

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MODELOVANIE
SEIZMICKÉHO POHYBU
S HYSTERÉZNYM VZŤAHOM
NAPÄTIA A DEFORMÁCIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2014

BC. ANETA RICHTEROVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MODELOVANIE
SEIZMICKÉHO POHYBU
S HYSTERÉZNYM VZŤAHOM
NAPÄTIA A DEFORMÁCIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Fyzika Zeme a planét
Študijný odbor: 1160 Fyzika
Školiace pracovisko: Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie
Školiteľ: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.

BRATISLAVA 2014

BC. ANETA RICHTEROVÁ



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Aneta Richterová
Študijný program: fyzika Zeme a planét (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Modelovanie seizmického pohybu s hysteréznym vzťahom napätia a deformácie

Cieľ: Vyvinúť algoritmus výpočtu napätia v Iwanovom reologickom modeli hysteréznej závislosti napätia a deformácie implementovateľný do 1D programu na simuláciu seizmického pohybu metódou konečných diferencií. Realizovať numerické simulácie pre vybrané problémové konfigurácie.

Vedúci: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
Katedra: FMFI.KAFZM - Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie
Vedúci katedry: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
Dátum zadania: 28.11.2012

Dátum schválenia: 28.11.2012

prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto prácu vypracovala samostatne
s použitím citovaných zdrojov.

.....

Bc. Aneta Richterová

Pod'akovanie

Veľká vďaka patrí vedúcemu mojej práce prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. a doc. Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD. za ich dôveru, trpezlivosť a cenné rady. Z celého srdca tiež ďakujem svojej rodine a priateľom za ich podporu a porozumenie a tiež mojim spolužiačkam Sveti a Zuzke za ich nenahraditeľnú prítomnosť.

Abstrakt

Autor:	Bc. Aneta Richterová
Názov práce:	Modelovanie seizmického pohybu s hysteréznym vzťahom napätia a deformácie
Škola:	Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie
Vedúci práce:	prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
Miesto:	Bratislava
Dátum	5. 5. 2014
Počet strán:	100
Druh záverečnej práce:	Diplomová práca

Numerické simulovanie seizmického pohybu (numerická predikcia seizmického pohybu) musí dostatočne presne zohľadňovať vplyv lokálnych podmienok. V prípade mäkkých sedimentov a silných seizmických pohybov je potrebné dostatočne presne simulovať aj hysteréznym vzťah napätia a deformácie. Pre naše numerické modelovanie sme vybrali reologický (elastoplastický) Iwanov model. Definovali sme koncept aktivačných napätí a deformácií a vyvinuli sme výpočtový algoritmus, ktorý popisuje správanie Iwanovho modelu a ktorý je zároveň rozumne implementovateľný do 1D výpočtového programu na numerickú simuláciu seizmického pohybu metódou konečných diferencií. Teoreticky i pomocou numerických simulácií sme analyzovali zásadné aspekty diskkrétnej reprezentácie elastoplastického prostredia. Vykonali sme numerické simulácie seizmického pohybu v rámci testu v medzinárodnom predikčnom projekte Prenolin. Naše simulácie patria do najpočetnejšej skupiny riešení získaných tímami z Európy, USA a Japonska a sú veľmi blízke viacerým z nich. Toto potvrdzuje správnosť aj nami vyvinutého algoritmu aj jeho implementácie do výpočtového programu.

Kľúčové slová: nelineárne efekty zemetrasení, hysterézná závislosť napätia a deformácie, Iwanov elastoplastický model, projekt Prenolin

Abstract

Author: Bc. Aneta Richterová
Title: Modelling seismic motion
with a hysteresis between stress and strain
University: Comenius University in Bratislava
Faculty: Faculty of Mathematics Physics and Informatics
Department: Department of Astronomy, Physics of the Earth and Meteorology
Supervisor: prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.
City: Bratislava
Date: 5. 5. 2014
Number of pages: 100
Type of thesis: Diploma thesis

Numerical simulation of seismic motion (numerical prediction of seismic motion) has to include, sufficiently accurately, the influence of site conditions. In case of soft sediments and strong ground motion it is necessary to simulate, sufficiently accurately, also the hysteresis stress-strain relationship. In our numerical modelling we chose the rheological (elastoplastic) Iwan model. We defined a concept of activating stresses and deformations, and developed the computational algorithm, which describes behaviour of Iwan model and is reasonably implementable into a 1D computational program for numerical simulation of seismic motion by the finite-difference method. We analysed theoretically and using numerical simulations crucial aspects of a discrete representation of the elastoplastic medium. We performed numerical simulations of seismic motion within the international prediction project Prenolin. Our simulations belong to the most numerous group of solutions obtained by participating teams from Europe, USA and Japan, and are very close to many of them. This confirms that the proposed algorithm and its implementation into the computational program are correct.

Key words: nonlinear site effects, hysteresis stress-strain relationship, Iwan elastoplastic model, project Prenolin

Predhovor

Táto práca nadväzuje na moju bakalársku prácu, ktorá bola stručným úvodom do problematiky nelineárnych efektov zemetrasení. Tému som si vybrala na základe môjho záujmu o mechaniku kontinua, programovanie a tiež na odporúčanie prof. RNDr. Petra Mocza, DrSc.. S odstupom času sa ukázalo, že výber témy bol viac než vhodný a jej načasovanie viac než ideálne. Myšlienka projektu Prenolin zrejme v tej dobe ešte neexistovala, no záujem o nelineárne efekty bol veľký, a to najmä po mnohých silných zemetraseniach, ktoré nepopierateľne dokazovali vplyv nelineárneho správania na seizmický pohyb. Účasť v projekte mi umožnila dostať sa do priameho kontaktu s významnými seizmológmi a inžiniermi, ktorí sa problematikou zaoberajú. Mnohí z nich boli autormi článkov, ktoré uvádzam v tejto práci a z ktorých som čerpala a znamenalo to pre mňa okrem veľkej skúsenosti aj veľkú pokoru a rešpekt. Možnosť konfrontácie získaných poznatkov so súčasným poznaním vo svete bola príležitosť, ktorá sa nenaskytne mnohým študentom, a o to viac si ju cením. Chcela by som ešte raz poďakovať prof. RNDr. Petrovi Moczovi, DrSc. a doc. Mgr. Jozefovi Kristekovi, PhD. za možnosť, ktorú mi poskytli a tiež za ich dôveru a veľkú pomoc pri riešení problémov.

Obsah

Úvod	1
1 Súčasný stav problematiky	3
1.1 Formulácia 1D problému	4
1.2 Hysterézna závislosť napätia od deformácie a jej vlastností	6
1.2.1 Laboratórne merania	6
1.2.2 Reálne dáta a pozorovania.....	10
1.3 Modely popisujúce hysterézne správanie	13
1.3.1 Lineárny ekvivalentný model	14
1.3.2 Fenomenologické modely	16
1.3.3 Reologické modely	23
1.4 Projekt Prenolin.....	30
2 Ciele práce	33
3 Metódy riešenia.....	34
3.1 Konečno-diferenčná schéma pre numerickú simuláciu seizmického pohybu v 1D viskoelastickom prostredí.....	34
3.2 Implementácia Iwanovho modelu do výpočtového programu.....	36
4 Výsledky.....	37
4.1 Matematicko-fyzikálny popis Iwanovho modelu.....	37
4.1.1 Pomocné úvahy	37
4.1.2 Iwanov model	39
4.1.3 Výpočet parametrov Iwanovho modelu	46
4.1.4 Algoritmizácia výpočtu	50

4.1.5	Test algoritmu na jednoduchých funkčných závislostiach.....	55
4.2	Diskretizácia 1D vrstevnatého modelu elastoplastického prostredia	56
4.2.1	Optimálny sieťový krok pre prostredie definované nelineárnymi parametrami	56
4.2.2	Optimálny počet zapojení H-p-StV.....	58
4.2.3	Reprezentácia materiálového rozhrania	61
4.3	Projekt Prenolin.....	70
4.3.1	Definícia parametrov prostredia	70
4.3.2	Vstupný signál	72
4.3.3	Parametre výpočtových modelov.....	73
4.3.4	Verifikácia numerickej metódy	74
4.3.5	Ilustrácia vplyvu nelineárneho konštitučného vzťahu na seizmický pohyb....	82
	Závery.....	88
	Zoznam použitej literatúry.....	90
	Príloha A.....	93
	Príloha B	96

Úvod

V súčasnosti sa seizmológia a seizmické inžinierstvo, ktoré je so seizmológiou veľmi úzko spojené, rýchlo rozvíja. Počas uplynulých 30 až 40 rokov, ktoré sú považované za obdobie najväčšieho rozvoja seizmológie (Kramer 1996), prešla táto veda dôležitou zmenou, ktorá vytvorila nielen priestor pre samotný výskum zemetrasení ale aj pre dôležité aplikácie v priemysle a iných vedných disciplínach. Seizmologické merania umožnili relatívne detailné poznanie štruktúry celého zemského telesa, umožnili tzv. seizmickú prospekciu úžitkových surovín (všetky najvýznamnejšie súčasné ložiská ropy, zemného plynu a iných surovín boli objavené pomocou umelo generovaných vysokofrekvenčných seizmických vln) a v budúcnosti sa seizmológia uplatní aj pri výskume vnútornej štruktúry planetárnych telies (Moczo 2005).

Aj keď sú metódy seizmológie široko aplikovateľné v rôznych oblastiach výskumu, jej kľúčovou prioritou stále ostáva výskum zemetrasení. Nemusíme sa ohliadať ďaleko do minulosti, aby sme videli ich ničivé dôsledky. Zemetrasenia v Japonsku (11. marec, 2012, magnitúdo $M_w = 9$, Tohoku, Japonsko), či na Haiti (12. január, 2010, magnitúdo $M_w = 7$, 25 km západne od Port au Prince, Haiti) nie sú určite posledné veľké zemetrasenia. Procesy v zemskom telese sú tak zložité, že samotná predpoveď zemetrasenia je zatiaľ nemožná. Čo však seizmológovia môžu urobiť a o čo sa snažia, je dostatočne presná predikcia účinkov zemetrasení na záujmovej lokalite. Takáto predikcia je závislá od mnohých faktorov, jedným z nich je aj lokálna povrchová štruktúra, ktorá môže mať významný vplyv na seizmický pohyb na povrchu Zeme. Miera vplyvu lokálnych podmienok na seizmický pohyb závisí najmä od geometrie a materiálových vlastností prostredia. Povrchové geologické štruktúry tvorené sedimentmi zosilňujú seizmický pohyb v dôsledku impedančného kontrastu na rozhraní sedimentov a skalného podložia, pričom môže dochádzať k rezonančnému zosilneniu seizmického pohybu. Špecifická geometria sedimentárnych údolí môže dokonca spôsobi vznik globálnej rezonancie celého sedimentárneho telesa. K anomálnemu seizmickému pohybu môže dochádzať aj v dôsledku nelineárnych javov.

Šírenie seizmických vln v elastickom prostredí je popísané pohybovou rovnicou a lineárnym Hookeovým zákonom. Hookeov zákon je postačujúci na vysvetlenie väčšiny vlnových javov sprevádzajúcich zemetrasenia. V mäkkých sedimentoch však pri silných zemetraseniach vznikajú veľké deformácie, ktoré spôsobujú hysterézy vzťah medzi

napätím a deformáciou. Dôsledkom hysterézneho vývoja sú nevratné deformácie aj po tom, čo napätie klesne na nulu. Laboratórne merania potvrdzujú hysterézny vzťah napätia a deformácie a s ním spojený pokles šmykového modulu a nárast útlmu so zväčšujúcou sa deformáciou. Lineárny Hookeov zákon nie je v takomto prípade postačujúci a je potrebné použiť konštitučné vzťahy, ktoré vhodnejšie popisujú pozorované správanie. Nelineárne efekty v horizontálnych sedimentárnych vrstvách sú charakteristické posunom 1D rezonančných frekvencií k nižším hodnotám, výraznou deamplifikáciou a tiež nevratnými deformáciami, ktoré môžu viesť až k javu skvapalnenia povrchových vrstiev (*liquefaction*). Tento jav je jedným z najničivejších prejavov silných zemetrasení a bol pozorovaný na mnohých miestach aj počas zemetrasenia v Japonsku.

Modelovanie šírenia seizmických vln v prostrediach vykazujúcich hysterézne nelineárne správanie je náročné. Spoľahlivé 3D schémy schopné zachytiť komplexnosť procesu šírenia seizmických vln v prostredí existujú zatiaľ len v rámci elastických a viskoelastických prostredí. Dôvodom je najmä počet potrebných parametrov prostredia, ktorý sa s prihliadnutím na nelineárne vlastnosti podstatne zvyšuje. Relatívne priaznivou okolnosťou skúmania nelineárnych efektov zemetrasení je, že k nim dochádza len v plytkých sedimentárnych vrstvách (Bonilla et al. 2011). Výskum skúmanej oblasti sa tak nemusí zameriavať na náročné merania vo veľkých hĺbkach.

