamená, že zmenami v smere gradientu dostaneme model, ktorý sa bude podobat' reálnemu prostrediu. Naopak, takmer určite skončíme v lokálnom minime a s modelom, ktorý je od skutočného prostredia veľmi vzdialený. S faktom, že samotný gradient nevedie k dobrým modelom súvisia spomínané orezávanie a zhladzovanie, ktoré sa snažia vylepšiť vlastnosti kernelu za cenu odchýlky od jeho pôvodného tvaru.

Bežná formulácia kernelov je totiž najcitlivejšia práve na miesta, kde prešla veľká časť energie, bez ohľadu na to, kam sa tá energia ďalej šírila a či sa vôbec šírila až do prijímača. Taká časť v skutočnosti nemohla misfit ovplyvniť. Je to spor s požadovanými vlastnosťami kernelu.

Naopak, intuitívne by sme očakávali, že citlivosť modelu by mala byť na celej dráhe šírenia - v celej prvej Fresnelovej zóne rovnomerná. Keďže predpokladáme len znalosť zdroja a máme namerané údaje z prijímača, no nepoznáme, kde došlo k odchýlkam medzi modelom a skutočným javom, nie je dôvod uprednostňovať len nejaké konkrétne časti modelu. Týmto smerom sa uberať aj normovanie kernelu hodnotou geometrického rozširovania.

Navrhujeme, aby hodnoty kernelu boli určené zaostrením priameho a adjungovaného pol'a na rovnakom mieste a v rovnakom čase, čiže len pomerom medzi súčinom vybraných veličín (6.6.1) priameho a adjungovaného vlnového pol'a voči súčinu ich maximálnych hodnôt v danom mieste za celý čas simulácie.

### 6.6.1 Normy pre kernely parametrov $\rho$ , $\lambda$ a $\mu$

Naším cieľom je normovať kernel maximálnymi amplitúdami príslušných fyzikálnych veličín, ktoré sa vyskytujú vo vzťahoch 6.6, 6.9 a 6.10. V prípade kernelu hustoty ide o súčin maximálnych amplitúd derivácií vektora posunutia priameho a adjungovaného pol'a

$$N_\rho(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{u}}_{max}^*(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}}_{max}(\mathbf{x}). \quad (6.22)$$

V prípade kernelov elastických koeficientov budeme normovať maximálnymi hodnotami príslušných deformácií podľa definície daného kernelu. Čiže norma pre kernel  $\lambda$  bude

$$N_\lambda(\mathbf{x}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{max}^*(\mathbf{x})) \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{max}(\mathbf{x})) = \varepsilon_{ii,max}^*(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_{jj,max}(\mathbf{x}) \quad (6.23)$$

a pre kernel  $\mu$

$$N_\mu(\mathbf{x}) = \varepsilon_{max}^*(\mathbf{x}) : \varepsilon_{max}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij,max}^*(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij,max}(\mathbf{x}). \quad (6.24)$$

Výsledok po normovaní vyjadruje to, aká relatívna časť z celkového vlnenia sa stretla s adjungovaným vlnovým pol'om.

### Vzťahy pre kernely normované maximálnymi hodnotami

Pre normovaný kernel  $K_\rho^N(\mathbf{x})$  hustoty  $\rho$  dostávame vzťah

$$K_\rho^N(\mathbf{x}) = \frac{K_\rho(\mathbf{x})}{N_\rho(\mathbf{x})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dt}{\max(\dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x})) \cdot \max(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}))}. \quad (6.25)$$

Pre normovaný kernel  $K_\lambda^N(\mathbf{x})$  elastického koeficientu  $\lambda$  dostávame vzťah

$$K_\lambda^N(\mathbf{x}) = \frac{K_\lambda(\mathbf{x})}{N_\lambda(\mathbf{x})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(\varepsilon^*(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{Tr}(\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dt}{\max(\text{Tr}(\varepsilon^*(\mathbf{x}))) \cdot \max(\text{Tr}(\varepsilon(\mathbf{x})))}. \quad (6.26)$$

Pre normovaný kernel  $K_\mu^N(\mathbf{x})$  elastického koeficientu  $\mu$  dostávame vzťah

$$K_\mu^N(\mathbf{x}) = \frac{K_\mu(\mathbf{x})}{N_\mu(\mathbf{x})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^*(\mathbf{x}, t) : \varepsilon(\mathbf{x}, t) dt}{\max(\varepsilon^*(\mathbf{x})) : \max(\varepsilon(\mathbf{x}))}. \quad (6.27)$$

### Tlmenie vo vzťahu pre normu

Problémy môžu spôsobiť miesta, kde maximálna amplitúda aspoň jedného z vlnení sa blíži k nule. Vtedy aj norma sa blíži k nule. Pri delení kernelov príslušnou malou normou tak môžu nastať numerické nepresnosti alebo prevážiť vplyvy šumu. Preto je potrebné pridať do vzťahu pre normovanie aj malé tlmenie  $\varepsilon \ll 1$ , čiže dostaneme normovanie v tvare

$$N_A(\mathbf{x}) = (A_{max}(\mathbf{x}) + \varepsilon) \cdot (A_{max}^*(\mathbf{x}) + \varepsilon), \quad (6.28)$$

kde  $A_{max}(\mathbf{x})$  je maximálna hodnota normovanej veličiny v mieste  $\mathbf{x}$ . Týmto sa zabezpečí, že kernel nebude citlivý na miesta, kde hodnoty vybraných fyzikálnych veličín boli príliš malé a porovnateľné so šumom. Zároveň ale veľkosť hodnôt kernelu nebude závisieť od hodnôt daných veličín na miestach, ak sú tieto hodnoty dostatočne veľké.

## 6.6.2 Vplyv rôznych druhov *gradient pre-conditioning* na výsledné vlastnosti kernelov v kanonických situáciách

V tejto časti sa budeme zaoberať porovnávaním vlastností kernelov:

- s normovaním maximálnymi hodnotami príslušných fyzikálnych veličín
- s normovaním priemernými absolútnymi hodnotami príslušných fyzikálnych veličín
- s korekciou na efekt geometrického rozširovania (Igel et al., 1996)
- s korekciou na “hustotu lúčov” (napr. Tromp et al. (2011))
- bez žiadneho aditívneho predpodmienenia

Treba zdôrazniť, že na všetkých päť možností sa následne aplikuje predpodmienenie orezaním a/alebo zhladením podľa potreby. Výhodou prvých štyroch možností je, že následné zhladzovania a orezovania môžu byť jemnejšie.

Korekcie zohľadňujúce efekt geometrického rozširovania alebo hustoty lúčov sú v FD výpočte problematické. Samotný FD výpočet nám totiž neposkytuje informáciu o týchto hodnotách. Vzhľadom na ich obmedzenia sa dajú použiť len v jednoduchých prostrediach, keď sa potrebné hodnoty dajú odhadnúť aj ináč.

Korekcia na efekt geometrického rozširovania spočíva v tom, že pri integrovaní sa v každej časovej hladine výsledný súčin veličín vlnení na jednotlivých lúčoch priameho a adjungovaného poľa predelí odmocninami z hodnoty Jakobiánu transformácie z lúčových do kartézskych súradníc  $J$  pre priame aj adjungované pole. Problém spočíva v tom, že musíme vedieť rozseparovať výsledné vlnenie na zložky prislúchajúce jednotlivým lúčom, čo FD výpočet neumožňuje.

Korekcia na “hustotu lúčov” spočíva v bežnom vyrátaní hodnôt kernelu. Následne sa vypočítané hodnoty kernelu predelia odmocninami z celkovej hustoty lúčov priameho a adjungovaného poľa v danom mieste. Nevýhodou je, že musíme počítat v samostatnom (nie FD) výpočte túto hustotu. Od korekcie na efekt geometrického rozširovania sa líši iba v prípade, že daným miestom prechádza viac lúčov.

Týchto päť možností sme vybrali na porovnanie úmyselne. Prvá možnosť je možnosť, ktorá sa nám ukazuje ako najvhodnejšia a druhá možnosť je ďalší podobný, veľmi jednoduchý typ normy, ktorý však nevedie k rozumným výsledkom. Korekcie na efekt geometrického rozširovania alebo hustotu lúčov sa zriedkavo spomínajú v dostupnej literatúre. Posledná možnosť je najbežnejšia, keďže nevyžaduje žiadnu ďalšiu námahu a spolu s orezovaním a zhladzovaním poskytuje väčšinou dobré výsledky pre jednoduchšie prostredia.

### **Analýza vplyvu *gradient pre-conditioning* v blízkosti bodového zdroja**

Normovania maximálnymi alebo priemernými absolútnymi hodnotami už v sebe implicitne obsahujú korekciu na geometrické rozširovanie, keďže tieto hodnoty sú geometrickým

rozširovaním ovplyvnené. Hodnoty veličín vystupujúcich vo vzťahuoch pre výpočet kernelov aj hodnoty príslušných noriem klesajú v okolí bodového zdroja v 3D prostredí ako  $1/r$ . Hodnoty výsledného kernelu po normovaní teda nezávisia od vzdialenosti od bodového zdroja.

Situácia s korekciou na geometrické rozširovanie alebo hustotu lúčov je podobná. Hodnota geometrického rozširovania  $J$  alebo hustoty lúčov klesá v 3D ako  $1/r^2$ , no hodnoty veličín klesajú len ako  $1/r$ . Aby výsledný kernel nezávisel od vzdialenosti, musíme normovať odmocninou z hodnoty  $J$  alebo hustoty lúčov.

Závislosť tvaru  $1/r$  vybraných veličín pri výpočte kernelu spôsobuje, že bez korekcií sú hodnoty kernelu v mieste bodového zdroja neobmedzené.

### **Analýza vplyvu *gradient pre-conditioning* na efekt vyžarovacej charakteristiky zdroja**

Normovanie maximálnymi aj priemernými absolútnymi hodnotami odstraňuje efekt vyžarovacej charakteristiky zdroja. Hodnoty kernelu budú rovnomernejšie, nebudú závisieť od uhla (znamienko sa však zachová). Naopak, hustota lúčov a hodnota  $J$  nezávisia od uhla a preto takéto predpokladenia zachovávajú vyžarovaciu charakteristiku aj vo výslednom kerneli.

### **Analýza vplyvu *gradient pre-conditioning* v blízkosti voľného povrchu**

Názorný príklad toho, kedy sa prejaví vhodnosť normovania na výslednom kerneli, je odraz vlny na voľnom povrchu. Priamo na voľnom povrchu dosahuje vlna dvojnásobnú amplitúdu ako pod ním a teda kernel, ktorý je súčinom priameho a adjungovaného vlnového poľa bude na povrchu dokonca štvornásobný. Podľa definície by sme teda mali hodnoty parametrov prostredia na povrchu zmeniť o štvornásobok toho, čo hodnoty parametrov pod ním.<sup>1</sup> Nemáme však žiadny fyzikálny dôvod, prečo by sme mali zmeniť parametre na voľnom povrchu viac, ako pod ním. Je rozumné očakávať, že aj povrch, aj body blízko pod ním budú určené s podobnou presnosťou a mierou informácie.

Normovanie hodnôt kernelu maximálnymi alebo priemernými hodnotami vybraných veličín priameho aj adjungovaného poľa vyrieši tento problém. Maximálne aj priemerné hodnoty na povrchu budú dvojnásobné, ako tie pod povrchom. Hodnota normy na povrchu bude štvornásobná a výsledný normovaný kernel na povrchu aj tesne pod ním bude teda po predelení normou rovnaký.

Odstránenie efektu geometrického rozširovania prípadne hustoty lúčov bude mať rovnaký vplyv na body na povrchu ako na body pod ním, preto jeho odstránenie neovplyvní relatívny pomer hodnôt výsledného kernelu. Aj po takomto predpokladení zostanú umelo zoštvornásobené hodnoty na povrchu.

<sup>1</sup>Budeme nútení použiť silné zhladzovanie, aby sme sa tejto umelej nehomogenity zbavili.

Efekt voľného povrchu sa prejavuje len vo vrstve hrúbky  $h \sim \lambda/4$ . V prípadoch, kde vlnové dĺžky  $\lambda$  sú oveľa menšie než rozmery modelu, môže byť tento efekt zanedbaný a stačí relatívne malé zhladenie hodnôt kernela pri povrchu. V malých štruktúrach s veľkými rýchlosťami (ako napríklad okraje sedimentárnych bazénov) však môže napríklad typická vlna s frekvenciou  $f = 5\text{Hz}$  v prostredí s rýchlosťou šírenia  $c = 2000\text{m/s}$  ovplyvniť oblasť hrúbky  $h \sim 100\text{m}$ . Gaussovské zhladzovanie, ktoré by malo dostatočne odstrániť zvýšené hodnoty pri povrchu by muselo mať  $\Lambda > 500\text{m}$ , čo však vedie k veľkej strate rozlíšenia invertovaných štruktúr.

### Analýza vplyvu *gradient pre-conditioning* v prípade viacnásobných prechodov tej istej vlny

Cieľom tejto sekcie je vysvetlenie motivácie, prečo sme sa rozhodli pre normovanie maximálnou hodnotou a nie priemernou absolútnou hodnotou príslušnej fyzikálnej veličiny.

Uvažujme, že jedna priama vlna spolu s adjungovanou vlnou sa šíria tým istým miestom celkovo  $m$ -krát a pre zjednodušenie uvažujme, že ich amplitúdy ani tvar sa nemenia. Potom sa viacnásobným prechodom nezmenia ani maximálne hodnoty jednotlivých veličín. Norma, ako súčin maximálnych hodnôt priameho a adjungovaného poľa bude rovnaká. Priemerná absolútna hodnota však bude  $m$  násobne väčšia, ako keby tade počas celej doby prešla vlna len raz. To isté sa dá povedať aj o veličinách adjungovaného poľa. Norma vypočítaná zo súčinu priemerných absolútnych hodnôt bude teda  $m^2$ -krát väčšia, ako norma pre jediný prechod.

Nenormovaný kernel bude súčtom  $m$  čiastkových kernelov jednotlivých prechodov, čiže  $m$ -krát väčší, ako pri jedinom prechode.

Pomer výsledného kernelu  $m$  prechodov po normovaní maximálnymi hodnotami  $K_m^{norm,max}$  bude voči rovnako normovanému kernelu jedného prechodu  $K_1^{norm,max}$  rovný

$$\frac{K_m^{norm,max}}{K_1^{norm,max}} = \frac{\frac{K_m}{N_m^{max}}}{\frac{K_1}{N_1^{max}}} = \frac{K_m}{K_1} \cdot \frac{N_1^{max}}{N_m^{max}} = m \cdot 1. \quad (6.29)$$

Kernel  $m$  prechodov bude v tomto prípade  $m$ -krát väčší, ako pri jedinom prechode. Je to aj intuitívny výsledok, že po  $m$  násobnom “presvietení” budeme mať o danom mieste väčšiu mieru informácie a kernel by mal byť na takéto miesto citlivejší.

Naopak, pomer výsledného kernelu po normovaní priemernými absolútnymi hodnotami  $K_m^{norm,pr}$  bude voči rovnako normovanému kernelu jedného prechodu  $K_1^{norm,pr}$  rovný

$$\frac{K_m^{norm,pr}}{K_1^{norm,pr}} = \frac{\frac{K_m}{N_m^{pr}}}{\frac{K_1}{N_1^{pr}}} = \frac{K_m}{K_1} \cdot \frac{N_1^{pr}}{N_m^{pr}} = m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m}. \quad (6.30)$$

Vidíme, že kernel by mal v prípade normovania priemernou hodnotou v situácii viacnásobného “presvietenia” znížené hodnoty, čo nedáva fyzikálny zmysel a výrazne zhorší vlastnosti výpočtu. Táto chyba sa bude týkať veľkej oblasti, ktorú nebude možné ani zahradiť ani orezať. Takéto normovanie preto môžeme rovno vylúčiť.

Korekciou na geometrické rozširovanie v tomto prípade nebude mať žiadny efekt, keďže hodnota  $\sqrt{J}$  bude bez ohľadu na počet prechodov konštantná. Výsledný kernel bude teda, podobne ako bez predpokladu alebo s normovaním maximálnymi hodnotami, súčet čiasťových kernelov  $m$  prechodov.

V prípade, že použijeme opravu na “hustotu lúčov”, tak v mieste  $m$  prechodov bude lúčov  $m$ -násobne viac. Po predelení kernelu odmocninou z tejto hustoty pre priame aj adjungované pole dostaneme hodnotu

$$\frac{K_m^{norm,h}}{K_1^{norm,h}} = \frac{K_m}{K_1} \cdot \frac{N_1^h}{N_m^h} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}} = 1. \quad (6.31)$$

Citlivosť kernelu v takomto prípade od počtu prechodov nezávisí. Aj toto je prijateľný výsledok.

### Citlivosť kernelu na absolútne hodnoty parametrov aktuálneho modelu

Cieľom nasledujúcej časti je vysvetlenie toho, ako sa prejaví na výslednom kerneli absolútne hodnoty parametrov modelu, ktorý vstupuje do aktuálnej iterácie. V ideálnom prípade by hodnoty kernelu mali závisieť len od rozdielov príslušných parametrov medzi reálnym prostredím a jeho modelom. Mali by hovoriť o tom, ako veľmi sa líši model od skutočného prostredia. To, ako veľmi sa líši model od prostredia sa prejaví v misfite. Tvar misfitu potom ovplyvní hodnoty kernelu. V skutočnosti však existuje aj závislosť hodnôt kernelu od absolútnych hodnôt parametrov modelu.

Vlna prichádzajúca do pomalšieho prostredia zväčšuje svoju amplitúdu vektora posunutia a znižuje svoju vlnovú dĺžku. Efekt pomalšej rýchlosti a kratšej vlnovej dĺžky na výsledný kernel sa navzájom vyruší, ako ukazujeme v časti 6.6.2. Väčšia amplitúda vektora posunutia sa však prejaví aj jeho väčšími časovými deriváciami a väčšími hodnotami zložiek tenzora deformácie. To spôsobí, že hodnoty kernela v pomalšom prostredí, ktoré vzniknú z súčinu týchto veličín priameho a adjungovaného poľa, budú väčšie.

Napríklad v prípade sedimentárneho bazénu s kontrastom rýchlosti  $S$  vln  $\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} = 5$  budú amplitúdy veličín priameho aj adjungovaného poľa v sedimentoch približne  $\sqrt{5}$  násobne väčšie ako v skalnatom podloží. Hodnoty kernelu bez predpokladu potom budú približne  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$  násobne väčšie aj keby boli parametre sedimentov určené presne.

Treba si uvedomiť, že ich zväčšenie je nezávislé od toho, ako veľmi sa líšia od sku-



točných hodnôt. To má za následok, že väčšina zmien parametrov modelu sa bude diať vo vrchnej sedimentárnej časti určenou našim apriórnym modelom na úkor zmien v rýchlejších častiach aj keby sa apriórny a skutočný model líšili práve tam.

Vidíme teda, že máme dokonca dva závisiace problémy:

- implicitnú preferenciu pre väčšie hodnoty kernelov v pomalších častiach
- rýchlejšie časti sú určené apriórnym modelom a nie skutočným prostredím

Normalizácia maximálnymi hodnotami daných fyzikálnych veličín odstráni efekt väčších hodnôt kernelu v pomalších častiach, čím sa zbavíme aj závislosti od absolútnych hodnôt parametrov apriórneho modelu. Normovaním sa však misfit neovplyvní a preto si zachováme informáciu o relatívnych odchýlkach modelu a prostredia, ktorú misfit obsahuje.

Výsledok po normalizácii nie je nutne lepší model. Existujú prípady, keď by výsledok bol lepší bez normalizácie. Postup s normalizáciou je však objektívnejší, zmeny modelu závisia len od misfitu a nie od absolútnych hodnôt apriórneho modelu.

### Tabuľka porovnania vlastností kernelov po aplikovaní vybraných druhov *gradient pre-conditioning*

V Tab. 6.2 sú zhrnuté výsledky pre jednotlivé druhy *gradient pre-conditioning* a rôzne situácie. Slovom “zlé” označujeme hodnoty ktoré sú fyzikálne nezmyselné a výrazne iné než očakávané.

Podľa tabuľky v našej situácii, keď nie je možné zanedbať efekt voľného povrchu ani veľkých kontrastov rýchlostí a parametrov, sa ako najvhodnejšia možnosť ukazuje navrhované normovanie maximálnymi hodnotami vybraných veličín.

	bodový zdroj	voľný povrch	$N$ prechodov	akt. parametre
pre-conditioning	hodnota výsledného kernelu			
žiadne	zlé ( $\infty$ )	4-násobok	$N$	závisí
geom. rozširovanie	má vyžar.ch.	4-násobok	$N$	závisí
hustota lúčov	má vyžar.ch.	4-násobok	1	závisí
priem. abs. hodn.	OK	OK	zlé ( $1/N$ )	nezávisí
max. hodnoty	OK	OK	$N$	nezávisí

Tabuľka 6.2: Porovnanie vlastností jednotlivých predpodmienení pre rôzne prípady. Jednotlivé hodnoty v tabuľke sú vysvetlené v predchádzajúcom texte.

### Predpodmienenie rýchlosťou šírenia vln v prostredí

Ďalšia potenciálna aditívna korekcia by mohla byť korekcia na rýchlosť šírenia vln. Keďže kernely vznikajú vo všeobecnosti integráciou v čase, tak by sme mohli očakávať, že

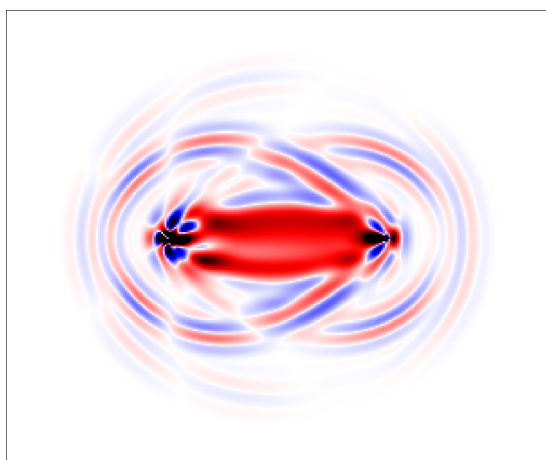
čím je vlnenie v danej časti prostredia pomalšie a čím dlhšie sa bude integrovať s adjungovaným vlnením, tým bude výsledný vplyv na kernel väčší.<sup>2</sup> V rovnakom pomere sa však skrúti vlnová dĺžka a tak sa efekt pomalšej rýchlosti presne vykompenzuje so skrútenou vlnovou dĺžkou. Výsledok integrácie bude od rýchlosti šírenia nezávislý a preto žiadnu korekciu netreba.

## 6.7 Výsledky

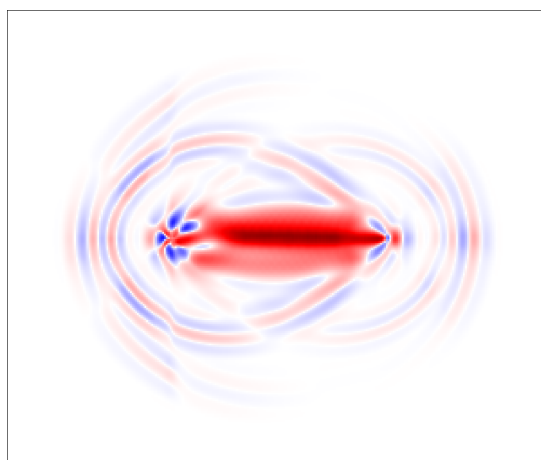
V tejto časti prezentujeme výsledky kernelov v kanonických situáciách, kde sa prejavujú rozdiely spôsobené použitím rôznych druhov *gradient pre-conditioning*. Prezentujeme výsledky pre koeficient  $\mu$ , výsledky pre  $\lambda$  a  $\rho$  sú obdobné.

### 6.7.1 Korekcia na bodový zdroj

V prvom prípade (obrázky 6.10 a 6.11) porovnávame výsledné kernely pre elastický koeficient  $\mu$  pre prípad bez normovania a prípad s normovaním. Môžeme vidieť, že na druhom obrázku sa po normovaní strácajú veľké hodnoty v mieste bodového zdroja a prijímača a prejavuje sa citlivosť v okolí lúča.



Obr. 6.10: Výsledný kernel  $\mu$  po orezaní a zhladení. Môžeme vidieť veľké artefaktov a neobmedzene veľké hodnoty (tmavé až čierne oblasti) pri bodových zdrojoch - priamy zdroj vľavo a prijímač (adjungovaný zdroj) vpravo.

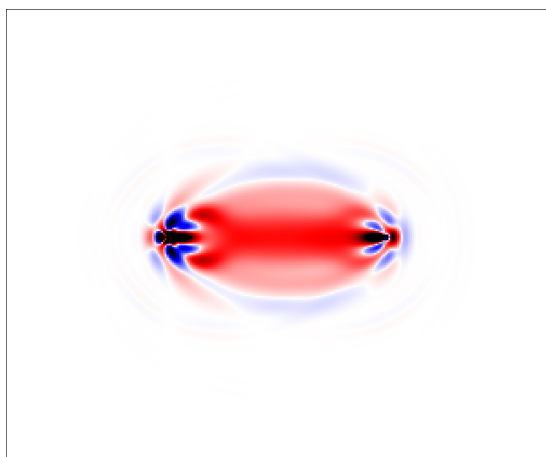


Obr. 6.11: Výsledný kernel  $\mu$  po znormovaní, orezaní a zhladení. Citlivosť kernelu sa preniesla z okolia bodových zdrojov rovnomerne do oblasti medzi nimi.

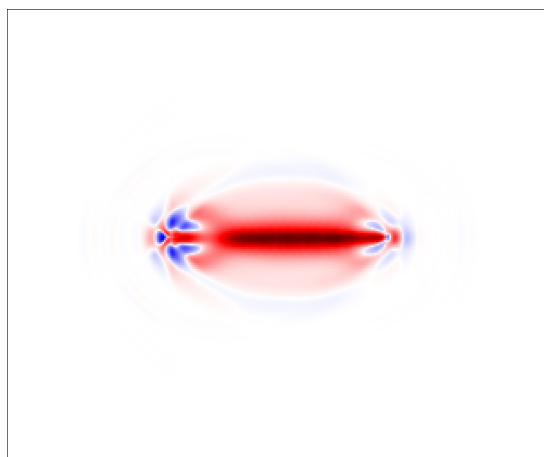
Podobne sa prejavujú zmeny aj pri aplikovaní váhovania na časovú funkciu adjungovaných zdrojov (obrázky 6.12 a 6.13). Váhovanie časovej funkcie zdrojov je také, aby vplyv prvých

<sup>2</sup>Tento efekt je ešte výraznejší v dôsledku toho, že amplitúda vln v pomalšom prostredí narastie. Tohoto problému sa však vieme zbaviť normovaním maximálnymi hodnotami (6.6.2).

príchodov bol väčší ako vplyv zvyšku vlnového poľa (podľa časti 5.3).



Obr. 6.12: Výsledný kernel  $\mu$  po orezaní a zhladení. Jednoduchšie váhované vlnové pole adjungovaného zdroja nespôsobilo toľko artefaktov ako v predchádzajúcich prípadoch.



Obr. 6.13: Výsledný kernel  $\mu$  po znormovaní, orezaní a zhladení. Citlivosť kernelu sa preniesla z okolia bodových zdrojov rovnomerne do oblasti medzi nimi. Dostávame najlepší výsledok.

### 6.7.2 Vplyv normovania na výsledný kernel v blízkosti voľného povrchu

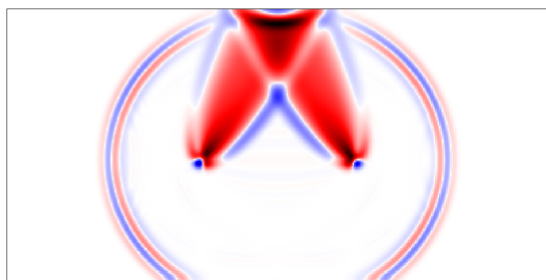
Vplyv normovania maximálnymi hodnotami na výsledný kernel v blízkosti voľného povrchu môžeme vidieť na obrázkoch 6.14 a 6.15.

V prvom prípade (bez normovania) je tesne pod povrchom oblasť s výrazne zvýšenými hodnotami. Je to dôsledok zvýšených amplitúd príslušných veličín vystupujúcich vo vzťahu pre kernel pri dopade priamej aj adjungovaného vlnového poľa na voľný povrch. Pod touto oblasťou môžeme vidieť väčšiu oblasť trojuholníkového tvaru s taktiež zvýšenými hodnotami. Táto oblasť je výsledok súčtu kernelov od priamej vlny a od vlny odrazenej od povrchu.

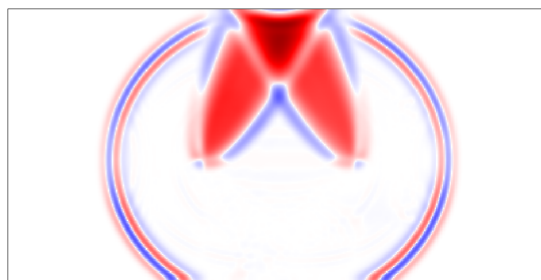
V druhom prípade po normovaní maximálnymi hodnotami sa odstráni nežiaduci vplyv voľného povrchu na hodnoty kernelu. Súčasne sa zachovávajú dvojnásobné hodnoty kernelu v trojuholníkovej oblasti pod povrchom, ktorá bola “presvietená” dvakrát.

### 6.7.3 Porovnanie výsledkov pre rôzne rozloženie staníc

Tomografia lokálnych štruktúr sa líši od globálnej alebo regionálnej tomografie nielen oveľa výraznejšími heterogenitami, ale aj rozložením seizmických zdrojov a prijímačov. Vo všeobecnosti platí, že (hlavne) zdroje a prijímače vo väčších oblastiach sú rozložené rovnomernejšie. V prípade lokálnej štruktúry môže napríklad existovať len jedna zdrojová zóna v malej časti modelu. Inými slovami platí, že v prípade regionálnej a globálnej tomografie



Obr. 6.14: Výsledný kernel  $\mu$ . Napriek orezaniu a zhladeniu je stále viditeľný vplyv bodového zdroja a prijímača (vysoké hodnoty znázornené tmavočervenou až čiernou farbou). Efekt voľného povrchu sa prejavuje ako lokálne zvýšenie hodnôt (tmavšia farba) tesne pod povrchom.



Obr. 6.15: Výsledný kernel  $\mu$  po znormálnovaní maximálnymi hodnotami, orezaní a zhladení. Môžeme vidieť, že normalizácia odstránila umelo zvýšené hodnoty pod povrchom a pri zdroji a prijímači. Zostali len dvojnásobné hodnoty kernelu v oblasti tvaru trojuholníka, kde došlo k súčtu kernelov od priamej a od odrazenej vlny.

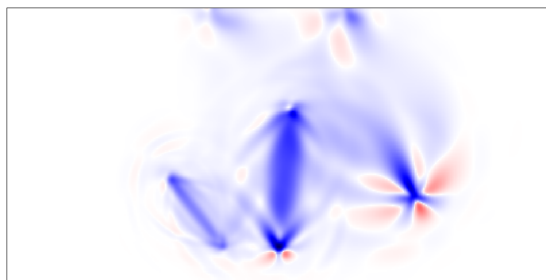
je priemerná vzdialenosť medzi zdrojmi väčšia ako vzdialenosť k najbližšiemu prijímaču a v prípade lokálnej tomografie platí opak.

To má zaujímavý dôsledok. Uvažujme najskôr prípad bez predpokladenia kernelov. V tom prípade sú kernely najcitlivejšie v oblasti zdrojov a prijímačov kvôli efektu geometrického rozširovania.

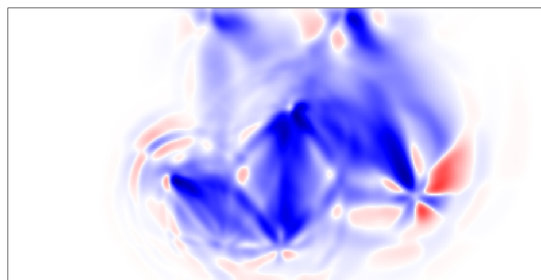
Ak sú zdroje rozložené rovnomerne, tak oblasti s veľkými hodnotami kernelu budú rozložené rovnomerne tiež. Po zhladení tak získame kernel citlivý na zmeny vo veľkej časti modelu (Obr. 6.16).