Prvá kapitola tejto práce sa venuje súčasnému stavu problematiky vo svete. Uvádza relevantné laboratórne merania a reálne dáta poukazujúce na nelineárne správanie materiálov. Charakterizuje nelineárne modely, ich výhody a nedostatky a popisuje riešenia niektorých problémov nelineárneho modelovania uvádzané v literatúre.

Druhá kapitola uvádza ciele práce.

Tretia kapitola sa venuje metódam, ktorými sme riešili stanovené ciele.

Štvrtá (posledná) kapitola prezentuje všetky výsledky a je rozdelená na tri časti. V prvej časti podrobne odvádzame vzťahy definujúce Iwanov model a zavádzame pojem aktivačných napätí a deformácií. Kapitola tiež obsahuje podrobný popis výpočtu parametrov Iwanovho modelu z nameraných dát. Druhá časť popisuje niektoré zásadné problémy diskretizácie elastoplastického prostredia. Posledná časť charakterizuje výpočty a sumarizuje naše výsledky v rámci projektu Prenolin.

1 Súčasný stav problematiky

Problematika nelineárneho správania zasahuje do inžinierskej aj seizmologickej literatúry. Články zaoberajúce sa touto problematikou majú široký odborný záber, a to od technických popisov meraní nelineárnych vlastností materiálov, cez identifikáciu nelineárneho správania pomocou štatistickej analýzy reálnych dát, až po numerické simulácie nelineárnych efektov. Určovaním nelineárnych parametrov materiálov sa vo svojich prácach podrobne zaoberali napr. Hardin a Drnevich (1972a,b), Vucetic a Dobry (1991), Ishibashi a Zhang (1993), Darendeli (2001), Santos a Correia (2001) či Kramer (1996). Analýzou seizmických dát a kvantifikáciou nelineárnych efektov sa zaoberajú napríklad práce Bonilla et al. (2005), Pavlenko a Irikura (2005), Choi a Stewart (2005), Assimaki et al. (2008), Wen et al. (2011) či Régnier et al. (2013). Numerické modelovanie nelineárnych efektov zemetrasení vyžaduje vhodnú reprezentáciu nelineárneho konštitučného vzťahu pomocou nelineárnych modelov. Používané modely a vplyv výberu nelineárneho modelu na vypočítané seizmogramy analyzujú vo svojich prácach napr. Assimaki et al. (2008) a Hartzell et al. (2004). Práca Stewart et al. (2008) porovnáva výsledky piatich nelineárnych výpočtových programov.

Jednotlivým nelineárnym modelom a ich vlastnostiam sa budeme venovať v ďalších podkapitolách. Tiež uvedieme podrobnejší popis súčasného stavu problematiky s ohľadom na všetky vymenované aspekty.

V celej práci budeme uvažovať 1D model šírenia seizmických vln v prostredí. Materiálové parametre a vlnové pole sa budú meniť iba v smere z . Kladný smer osi z je orientovaný zhora nadol.

Je len málo miest, ktoré môžeme považovať za povrch horizontálnej sedimentárnej vrstvy na pevnejšom podloží. Napriek tomu môžeme aplikovať 1D modelovanie na mnohých miestach, aj keď vieme, že rozhranie je horizontálne (alebo približne horizontálne) len lokálne. V takom prípade ide o to, aby sa zakrivenie rozhrania v okolí záujmového miesta neprejavilo v záujmovom intervale frekvencií, prípadne v záujmovom časovom okne.

1.1 Formulácia 1D problému

Tento odstavec sme spracovali podľa Moczo et al. (2014). Uvažujme objem kontinua V ohraničený plochou S . Aplikujme na tento objem druhý Newtonov zákon (v Lagrangeovskom popise). V limite $\Delta V \rightarrow 0$ dostávame pohybovú rovnicu kontinua v diferenciálnom tvare

$$\rho u_{i,tt} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (1.1)$$

$\rho [kg.m^{-3}]$ je hustota, $u_i [m]$ i -ta zložka vektoru posunutia, $\sigma_{ij} [N.m^{-2}]$ ij -ta zložka tenzoru napätia a $f_i [N.m^{-3}]$ i -ta zložka objemovej hustoty objemovej sily. $u_{i,tt}$ označuje druhú časovú deriváciu zložky vektoru posunutia a $\sigma_{ij,j}$ divergenciu tenzoru napätia. Pre tenzor napätia v izotropnom, dokonale elastickom, heterogénnom kontinuu platí konštitučný vzťah (Hookeov zákon pre izotropné kontinuum)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

kde λ a μ sú Lamého elastické konštanty, δ_{ij} Kroneckerovo delta a $\varepsilon_{kk}, \varepsilon_{ij}$ zložky tenzoru deformácie.

Definícia 1D problému: *Súradnicovú sústavu vieme natočiť vždy tak, aby sa materiálové parametre a vlnové pole menili len v jednom smere. Uvažujme materiálové parametre $\rho(z)$ a $\mu(z)$ a vlnové pole meniace sa pozdĺž osi z . Pre S vlnu v takomto prostredí platí $\vec{u} = (u_x(z), 0, 0)$. Dosadením do vzťahov (1.1) a (1.2) dostávame*

$$\begin{aligned} \rho u_{x,tt} &= \sigma_{xj,j} + f_x \\ \sigma_{xj,j} &= \sigma_{xz,z} = (\mu(z) u_{x,z})_{,z} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pohybová rovnica sa používa v rôznych formuláciách. Pre túto prácu sme zvolili displacement-velocity-stress formuláciu:

$$\rho v_{x,t} = \sigma_{xz,z} + f_x \quad , \quad v_x = u_{x,t} \quad , \quad \sigma_{xz} = \mu(z) u_{x,z} \quad (1.4)$$

Poznámka k označovaniu veličín

Problematika nelineárneho vzťahu napätia a deformácie je výrazne rozpracovaná v inžinierskej komunite. Tá v niektorých prípadoch uprednostňuje odlišné označovanie veličín v porovnaní so seizmologickou komunitou. Aby sme sa vyhli prípadnému nedorozumeniu, Tab. 1 sumarizuje niektoré zo základných rozdielov.

$i, j \in \{x, y, z\}$	Seizmológovia	Inžinieri
Deformácia	ε_{ij}	ε_{ij} alebo $\varepsilon_i, i = j$ $\gamma_{ij}, i \neq j$
	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i = u_{i,i}, i = j$ $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, i \neq j$
Napätie	σ_{ij}, τ_{ij}	σ_{ij} alebo $\sigma_i, i = j$ $\tau_{ij}, i \neq j$
	$\sigma_{ij} = \tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$	$\sigma_i = \tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_i, i = j$ $\sigma_{ij} = \tau_{ij} = \mu \gamma_{ij}, i \neq j$
Šmykový modul	μ	G

Tab. 1 Rozdiel v značení veličín v inžinierskej a seizmologickej komunite.

V ďalších kapitolách budeme používať inžiniersky typ značenia, keďže je táto voľba pre 1D problém prirodzenejšia (zbavujeme sa tak faktoru 2 a $\frac{1}{2}$). Pre zjednodušenie označíme

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon_{xz} = u_{x,z} \\
 \sigma &= \sigma_{xz} = G\varepsilon \\
 u_x &= u, \quad v_x = v, \quad f_x = f
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Vzťah (1.4) potom bude mať tvar

$$\rho v_{,t} = \sigma_{,z} + f, \quad v = u_{,t}, \quad \sigma = G\varepsilon
 \tag{1.6}$$

V ďalšom texte budeme vo vzťahu k modulu G vynechávať prívlastok šmykový, keďže iný modul ani nebudeme v práci uvažovať.

1.2 Hysterézna závislosť napätia od deformácie a jej vlastnosti

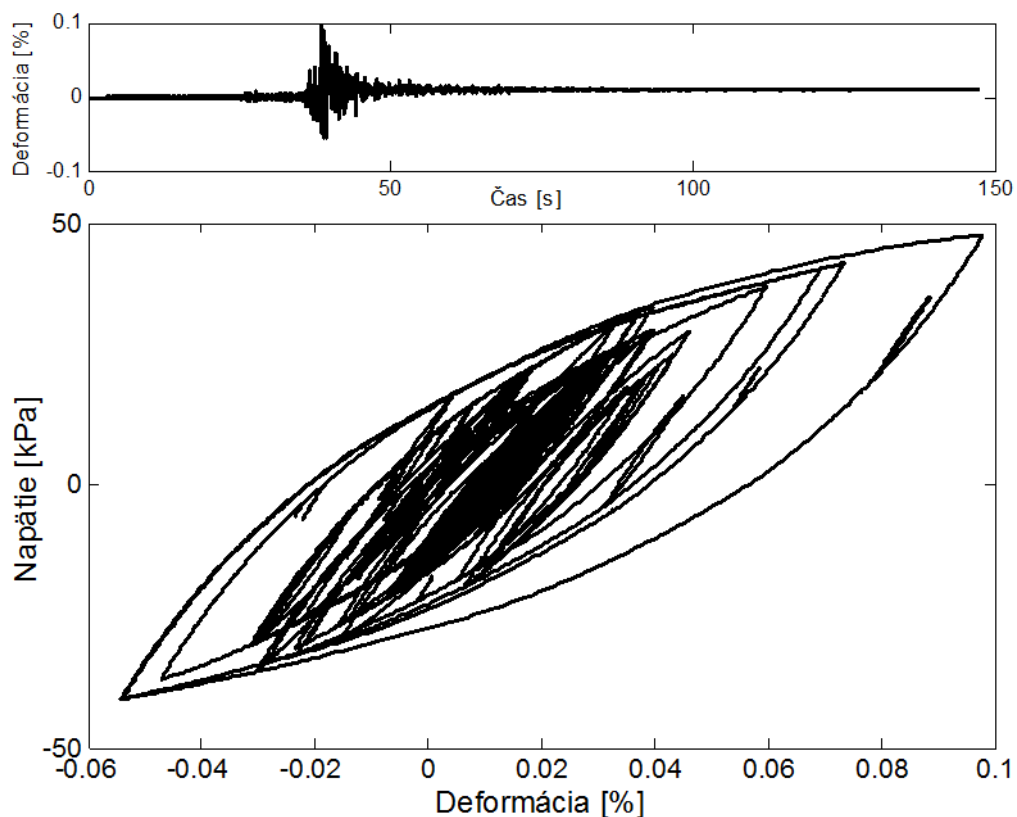
V dokonale elastickom, homogénnom a izotropnom prostredí sa vlnenie šíri neobmedzene, pričom sa veľkosti amplitúd vln nemenia, ak neklesajú v dôsledku geometrického rozširovania. Vnútro Zeme nie je dokonale elastické. Seizmické vlny sú v Zemi utlmované viacerými procesmi. Disipáciou mechanickej energie, ktorá sa prejavuje tzv. vnútorným útlmom, plastickým pretváraním a rozptylom.

Merania seizmických vln ukázali, že vnútorné trenie (ktoré je mierou útlmu) je v Zemi takmer konštantné v širokom intervale frekvencií. Takýto útlm je možné uspokojivo aproximovať pomocou generalizovaného Maxwellovho telesa alebo iných lineárnych viskoelastických mechanizmov (napr. Moczo et al. 2014). V plytkých sedimentárnych vrstvách s malou rýchlosťou šírenia seizmických vln môžu vznikať aj deformácie rádovo väčšie ako 0.001% (napr. Gandomzadeh 2011, Kauszel a Assimaki 2002, Darendeli 2001). Pri takýchto deformáciách je útlm a modul závislý od deformácie a v modelovaní seizmickej odozvy je potrebné použiť nelineárny konštitučný vzťah. Lineárny Hookeov zákon už nie je schopný reprezentovať vzťah napätia a deformácie. Cyklické namáhanie materiálu pri takýchto deformáciách vedie k hysteréznej závislosti napätia od deformácie, ktorú ilustruje Obr. 1. Môžeme si tiež všimnúť nenulovú deformáciu na konci záznamu, ktorá je priamym dôsledkom hysteréznej závislosti.

1.2.1 Laboratórne merania

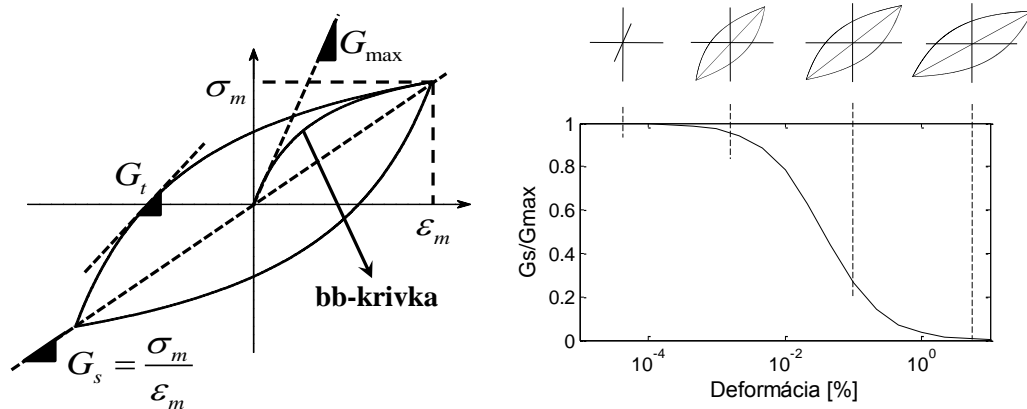
Laboratórne merania modulu a útlmu materiálov pri cyklickom namáhaní boli prvou indikáciou hysteréznej závislosti napätia od deformácie. Interpretácia seizmických záznamov ukázala, že toto správanie má vplyv aj na seizmickú odozvu a je dôležité ho skúmať ako v laboratóriách, tak aj pomocou interpretácie seizmických záznamov či meraním modulu a útlmu priamo na lokalite (in-situ merania). Merania môžeme rozdeliť na dve skupiny: 1) Merania, ktoré zisťujú vlastnosti materiálov pri malých deformáciách – maximálny modul G_{\max} a minimálny útlm ξ_{\min} . 2) Merania, ktoré zisťujú nelineárne vlastnosti materiálov – redukciu modulu a útlm pri väčších deformáciách. Aj keď sa

laboratórne technológie v posledných rokoch výrazne zlepšili, sú merania G_{\max} a ξ_{\min} stále veľkou výzvou pre geotechnických inžinierov. V laboratóriu je potrebné simulovať podmienky lokality, na ktorej bola vzorka odobraná, čo nie je jednoduché. Rozdiel medzi materiálom na lokalite a prenesenou vzorkou materiálu v laboratóriu spôsobuje rozdiel medzi výsledkami získanými in-situ meraniami a výsledkami laboratórnych meraní. Laboratórne hodnoty G_{\max} a ξ_{\min} sú vo všeobecnosti menšie. Do prvej skupiny laboratórnych meraní zaraďujeme napríklad *torsional resonant column test* (RC test). Vo väčšine prípadov sa však hodnoty materiálových parametrov pri malých deformáciách určujú in-situ metódami. Do druhej skupiny meraní zaraďujeme napríklad *cyclic torsional shear test* (TS test). Pri meraní nelineárnych vlastností materiálov (redukcie modulu a útlmu) je rozdiel hodnôt získaných z in-situ meraní a laboratórnych meraní menší, pričom hodnoty útlmu vykazujú väčšiu odchýlku od hodnôt nameraných priamo na lokalite, než hodnoty redukcie modulu. Výhody a nevýhody použitia jednotlivých typov meraní a ich vplyv na hodnoty meraných parametrov sú podrobne analyzované v práci Darendeli (2001).



Obr. 1 Hore: Závislosť deformácie od času. Dole: Hysterézná závislosť napätia od deformácie. Hodnoty boli vypočítané pre vrstvu na polpriestore definovanú v projekte Prenolin. Hodnoty boli vypočítané v hĺbke 19.1 metra pod voľným povrchom.

Krivka redukcie modulu (*modulus reduction curve*). Reflexnou a refrakčnou seizmickou vieme priamo na lokalite zistiť rýchlostný profil $v_S(z)$ a hustotu podložia $\rho(z)$. Podľa vzťahu $(G_{\max})_{field} = \rho v_S^2$ vieme vypočítať maximálny modul $(G_{\max})_{field}$. Normalizovaný modul je definovaný ako pomer sečnicového modulu a maximálneho modulu získaného v laboratóriu – $(G_s / G_{\max})_{lab}$. Krivka závislosti normalizovaného modulu od deformácie sa nazýva krivka redukcie modulu. Sečnicový modul určuje priemernú hodnotu modulu jednej hysteréznej slučky. Skutočný modul sa mení pozdĺž celej hysteréznej slučky a nazývame ho tangenciálny modul. Vzťah sečnicového, tangenciálneho a maximálneho modulu ilustruje Obr. 2 (vľavo).



Obr. 2 Vľavo: Porovnanie sečnicového modulu G_s , tangenciálneho modulu G_t a maximálneho modulu G_{\max} . σ_m a ϵ_m označujú maximálne hodnoty napätia a deformácie. Vpravo: Krivka redukcie modulu. Zväčšovaním amplitúdy hysteréznych slučiek počítame sečnicový modul zodpovedajúci maximálnej hodnote deformácie.

Krivku redukcie modulu vieme zostrojiť pomocou TS testu. Na vzorku aplikujeme torznú silu so sínusoidálnym priebehom a konštantnou amplitúdou a zaznamenávame posunutia. Následne zostrojíme závislosť napätia od deformácie, ktorá má od určitej hodnoty deformácie hysterézny tvar. Amplitúdu aplikovanej sily postupne zväčšujeme a pre každú hysteréznú slučku vypočítame sklon krivky, ktorá spája jej koncové body. Takýmto postupom získame sečnicový modul, ktorý následne vydělíme hodnotou $(G_{\max})_{lab}$. Postup získavania sečnicového modulu ilustruje Obr. 2 (vpravo). Obrázok tiež zobrazuje krivku redukcie modulu. Ak je krivka redukcie modulu definovaná n bodmi, potom pre sečnicový modul, ktorý zodpovedá hodnote modulu na lokalite a deformácii $\epsilon^{(i)}$, platí

$$\left(G_s^{(i)}\right)_{field} = \left(G_{max}\right)_{field} \left(\frac{G_s}{G_{max}}\right)_{lab}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

Za zmienku stojí aj fakt, že laboratórne testy nie sú triviálnou záležitosťou a sú finančne náročné. Preto vznikli rôzne štúdie, ktoré porovnávajú rôzne iné mechanické vlastnosti materiálov a určujú ich vplyv na tvar kriviek redukcie modulu, napr. Vucetic a Dobry (1991), Ishibashi a Zhang (1993), Hardin a Drnevich (1972a).

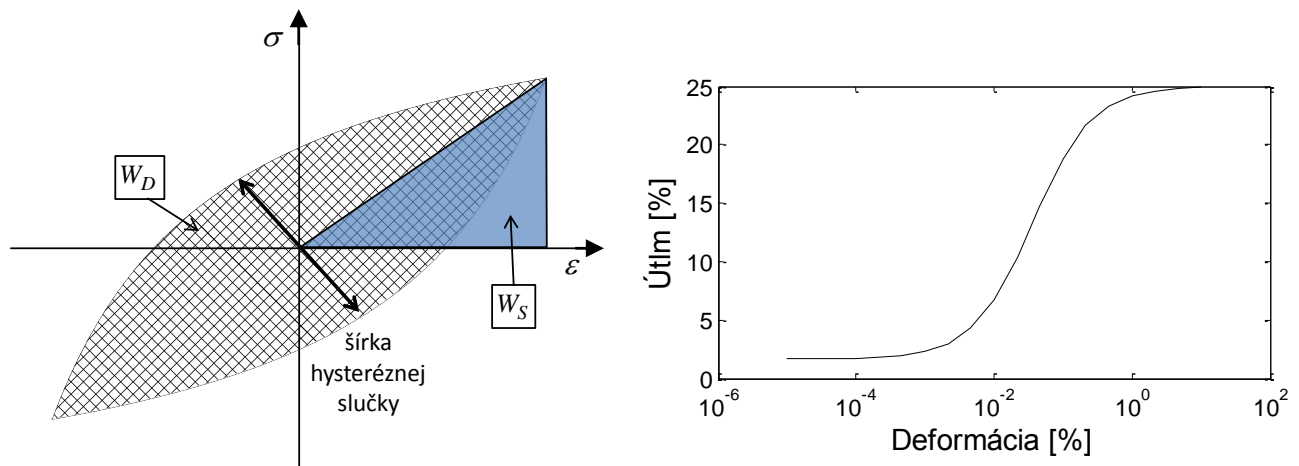
Krivka redukcie modulu sa pri implementácii nelineárnych vlastností prostredia do výpočtových programov nevyužíva priamo. Pre väčšinu nelineárnych modelov je jedným zo vstupných parametrov výpočtu takzvaná *backbone curve*, ktorú budeme v ďalšom texte nazývať bb-krivka. Táto krivka definuje vzťah napätia a deformácie pri počiatočnom namáhaní z bodu $[0,0]$ a je vyznačená aj na Obr. 2, vľavo. Vieme ju získať priamo z krivky redukcie modulu. Zo vzťahu (1.7) a Obr. 2 vyplýva, že pre body bb-krivky platí vzťah

$$\left[\varepsilon^{(i)}, \sigma^{(i)} = \left(G_s^{(i)}\right)_{field} \varepsilon^{(i)} \right] \quad (1.8)$$

Útlmová krivka (*damping curve*). Útlm je definovaný ako pomer disipovanej energie W_D a maximálnej energie W_S počas jedného cyklu namáhania medzi fixnými limitmi (aplikované napätie má sínusoidálny charakter s konštantnou amplitúdou).

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{W_D}{W_S} \quad (1.9)$$

Vzťah (1.9) vyjadruje pomer plôch zobrazených na Obr. 3, vľavo. Je zrejmé, že útlm rastie so šírkou hysteréznej slučky. Taktiež rastie so zväčšujúcou sa deformáciou. Príklad útlmovej krivky je na Obr. 3, vpravo. Všimnime si, že ani pre veľmi malé deformácie sa hodnota útlmu neblíži k nule. Túto minimálnu hodnotu nazývame minimálny útlm ξ_{min} (*small-strain damping*). V seizmológii sa na vyjadrenie útlmu (za predpokladu lineárneho vzťahu medzi napätím a deformáciou) používa faktor kvality Q . V prípade nelineárneho vzťahu má $1/2Q$ význam minimálneho útlmu ξ_{min} .



Obr. 3 Vľavo: Výpočet útlmu podľa vzťahu (1.9). W_D označuje disipovanú energiu a W_S maximálnu energiu deformácie. Vpravo: Reálna útlmová krivka.

1.2.2 Reálne dáta a pozorovania

Najjednoduchšou ilustráciou vplyvu nelineárnych efektov na seizmickú odozvu je porovnanie zosilnenia seizmického pohybu sedimentárnymi štruktúrami pri slabých a silných zemetraseniach. Pod zosilnením rozumieme pomer spektier seizmogramov zaznamenaných na zemskom povrchu a na spodnej hranici vrstvy sedimentov (Takéto záznamy sú k dispozícii na seizmických stanicích, ktoré sa nazývajú *downhole arrays*).

Uvažujme homogénnu vrstvu na polpriestore. Zaznamenajme na rozhraní vrstva/polpriestor signál s amplitúdou A a ten istý signál s amplitúdou $2A$. Uvažujme, že je vrstva dokonale elastická. Zosilnenie na povrchu bude v oboch prípadoch identické. Uvažujme teraz nelineárne prostredie. Zosilnenie pri malých amplitúdach bude odlišné od zosilnenia pri veľkých amplitúdach v dôsledku vybudenia nelineárnych efektov.

Seizmický dizajn budov a vyhodnocovanie seizmického ohrozenia na lokalite vyžaduje zahrnutie lokálnych efektov. Tie sú najmä v prípade plytkých sedimentárných vrstiev s nízkou rýchlosťou šírenia seizmických vln ovplyvnené nelineárnym správaním materiálov. Inverzné algoritmy umožňujú určiť nelineárne parametre prostredia na základe seizmologických záznamov z *downhole* staníc, a tak sa vyhnúť nákladným laboratórnym a in-situ meraniam. Vývoj takéhoto algoritmu popisuje napríklad práca Assimaki et al. (2011). Články zaoberajúce sa numerickým modelovaním nelineárneho vzťahu napätia a deformácie porovnávajú rôzne modely aproximujúce hysteréznú závislosť napätia od

deformácie a ich vplyv na výsledné seizmogramy (Hartzell et al. 2004, Gélis a Bonilla 2012, Gandomzadeh 2011).

Pri odhade vplyvu nelineárneho správania materiálov na seizmickú odozvu na zemskom povrchu nám môžu pomôcť niektoré teoretické predpoklady. Nasledujúce úvahy sú uvedené v článku Régnier et al. (2013).