Naopak, v prípade, že zdroje sú rozložené len v jednej zdrojovej zóne relatívne ďaleko od prijímačov, oblasť kernelu s najväčšími hodnotami bude v ich okolí. V oblasti medzi zdrojovou zónou a prijímačmi budú hodnoty kernelu v dôsledku geometrického rozširovania veľmi malé, kernel nebude citlivý na túto oblasť (Obr. 6.18). Väčšina zmien modelu sa bude diať len v blízkosti prijímačov a v zdrojovej zóne. Model nebude konvergovať k rozumnému riešeniu.

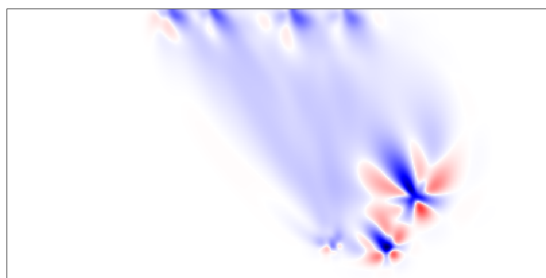
Predpokladenie maximálnymi hodnotami spôsobí zvýšenú citlivosť kernelu v celom okolí každého lúča. Najlepšie výsledky dostaneme pre dobré rozloženie staníc a zdrojov (Obr. 6.17), ale aj výsledný kernel pre nevhodné rozloženie zdrojov (Obr. 6.19) bude mať dobré vlastnosti a budeme schopní invertovať model aj v takejto situácii.



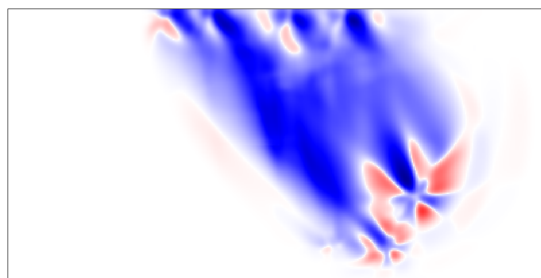
Obr. 6.16: Výsledný kernel  $\mu$  pre 3 zdroje a 4 prijímače bez normovania. Zdroje sa nachádzajú v dolnej časti, dva prijímače v strede modelu a dva prijímače na povrchu. Ich polohy sa nachádzajú vždy na “špičkách” jednotlivých kernelov. Vďaka vhodnému rozloženiu staníc a prijímačov je väčšina modelu dobre “presvietená”.



Obr. 6.17: Výsledný kernel  $\mu$  pre 3 zdroje a 4 prijímače po normovaní maximálnymi hodnotami s rovnakým rozložením, ako na Obr. 6.16. Prejavuje sa citlivosť prostredia aj na slabšie vlny, ktoré sa v prípade bez normovania strácali v pozadí.



Obr. 6.18: Výsledný kernel  $\mu$  pre 3 zdroje a 4 prijímače bez normovania. Zdroje sú v spodnej časti modelu, prijímače ležia na povrchu. Výsledný kernel má zlé vlastnosti, miesta kernelu s najväčšími hodnotami sa nachádzajú len v oblasti zdrojov a prijímačov a oblasť medzi nimi má len malé hodnoty a pri zmenách modelu sa meniť príliš nebude, hoci práve to je oblasť, odkiaľ môžu pochádzať najväčšie odchýlky medzi nameraným a vypočítaným seizmogramom.



Obr. 6.19: Výsledný kernel  $\mu$  pre 3 zdroje a 4 prijímače po normovaní maximálnymi hodnotami s rovnakým rozložením, ako na Obr. 6.18. Napriek nevhodnému rozmiestneniu zdrojov máme veľmi dobrú citlivosť kernelu na všetky miesta, kde prešli seizmické vlny zo zdrojov do prijímačov.

# Kapitola 7

## Aplikácia adjungovanej metódy na inverziu parametrov skúmaných prostredí

### 7.1 Prostredie

#### 7.1.1 Voľba invertovaných parametrov prostredí

Cieľom inverzie je získanie čo najpresnejšieho modelu prostredia. V reálnom prípade však ide o obrovské množstvo voľných parametrov, ktorého invertovanie nie je v našich silách. Existuje viacero druhov obmedzení, na ktoré musíme myslieť ešte pred tým, ako sa pokúsime o inverziu.

- nedostatočné pokrytie dátami - nemôžeme invertovať model v miestach, z ktorých nemáme žiadne dáta alebo dosiahnuť vysoké rozlíšenie tam, kde pokrytie dátami je len riedke
- fyzikálne obmedzenia - tu máme na mysli invarianciu veličín vlnového poľa pri zmene  $\{\rho, \lambda, \mu\} \rightarrow \{c\rho, c\lambda, c\mu\}$  (7.1.2) alebo  $\{\lambda, \mu\} \rightarrow \{\lambda + 2\Delta, \mu - \Delta\}$  (7.1.3).
- výpočtové obmedzenia - niekedy sme obmedzení len tým, že nemáme dostatočne veľkú výpočtovú kapacitu, hoci teória samotný výpočet umožňuje.

Prvé obmedzenie sa prejaví tým, že hodnoty na miestach nepokrytých lúčami si zachovávajú hodnoty zo štartovacieho modelu a naša vedomosť o týchto častiach sa voči tej apriórnej nezmení.

Dôsledkom druhého obmedzenia sme na inverziu zvolili len parametre  $\lambda$  a  $\mu$  a hustotu  $\rho$  nechávame fixovanú. Hustota  $\rho$  je totiž ako parameter určený najpresnejšie aj z iných

meraní (napríklad z gravimetrických meraní) a zároveň očakávame v nej najmenšie relatívne variácie, keďže pre väčšinu materiálov sa pohybuje v rozpätí 2000 – 3000 kg/m<sup>3</sup>.

Tretie obmedzenie našťastie v 2D už v súčasnosti nehrá rolu až na prípady extrémne veľkých sietí a modelov. Pre tomografiu 3D prostredí však výpočtové nároky spôsobujú výrazné komplikácie.

### 7.1.2 Invariancia veličín vlnového poľa pri zámene $\{\rho, \lambda, \mu\} \rightarrow \{c\rho, c\lambda, c\mu\}$

V tejto časti si ukážeme zaujímavú vlastnosť šírenia seizmických vln a jej dôsledok pre inverziu parametrov. Rýchlosti šírenia P a S vln sú:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (7.1)$$

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7.2)$$

Ak spravíme zámenu  $\{\rho, \lambda, \mu\} \rightarrow \{c\rho, c\lambda, c\mu\}$ , rýchlosť vln sa nezmení. Má to vážny dôsledok pre inverziu. Ak existuje nehomogenita s takto zmenenými hodnotami, tak ňou vlnenie prejde za rovnaký čas, ako keby tam žiadna nehomogenita nebola. V misfite sa teda takáto nehomogenita neprejaví.

Čo je však horšie, počas inverzie sa môžu všetky parametre na niektorých miestach všetky niekoľkonásobne zväčšiť. Vznikne tak umelá nehomogenita, ktorá sa tiež neprejaví na misfite.

Inverzia je preto nejednoznačná, dajú sa určiť len relatívne pomery elastických parametrov a hustoty a nie ich absolútne hodnoty. Lepšie je preto jeden parameter fixovať.

### 7.1.3 Invariancia P vln pri zámene $\{\lambda, \mu\} \rightarrow \{\lambda + 2\Delta, \mu - \Delta\}$

Ďalší potenciálny problém môžu spôsobovať dáta, ktoré používame pri výpočte misfitu. Je zjavné, že odfiltrovaním P vln stratíme celú informáciu o koeficiente  $\lambda$ , keďže S vlny naň nie sú citlivé. Úplné odfiltrovanie S vln však spôsobuje problémy tiež. Šírenie P vln je totiž určené len súčtom  $\lambda + 2\mu$ . Inverzia tak síce určí správne hodnoty rýchlostí  $v_P$  a misfit poklesne, samotné hodnoty  $\lambda$  a  $\mu$  však môžu byť určené veľmi nepresne.

## 7.2 Všeobecný postup inverzie parametrov modelu

### 7.2.1 Výpočet modelu po ďalšej iterácii v prípade inverzie jedného parametra

Vypočítaný kernel  $\mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{r})$  je objemová hustota gradientu misfitu podľa modelového parametra. Hodnota kernelu pre vybraný parameter v nejakom mieste teda prezrádza len smer a relatívnu hodnotu, o akú ho treba na danom mieste zmeniť. Absolútnu dĺžku zmeny v smere gradientu (krok) musíme určiť zvlášť tak, aby misfit klesol. Označujeme ju  $\Lambda_{opt}^{(i)}$ .

Nový model ako vstup do  $(i + 1)$ . iterácie určíme zo vzťahu

$$\mathbf{M}^{(i+1)} = \mathbf{M}^{(i)} + \Lambda_{opt}^{(i)} \cdot \mathbf{K}^{(i)}. \quad (7.3)$$

### 7.2.2 Hľadanie optimálnej dĺžky kroku $\Lambda_{opt}^{(i)}$ v jednom rozmere

Podľa teórie je v jednom rozmere pre malé, linearizovateľné odchýlky misfit kvadratickou funkciou okolo mimima. Stačí preto vypočítať misfit pre tri rôzne pokusné kroky  $\Lambda^{(i,j)}$  a výsledný krok  $\Lambda_{opt}^{(i)}$  nájdeme z polohy minima paraboly, ktorá fituje misfity v týchto troch pokusných krokoch.

V skutočných testoch však odchýlky dostatočne malé nie sú. Funkcia misfitu sa ukázala zložitejšia, preto pokusných krokov robíme viac, až kým neurčíme polohu minima misfitu dostatočne presne aj bez predpokladu o čisto kvadratickom priebehu. Na nájdenie minima používame postupnosť parabolických aproximácií. V prípade, že závislosť misfitu sa nepodobá kvadratickej funkcii a postupnosť aproximácií dostatočne rýchlo nekonverguje, používame aj binárne vyhľadávanie.

### 7.2.3 Výpočet modelu po ďalšej iterácii v prípade inverzie dvoch parametrov

Na otázku, ako postupovať v prípade, keď invertujeme viacero rôznych parametrov súčasne a máme viacero kernelov pre jednotlivé parametre, neexistuje všeobecne akceptovaná odpoveď. Zdá sa, že rôzne prístupy sú vhodné pre rôzne špecifické podmienky.

Vo všeobecnosti môžeme napísať pre nový model  $(i + 1)$ . iterácie obdobný vzťah ako 7.3

$$\mathbf{M}^{(i+1)} = \mathbf{M}^{(i)} + \Lambda_j^{(i)} \cdot \mathbf{K}_j^{(i)}. \quad (7.4)$$

Index  $j$  čísloje jednotlivé parametre.

Najjednoduchší spôsob je zvoliť  $\Lambda_1^{(i)} = \Lambda_2^{(i)} = \dots = \Lambda_n^{(i)}$ . Takýto postup vedie k rozumným výsledkom v špeciálnych prípadoch, keď sú zmeny oboch parametrov približne rov-



naké.

Naopak, najvšeobecnejší postup na určenie (rôznych) optimálnych dĺžok krokov je nájdenie minima funkcie misfitu v priestore danom všetkými možnými dĺžkami krokov pre každý parameter. Inými slovami, ide o hľadanie optimálnej kombinácie dĺžok pre každý parameter.

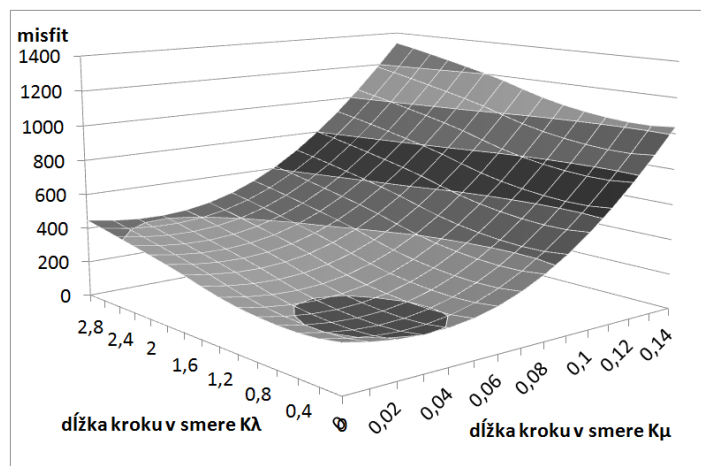
## 7.2.4 Hľadanie optimálnych dĺžok krokov v dvoch rozmeroch

V našom prípade ide o dĺžky krokov v smeroch kernelov  $\lambda$  a  $\mu$ .

Najpriamočiarejší postup je vyskúšanie všetkých možných kombinácií dĺžok krokov (pri nejakom vzorkovaní, keďže ide o spojité prípad). Optimálna kombinácia je potom taká, pre ktorú nový model dáva najmenší misfit. Takýto postup je však z praktického hľadiska nemožný, keďže overenie každého pokusu - vypočítanie misfitu - si vyžaduje jeden (časovo náročný) priamy výpočet a potenciálnych kombinácií je obrovské množstvo.

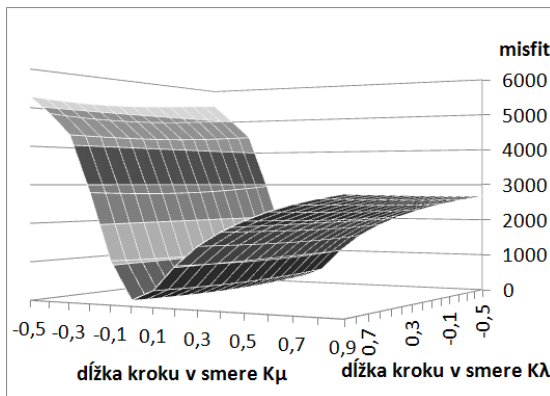
Našou snahou je preto minimalizovať počet priamych výpočtov, ktoré budú stačiť na určenie optimálnych dĺžok krokov v smeroch  $\lambda$  a  $\mu$ . Hľadáme ich kombináciou metód. Gradientnou metódou sa snažíme priblížiť k minimu misfitu, ktorého presnú polohu potom dohľadáme postupnosťou vrcholov paraboloidných aproximácií misfitu v okolí minima. Testovaním sa ukazuje, že 9 priamych výpočtov je dostatočných na nájdenie približného minima misfitu pre dva parametre. Pre porovnanie uvádzame, že pre jeden parameter sme našli minimum dostatočne presne po približne šiestich výpočtoch.

Ukážka priebehu misfitu v závislosti od dĺžok krokov pre dva parametre  $\lambda$  a  $\mu$  je na Obr. 7.1. Vidíme, že blízko optima [0.6, 0.03] je priebeh podobný jednoduchému paraboloidu. Problémom je však výrazne väčšia citlivosť misfitu na parameter  $\mu$  ako na  $\lambda$ . Tento problém lepšie ilustruje Obr. 7.2. V takomto prípade je určovanie kroku  $\lambda$  z malého počtu meraní dosť nestabilné.

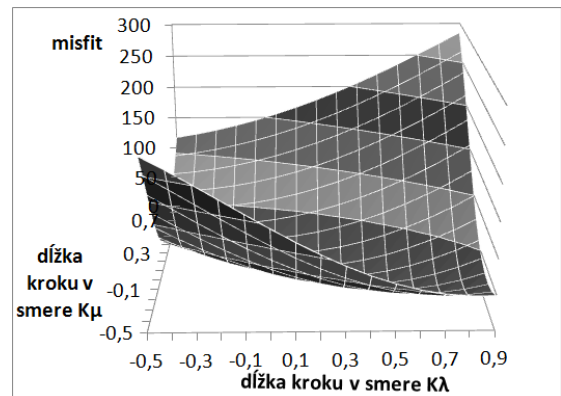


Obr. 7.1: Závislosť misfitu od dĺžok krokov násobiacich kernely  $\lambda$  a  $\mu$ . Vidíme, že závislosť sa v okolí optima podobá tvaru paraboloidu.

Výrazne väčšia citlivosť misfitu na dĺžku kroku v smere kernelu  $\mu$  je očakávateľná. Je to spôsobené tým, že väčšinu misfitu tvorí misfit amplitúdovo výraznejších S vln. Akonáhle odfiltrujeme S vlny, situácia sa zmení, čo môžeme vidieť na obrázku 7.3. Misfit závisí od oboch krokov približne rovnako. Problémom je však priamka  $\Lambda_\lambda \approx -2\Lambda_\mu$ . Ak predpokladáme, že kernely pre  $\lambda$  a  $\mu$  sú podobné, tak zmena parametra  $\mu$  a súčasne dvojnásobná zmena parametra  $\lambda$  v opačnom smere sa navzájom vo vzťahu pre rýchlosť P vln vyrušia a rýchlosť P vln ani ich amplitúda sa nezmení. Misfit len samotných P vln je preto nezávislý od takýchto zmien a existuje nejednoznačnosť riešenia. Váhovanie misfitu musíme preto nastaviť tak, aby misfit zahrnul aspoň časť vplyvu S vln, čím už získame jednoznačné riešenie.