Uvažujme homogénnu horizontálnu vrstvu sedimentov na homogénnom polpriestore. Pre takúto vrstvu poznáme analytické vyjadrenie prenosovej funkcie. Vrstva zosilňuje seizmický pohyb na určitých frekvenciách v dôsledku impedancie na rozhraní vrstva/polpriestor. Tieto frekvencie nazývame rezonančné frekvencie vrstvy. Pre n -tý mód 1D vertikálnej rezonancie platí vzťah

$$f_n = \frac{(2n-1) v_S}{4 h} \quad (1.10)$$

kde h je hrúbka vrstvy. Krivka redukcie modulu, ktorú sme popísali v predchádzajúcom odstavci, vyjadruje pokles modulu v závislosti od deformácie. Vzťah modulu a rýchlosti šírenia S-vĺn v prostredí je zrejmý zo vzťahu $G_{\max} = \rho v_S^2$. Ak klesá modul a predpokladáme, že hustota materiálu sa nemení (nepredpokladáme objemové zmeny), musí klesať rýchlosť šírenia S-vĺn v_S . Zo vzťahu (1.10) vyplýva, že hodnota rezonančnej frekvencie f_n klesá. Veľkosť amplitúdy seizmického pohybu na zemskom povrchu je závislá od dvoch protikladných javov. Pri veľkých deformáciách sa zväčšuje útlm a amplitúda klesá. V dôsledku poklesu rýchlosti šírenia S-vĺn však na rozhraní vzniká väčší impedančný kontrast, ktorý má za následok únik menšieho množstva energie do polpriestoru a tým prispieva k zväčšeniu amplitúdy. Aj keď je popis jednej vrstvy na polpriestore veľkým zjednodušením, ilustruje niektoré efekty nelineárneho správania materiálov pozorované pri analýze seizmických záznamov.

V článku Régnier et al. (2013) analyzovali autori štatistickými metódami záznamy z japonskej seizmickej siete KiK-net (*Kiban-Kyoshi Network*). Táto sieť zahŕňa až 688 staníc schopných zaznamenať zrýchlenie na voľnom povrchu a v hĺbke 100 – 200 m pod povrchom. Seizmické stanice sa nachádzajú na lokalitách, ktoré majú rôzne hodnoty rýchlosti v_{S30} (priemerná rýchlosť S-vĺn v tridsiatich metroch pod povrchom) a až dve tretiny lokalít majú $v_{S30} < 550 \text{ m.s}^{-1}$. Stanice seizmickej siete Kik-net tiež zaznamenali jedno z najväčších japonských zemetrasení s magnitúdom $M_w = 9$, 11. marca 2011

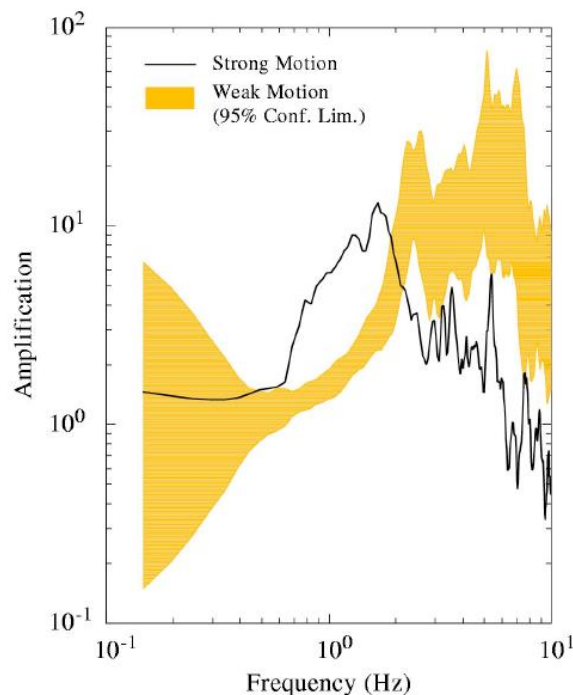
Tohoku. Výpočet spektrálneho pomeru zrýchlenia na voľnom povrchu a zrýchlenia v hĺbke (ďalej len spektrálny pomer $Z0/Z_{\text{down}}$) pre slabé a silné seizmické pohyby ukázal výraznú modifikáciu spektrálnych pomerov pri silných zemetraseniach. Predpokladanou príčinou takejto modifikácie sú nelineárne efekty. Obr. 4 ukazuje spektrálny pomer $Z0/Z_{\text{down}}$ pri slabých seizmických pohyboch a pri silnom zemetrasení s magnitúdom $M_{JMA} = 7.3$. Môžeme vidieť zjavnú deamplifikáciu na širokom intervale frekvencií a tiež posun rezonančnej frekvencie k nižším hodnotám. Na základe analýzy dát vo frekvenčnej oblasti boli v štúdií identifikované tzv. nelineárne parametre, ktoré kvantifikujú nelineárne správanie vybudené konkrétnym zemetrasením. Menovite je to posun dominantnej frekvencie k nižším hodnotám (označenie sh) (dominantnú frekvenciu autori definujú ako frekvenciu, pre ktorú má amplitúda spektrálneho pomeru $Z0/Z_{\text{down}}$ najväčšiu hodnotu na uvažovanom intervale frekvencií), ďalej hodnota frekvencie (označenie f_{NL}), ktorá oddeľuje časť spektra, pre ktorú sú amplitúdy spektrálneho pomeru $Z0/Z_{\text{down}}$ väčšie pri silných seizmických pohyboch ako pri slabých a tiež parameter PNL, ktorý kvantifikuje celkový rozdiel oboch spektier v intervale 0.3 – 30 Hz. Podobný nelineárny parameter navrhli aj Wen et al. (2011). Vo svojej práci tiež ukázali, že je možné identifikovať nelineárne efekty technikou H/V pomerov, ktorá nevyžaduje záznamy z *downhole* staníc a je preto veľmi atraktívnou alternatívou. Podobne aj Régnier et al. (2013) upozornili, že technika H/V pomerov dokáže dobre reprodukovat' posun dominantnej frekvencie sh a hodnoty frekvencie f_{NL} .

Výstupom štúdie je niekoľko dôležitých pozorovaní. Pre lokality s kontrastom v_{S30} blízko zemského povrchu je nelineárne správanie pozorované pri nižších hodnotách PGA zaznamenaných na *downhole* stanici ako pre lokality s hlbšou úrovňou sedimentov. (PGA je špičkové zrýchlenie definované ako najväčšia absolútna hodnota zrýchlenia získaná z akelerogramu). To znamená, že aj pri menších zemetraseniach je na takýchto lokalitách potrebné uvažovať nelineárne správanie. Taktiež sedimentárne štruktúry, ktoré výrazne zosilňujú seizmický pohyb pri slabých zemetraseniach sú považované za citlivejšie k nelineárnym efektom. Autori uvádzajú, že nezávisle od lokality je veľká pravdepodobnosť (až 40%), že aj stredne veľké hodnoty PGA namerané na *downhole* stanici ($PGA = 0.75 \text{ m.s}^{-2}$) môžu vybudit' nelineárne správanie na lokalite.

V lokalitách s malou hĺbkou úrovne podzemnej vody je veľká pravdepodobnosť vzniku javu nazývaného *liquefaction* alebo skvapalnenie povrchových vrstiev. Skvapalnenie je

spojené so zvýšením tlaku vody v póroch a súvisí s cyklickým namáhaním materiálov. Jav skvapalnenia tiež zaradujeme medzi nelineárne efekty a jeho dôsledky sú jedni z najničivejších dôsledkov zemetrasení vôbec.

Nelineárne efekty môžu byť priamo pozorované aj na časových záznamoch zrýchlenia vo forme nepravidelných vysokofrekvenčných pík, ktoré môžu spôsobiť veľmi vysoké hodnoty PGA. Takéto správanie je taktiež podmienené zvýšeným tlakom vody v póroch. Podrobnému popisu tohto fenoménu sa venuje práca Bonilla et al. (2005).



Obr. 4 Oranžová časť: Spektrálny pomer Z_0/Z_{down} vypočítaný zo slabých seizmických pohybov ($\text{PGA} < 0.01\text{g}$). Má význam tzv. „95%“ confident limits –obsahuje 95% vypočítaných zosilnení zo slabých seizmických pohybov. Plná čierna čiara - zosilnenie vypočítané z hlavného otrasu japonského zemetrasenia Tottori (Japonsko, 2000, $M_{JMA} = 7.3$). Údaje zozbierané z japonskej seizmologickej stanice. Obrázok prevzatý z (Bonilla et al. 2011).

1.3 Modely popisujúce hysterézne správanie

V tejto podkapitole zmeníme značenie $\sigma \rightarrow \tau$, $\varepsilon \rightarrow \gamma$, aby sme boli konzistentný s materiálmi na ktoré sa odvolávame. Veličiny budú mať stále rovnaký fyzikálny význam, mení sa len ich označenie.

V podkapitole 1.2 sme popísali hysterézne správanie materiálov pri laboratórnych meraniach a pri seizmickom pohybe. Súčasťou analýzy seizmického ohrozenia pre

konkrétnu lokalitu je aj zahrnutie lokálnych efektov. Zahrnutie lokálnych efektov môže byť založené na numerickom modelovaní prenosových vlastností lokálnej geologickej štruktúry pod záujmovým miestom. Ak hodnoty fyzikálnych parametrov lokálnej štruktúry indikujú možnosť nelineárneho správania počas silnejších zemetrasení, je nutné toto správanie v modelovaní zahrnúť. Je teda dôležité vyvinúť nelineárne modely, ktoré dostatočne presne aproximujú nelineárne správanie materiálov a zároveň sú dostatočne jednoduché na to, aby sme ich mohli numericky realizovať. Mnohé z prác podrobne mapujú historický vývoj modelov a ich využitie (napr. Gandomzadeh 2011, Kramer 1996, De Martin 2010 a Bonilla 2007). Vo všeobecnosti môžeme modely rozdeliť na dve skupiny: lineárny ekvivalentný model a nelineárne modely. Skupinu nelineárnych modelov tvoria pokročilé konštitučné modely (*advanced constitutive models*), fenomenologické modely a reologické modely. Pokročilé konštitučné modely sú založené na základných princípoch mechaniky a sú najvšeobecnejšie a najflexibilnejšie zo všetkých modelov. Vyžadujú však určenie veľkého množstva parametrov z laboratórnych meraní, ktorých vyhodnocovanie môže byť ťažké a v mnohých prípadoch sa jednotlivé merania tých istých parametrov od seba výrazne líšia (Kramer 1996). Z pohľadu množstva a náročnosti laboratórnych meraní, ako aj z pohľadu výpočtovej efektívnosti sú fenomenologické a reologické modely vhodnejšou voľbou. Fenomenologické modely sa riadia fenomenologickými pravidlami – popisujú pozorovaný jav pomocou súboru pravidiel. Reologické modely popisujú pozorovaný jav pomocou sústavy základných reologických telies a ich vlastností, pričom nie sú potrebné žiadne dodatočné pravidlá. V ďalších podkapitolách uvedieme aspoň niektoré z veľkého množstva modelov a poukážeme na ich výhody a nedostatky. Z nelineárnych modelov sa budeme zaoberať fenomenologickými a reologickými modelmi vzhľadom k ich popularite a relatívnej jednoduchosti.

1.3.1 Lineárny ekvivalentný model

Lineárny ekvivalentný model využíva viskoelastické Kelvin-Voigtovo teleso (reologický model viskoelastického prostredia) ako aproximáciu nelineárneho prostredia (Hartzell et al. 2004). Pre systém horizontálnych vrstiev na homogénnom polpriestore, z ktorých každá je definovaná Kelvin-Voigtovým telesom, vieme analyticky vyjadriť prenosovú funkciu charakterizujúcu prenosové vlastnosti prostredia (Kramer 1996). Ak prenosovú funkciu vynásobíme Fourierovou transformáciou časovej funkcie, ktorá reprezentuje vlnu dopadajúcu na rozhranie vrstva/polpriestor, dostaneme po aplikácii inverznej Fourierovej

transformácie časový priebeh posunutia na voľnom povrchu. Toto však platí, len ak sa materiálové parametre s časom nemenia. Pri nelineárnom správaní sa však modul a útlm menia v závislosti od deformácie, a to podľa krivky redukcie modulu a útlmovej krivky. Ekvivalentný lineárny model preto iteratívnym spôsobom hľadá najvhodnejšie materiálové parametre pre každú vrstvu, ktoré by napriek konštantným hodnotám dokázali aproximovať nelineárne vlastnosti prostredia. Parametre vzťahujeme k hodnote efektívnej deformácie, ktorá má veľkosť 50-70% maximálnej deformácie zaznamenatej vo vrstve. Efektívna deformácia lepšie kvantifikuje „priemernú“ maximálnu hodnotu deformácie vo vrstve. Parametre možno určiť nasledovným iteratívnym postupom: 1) 1D nelineárne prostredie rozdelíme na vrstvy. Ak ide o súbor vrstiev rôznych materiálov na polpriestore, rozdelíme aj tieto vrstvy na „podvrstvy“; ďalej však budeme hovoriť o vrstvách. Urobíme počiatočný odhad pre $G_s^{(0)}$ a $\xi^{(0)}$ v každej vrstve – horný index nula označuje 0-tú iteráciu. Vo väčšine prípadov použijeme hodnoty G_{\max} a ξ_{\min} . 2) Vypočítame časový priebeh deformácie v každej vrstve a nájdeme jej efektívne hodnoty. 3) K efektívnym hodnotám deformácie priradíme príslušné hodnoty $G_s^{(1)}$ a $\xi^{(1)}$ podľa krivky redukcie modulu a útlmovej krivky. 4) Výpočet zopakujeme pre nové hodnoty parametrov. 5) Opakujeme kroky 2 až 4, kým rozdiely v hodnotách $G^{(i)}$ a $\xi^{(i)}$ v dvoch po sebe idúcich iteráciách neklesnú pod určitú stanovenú hodnotu.