Obr. 7.2: Závislosť misfitu od dĺžok krokov násobiacich kernely  $\lambda$  a  $\mu$ . Závislosť misfitu od väčších dĺžok je zložitá, závislosť od dĺžky kroku pre kernel  $\mu$  je výrazne väčšia ako od dĺžky kroku pre kernel  $\lambda$ .



Obr. 7.3: Závislosť misfitu od dĺžok krokov násobiacich kernely  $\lambda$  a  $\mu$ . Po takom váhovaní misfitu, že zahŕňame len vplyv P vln a odfiltrujeme zvyšnú časť seizmogramu, je závislosť od oboch dĺžok približne rovnaká. Pretiahnuté minimum na osi  $\Lambda_\lambda \approx -2\Lambda_\mu$  však spôsobuje nejednoznačnosť určenia optimálnych dĺžok - ako píšeme v časti 7.1.3.

### 7.2.5 Multi-scale approach

Problém gradientných metód vo všeobecnosti je konvergencia do najbližšieho minima. Cieľom inverzie je však nájsť minimum globálne a konvergencii do lokálnych miním zabrániť. Využívame na to metódu nazvanú *multi-scale approach* (metóda viacerých škál). Postup spočíva v tom, že prvé iterácie sa robia len s použitím nízkych frekvencií, ktoré sú citlivé len na veľkorozmerné heterogenity. Po dosiahnutí dostatočne nízkych hodnôt misfitu postupne rozširujeme frekvenčný rozsah o vyššie frekvencie. Súčasne znižujeme hodnoty zhladzovania kernelov.

### 7.3 Checkerboard testy inverzie jedného parametra

*Checkerboard* test (v preklade “šachovnicový test”) je najčastejší test inverzie. Za originálny model sa zvolí model so šachovnicovo usporiadanými hodnotami, čiže so štvorcovými striedavo-usporiadanými oblasťami s kladnými a zápornými odchýlkami vo vzťahu k priemerným hodnotám. Štartovací model je homogénny. Obl’úbenosť tohoto testu v obrátených úlohách spočíva v tom, že v invertovanom modeli sa prejaví efekt šachovnice a už na prvý pohľad môžeme vidieť oblasti, kde inverzia dáva dobré výsledky a kde nie.

#### 7.3.1 Zadanie úlohy

V tejto časti budeme testovať inverziu jedného z troch parametrov prostredia ( $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\lambda(\mathbf{r})$  a  $\mu(\mathbf{r})$ ) za predpokladu dokonalkej znalosti ostatných dvoch. Originálne prostredie, pre ktoré budú vypočítame syntetické seizmogramy, má homogénne známe parametre a *checkerboard* hodnoty neznámeho parametra.

Rozmery prostredia sú  $2000\text{m} \times 1500\text{m}$ , čas simulácie sú 4s. Priemerné hodnoty parametrov prostredia sú  $\rho = 2500\text{kg/m}^3$ ,  $\lambda = \mu = 7500\text{MPa}$ ,  $v_P = 3000\text{m/s}$  a  $v_S = 1732\text{m/s}$ . Odchýlky v checkerboard modeli sú  $\pm 10\%$  pre parametre  $\lambda$  a  $\mu$  a  $\pm 5\%$  pre parameter  $\rho$ .

Časová funkcia zdroja je Gaborov signál s trvaním  $\approx 0.25\text{s}$ . V prostredí je desať prijímačov. Pre dané prostredie uvažujeme štyri rôzne konfigurácie líšiace sa polohou zdroja. Polohy zdrojov a prijímačov sú v tabuľke 7.1.

Na kvantifikovanie misfitu sme použili  $L_2$  normu, keďže priemerné hodnoty rýchlostí šírenia sú známe. Odchýlky časov príchodov sú totiž v takom prípade veľmi malé, misfit časového posunutia by často dával nulové hodnoty.

#### 7.3.2 Spracovanie výsledkov

V testoch sme porovnávali hodnotu misfitu a nezhodu medzi invertovaným a originálnym syntetickým modelom. Nezhodu sme počítali ako priemernú percentuálnu odchýlku vypočítaných hodnôt od originálnych v oblasti modelu  $(0.2l-0.7l) \times (0.0h-0.8h)$ , čiže v oblasti, kde sa dalo čakať nejaké pokrytie dátami. Štartovacia nezhoda bola 10%. Výsledky vybraných testov sú v Tab. 7.2.

Pri vykresľovaní obrázkov sme vykreslili aj polohy staníc (zelenou) a zdrojov (čiernou). Z ich polôh môžeme odhadnúť, ktorá časť modelu je dostatočne pokrytá a ktorá nie je. Okraje jednotlivých oblastí originálneho checkerboard modelu sú na obrázkoch vyznačené horizontálnymi a vertikálnymi čiarami.

	relatívna poloha	
	$x/l$	$z/h$
zdroj 1	0.301	0.425
zdroj 2	0.377	0.523
zdroj 3	0.534	0.392
zdroj 4	0.440	0.558
prijímač 1	0.176	0.230
prijímač 2	0.229	0.150
prijímač 3	0.299	0.100
prijímač 4	0.404	0.100
prijímač 5	0.599	0.100
prijímač 6	0.770	0.200
prijímač 7	0.570	0.400
prijímač 8	0.744	0.510
prijímač 9	0.784	0.720
prijímač 10	0.605	0.600

Tabuľka 7.1: Relatívne polohy prijímačov a staníc použitých pre *checkerboard* testy. Zdroje sú na obrázkoch v tejto kapitole označené čiernou značkou a prijímače zelenou.

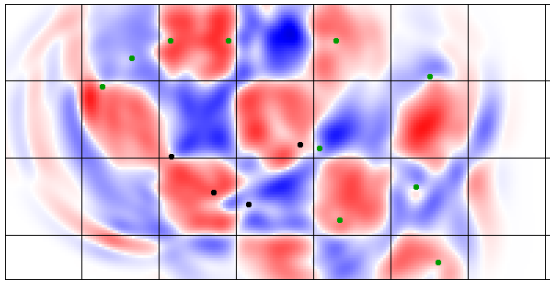
### 7.3.3 Efekt váhovania časovej funkcie adjungovaného zdroja na misfit a invertovaný model

Testovali sme inverziu s použitím váhovania a bez neho v 8 rôznych situáciách pre rôzne parametre, normovanie a počet iterácií. Cieľom bolo kvantifikovať vplyv váhovania časovej funkcie adjungovaných zdrojov na výsledný invertovaný model.

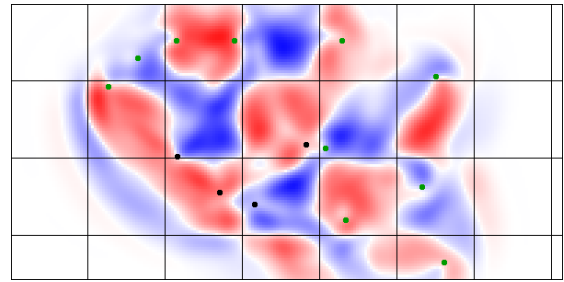
Ukázalo sa, že váhovanie časovej funkcie adjungovaného zdroja, čiže filtrovanie a ponechanie len (prvej) časti seizmogramu, má na výsledný invertovaný model naozaj podobný vplyv ako na samotné kernely.

Keďže pri váhovaní sa počíta len s časťou misfitu a len tá sa explicitne iteratívne znižuje, tak celkový misfit výsledného invertovaného modelu bol približne dvojnásobný, ako bez použitia váhovania. Zároveň, strata informácie obsiahnutej v neskorších príchodoch viedla k mierne horšej presnosti invertovaného modelu. Nezhoda medzi invertovaným a originálnym modelom však bola len o 6% väčšia ako bez použitia váhovania (s váhovaním bola nezhoda 5.8%, bez neho 5.4%). Naopak, zbavili sme sa nežiaducich artefaktov na okrajoch invertovanej oblasti. Tieto efekty ilustrujú obrázky 7.4 a 7.5.

Váhovanie sa teda dá zosumarizovať ako menej *false-positive* hodnôt modelu (menší počet výrazne zle určených hodnôt) za cenu viacerých *false-negative* hodnôt (menší počet takmer presne určených hodnôt).



Obr. 7.4: Invertovaný model parametra  $\lambda$  bez použitia váhovania po piatej iterácii (inverzia s normovaním kernelov a s  $L_2$  misfitom). Vidíme, že v strednej časti sa objavujú “dlaždice” pôvodného checkerboard modelu naznačené čiernymi čiarami. Zdroje sú vyznačené čiernymi bodmi a prijímače zelenými.

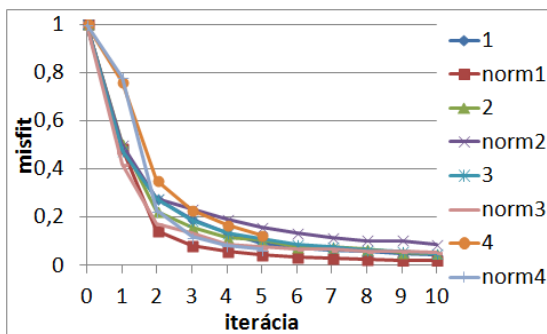


Obr. 7.5: Invertovaný model parametra  $\lambda$  s váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja po piatej iterácii (inverzia s normovaním kernelov a s  $L_2$  misfitom). Hoci je podobnosť so šachovnicou mierne nižšia (pravdepodobne dôsledok straty časti informácie), v modeli sa nevyskytujú nežiaduce pásové oblasti artefaktov na okrajoch.

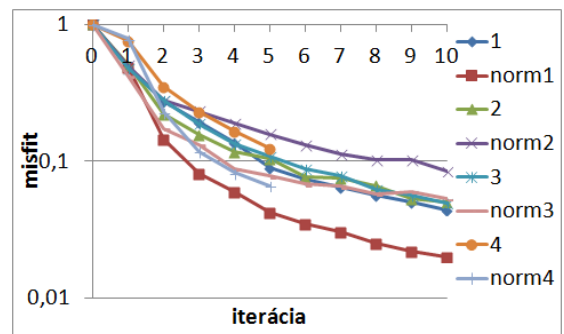
### 7.3.4 Efekt normovania kernelov na pokles misfitu a invertovaný model

Grafy na obrázkoch 7.6 a 7.7 znázorňujú závislosť celkového misfitu od počtu iterácií. Ukazuje sa, že normovanie kernelu vedie k rovnakému zníženiu misfitu, ako bez neho. A to aj napriek tomu, že po normovaní už kernel nezodpovedá gradientu misfitu.

Naopak, hoci normovanie je len intuitívna úprava, inverzia s použitím normovania dala vo všetkých prípadoch o 5 – 20% lepšiu zhodu s originálnym modelom. Lepšia zhoda sa prejavuje hlavne v častiach, kde vlnenia nie sú veľmi výrazné a kernely bez normovania sú v týchto miestach veľmi malé.



Obr. 7.6: Graf závislosti misfitu od počtu iterácií pre prípad bez normovania a s ním (“norm”). Test 1 je inverzia parametra  $\lambda$ , test 2 inverzia  $\rho$  a test 3 inverzia  $\mu$ . Test 4 inverzia  $\lambda$  s iným zhladzovaním.

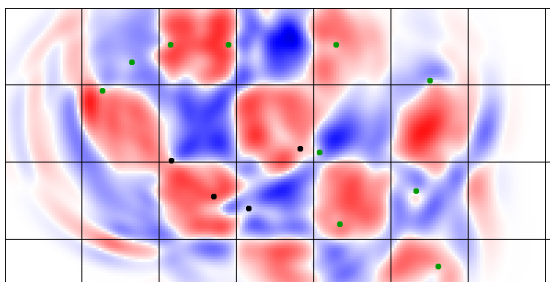


Obr. 7.7: Ten istý graf ako na predchádzajúcom Obr. 7.6 v logaritmickej mierke.

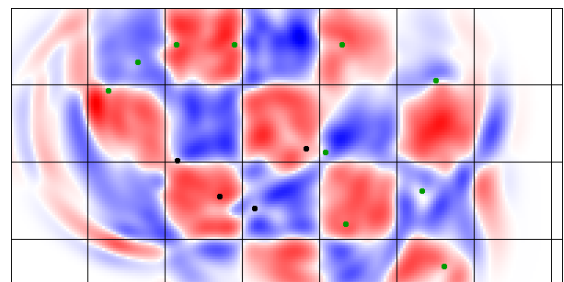
### 7.3.5 Závislosť misfitu a invertovaného modelu od počtu iterácií

Celkový misfit klesá najrýchlejšie na začiatku a potom sa pokles spomaľuje. Ilustrujú to napríklad grafy na obrázkoch 7.6 a 7.7. Pokles nemusí byť monotónny, pomalý pokles misfitu alebo lokálne zvýšenia misfitu ešte nemusia znamenať problém. Vo všeobecnosti sa však každou iteráciou zvyšuje zložitosť modelu a narastá počet artefaktov a preto je vhodné sa vyhnúť pomalej konvergencii. Môžeme napríklad vyskúšať iný štartovací model alebo zmeniť zhladzovanie.

Porovnanie invertovaných modelov po piatej a desiatej iterácii je na obrázkoch 7.8 a 7.9. Hoci misfit aj po piatej iterácii klesal, výsledný model sa menil oveľa pomalšie ako v skorších iteráciách. K podobnému záveru sme dospeli v každej situácii a pre každý parameter.



Obr. 7.8: Parameter  $\lambda$  invertovaného modelu po piatej iterácii (inverzia s normovaním kernelov a s  $L_2$  misfitom).



Obr. 7.9: Parameter  $\lambda$  invertovaného modelu po desiatej iterácii (inverzia s normovaním kernelov a s  $L_2$  misfitom).

### 7.3.6 Porovnanie presnosti inverzie jedného parametra vybraných testov

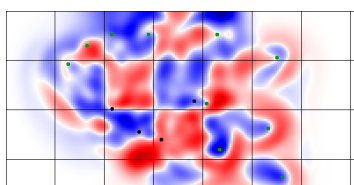
Tabuľka 7.2 sumarizuje dosiahnuté výsledky inverzií. K jednotlivým výsledkom sme sa vyjadrili v predchádzajúcich častiach. Pomerne veľké hodnoty odchýlok sú dôsledkom toho, že invertovaný model je spojité a pôvodný *checkerboard* model mal pravouhlé oblasti s nespojitými prechodmi. Väčšiu presnosť inverzie sme preto ani nemohli očakávať. Spôsobuje to však skreslenie výsledkov. Napríklad uvedená 4.4% priemerná odchýlka parametra  $\lambda$  zodpovedá takmer dokonalej inverzii (Obr. 7.9), zatiaľ čo hodnoty nad 7% znamenajú veľmi nepresný výsledok.

### 7.3.7 Presnosť inverzie jednotlivých parametrov

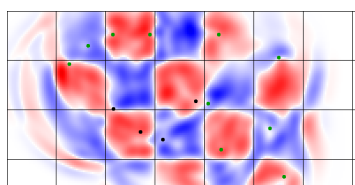
Na obrázkoch 7.10, 7.11 a 7.12 sú ukážky výsledných invertovaných modelov po 10. iterácii s najlepšou zhodou s originálnymi modelmi. Dosiahli sme ich po normovaní kernelov vo všetkých iteráciách a pri súčasnom váhovaní kernelov v prvých piatich iteráciách. Zhladzovanie bolo vo všetkých troch prípadoch podobné.

parametre inverzie			relatívne odchýlky gradient pre-conditioning			
parameter	iterácií	zhladzovanie	žiadne	normovanie	váhovanie	norm.+váh.
$\mu$	5	4.0	7.1%		7.0%	5.5%
$\mu$	5	3.0	7.3%	6.3%		
$\mu$	10	3.0	6.5%	6.0%		
$\lambda$	5	4.0	5.6%	4.9%	6.2%	5.5%
$\lambda$	5	3.0	6.0%	5.2%		5.8%
$\lambda$	10	3.0	5.3%	4.4%		4.5%
$\rho$	5	4.0	3.4%	3.2%		3.3%
$\rho$	10	4.0	3.1%	3.1%		3.2%

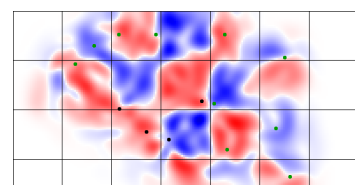
Tabuľka 7.2: Relatívne odchýlky invertovaných parametrov výsledných modelov jednotlivých inverzií od originálneho modelu. Prvé tri stĺpce sú parametre inverzie, posledné štyri sú priemerné relatívne odchýlky parametra invertovaného modelu od originálneho. Malé odchýlky parametra  $\rho$  oproti odchýlkam parametrov  $\lambda$  a  $\mu$  sú dôsledok polovičnej štartovacej odchýlky voči originálnemu modelu vzhľadom k tej, ktorá bola použitá v prípade parametrov  $\lambda$  a  $\mu$ .



Obr. 7.10: Hodnoty parametra  $\rho$  invertovaného modelu po desiatej iterácii s normovaním kernelov a čiastočným váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja.



Obr. 7.11: Hodnoty parametra  $\lambda$  invertovaného modelu po desiatej iterácii s normovaním kernelov a čiastočným váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja.



Obr. 7.12: Hodnoty parametra  $\mu$  invertovaného modelu po desiatej iterácii s normovaním kernelov a čiastočným váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja.

Napriek tomu, že podmienky boli rovnaké, vidíme veľké rozdiely vo výsledných invertovaných modeloch jednotlivých parametrov. Model hustoty  $\rho$  je výrazne rozkmitaný, je to pravdepodobne dôsledok toho, že priebeh rýchlosti ako časovej derivácie vektora posunutia, ktorý vstupuje do výpočtu kernelov hustoty, je v čase zložitejší ako priebeh samotného vektora posunutia, ktorý vstupuje do výpočtov kernelov  $\lambda$  a  $\mu$ . Model elastického koeficientu  $\lambda$  je najpresnejší, pravdepodobne vďaka jednoduhosti kernelov, ktoré vznikajú iba interakciou P-vln.

## 7.4 Checkerboard testy inverzie dvoch parametrov $\lambda$ a $\mu$

Prostredie ani stanice a zdroje sme voči predchádzajúcemu testu inverzie jedného parametra nezmenili. Tentoraz však “neznáme” checkerboard hodnoty nadobúdajú oba elastické

koeficienty  $\lambda$  a  $\mu$ , zatiaľ čo hodnota  $\rho$  je vždy konštantná. Naším cieľom bude ich inverzia s použitím homogénneho štartovacieho modelu.

Vo výpočtoch používame  $L_2$  misfit.

Pre výsledné invertované modely postupmi opísanými v nasledujúcich sekciách sme vypočítali priemerné relatívne odchýlky jednotlivých parametrov od originálneho modelu. Výsledky sú zhrnuté v Tab. 7.3.

#### 7.4.1 Výsledky inverzie pri rovnakej dĺžke krokov pre kernely oboch parametrov

Prvý spôsob, ktorý sme vyskúšali, bol ten najjednoduchší a najčastejšie používaný. Vypočítali sme kernely a potom sme našli optimálnu dĺžku kroku, ktorou sme pri zmene modelu pre násobili oba kernely. Výsledok inverzie parametrov  $\lambda$  a  $\mu$  môžeme vidieť na Obr. 7.13. Prejavuje sa očakávaný problém. Kernel  $\lambda$  má výrazne menšie hodnoty ako kernel  $\mu$  (napríklad preto, že do neho prispievajú len  $P$  vlny). Veľké hodnoty kernela  $\mu$  umožnia len malú dĺžku kroku a preto sa malé hodnoty kernela  $\lambda$  takmer neprejavujú na výsledku. Takýto postup je preto v našom prípade veľmi rozdielných kernelov zjavne nevhodný.

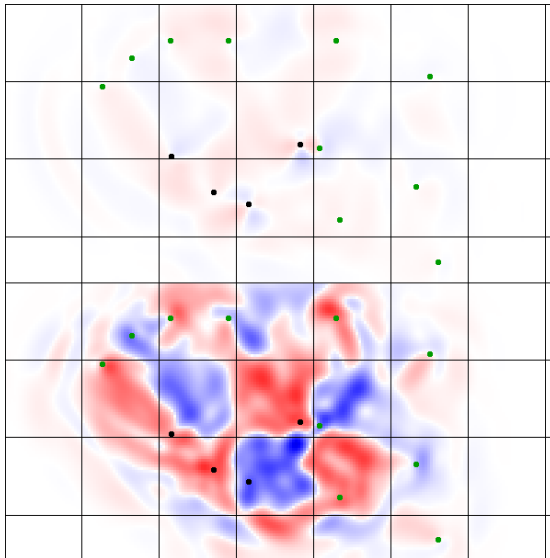
Výsledok sme sa snažili opraviť predelením kernelov ich maximálnou absolútnou hodnotou.<sup>1</sup> Tým sme dosiahli, že po normovaní boli oba kernely približne rovnako veľké, dosahovali hodnoty z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Tu sa prejavil nový problém. Misfit závisí hlavne od  $S$  vln a teda hlavne od parametra  $\mu$ . Pri inverzii sa teda invertovali hodnoty  $\mu$  s takou dĺžkou kroku, aby dosiahli čo najpresnejšie hodnoty. Súčasne na hodnoty  $\lambda$  neboli kladené také nároky a ich inverzia sa výrazne líši od originálu, ako vidno na Obr. 7.14.

#### 7.4.2 Výsledok inverzie pri striedavých zmenách dvoch parametrov

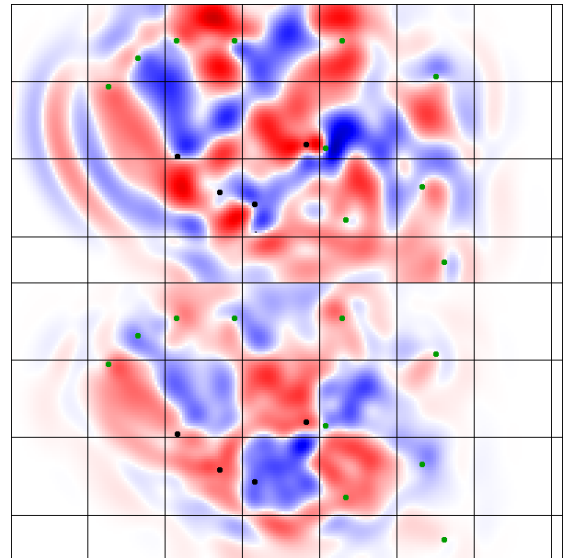
Táto inverzia spočívala v striedavom menení parametrov  $\lambda$  a  $\mu$ . V jednej iterácii sa vypočítal kernel pre  $\mu$ , našla sa optimálna dĺžka kroku a modelový parameter  $\mu$  sa zmenil. V nasledujúcej iterácii sa zas vypočítala optimálna dĺžka pre kernel  $\lambda$  a zmenil sa parameter  $\lambda$ . Výsledok je na Obr. 7.15. Ukazuje sa, že ani takáto inverzia nevedla k rozumným výsledkom. Dôvod je pravdepodobne ten, že pri inverzii parametra  $\lambda$  sa znižovala časť misfitu zmenou rýchlosti  $P$  vln. Aby sa dosiahla potrebná zmena rýchlosti aj bez zmeny parametra  $\mu$ , tak bola nájdená optimálna dĺžka kroku približne trojnásobná než by naozaj mala byť. To spôsobilo, že hodnoty parametra  $\lambda$  uleteli. Hodnoty  $\mu$  boli potom spätne ovplyvnené nesprávne určenými hodnotami  $\lambda$ .

<sup>1</sup>Delíme všade tou istou maximálnou hodnotou kernelu. Nepomýliť si s normovaním, ktoré používame v tejto práci, kedy delíme maximálnou hodnotou príslušnej veličiny závisiacou od polohy.

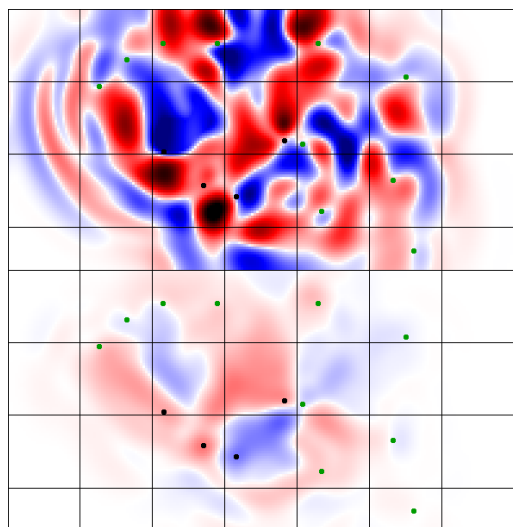




Obr. 7.13: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po desiatej iterácii pre rovnakú spoločnú dĺžku kroku.



Obr. 7.14: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po desiatej iterácii pre rovnakú spoločnú dĺžku kroku po predelení kernelov maximálnou absolútnou hodnotou daného kernelu.



Obr. 7.15: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po piatej iterácii po striedavých zmenách parametrov  $\lambda$  a  $\mu$ .

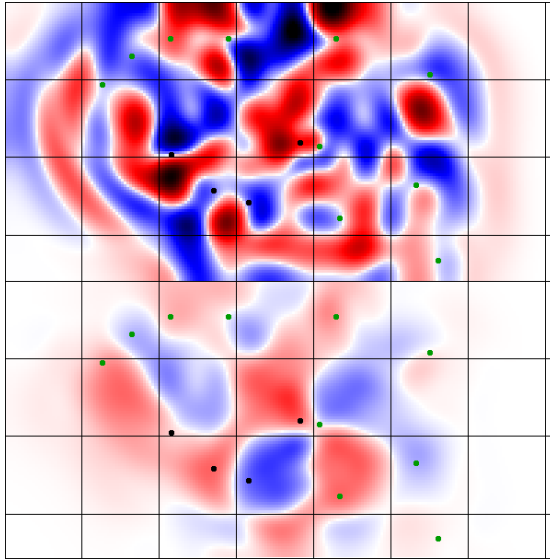
### 7.4.3 Výsledky inverzie pri rôznej dĺžke krokov pre kernely oboch parametrov

V tomto prípade sme hľadali dve rôzne optimálne dĺžky postupom opísaným v časti 7.2.4. Následne na konci každej iterácie sme súčasne zmenili oba parametre o príslušný kernel pre násobený príslušnou dĺžkou kroku.

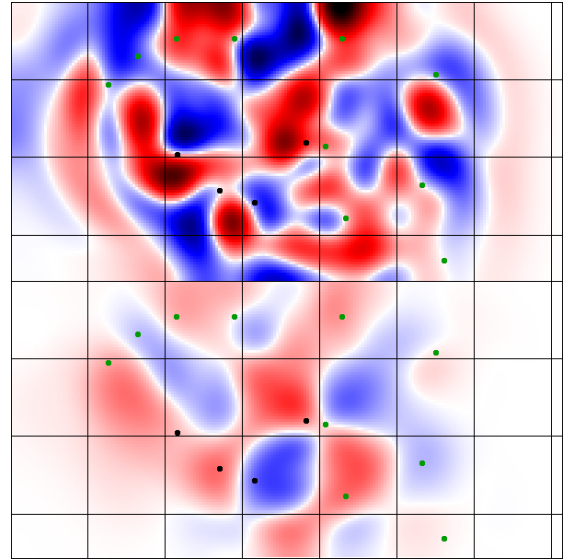
Takýto postup spolu s normovaním kernelov a váhovaním časovej funkcie adjungovaných zdrojov viedol k najlepším výsledkom (Obr. 7.18 a Obr. 7.19). Presnosť inverzie bola

v takomto prípade dokonca porovnateľná s presnosťou inverzie jedného parametra. Priemerná relatívna odchýlka sú v najlepšom prípade s normovaním kernelov a váhovaním časovej funkcie adjungovaných zdrojov  $\frac{\overline{\Delta\lambda}}{\lambda_{hom}} \approx 7.3\%$  a  $\frac{\overline{\Delta\mu}}{\mu_{hom}} \approx 5.3\%$  (Tab. 7.3), pričom veľká časť odchýlky je len dôsledok toho, že invertovaný model je spojitý, zatiaľ čo originálny model mal pravouhlé oblasti s nespojitými prechodmi.

Pomerne dobré výsledky sme dosiahli aj bez použitia *gradient pre-conditioning* (Obr. 7.16 a Obr. 7.17). Výsledky s normovaním kernelov sú však výrazne presnejšie.



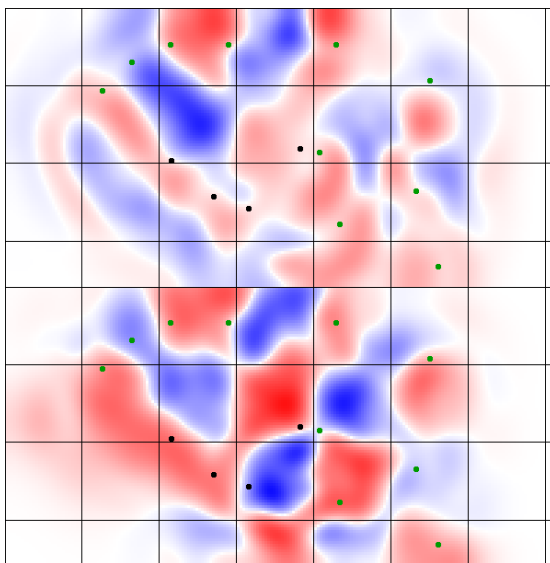
Obr. 7.16: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po desiatej iterácii pre rôzne dĺžky krokov bez použitia *gradient pre-conditioning*.



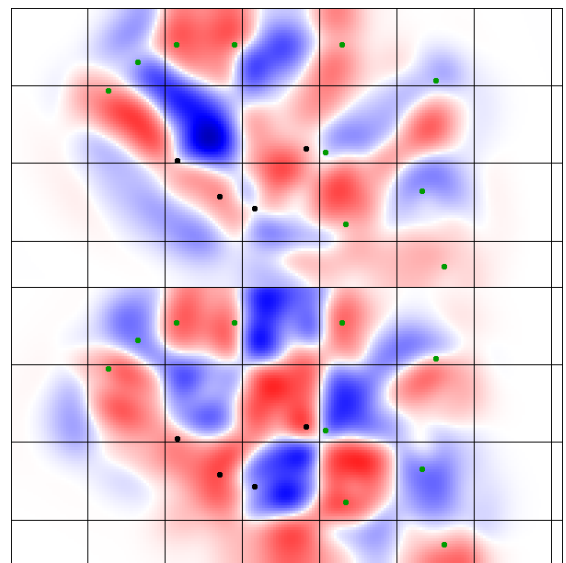
Obr. 7.17: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po desiatej iterácii pre rôzne dĺžky krokov bez použitia *gradient pre-conditioning* s mierne väčším zhladením.

dĺžky krokov	grad. precon.	váhovanie	$\Delta\lambda$	$\Delta\mu$
rovnaké	nie	nie	9.8%	6.5%
rovnaké	<-1,1>	nie	7.4%	6.3%
striedavé	nie	nie	11.5%	8.5%
rôzne	nie	nie	10.4%	6.8%
rôzne	zhladenie	nie	9.7%	6.8%
rôzne	normovanie	nie	7.5%	5.8%
rôzne	normovanie	áno	7.3%	5.3%

Tabuľka 7.3: Relatívne odchýlky koeficientov  $\lambda$  a  $\mu$  výsledných modelov jednotlivých inverzií. Pozn.: “zhladenie” v stĺpci *gradient pre-conditioning* znamená väčšie zhladenie, než bolo aplikované na kernely v ostatných riadkoch.



Obr. 7.18: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po desiatej iterácii pre rôzne dĺžky krokov a s normovaním kernelov maximálnou absolútnou hodnotou príslušnej veličiny.



Obr. 7.19: Parametre  $\lambda$  (hore) a  $\mu$  (dole) invertovaného modelu po desiatej iterácii pre rôzne dĺžky krokov, s normovaním kernelov maximálnou absolútnou hodnotou príslušnej veličiny a s váhovaním časovej funkcie adjungovaného zdroja.