Ako prvý použili koncept lineárneho ekvivalentného modelu Schnabel et al. (1972) v programe SHAKE, následne Idriss a Sun (1992) v programe SHAKE91 a Bardet et al. (2000) v programe EERA.

Najväčšou výhodou lineárneho ekvivalentného modelu je jeho jednoduchosť, numerická efektívnosť a väčšia numerická stabilita. Jeho použitie by však malo byť limitované na materiály s väčšími rýchlosťami šírenia v_s a pre vstupný signál, ktorého hodnoty PGA nie sú väčšie ako 0.2 g (Bonilla 2000). Bonilla (2000) tiež píše: „The overuse of this technique up to large deformations has „conditioned“ the way how nonlinear effects „should“ look like. Namely, a pervasive shift of energy to low frequencies and strong deamplification for high frequencies. Nonlinear effects are quite complex and involve the interaction among frequencies, thus a truly nonlinear model does not necessarily show a strong deamplification at high frequencies.“¹ Hlavným nedostatkom

¹ „Nadmerné využívanie tejto techniky aj pre veľké hodnoty deformácií „určilo“ spôsob, akým by sme „mali“ nazerať na nelineárne efekty: ako na posun energie do nízkych frekvencií a silné zoslabenie vysokých

tejto metódy sú podľa Assimaki et al. (2008) príliš vysoké hodnoty PGA pri modelovaní silných seizmických pohybov a umelé potláčanie vysokých frekvencií pri aplikácii metódy na lokality s hlbokou úrovňou sedimentov.

Rozdiel medzi výpočtami pre lineárny ekvivalentný model a nelineárne modely dokumentujú aj práce Gandomzadeh (2011) a Hartzell et al. (2004).

1.3.2 Fenomenologické modely

Vo fenomenologickom modeli je pri danej bb-krivke závislosť napätia od deformácie určená súborom pravidiel. Aby sme tieto pravidlá mohli aplikovať, potrebujeme poznať bb-krivku vo forme funkčnej závislosti napätia od deformácie. Výber vhodných parametrov reprezentujúcich bb-krivku a súbor pravidiel popisujúcich cyklické namáhanie materiálov popíšeme v ďalších paragrafoch.

1.3.2.1 Určenie bb-krivky

Nameranú krivku redukcie modulu pre konkrétne materiály nemáme vždy k dispozícii. Preto niektorí autori navrhli vzťahy, ktoré určia krivku redukcie modulu len na základe mechanických vlastností skúmaných materiálov (napr. indexu plasticity) a predpokladaných charakteristík seizmického pohybu (počet cyklov namáhania, frekvencia namáhania). Hardin a Drnevich (1972b) navrhli hyperbolický model. Aproximuje krivku redukcie modulu hyperbolickou funkciou

$$\frac{G_s}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \quad (1.11)$$

kde γ_r je referenčná hodnota deformácie. Platí, že $\gamma_r = \tau_{\max} / G_{\max}$, kde τ_{\max} je maximálna hodnota napätia, ktorú materiál môže dosiahnuť bez toho, aby v ňom vznikla trhlinka. Hyperbolickú funkciu ilustruje Obr. 5. Ak $\gamma \rightarrow \infty$ potom $\tau \rightarrow \tau_{\max}$. Hyperbolická funkcia je závislá len od dvoch parametrov, G_{\max} a τ_{\max} . Aby krivka čo najlepšie reprezentovala vlastnosti materiálu, definovali Hardin a Drnevich (1972b) hyperbolickú deformáciu γ_h , pre ktorú platí

frekvencií. Nelineárne efekty sú komplexný problém, ktorý zahŕňa interakciu medzi frekvenciami, a teda skutočné nelineárne modely nemusia nevyhnutne ukazovať silné zoslabenie vysokých frekvencií.”

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \left[1 + a \exp\left(-b \frac{\gamma}{\gamma_r}\right) \right], \quad \frac{G_s}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \gamma_h} \quad (1.12)$$

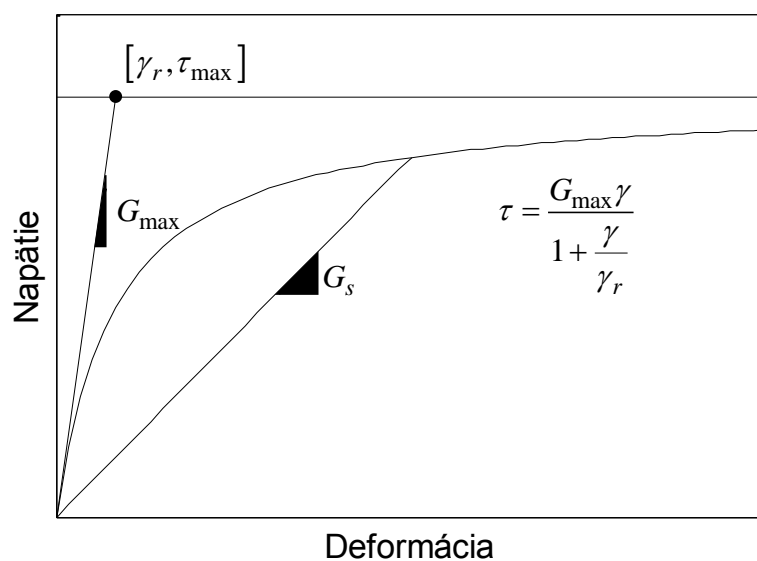
kde a a b sú voliteľné parametre. Môžu zohľadňovať vlastnosti materiálu, počet cyklov namáhania či frekvenciu namáhania. bb-krivku získame z krivky redukcie modulu podľa vzťahu $\tau = G_s \gamma$. Krivka redukcie modulu je definovaná len pre kladné hodnoty deformácie. Pri cyklickom namáhaní však počítame napätie aj pre záporné hodnoty deformácie. Preto vo vzťahoch (1.11) a (1.12) položíme $\frac{\gamma}{\gamma_r} \rightarrow \left| \frac{\gamma}{\gamma_r} \right|$ a $\gamma \rightarrow |\gamma_h|$. Pre bb-krivky zodpovedajúce vzťahom (1.11) a (1.12) potom platí

$$F_{bb}(\gamma) = \tau = \frac{G_{\max} \gamma}{1 + \left| \frac{\gamma}{\gamma_r} \right|}, \quad F_{bb}(\gamma) = \tau = \frac{G_{\max} \gamma}{1 + |\gamma_h|} \quad (1.13)$$

kde $F_{bb}(\gamma)$ označuje funkčnú závislosť reprezentujúcu bb-krivku. V literatúre sú niekedy vzťahy (1.13) uvádzané bez absolútnej hodnoty. Absolútna hodnota však zaručuje antisymetriu bb-krivky $F_{bb}(\gamma) = -F_{bb}(-\gamma)$: materiál sa pri namáhaní v kladnom aj zápornom smere správa rovnako.

Fenomenologické modely vyžadujú zadanie bb-krivky vo forme funkčnej závislosti napätia od deformácie. V prípade, že máme k dispozícii nameranú krivku redukcie modulu, ktorá je súborom diskretných bodov, snažíme sa nájsť parametre γ_r, a, b také, aby hyperbolická funkcia definovaná vzťahom (1.11) alebo (1.12) čo najlepšie aproximovala nameranú krivku. Z funkcie potom podľa vzťahu $\tau = G_s \gamma$ vypočítame vzťah pre spojitú bb-krivku.

V literatúre sa uvádza viacero funkcií aproximujúcich krivky redukcie modulu. Napríklad v práci Assimaki et al. (2008) autori porovnávajú Ramberg-Osgood (R-O) model, modifikovaný hyperbolický model či generalizovaný hyperbolický model.



Obr. 5 Hyperbolický model bb-krivky. Ak $\gamma \rightarrow \infty$ potom $\tau \rightarrow \tau_{\max}$. Parameter γ_r predstavuje elastickú hodnotu deformácie zodpovedajúcu napätiu τ_{\max} .

1.3.2.2 Fenomenologické pravidlá

bb-krivka určuje vývoj závislosti napätia od deformácie pri počiatočnom jednosmernom namáhaní z bodu $[\varepsilon = 0, \tau = 0]$. Ak však materiál vystavíme nepravidelnému cyklickému namáhaniu, vývoj závislosti napätia od deformácie má tvar hysteréznej slučky (Obr. 1). Pre každý materiál má táto hysterézná slučka špecifický tvar a je veľmi ťažké zovšeobecniť hysterézne správanie na súbor niekoľkých pravidiel. Masing (1926) navrhol nasledujúce pravidlá:

- 1) Pri počiatočnom namáhaní sleduje krivka závislosti napätia od deformácie bb-krivku.
- 2) Nech sa smer namáhania zmení v bode $[\gamma^R, \tau^R]$. Krivka sa potom riadi vzťahom

$$\frac{\tau - \tau^R}{2} = F_{bb} \left(\frac{\gamma - \gamma^R}{2} \right) \quad (1.14)$$

Inak povedané, vetvy hysteréznej slučky majú rovnaký tvar ako bb-krivka (s počiatkom posunutým do bodu $[\gamma^R, \tau^R]$), len sú dvakrát zväčšené v smere oboch osí.

Bod $[\gamma^R, \tau^R]$ budeme nazývať reverzný bod. Tieto (prvé) dve Masingove pravidlá nie sú považované za postačujúce na popis hysterézneho správania. Podľa Gandomzadeha (2011) nie vinou Masinga sa prevzatie jeho hypotézy stalo jednou z prekážok k lepšiemu modelovaniu nelineárneho správania materiálov. Pretože bola jeho práca napísaná v nemčine, zdá sa, že ju prečítalo len málo moderných autorov. Práca popisuje jeho hypotézu, jednoduchý testovací experiment a v závere uvádza, že hypotéza nie je podložená experimentom. Masingove pravidlá majú dva hlavné nedostatky:

- i.) Pri nepravidelnom cyklickom namáhaní môže hodnota napätia aj pri malých deformáciách prekročiť hodnotu τ_{\max} .
- ii.) Útlm vypočítaný z Masingových pravidiel nesúhlasí s experimentálne nameranými útlmovými krivkami.

Problém nepravidelného cyklického namáhania. Problém prekročenia hodnoty τ_{\max} sa niekoľko autorov snažilo napraviť definovaním tzv. rozšírených Masingových pravidiel (*extended Masing rules*). Podľa prác Kramer (1996) a Bonilla (2000) možno pravidlá formulovať takto:

- 3) Ak jedna z vetiev hysteréznej slučky prekoná najväčšiu dosiahnutú hodnotu deformácie a dosiahne bb-krivku, pokračuje po bb-krivke, až kým znovu nedosiahne reverzný bod.
- 4) Ak aktuálna vetva hysteréznej slučky dosiahne vetvu predošlého cyklu, pokračuje ďalej po tejto vetve.

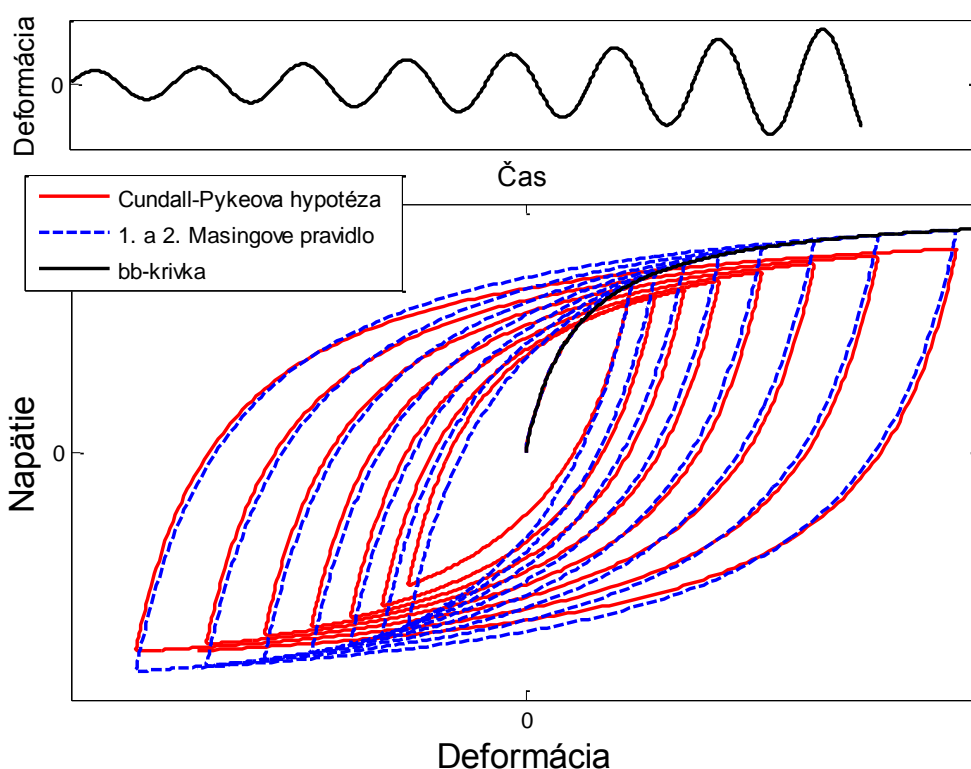
Implementácia tretieho a štvrtého Masingovho pravidla vyžaduje veľkú výpočtovú kapacitu, pričom štvrté Masingove pravidlo dokonca nikdy nebolo v praktických výpočtoch použité (Bonilla 2000). Alternatívne riešenie ukázal Pyke (1979). Nazývame ho Cundall-Pykeova hypotéza, keďže obaja autori prišli k výsledku nezávisle. Základ hypotézy je v zovšeobecnení tzv. škálovacieho hysterézneho faktora c_H , ktorý má v druhom Masingovom pravidle konštantnú hodnotu $c_H = 2$. Pre vetvu hysteréznej slučky potom platí