# Kapitola 8

## Adjungovaná tomografia 2D rezu Mygdónskym bazénom

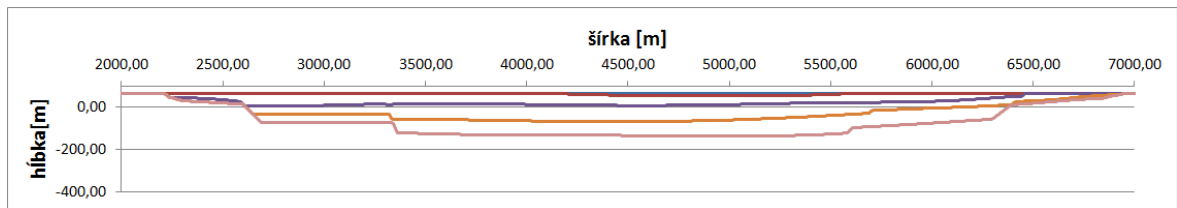
### 8.1 2D rez Mygdónskym bazénom

Ako testovací model Mygdónskeho bazénu na výpočet syntetických dát a na inverziu sme vybrali model EUROSEISTEST-2D-7LAYERS-FLAT.

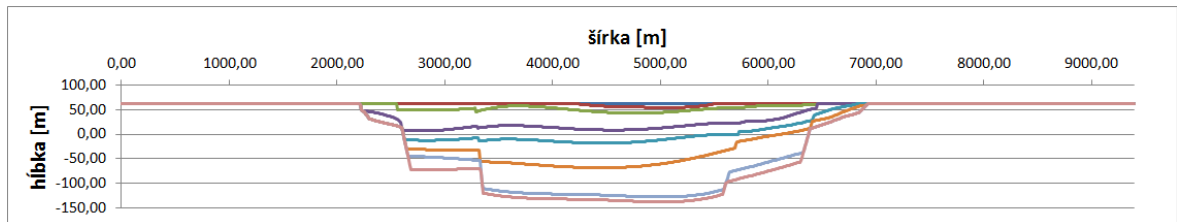
Je to 2D model hodnôt rýchlostí šírenia  $v_P$  a  $v_S$  a hustoty  $\rho$ . Model má šírku 9400m a hĺbku približne 200m, pod ktorou sa uvažuje homogénne podložie. Sieť modelu má krok 10m. Pre vrchných 80m sa uvažuje gradient parametrov, ktorý zodpovedá narušeným povrchovým horninám. V modeli je určených 7 vrstiev abecedne zoradených od povrchu smerom dole. Tieto vrstvy sú homogénne s rôznymi hodnotami parametrov. Hodnoty parametrov sa nachádzajú v Tab. 8.1 a model je vykreslený na Obr. 8.1. Bazén je pomerne plytký, jednotlivé vrstvy preto lepšie vidieť pri natinutí osi  $z$  na Obr. 8.2. Pre predstavu, ako vyzerá model z pohľadu šíriacich sa vln, uvádzame obrázky 8.3 a 8.4.

<i>vrstva</i>	$v_P$ [m/s]	$v_S$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
1=A	1500	130	2050
2=B	1500	200	2150
3=C	1650	300	2075
4=D	2050	450	2100
5=E	2450	600	2155
6=F	2550	700	2200
7=G	3500	1850	2500
podložie	4500	2600	2600

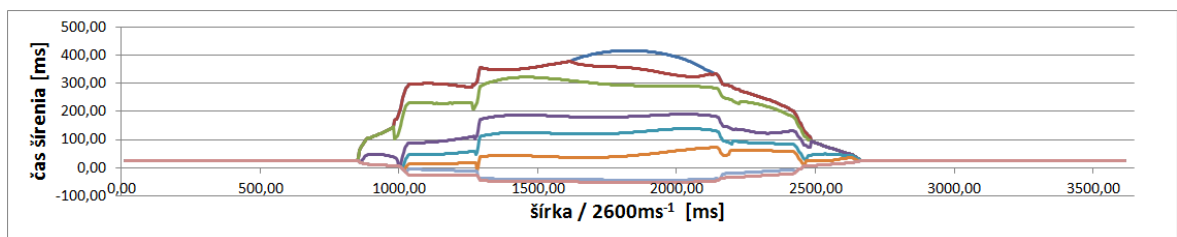
Tabuľka 8.1: Hodnoty rýchlostí šírenia  $v_P$ ,  $v_S$  a hustoty  $\rho$  v jednotlivých vrstvách a v podloží modelu modelu EUROSEISTEST-2D-7LAYERS-FLAT.



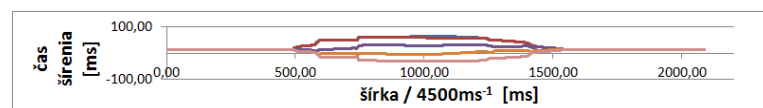
Obr. 8.1: Výrez modelu EUROSEISTEST-2D-7LAYERS-FLAT Mygdónskeho bazénu v rovnakej mierke pre obe osi. Samotný model siaha od bodu 0m po 9400m na povrchu a 6000m do hĺbky.



Obr. 8.2: Vizualizácia vrstiev vo vrchnej časti modelu EUROSEISTEST-2D-7LAYERS-FLAT Mygdónskeho bazénu.



Obr. 8.3: Vizualizácia vrchnej časti modelu EUROSEISTEST-2D-7LAYERS-FLAT Mygdónskeho bazénu v metrike určenej časmi šírenia [ms] S vln pozdĺž vertikály.



Obr. 8.4: Vizualizácia vrchnej časti modelu EUROSEISTEST-2D-7LAYERS-FLAT Mygdónskeho bazénu v metrike určenej časmi šírenia [ms] P vln pozdĺž vertikály.

## 8.2 Príprava inverzie

### 8.2.1 Voľba vhodného misfitu pre lokálne sedimentárne štruktúry

Voľba misfitu prináša so sebou rôzne výhody a nevýhody, preto treba výberu misfitu venovať zvýšenú pozornosť. Nevhodne zvolený misfit môže spôsobiť pomalú konvergenciu inverzie a často aj nájdenie nesprávneho modelu zodpovedajúceho iba lokálnemu minimu daného misfitu. V tejto časti sa budeme zaoberať tým, ako čo najlepšie zvoliť typ misfitu, ktorý nás dovedie k invertovanému modelu čo najpodobnejšiemu s originálnym (reálnym alebo syntetickým modelom), z ktorého pochádzajú namerané dáta. V častiach 5.3 (váhova-

nie misiftu) a 6.6 (normovanie kernelov) sme navrhli modifikácie, ktoré zlepšia konvergenciu výpočtu a pri inverzii modelu sedimentárneho bazénu budú veľmi dôležité.

Nezvyčajne veľký kontrast hodnôt parametrov v prípade Mygdónskeho bazénu spôsobuje komplikácie nielen v prípade priamej úlohy. Priame aj adjungované vlnenia sa v sedimentárnom bazéne viacnásobne odrážajú. Výsledkom je vznik takeého množstva artefaktov, že hľadaná informácia v podobe prvej Fresnelovej zóny sa úplne stráca vo výslednom šume. Typická ukážka tohoto javu je na Obr. 8.5.



Obr. 8.5: Ukážka vypočítaných kernelov bez váhovania misfitu. Rozkmitané hodnoty - artefakty výpočtu - sú dominantnou zložkou kernelu. Potrebná informácia je stratená v pozadí a proces inverzie nekonverguje k dobrým výsledkom. Podobné výsledky dostávame bez ohľadu na použitý druh misfitu. Bez normovania kernelov sa k artefaktom pridajú aj singularita v miestach prijímačov.

Aby sme minimalizovali počet artefaktov, musíme minimalizovať aj trvanie signálu. Musíme odfiltrovať takmer celý zvyšok seizmogramu okrem časového okna tesne po príchode prvej vlny. Odstránenie väčšiny artefaktov je však za cenu straty množstva informácie obsiahnutej v neskorších S vlnách, odrazených P vlnách či v povrchových vlnách.

Keďže štartovací model bez sedimentov sa veľmi líši od originálneho modelu, misift musí byť dostatočne robustný. Najvhodnejší sa ukázal misfit časov príchodov P a S vln (rovnic 5.6). Jeho ďalšia výhoda spočíva v tom, že hoci po váhovaní misfitu odstránime efekt S vln na časovú funkciu adjungovaného zdroja a v kerneli sa preto neprejaví, zmena modelu v smere kernelu však bude taká, aby sa znížil misfit aj S vln. Týmto sa strata informácie čiastočne kompenzuje.

Pre porovnanie sme vykonali aj výpočty s váhovaným misfitom  $L_2$  normy vektora posunutia (rovnic 5.4).

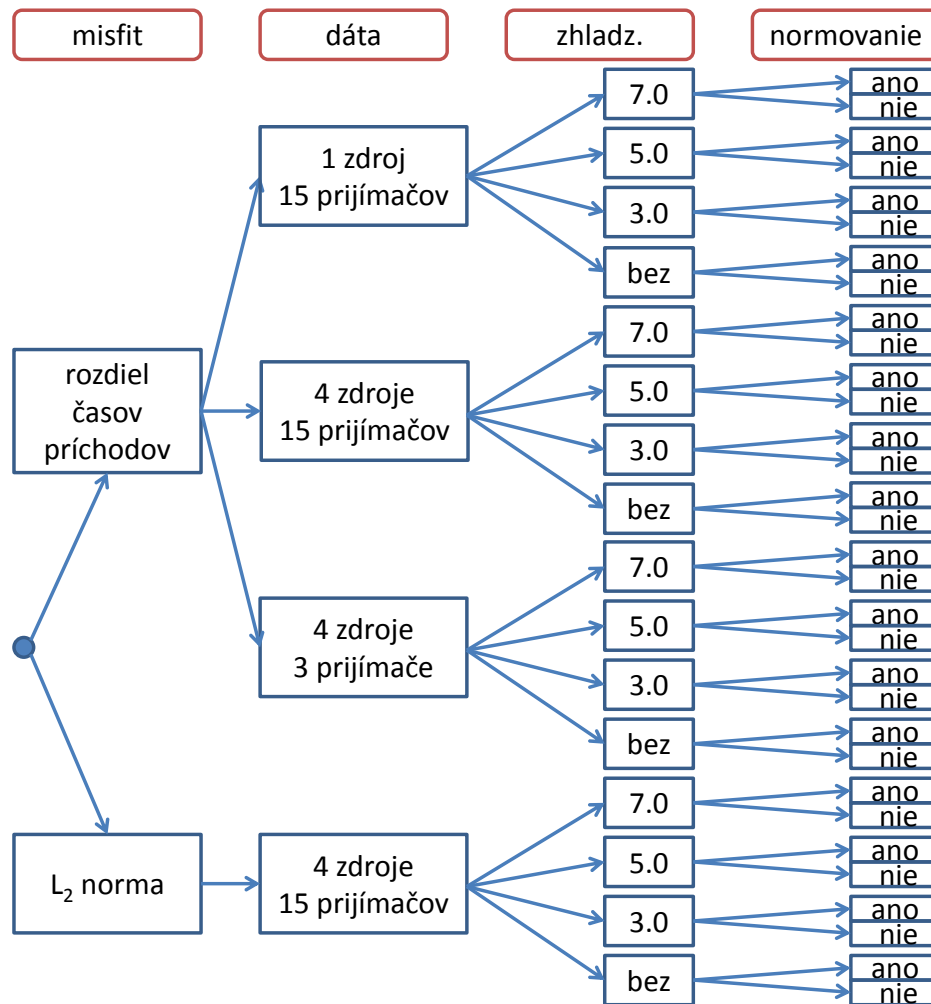
### 8.2.2 Inverzia parametrov sedimentárneho bazénu

Keďže hodnoty veličín skalného podložia sú určené oveľa presnejšie, ako hodnoty veličín sedimentov, rozhodli sme sa pre inverziu len parametrov samotného sedimentárneho bazénu. Dosiahli sme to tak, že všetky hodnoty kernelov mimo oblasti sedimentov sme pri každom výpočte vynulovali. To spôsobilo, že sa menili len parametre sedimentov a vo zvyšnej časti modelu sa zachovávali štartovacie hodnoty.

### 8.3 Výsledky

Pre kvantifikovanie efektu jednotlivých parametrov na invertovaný model sme vykonali 32 rôznych inverzií. Testovali sme štyri rôzne situácie, líšiace sa misfitom, počtom prijímačov a počtom zdrojov. V každej situácii sme použili štyri rôzne zhladzovania a inverziu sme spravili vždy s normalizáciou kernelov a potom bez normalizácie.

Všetky rôzne výpočty sú vizualizované v nasledujúcom logickom strome:



Pre výsledné modely sme vypočítali priemernú odchýlku jednotlivých parametrov  $p = \lambda, \mu$  podľa vzťahu

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{V_{\text{sedimenty}}} \int_{\text{sedimenty}} |p(\mathbf{r}) - p_{\text{orig}}(\mathbf{r})| dV. \quad (8.1)$$

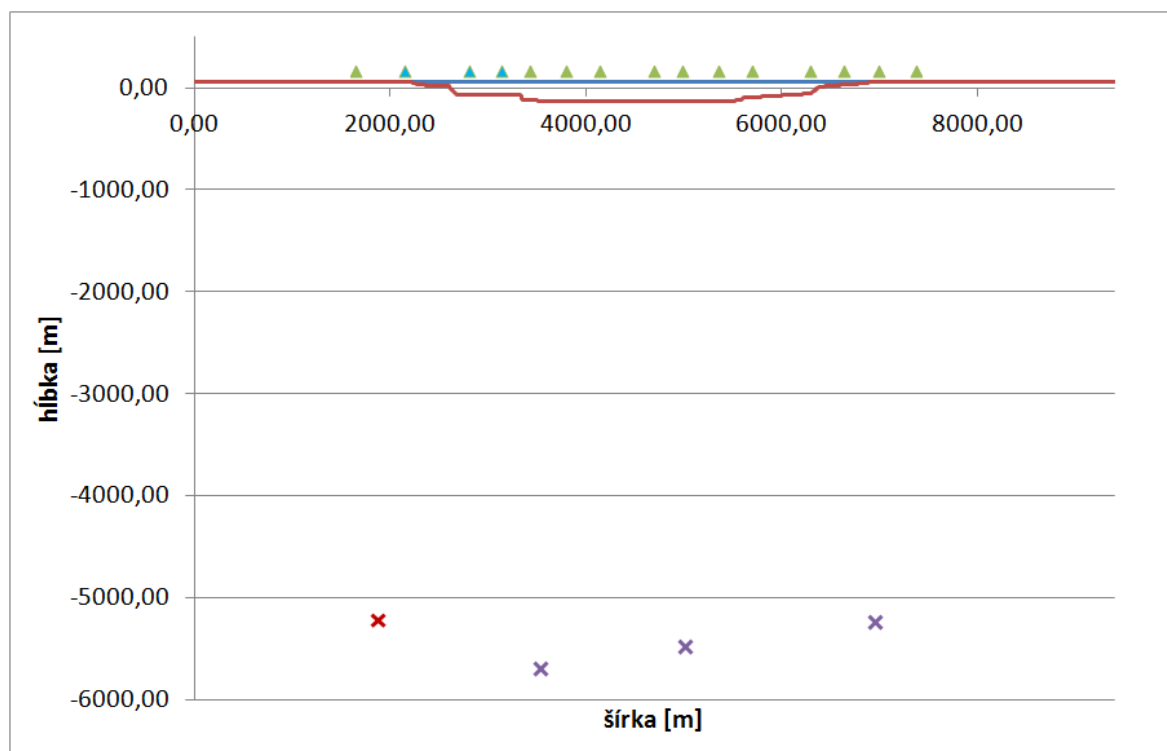
Priemerné hodnoty odchýlok sa nachádzajú v Tab. 8.3. Pre lepšiu predstavu uvádzame aj ilustráciu štartovacieho (Obr. 8.11), invertovaného (Obr. 8.11) a originálneho (Obr. 8.12) modelu.

Keďže pri inverzii s použitím troch prijímačov v ľavej časti modelu sa invertovali hodnoty len v tejto časti (Obr. 8.9), počítali sme aj priemernú odchýlku v ľavej časti podľa

vzt'ahu

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{V_{\text{sedimenty}, x < 0.35l}} \int_{\text{sedimenty}, x < 0.35l} |p(\mathbf{r}) - p_{\text{orig}}(\mathbf{r})| dV. \quad (8.2)$$

Model s rozložením prijímačov a zdrojov je na Obr. 8.6.



Obr. 8.6: Schéma modelu Mygdónskeho bazénu. Trojuholníkmi sú vyznačené prijímače. Tri prijímače vykreslené modrou farbou sú tie, ktoré sme používali v testoch s tromi prijímačmi. Zdroje sú vyznačené krížikom. Červený zdroj je ten, ktorý sme využili v testoch s jedným zdrojom.

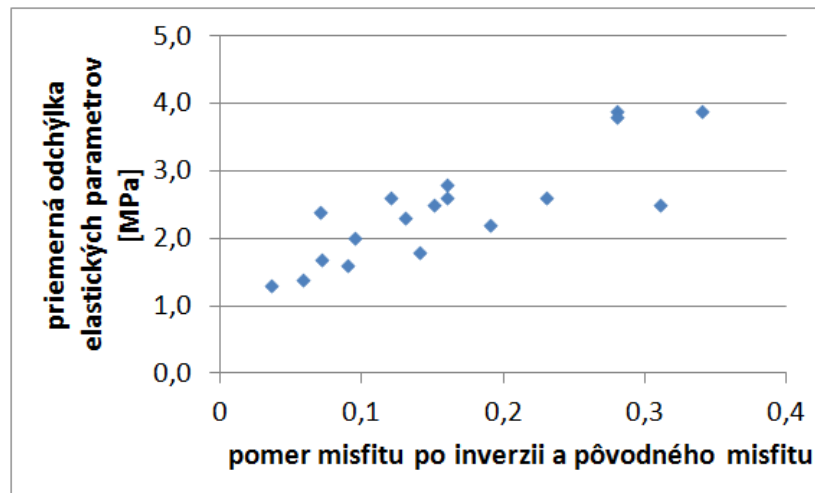
Keďže misfit sme pre jednotlivé prípady ráтали rôzne, nemôžeme dobre kvantifikovať efekt jednotlivých prípadov na rýchlosť poklesu. Môžeme však vypočítať aspoň relatívny pokles misfitu ako pomer misfitu v poslednej iterácii a misfitu pri použití štartovacieho modelu. Vypočítané hodnoty ukazujú, že misfit v prípade najpresnejšieho modelu klesol na 3.5%. Všetky hodnoty sa nachádzajú v Tab. 8.4.

Keďže v skutočnom prípade nepoznáme reálne prostredie, vierohodnosť inverzie musíme zhodnotiť podľa misfitu alebo iných, apriórnych vedomostí. Ako však ukazuje Obr. 8.7, existuje pomerne jasná monotónna korelácia medzi misfitom a presnosťou inverzie.

### 8.3.1 Efekt zhladzovania

Výsledky ukazujú, že väčšie hodnoty zhladzovania viedli ku lepším výsledkom. Hodnota zhladzovania  $\Lambda = 5$  však už bola väčšinou dostatočná. Príliš veľkému zhladzovaniu sa však musíme vyhnúť. Príliš veľké zhladzovanie totiž neumožňuje inverziu potenciálnych maloškálo-



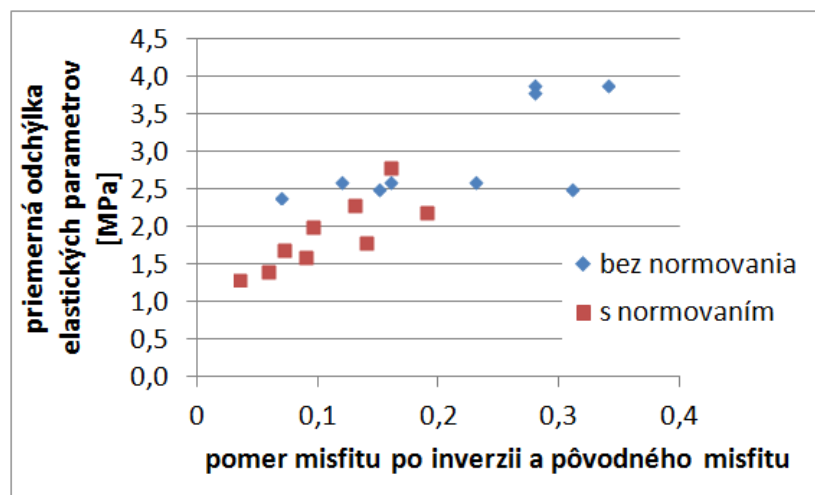


Obr. 8.7: Závislosť presnosti inverzie od relatívneho poklesu misfitu. V grafe sú vykreslené údaje zo všetkých testov okrem testov bez zhladenia, ktoré nekonvergovali, a okrem testov s tromi prijímačmi, pri ktorých sa invertovala len ľavá časť sedimentov.

vých heterogenít. Prípady bez zhladzovania nekonvergovali a neuvádzame ich ani v tabuľke výsledkov.

### 8.3.2 Efekt normovania

Podľa výsledkov v Tab. 8.3 sa ukázalo, že normovanie kernelov výrazne zvýšilo podobnosť invertovaných modelov s originálnym. Tento výsledok ilustruje aj Obr. 8.8.



Obr. 8.8: Efekt normovania na inverziu. Vidíme, že s použitím normovania sme dostali výrazne menší misfit aj lepšiu zhodu parametrov prostredia. Údaje sú totožné s údajmi na Obr. 8.7, explicitne sú však podľa normovania rozdelené do dvoch skupín.

### 8.3.3 Počet zdrojov

V Tab. 8.2 ukazujeme porovnanie výsledkov inverzie s použitím jedného a štyroch zdrojov. Napriek tomu, že inverzia s jediným zdrojom viedla k horším výsledkom, ukazuje sa, že ani štyri zdroje nestačili k výrazne presnejšiemu modelu. Je to pravdepodobne spôsobené tým, že všetky zdroje sú hlboko (približne v šesť kilometrovej hĺbke) a po lomení vln v pomalšom prostredí sedimentov budú všetky vlnenia prichádzať z podobného smeru a budú niesť podobnú informáciu.

Práve nevhodné rozloženie zdrojov a súčasné odfiltrovanie veľkej časti seizmogramu spôsobuje, že všetky namerané vlny prichádzajú nahor k prijímačom takmer pozdĺž vertikály. Rôzne prijímače teda poskytujú veľmi dobré rozlíšenie v horizontálnom smere, ale chýba informácia, ktorá by určila hĺbku heterogenít.

Situácia by sa pravdepodobne zmenila, keby sme využili aj veľmi plytké zdroje prípadne povrchové explózie.

zhladzovanie	normovanie	4 zdroje		1 zdroj	
		$\overline{\Delta\lambda}$ [MPa]	$\overline{\Delta\mu}$ [MPa]	$\overline{\Delta\lambda}$ [MPa]	$\overline{\Delta\mu}$ [MPa]
7.0	nie	2.8	2.0	4.7	2.9
7.0	áno	1.0	1.6	1.3	1.9
5.0	nie	3.1	2.1	4.8	3.0
5.0	áno	1.0	1.8	1.8	1.8
3.0	nie	2.8*	2.4*	4.6	3.1
3.0	áno	1.6	1.8	2.1	2.3*

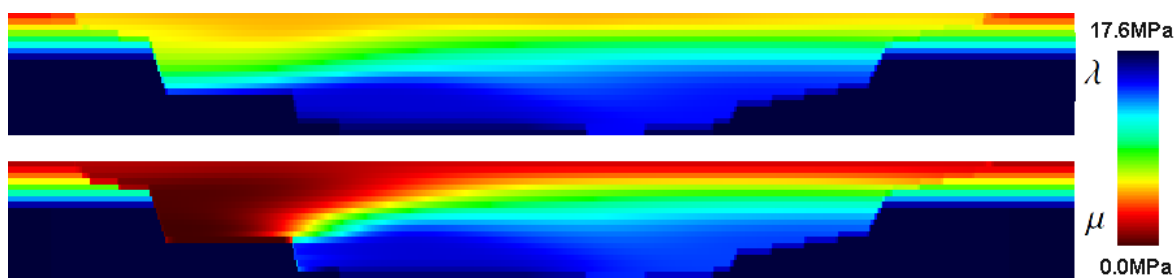
Tabuľka 8.2: Vo všetkých inverziách sme použili misfit časov príchodov P a S vln a 15 prijímačov. Hviezdičkou \* sú označené inverzie, ktorých výsledné modely obsahovali výrazné artefakty alebo odlišnosti od originálneho modelu.

### 8.3.4 Rozloženie prijímačov

Rozloženie je veľmi dôležité. Keďže sme pri výpočtoch odfiltrovali celý zvyšok seizmogramu okrem bezprostredného príchodu priamej vlny, v adjungovanom zdroji sa nestihne prejavíť efekt vzdialenejších častí sedimentárneho bazénu. Dôsledkom toho je, že tieto časti si zachovali hodnoty pôvodného štartovacieho modelu. Vizualizáciu výsledného modelu môžeme vidieť na Obr. 8.9.

### 8.3.5 Rýchlosť konvergencie

Prekvapivým výsledkom bola veľká rýchlosť konvergencie. Údaje v Tab. 8.3 sú z výsledných modelov po piatich iteráciách, ale v mnohých prípadoch sa model po druhej alebo



Obr. 8.9: Ilustrácia invertovaného modelu po použití údajov z troch prijímačov v ľavej časti modelu.

tretej iterácii<sup>1</sup> už takmer nemenil.

misfit	zdroje	prijímače	zhladz.	bez normovania		s normovaním	
				$\overline{\Delta\lambda}$ [MPa]	$\overline{\Delta\mu}$ [MPa]	$\overline{\Delta\lambda}$ [MPa]	$\overline{\Delta\mu}$ [MPa]
príchody PS	4	15	7.0	2.8	2.0	1.0	1.6
príchody PS	4	15	5.0	3.1	2.1	1.0	1.8
príchody PS	4	15	3.0	2.8*	2.4*	1.6	1.8
$L_2$	4	15	7.0	2.3	2.7	2.7	2.9
$L_2$	4	15	5.0	2.4	2.8	1.9	2.6*
$L_2$	4	15	3.0	1.7*	3.2*	1.5	2.4*
príchody PS	1	15	7.0	4.7	2.9	1.3	1.9
príchody PS	1	15	5.0	4.8	3.0	1.8	1.8
príchody PS	1	15	3.0	4.6	3.1	2.1	2.3*
príchody PS	4	3	7.0	1.9	7.0	1.6	7.3
príchody PS	4	3	5.0	2.2*	6.9	1.1	6.2
príchody PS	4	3	3.0	2.0	7.8	2.3	6.3
príchody PS	4	3	7.0	1.5 <sup>†</sup>	1.4 <sup>†</sup>	1.1 <sup>†</sup>	1.8 <sup>†</sup>
príchody PS	4	3	5.0	2.7 <sup>†*</sup>	1.4 <sup>†</sup>	0.9 <sup>†</sup>	1.7 <sup>†</sup>
príchody PS	4	3	3.0	2.2 <sup>†</sup>	1.4 <sup>†</sup>	0.9 <sup>†</sup>	1.8 <sup>†</sup>

Tabuľka 8.3: Krížikom <sup>†</sup> sú označené priemerné odchýlky len v ľavej časti modelu (počítaných podľa vzťahu 8.2), čiže len v blízkosti troch ľavých prijímačov (vyznačené na Obr. 8.6). Hviezdičkou \* sú označené inverzie, ktorých výsledné modely obsahovali výrazné artefakty alebo odlišnosti od originálneho modelu. Žiadny test bez zhladzovania nevedol k dostatočne dobrému modelu a tak tieto testy neuvádzame. Hodnoty parametrov  $\lambda$  a  $\mu$  originálneho modelu sú z rozsahu  $\langle 0, 18\text{MPa} \rangle$ .

### 8.3.6 Výsledný model

Najpresnejšie určený invertovaný model, čiže model s najmenšími odchýlkami hodnôt parametrov od hodnôt originálneho modelu, bol súčasne model s najmenším misfitom. Vďaka

<sup>1</sup>Pripomínáme, že v jednej iterácii sú zahrnuté jednotlivé výpočty pre každý priamy zdroj zvlášť.

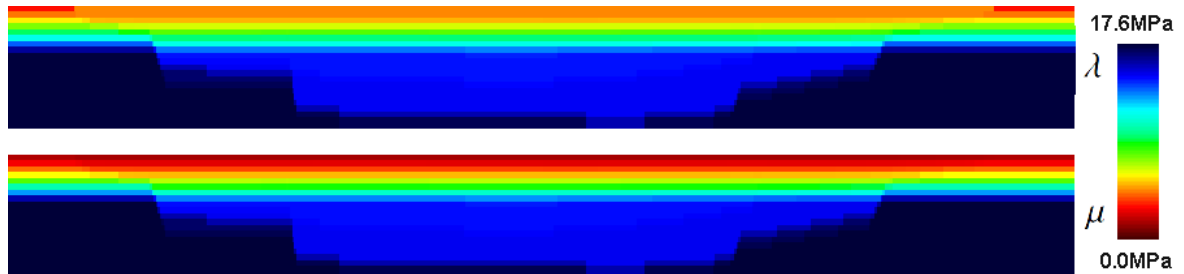
misfit	zdroje	prijímače	zhladz.	relatívny pokles misfitu	
				bez normovania	s normovaním
príchody PS	4	15	7.0	0.070	0.035
príchody PS	4	15	5.0	0.12	0.058
príchody PS	4	15	3.0	0.23	0.071
$L_2$	4	15	7.0	0.15	0.16
$L_2$	4	15	5.0	0.16	0.13
$L_2$	4	15	3.0	0.31	0.095
príchody PS	1	15	7.0	0.28	0.089
príchody PS	1	15	5.0	0.28	0.14
príchody PS	1	15	3.0	0.34	0.19
príchody PS	4	3	7.0	0.12	0.16
príchody PS	4	3	5.0	0.028	0.038
príchody PS	4	3	3.0	0.12	0.080

Tabuľka 8.4: Hodnoty relatívneho poklesu misfitu v jednotlivých situáciách.

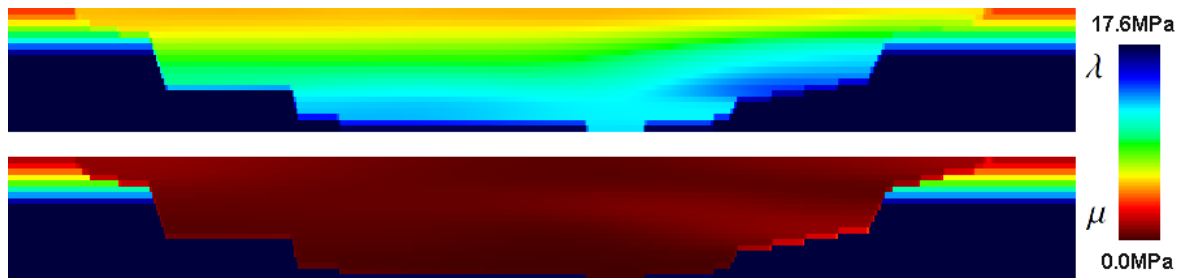
korelácii misfitu a odchýlok (Obr. 8.7) by sme ho preto vedeli vybrať aj bez znalosti originálneho prostredia.

Dosiahli sme ho aplikovaním modifikácií navrhnutých v tejto práci. Váhovali sme časovú funkciu adjungovaných zdrojov a normovali kernely maximálnymi hodnotami príslušných veličín (6.6.1). Použili sme údaje zo všetkých štyroch javov zaznamenaných na všetkých 15 prijímačoch. Aplikovali sme pomerne veľké zhladzovanie so šírkou 7 sieťových bodov.

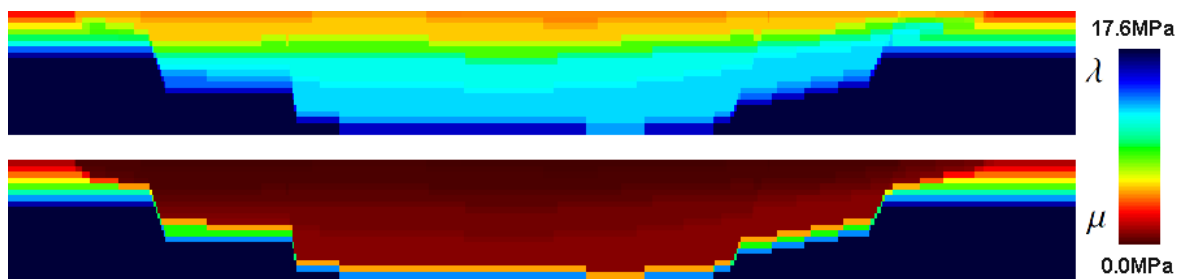
Tento model je vykreslený na Obr. 8.11. Misfit poklesol na 3.5% pôvodnej hodnoty, priemerné odchýlky parametrov podľa vzťahu 8.1 boli  $\overline{\Delta\lambda} \approx 1.0\text{MPa}$  a  $\overline{\Delta\mu} \approx 1.6\text{MPa}$ . Porovnanie závislosti rýchlosti šírenia P a S vln od hĺbky pre tento model, originálny model a štartovací model je na Obr. 8.15.