$$\frac{\tau - \tau^R}{c_H} = F_{bb} \left(\frac{\gamma - \gamma^R}{c_H} \right) \quad (1.15)$$

kde c_H vyberáme v každom reverznom bode podľa podmienky

$$c_H = \left| \pm 1 - \frac{\tau^R}{\tau_{\max}} \right| \quad (1.16)$$

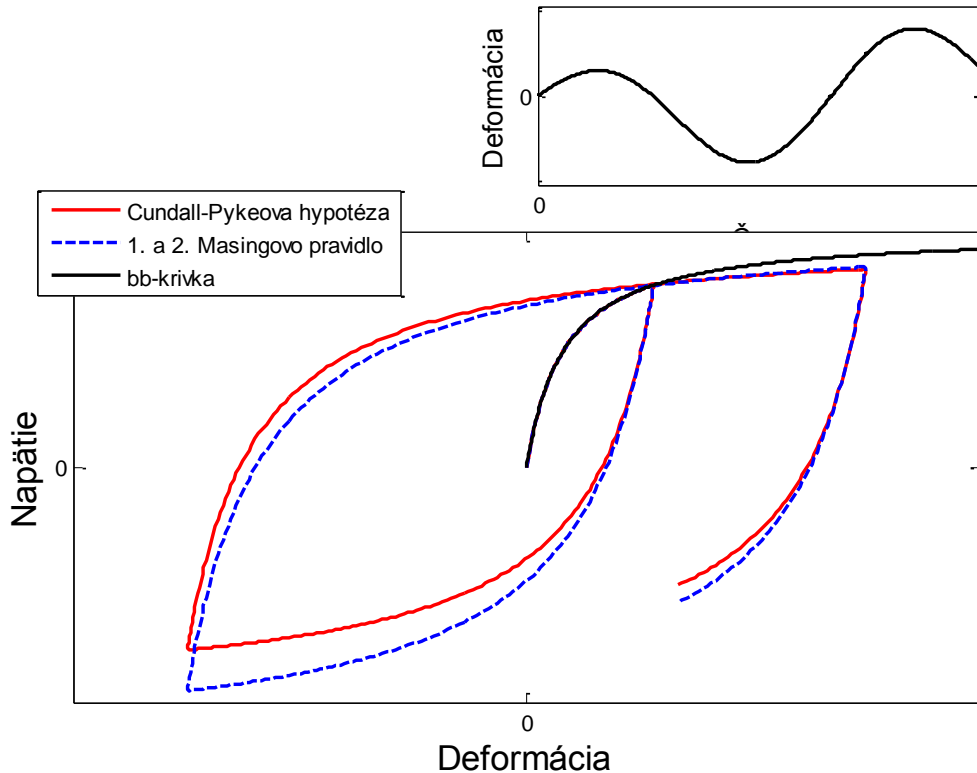
Kladné znamienko použijeme v reverznom bode pri zmene smeru namáhania zo záporného na kladný, záporné znamienko v opačnom prípade. Cundall-Pykeova hypotéza nevyužíva tretie a štvrté Masingove pravidlo. Pamätá si iba posledný reverzný bod a je tak veľmi atraktívnym modelom pre výpočtové účely. Porovnanie hysterézných slučiek riadiacich sa prvými dvomi Masingovými pravidlami a Cundall-Pykeovou hypotézou pri cyklickom namáhaní so zväčšujúcou sa amplitúdou ilustruje Obr. 6. Vidíme, že Cundall-Pykeova hypotéza predpovedá menšie amplitúdy napätia než bb-krivka. Obr. 7 porovnáva prvé dve Masingove pravidlá a Cundall-Pykeovu hypotézu pri nepravidelnom cyklickom namáhaní. Vidíme, že ani jeden z modelov nespĺňa tretie Masingove pravidlo. Po tom, čo vetva hysterézneho slučky dosiahne bb-krivku, nepokračuje po trajektórii vymezenej bb-krivkou.



Obr. 6 Porovnanie vývoja závislosti napätia od deformácie pre Cundall-Pykeovu hypotézu a prvé dve Masingove pravidlá.

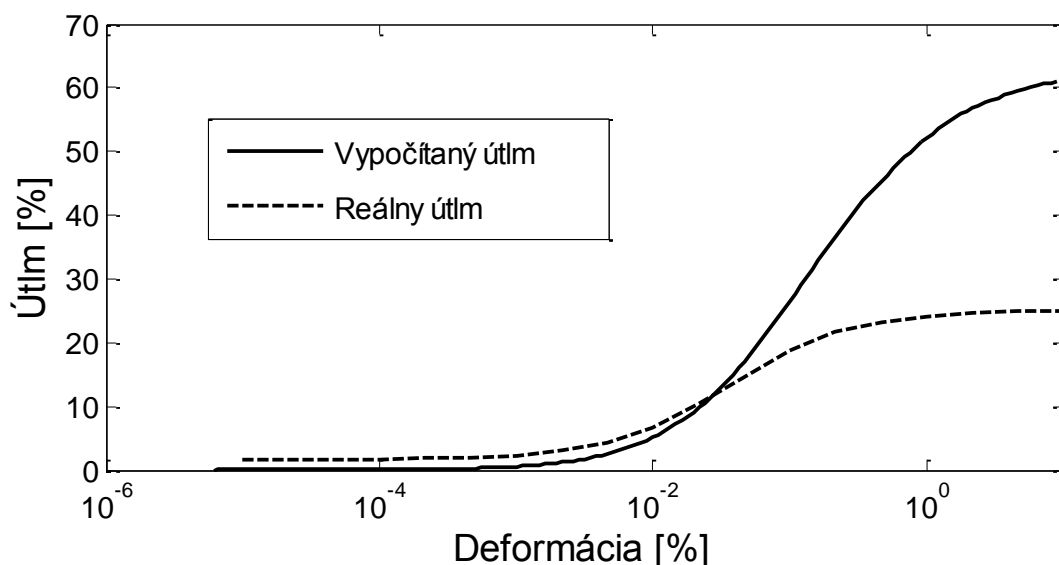
Bonilla (2000) navrhol vo svojej práci generalizované Masingove pravidlo. Originálne Masingove pravidlá ako aj Cundall-Pykeova hypotéza sú jeho podmnožinou.

Generalizované Masingove pravidlo reguluje tvar hysteréznych slučiek podľa parametra γ_f závislého od laboratórnych meraní. Tiež je v tomto modeli možné určovať útlm. Útlmu sa budeme venovať v ďalšom odseku.



Obr. 7 Porovnanie vývoja závislosti napätia od deformácie, ak sa táto riadi Cundall-Pykeovou hypotézou a prvým a druhým Masingovým pravidlom pri nepravidelnom cyklickom namáhaní.

Problém hysterézneho útlmu. Modely využívajúce druhé Masingove pravidlo majú v dôsledku konštantného škálovacieho hysterézneho faktora $c_H = 2$ pevne určený útlm. To znamená, že nevieme v modeloch zohľadniť nameranú krivku útlmu. Pre detailný výpočet útlmovej krivky v modeloch riadiacich sa Masingovými pravidlami odkazujeme čitateľa na Prílohu A. Obr. 8 zobrazuje vypočítanú a nameranú útlmovú krivku. Porovnaním oboch kriviek môžeme identifikovať dva hlavné problémy. Masingove pravidlá nezohľadňujú minimálny útlm ξ_{\min} a útlm pri stredných a veľkých deformáciách je väčší než namerané hodnoty.



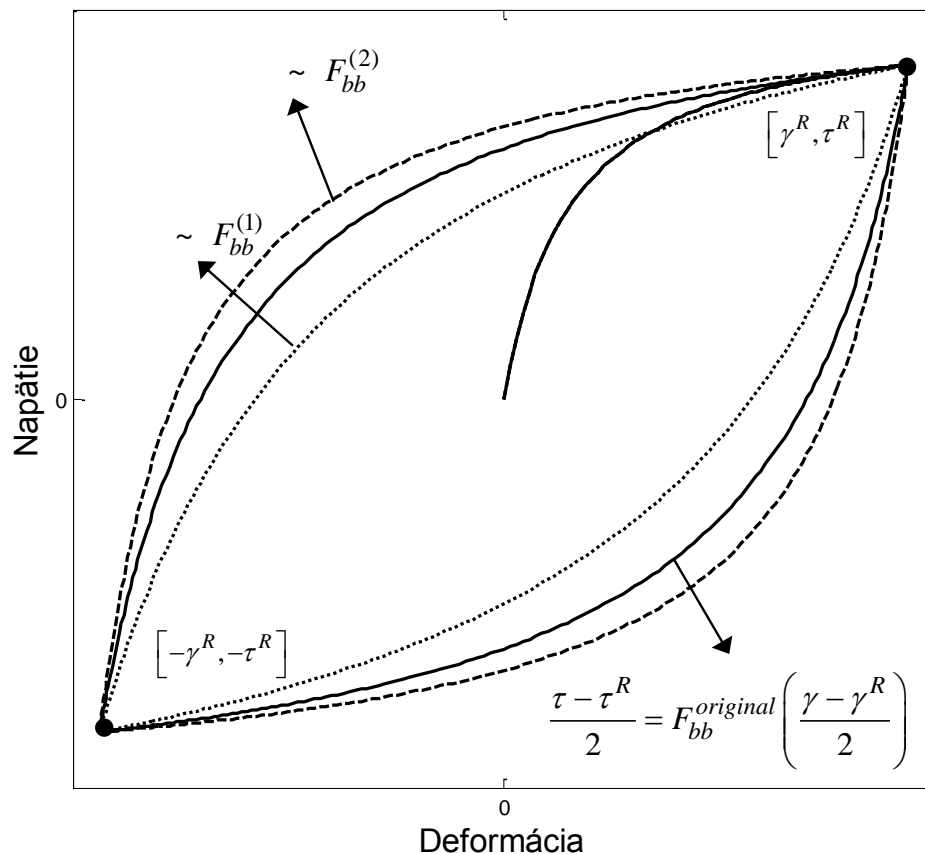
Obr. 8 Porovnanie vypočítanej a reálnej útlmovej krivky.

Assimaki et al. (2008) a Bonilla (2000) vyriešili problém minimálneho útlmu za pomoci generalizovaného Maxwellovho telesa (GMB), ktoré je reologickým modelom viskoelastického prostredia. Pre podrobnosti o GMB odkazujeme na Moczo et al. (2014).

Problém veľkej hodnoty útlmu pri stredných a veľkých deformáciách autori štúdií riešia vo všeobecnosti dvomi spôsobmi. Zmena škálovacieho hysterézného faktoru vedie k zmene veľkosti plochy, ktorú uzatvára hysterézná slučka, a teda aj k zmene útlmu (De Martin 2010). Druhým riešením je fiktívna bb-krivka, ktorú navrhli vo svojej práci Ishihara et al. (1985). Toto riešenie zachováva druhé Masingove pravidlo v pôvodnom tvare – škálovací faktor $c_H = 2$ ostáva konštantný. V každom reverznom bode sa však mení funkcia F_{bb} , ktorá vystupuje vo vzťahu (1.14). Keďže existuje priamy vzťah medzi útlmom vypočítaným podľa druhého Masingovho pravidla a parametrami bb-krivky, vieme v každom reverznom bode vypočítať bb-krivku takú, aby vyhovovala nameraným hodnotám útlmu. Ishihara et al. (1985) vo svojej práci aplikoval túto metódu na hyperbolický model a Ramberg-Osgood model. Úvahu zovšeobecnil Muravskii (2005), ktorý miesto druhého Masingovho pravidla použil vzťah

$$\tau = \tau^R + \phi(\gamma - \gamma^R) \quad (1.17)$$

kde funkcia ϕ je všeobecná funkcia, ktorá spĺňa určité podmienky vychádzajúce z vlastností bb-krivky. Bonilla (2000) upravuje útlm podobným spôsobom. Príklad korekcie na útlm podľa Ishihara et al. (1985) ilustruje Obr. 9.



Obr. 9 Korekcia na útlm. $F_{bb}^{original}$ označuje pôvodnú bb-krivku. $F_{bb}^{(1)}$ a $F_{bb}^{(2)}$ označujú fiktívne bb-krivky, ktoré zužujú alebo rozširujú hysteréznú slučku v závislosti od nameraného útlmu.

1.3.3 Reologické modely

Odstavec bol vypracovaný na základe bakalárskej práce Richterová (2012) a podkapitoly 3.4 z knihy Moczo et al. 2014, na vypracovaní ktorej sa autorka diplomovej práce podieľala.

Reológia používa pri popise vlastností materiálov reologické modely. Hysteréznú závislosť vie popísať vhodnou kombináciou dvoch reologických telies, Hookeovej pružiny a Saint-Venantovho telesa. Hookeova pružina modeluje elastické, Saint-Venantove teleso plastické vlastnosti materiálov.

Elastický materiál sa po aplikácii napätia okamžite deformuje. Keďže nemá pamäť, po odstránení napätia sa okamžite vracia do pôvodného stavu.

Dokonale plastický materiál sa nedeformuje dovedy, kým napätie nedosiahne istú kritickú hodnotu – medzné napätie. Po dosiahnutí tejto hodnoty zmenu deformácie sprevádza nulová zmena napätia a dochádza k tzv. tečeniu materiálu.

Materiál, ktorý kombinuje obe vlastnosti nazývame elastoplastický materiál. Modelujeme ho vhodnou kombináciou sériových a paralelných zapojení Hookeovej pružiny H a Saint-Venantovho telesa StV. Tab. 2 sumarizuje pravidlá pre ich sériové a paralelné zapojenie.

Sériové zapojenie	$\sigma = \sigma_H = \sigma_{StV}$	$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_{StV}$
Paralelné zapojenie	$\sigma = \sigma_H + \sigma_{StV}$	$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_{StV}$

Tab. 2 Pravidlá pre sériové a paralelné zapojenie H a StV. Indexy H a StV označujú napätie a deformáciu na pružine a Saint-Venantovom telese.

1.3.3.1 Hookeove teleso

Reologickým modelom ideálne elastického materiálu je nehmotná pružina s nulovým vnútorným trením - Hookeove teleso (Obr. 10 vľavo). Deformácia pružiny je priamo úmerná napätiu,

$$\varepsilon_H = \frac{\sigma_H}{M} \quad (1.18)$$

kde ε_H je deformácia, σ_H napätie a M modul pružnosti, ktorý nie je závislý od času a definuje tuhosť pružiny. Zo vzťahu vyplýva, že pôsobenie nenulového napätia sa okamžite prejaví nenulovou deformáciou a odstránenie napätia znamená okamžité odstránenie deformácie. Napätie teda nie je závislé od histórie vývoja deformácie. Závislosť napätia a deformácie od času a závislosť napätia od deformácie znázorňuje Obr. 11 vľavo.

1.3.3.2 Saint-Venantove teleso

Reologickým modelom ideálne plastického materiálu je Saint-Venantove teleso (StV) (Obr. 10 vpravo). StV si môžeme predstaviť ako kváder na podložke s nenulovým koeficientom trenia. Na kváder aplikujeme napätie, ktoré postupne zvyšujeme. Okamžitému posunu kvádra v smere namáhania bráni statické trenie medzi podložkou a kvádrom. Po dosiahnutí hodnoty napätia statického trenia zabráni ďalšiemu zvyšovaniu

napätia posun kvádra v smere namáhania. Po určitom čase Δt sa napätie statického trenia zmení na napätie dynamického trenia. Keďže je čas Δt relatívne malý a na veľkosť posunu kvádra má malý vplyv, možno v zjednodušení nerozlišovať statické a dynamické trenie. Hodnotu napätia dynamického trenia nazveme medzným napätím a označíme ju σ_Y . StV sa teda správa ako dokonale tuhé teleso dovtedy, kým nedosiahne hodnotu medzného napätia σ_Y . Následne sa deformuje neobmedzene, len v závislosti od času, pričom napätie v materiáli ostáva konštantné. Musíme si uvedomiť, že kváder môžeme namáhať v dvoch smeroch – v kladnom smere osi x a v zápornom smere osi x (ďalej budeme vždy uvažovať os x bez komentára), čo je dôvodom pre definovanie dvoch hodnôt medzného napätia, σ_Y v kladnom smere a $-\sigma_Y$ v zápornom smere. Napätie a deformáciu StV ako funkciu času môžeme zapísať ako

$$\sigma_{\text{StV}} = \begin{cases} \sigma(t) & ; t < t_0 \\ |\sigma_Y| & ; t \geq t_0 \end{cases}, \quad \varepsilon_{\text{StV}} = \begin{cases} 0 & ; t < t_0 \\ |c| (t - t_0) & ; t \geq t_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

kde t_0 je čas, v ktorom napätie dosiahne hodnotu $|\sigma_Y|$ a c je konštanta, ktorá určuje lineárnu závislosť deformácie od času. Závislosť napätia a deformácie od času a závislosť napätia od deformácie znázorňuje Obr. 11 vpravo.

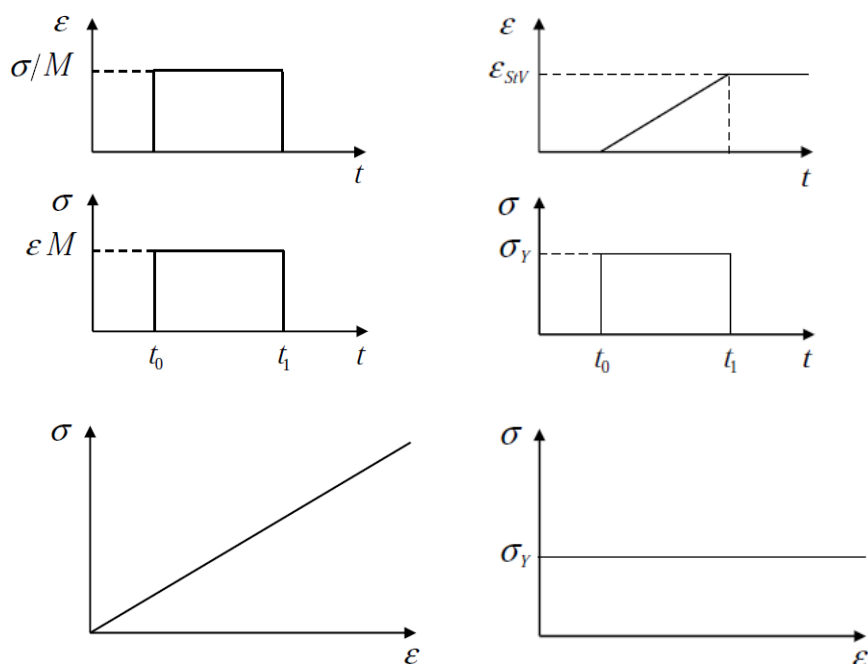


Obr. 10 Reologický model dokonale elastického materiálu – Hookeovo teleso. Reologický model ideálne plastického materiálu – Saint-Venantovo teleso.

1.3.3.3 Sériové zapojenie Hookeovho a Saint-Venantovho telesa (H-s-StV)

Reologický model je znázornený na Obr. 12. Napätia sú identické, deformácia je aditívna

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_{\text{StV}} \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_{\text{StV}} \quad (1.20)$$



Obr. 11 Horný a stredný panel: Závislosť deformácie a napätia od času pre Hookeove a Saint-Venantove teleso. V čase t_0 sme aplikovali konštantné napätie a v čase t_1 sme ho odstránili. Dolný panel: Závislosť napätia od deformácie.

Uvažujme namáhanie zapojenia v kladnom smere. Nasledujúci vývoj je ilustrovaný na Obr. 12. Ak je napätie menšie ako medzné napätie σ_Y , deformuje sa iba pružina – deformácia lineárne rastie s napätím. Ak napätie dosiahne hodnotu σ_Y , StV sa začne deformovať a pružina sa ďalej nedeformuje. Kým napätie neklesne pod hodnotu σ_Y , deformácia sa zväčšuje pri konštantnej hodnote napätia $\sigma = \sigma_Y$. Deformácia pružiny ostáva konštantná, ε_Y . V reverznom bode $[\varepsilon_1, \sigma_1]$ zmeníme smer namáhania. StV sa ďalej nedeformuje (jeho deformácia je $\varepsilon_{StV} = \varepsilon_1 - \varepsilon_Y$) a pružina reaguje okamžitou zmenou deformácie – celková deformácia lineárne klesá. Keď napätie klesne k nule, deformácia pružiny je nulová, celkovú deformáciu určuje deformácia StV. Ak napätie dosiahne hodnotu $-\sigma_Y$, StV sa znovu začne deformovať a pružina sa ďalej nedeformuje. Je zrejmé, že v H-s-StV zapojení sa striedajú epizódy aktívnej pružiny (lineárne časti grafu závislosti napätia od deformácie) a epizódy aktívneho StV (horizontálne časti). H-s-StV nedokáže simulovať tzv. plastic strain hardening (rast napätia so zväčšujúcou sa deformáciou).

Z tohto hľadiska sa neodlišuje od StV, ktoré je mechanickým modelom ideálneho plastického materiálu.

1.3.3.4 Paralelné zapojenie Hookeovho a Saint-Venantovho telesa (H-p-StV)

Reologický model znázorňuje Obr. 12. Napätia sú aditívne, deformácia je identická

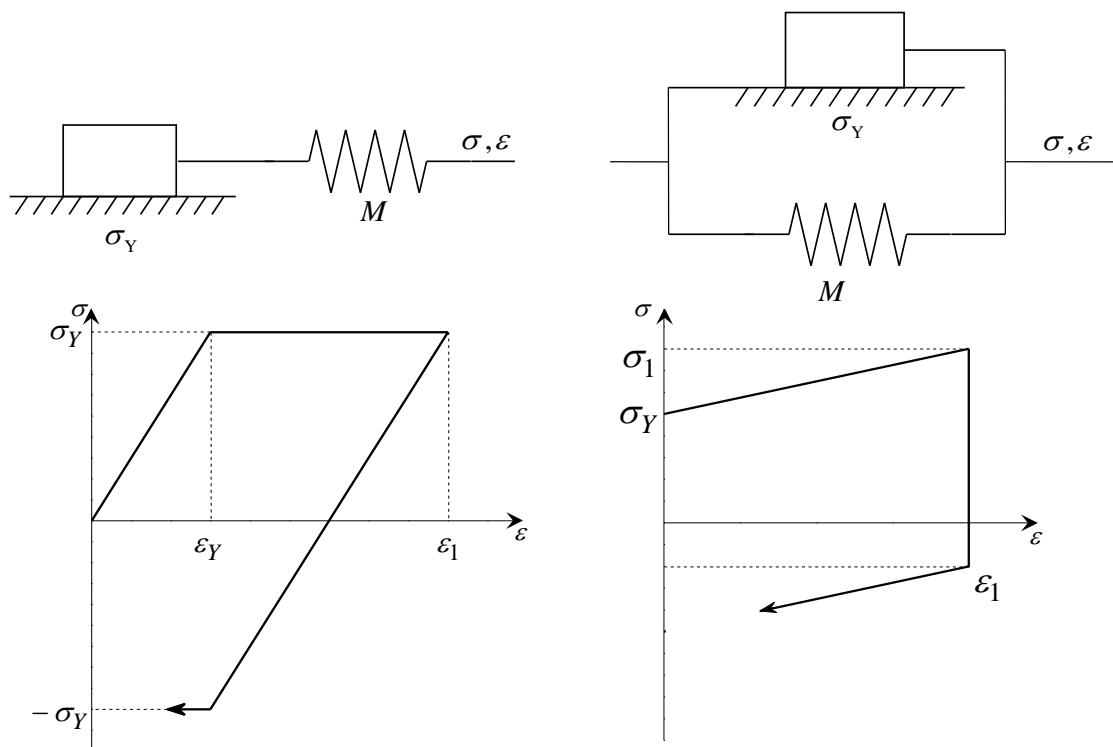
$$\sigma = \sigma_H + \sigma_{StV} \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_{StV} \quad (1.21)$$

Uvažujme namáhanie v kladnom smere. Nasledujúci vývoj je ilustrovaný na Obr. 12. Z definície StV vyplýva, že StV nebude aktívne (nebude sa deformovať) pre $\sigma < \sigma_Y$, a preto aj deformácia celého H-p-StV bude nulová. Pre $\sigma \geq \sigma_Y$ sa začne StV deformovať pri konštantnom napätí $\sigma_{StV} = \sigma_Y$. Nedeformuje sa ale neobmedzene. Z (1.21) vyplýva, že je jeho deformácia určovaná deformáciou H. Keďže napätie StV ostáva pri ďalšom raste celkového napätia konštantné, $\sigma_{StV} = \sigma_Y$, z prvej z rovníc (1.21). Pre napätie H dostávame $\sigma_H = \sigma - \sigma_Y$. Zmeňme smer namáhania v bode $[\varepsilon_1, \sigma_1]$. Pre deformáciu H-p-StV v tomto bode platí

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{StV} = \varepsilon_H = \frac{\sigma_1 - \sigma_Y}{M} \quad (1.22)$$

Namáhajme zapojenie H-p-StV v opačnom smere. H aj StV sa nedeformujú, pokles celkového napätia sa prejaví poklesom napätia StV. Obidve telesá ostávajú neaktívne dovtedy, kým napätie StV nedosiahne hodnotu $-\sigma_Y$. Po dosadení hodnoty napätia pružiny a hodnoty $\sigma_{StV} = -\sigma_Y$ do prvej z rovníc (1.21), dostávame pre celkové napätie, pri ktorom sa zapojenie H-p-StV znovu aktivuje, hodnotu $\sigma_1 - 2\sigma_Y$. Epizóda, počas ktorej sú obe telesá neaktívne je charakteristická poklesom napätia a nulovým poklesom deformácie.