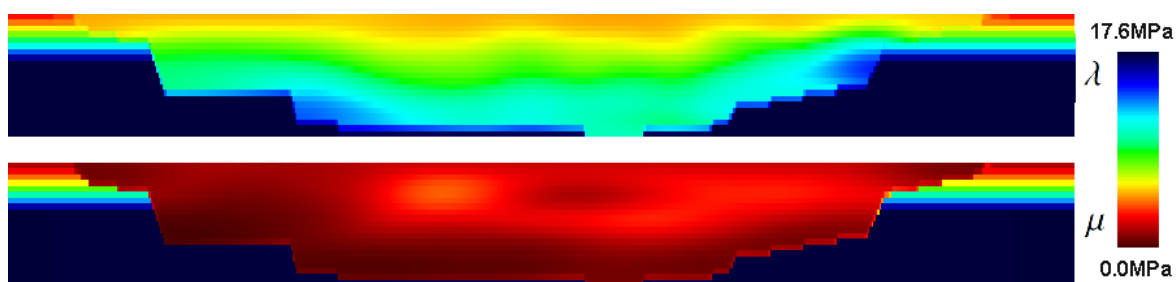
Obr. 8.10: Vizualizácia štartovacieho modelu. Jeho priemerné odchýlky od originálneho modelu, z ktorého pochádzajú syntetické dáta, sú  $\overline{\Delta\lambda} = 2.2\text{MPa}$  a  $\overline{\Delta\mu} = 9.3\text{MPa}$ .



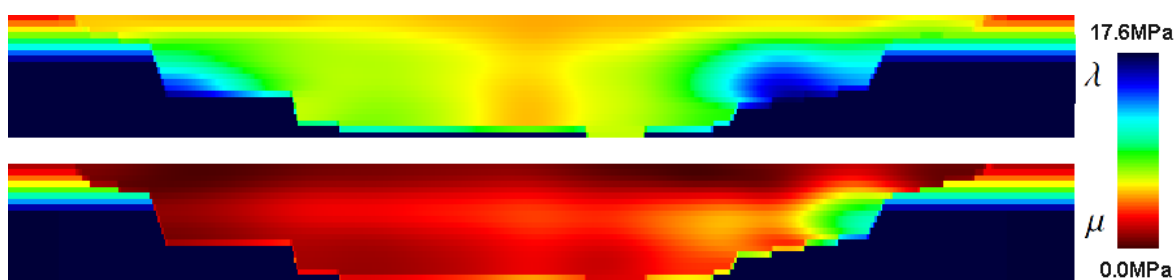
Obr. 8.11: Vizualizácia hodnôt elastických koeficientov  $\lambda$  a  $\mu$  invertovaného modelu. Na povrchu bolo 15 prijímačov, seizmogramy sme počítali pre štyri rôzne zdroje. Pri inverzii sme použili misfit časov príchodov P a S vln, normovanie kernelov, váhovanie časových funkcií adjungovaných zdrojov a zhladzovanie s  $\Lambda = 8.0$ . Jeho priemerné odchýlky sú  $\overline{\Delta\lambda} = 1.0\text{MPa}$  a  $\overline{\Delta\mu} = 1.6\text{MPa}$ .



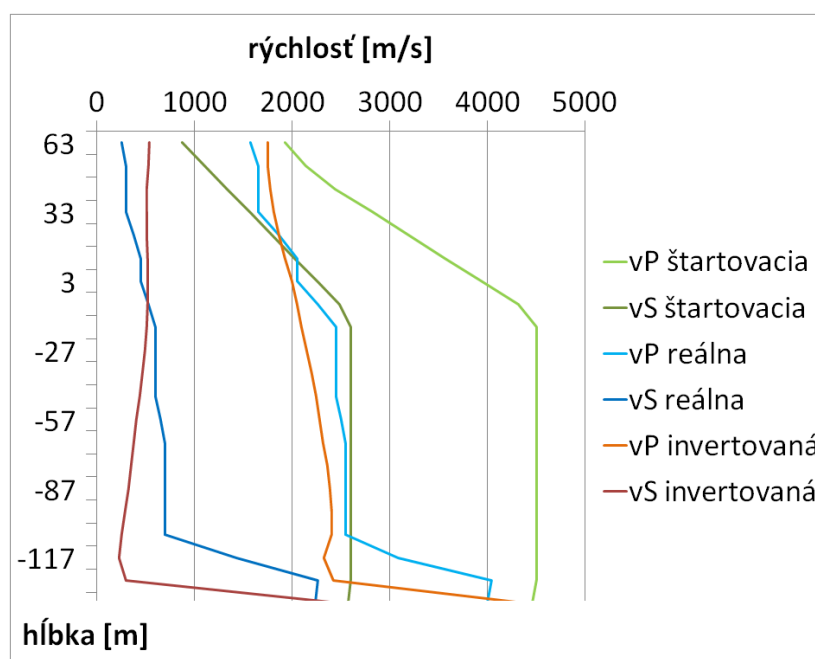
Obr. 8.12: Vizualizácia hodnôt elastických koeficientov  $\lambda$  a  $\mu$  originálneho modelu.



Obr. 8.13: Vizualizácia hodnôt elastických koeficientov  $\lambda$  a  $\mu$  invertovaného modelu s väčšími odchýlkami. Na povrchu bolo 15 prijímačov, seizmogramy sme počítali pre štyri rôzne zdroje. Pri inverzii sme použili misfit  $L_2$  normy vektora posunutia, normovanie kernelov, váhovanie časových funkcií adjungovaných zdrojov a zhladzovanie s  $\Lambda = 3.0$ . Jeho priemerné odchýlky sú  $\Delta\lambda = 1.5\text{MPa}$  a  $\Delta\mu = 2.4\text{MPa}$ .



Obr. 8.14: Vizualizácia hodnôt elastických koeficientov  $\lambda$  a  $\mu$  invertovaného modelu, ktorý obsahuje výrazné nehomogenity. Na povrchu bolo 15 prijímačov, seizmogramy sme počítali pre štyri rôzne zdroje. Pri inverzii sme použili misfit časov príchodov P a S vln, váhovanie časových funkcií adjungovaných zdrojov a zhladzovanie s  $\Lambda = 3.0$ . Kernely sme nenormovali. Jeho priemerné odchýlky sú  $\Delta\lambda = 2.8\text{MPa}$  a  $\Delta\mu = 2.4\text{MPa}$ .



Obr. 8.15: Ilustrácia profilu rýchlostí pozdĺž vertikály stredom sedimentárneho bazénu. Profil pochádza z invertovaného modelu na Obr. 8.11 a opísaného v časti 8.3.6.

# Kapitola 9

## Záver

Na rozdiel od bežného matematického pohľadu na kernely ako na objemové hustoty Fréchetovej derivácie misfitu podľa materiálových parametrov, sme k nim v tejto práci pristupovali viac intuitívnejšie. Zaoberali sme sa tým, ako vznikajú jednotlivé časti kernelu a vysvetlili sme, čo tieto časti znamenajú. Zdôvodnili sme názor, že jedinou žiadanou časťou kernelu je prvá Fresnelova zóna (6.4).

S týmto intuitívnym prístupom sme pokračovali ďalej a kernely sme pozmenili normovaním (6.6). Tým sme sa vzdialili od definície kernelu ako objemovej hustoty derivácie misfitu. Získali sme však taký tvar kernelu, ktorý viedol k zrýchleniu konvergenzie a spresneniu výpočtov vo všeobecných, kanonických podmienkach (7.3.4 a 7.4.3) a aj v špeciálnych podmienkach sedimentárneho Mygdónskeho bazénu (8.3.2).

Ukázali sme, že aplikácia adjungovanej tomografie v zaužívanom tvare bez modifikácií nevedie v sedimentárnych bazénoch ku konvergujúcim riešeniam. K dosiahnutiu dobrých výsledkov sme museli aplikovať výrazné váhovanie časových funkcií adjungovaných zdrojov. Tým sme obmedzili vznik artefaktov, ale aj prakticky odfiltrovali celý zvyšok seizmogramu okrem bezprostredného príchodu prvej vlny (8.2.1). Ako zahrnúť informáciu zo zvyšku seizmogramu bez toho, aby vznikli neúmerne výrazné artefakty, je zatiaľ nevyriešeným problémom.

Zároveň sme porovnávali jednotlivé druhy misfitu (5.1) a ukázali sme, že pre veľký kontrast rýchlostí typický pre sedimentárne bazény, je nutné používať robustné druhy misfitu, ako je napríklad misfit časov príchodov (8.2.1).

Pri hľadaní optimálnej dĺžky kroku sme zistili, že v prípade sedimentárnych bazénov všeobecne udávané tri pokusné dĺžky nestačia na určenie minima. Odchýlky parametrov sú oveľa väčšie a výsledná závislosť misfitu od dĺžky kroku nie je parabolická (7.2.2 a 7.2.4). Preto musíme robiť pokusných krokov viac a pri hľadaní minima misfitu používať iné, napríklad gradientné metódy.

Ukázali sme, že inverzia viacerých parametrov súčasne s rôznou dĺžkou kroku je nielen

možná, ale aj vedie k najlepším výsledkom (7.4).

Modifikovaný algoritmus adjungovanej tomografie sme aplikovali na inverziu modelu Mygdónskeho bazénu. Hodnoty parametrov výsledných invertovaných modelov sa priblížili k hodnotám originálneho modelu. Vykonali sme 32 testov a charakterizovali sme vplyv rôznych parametrov inverzie na jej presnosť (8.3).

**Aplikovanie adjungovanej metódy s navrhnutými modifikáciami viedlo k pomerne dobrej zhode parametrov invertovaného a originálneho modelu (8.3.6). Navrhnuté modifikácie sú zlepšením štandardnej metódy.**

Všetky výpočty sme vykonali s časovou aj s navrhnutou priestorovou kompresiou dát (6.3.1 a 6.3.2), čím sme zredukovali množstvo dát potrebných na výpočet kernelov ukladaných na HDD na 1/60. Teoreticky je možná ešte výraznejšia kompresia, čo je dôležité najmä pre 3D inverzie.



# Referencie

- Akcelik, V. et al. 2003. “Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere”. *Proceedings of the 2003 ACM/IEEE Conference on Supercomputing*.
- Aki, K., A. Christoffersson, and E. S. Husebye. 1977. “Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere”. *J. Geophys. Res.* **82**, pp. 277–296.
- Bamberger, A. et al. 1982. “Inversion of normal incidence seismograms”. *Geophysics* **47**, pp. 757–770.
- Capdeville, Y., Y. Gung, and B. Romanowicz. 2005. “Towards Global Earth Tomography using the Spectral Element Method: a technique based on source stacking”. *Geophys. J. Int.* **162**, pp. 541–554.
- Charpentier, I. 2001. “Checkpointing schemes for adjoint codes: application to the meteorological model Meso-NH. SIAM”. *J. Sci. Comput.* **22**, 2135–2151.
- Dziewonski, A. M. and D. L. Anderson. 1981. “Preliminary reference Earth model”. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **25**, pp. 297–356.
- Dziewonski, A. M., B. H. Hager, and R. J. O’Connell. 1977. “Large-scale heterogeneities in the lower mantle”. *J. Geophys. Res.* **82**, pp. 239–255.
- Emerman, S. H. and R. A. Stephen. 1983. “Comment on “Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations” by R. Clayton and B. Engquist”. *Bull. Seism. Soc. Am.* **73**, pp. 661–665.
- Fichtner, A. 2011. *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Math. Springer. ISBN: 9783642158070.
- Fichtner, A. 2013. *Full Seismic Waveform Inversion: The Adjoint Method*. Tech. rep. LMU Munich.
- Fichtner, A. et al. 2008. “Theoretical background for continental and global-scale full-waveform inversion in the time-frequency domain”. *Geophys. J. Int.* **175**, pp. 665–685.
- Fichtner, A. et al. 2009. “Simulation and inversion of seismic wave propagation on continental scales based on a spectral-element method”. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics* **4**(1-2), pp. 11–22.

- Griewank, A. and A. Walther. 2000. "Revolve: an implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation". *Trans. Math. Softw.* **26**, pp. 19–45.
- Gutenberg, B. 1913. "Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen". *Physikalische Zeitschrift* **14**, 1217–1218.
- Igel, H., H. Djikpesse, and A. Tarantola. 1996. "Waveform inversion of marine reflection seismograms for P-impedance and Poisson's ratio". *Geophys. J. Int.* **124**(2), pp. 363–371.
- Kristek, J. and P. Moczo. 2003. "Seismic wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities – a 3D 4th-order staggered-grid finite-difference modeling". *Bull. Seism. Soc. Am.* **93**, pp. 2273–2280.
- Kristek, J., P. Moczo, and R. J. Archuleta. 2002. "Efficient methods to simulate planar free surface in the 3D 4th-order staggered-grid finite-difference schemes". *Studia Geophys. Geod.* **46**, pp. 355–381.
- Kristeková, M. et al. 2006. "Misfit criteria for quantitative comparison of seismograms". *Bull. Seism. Soc. Am.* **96**, pp. 1836–1850.
- Liu, Q. and Y. Gu. 2012. "Seismic imaging: From classical to adjoint tomography". *Tectonophysics*.
- Liu, Q. and J. Tromp. 2006. "Finite-Frequency Kernels Based on Adjoint Methods". *Bull. Seis. Soc. Am.* **96**(6), pp. 2383–2397.
- Liu, Q. and J. Tromp. 2008. "Finite-frequency sensitivity kernels for global seismic wave propagation based upon adjoint methods". *Geophys. J. Int.* **174**, pp. 265–286.
- Luo, Y. and G. Schuster. 1991. "Wave-equation travelttime inversion". *Geophysics* **56**, pp. 645–653.
- Moczo, P., J. Kristek, and M. Gális. 2004. "Simulation of planar free surface with near-surface lateral discontinuities in the finite-difference modeling of seismic motion". *Bull. Seism. Soc. Am.* **94**, pp. 760–768.
- Moczo, P. et al. 2007. "The Finite-Difference and Finite-Element Modeling of Seismic Wave Propagation and Earthquake Motion". *Acta Physica Slovaca* **57**, pp. 177–406.
- Mohorovičić, A. 1909. "Potres od 8. X 1909". *Godišnje izvješće zagrebačkog meteorološkog opservatorija za godinu 1909* **4**, pp. 1–56.
- Oldham, R. D. 1900. "On the propagation of earthquake motion to great distances". *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **194**, pp. 135–174.
- Sigloch, K. and G. Nolet. 2006. "Measuring finite-frequency body-wave amplitudes and traveltimes". *Geophys. J. Int.* **167**, pp. 271–287.

- Talagrand, O. and P. Courtier. 1987. "Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory". *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **113**, pp. 1311–1328.
- Tape, C., Q. Liu, and J. Tromp. 2007. "Finite-frequency tomography using adjoint methods - Methodology and examples using membrane surface waves". *Geophys. J. Int.* **168**, pp. 1105–1129.
- Tarantola, A. 1984. "Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation". *Geophysics* **49** (8), pp. 1259–1266.
- Tarantola, A. 1988. "Theoretical background for the inversion of seismic waveforms, including elasticity and attenuation." *Pure Appl. Geophys.* **128**, pp. 365–399.
- Tibuleac, I. et al. 2003. "P wave amplitudes in a 3-D Earth". *Geophys. J. Int.* **150**, pp. 1–10.
- Tromp, J., C. Tape, and Q. Liu. 2005. "Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels". *Geophys. J. Int.* **160**, pp. 195–216.
- Tromp, J. et al. 2011. *Sensible choices for adjoint tomography: Misfits, model parameterization, preconditioning, smoothing and iterating*. Tech. rep. QUEST workshop.
- Virieux, J. and S. Operto. 2009. "An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics". *Geophysics* **74** (6), pp. 127–152.
- Zhou, C. et al. 1995. "Acoustic wave-equation traveltime and waveform inversion of cross-hole seismic data". *Geophysics* **60**, pp. 765–773.