Poznámka na záver. Nedostatkom sériového zapojenia H-s-StV je rast deformácie pri konštantnom napätí. Nedostatkom paralelného zapojenia je pokles napätia pri konštantnej deformácii. Vyhnúť sa týmto nedostatkom a modelovať tak hysterézne správanie materiálov je možné správnou kombináciou oboch zapojení.



Obr. 12 Ľavá strana: Hore: Reologický model sériového zapojenia H-s-StV. Dole: Závislosť napätia od deformácie pre H-s-StV. Pravá strana: Hore: Reologický model paralelného zapojenia H-p-StV. Dole: Závislosť napätia od deformácie pre H-p-StV.

1.3.3.5 Iwanov elastoplastický model

Iwan (1967) uviedol vo svojej práci dva typy reologických modelov popisujúcich hysterézne správanie materiálov. Paralelne-sériový model, ktorý pozostáva z N paralelne zapojených H-s-StV a sériovo-paralelný model, ktorý pozostáva z pružiny sériovo zapojenej s N zapojeniami H-p-StV. Obr. 13 porovnáva oba modely. Nevýhodou paralelne-sériového modelu je, že v ňom vieme vyjadriť iba napätie ako funkciu deformácie a nie naopak. Sériovo-paralelný model umožňuje obe vyjadrenia. V prípade závislosti deformácie od napätia vieme počas procesu namáhania deformáciu rozdeliť na jej plastickú a elastickú časť, na čom je založená väčšina rovníc teórie plasticity. Pre účely modelovania hysterézneho správania budeme, podobne ako napr. Joyner a Chen (1975), používať sériovo-paralelný model. Podrobný popis sériovo-paralelného modelu sa nachádza v podkapitole 4.1.

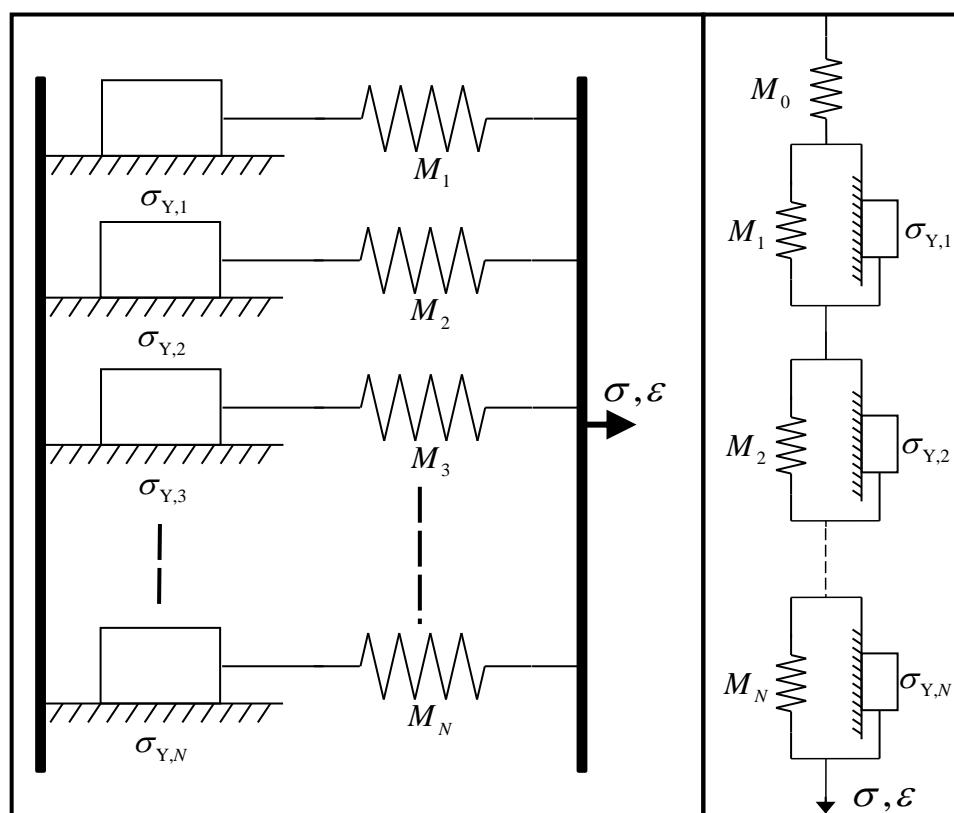
Iwanov model má niekoľko pozoruhodných vlastností. Spĺňa všetky štyri Masingove pravidlá (napr., Assimaki et al. 2008, Gandomzadeh 2011) a to len na základe vlastností základných reologických telies H a StV a pravidiel ich zapojenia. Iwanov model je

schopný identicky sledovať nameranú bb-krivku (bb-krivka nie je popísaná funkčnou závislosťou ale diskretnými bodmi). Nedostatkom Iwanovho modelu je to, že útlm je rovnaký ako útlm, ktorý vyplýva z druhého Masingovho pravidla. Výpočet útlmu pre Iwanov model sa nachádza v Prílohe A.

Iwanov model vo svojich prácach použili medzi inými Joyner a Chen (1975), Joyner (1975), Rao a Panda (1999), Bardet a Tobita (2001), Kausel a Assimaki (2002), Assimaki et al. (2008), Gandomzadeh (2011).

Výpočtové programy, ktoré využívajú Iwanov model:

NOAHW	originálny paralelne-sériový Iwanov model bb-krivka – namerané dáta (Hartzell et al. 2004)
NOAHH	paralelne-sériový Iwanov model + generalizované Masingove pravidlo bb-krivka – hyperbolický model (aby bolo možné zahrnúť korekciu na útlm) (Hartzell et al. 2004)
NERA	originálny sériovo-paralelný Iwanov model bb-krivka – namerané dáta (Bardet a Tobita 2001)



Obr. 13 Vľavo: Paralelne-sériový Iwanov model. Vpravo: Sériovo-paralelný Iwanov model.

1.4 Projekt Prenolin

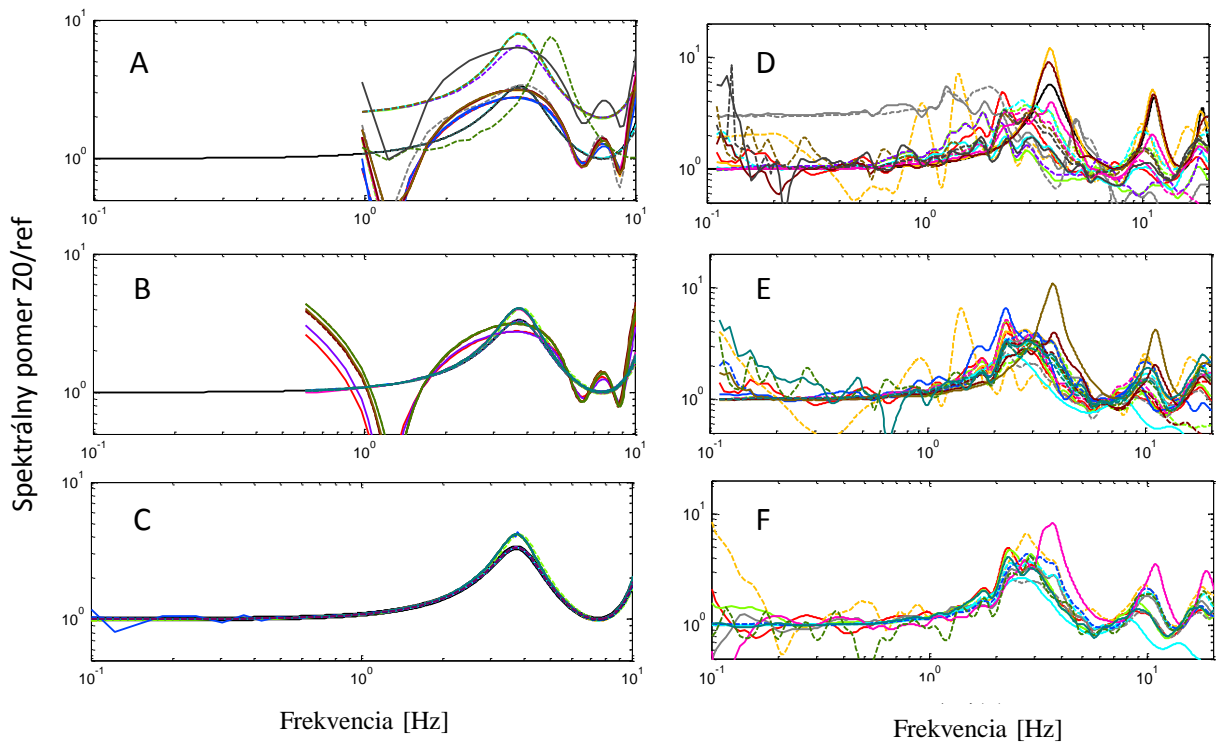
“Improvement of Prediction of soil Non-Linear effects caused by strong seismic motion.”

Medzinárodný projekt Prenolin, organizovaný niekoľkými francúzskymi inštitúciami, je projekt zameraný na zlepšenie numerického modelovania nelineárnych efektov silných zemetrasení. Najdôležitejším dôvodom vytvorenia projektu je úloha numerického modelovania v zohľadnení lokálnych podmienok v analýze seizmického ohrozenia (hazardu) na lokalitách jadrových elektrární. O tom, že je problematika viac než aktuálna, svedčí aj fakt, že sa doteraz do projektu zapojilo 21 tímov z Európy, USA a Japonska, vrátane tímu z našej univerzity (P. Moczo, J. Kristek, A. Richterová). Projekt je zaujímavý širokým spektrom metód a tímov. Nelineárnymi efektami sa zaoberajú seizmológovia aj seizmickí inžinieri (*earthquake engineers*). Konfrontácia metód, tímov a v neposlednom rade oboch komunit môže byť veľkým prínosom a možno očakávať významný metodologický i aplikačný prínos. Skúsenosti z predchádzajúcich projektov organizátori využili v príprave harmonogramu projektu a jeho cieľov. Projekt zahŕňa jednak verifikáciu, jednak validáciu metód a trvá dva roky. Cieľom verifikačnej fázy je overenie a testovanie metód numerických simulácií jednotlivých tímov pomocou kanonických 1D prípadov.

21 zúčastnených tímov používa 26 rozdielnych výpočtových programov. Rozdielne výsledky numerických simulácií nie sú spôsobené len rozdielnymi nelineárnymi modelmi, ale aj rozdielnymi numerickými schémami. Ak aj dva tímy používajú rovnaký nelineárny model, je možné, že používajú inú numerickú schému. Cieľom verifikačnej fázy je pochopiť rozdiely medzi výsledkami a odstrániť také, ktoré nie sú spôsobené samotnými nelineárnymi modelmi. Aby bolo možné overiť funkčnosť jednotlivých programov pre lineárne správanie, boli všetky simulácie vykonané aj pre elastický aj pre viskoelastický model. Príklad výsledkov pre lineárny elastický prípad (vstupný signál – impulzný Rickerov signál) je na Obr. 14 vľavo. Obrázok ilustruje spektrálny pomer zrýchlenia na voľnom povrchu a referenčného signálu pre homogénnu vrstvu na polpriestore (význam referenčného signálu vysvetlíme neskôr). Obr. 14(A) ukazuje výsledky (tzv.) prvej iterácie výpočtov, Obr. 14(B) korigované výsledky a Obr. 14(C) výsledky druhej iterácie. Je zrejmé, že iteratívny postup odstraňuje chyby a približuje výsledky k referenčnému riešeniu (pre elastický a viskoelastický prípad poznáme analytické, t.j., presné riešenie). Rozdiely vo výpočtoch boli spôsobené rozdielnou implementáciou vstupného signálu, viskoelastického útlmu či mylnými hodnotami materiálových parametrov.

Rozdiely medzi výsledkami nelineárnych výpočtov boli rádovo vyššie. Obr. 14 vpravo zobrazuje výsledky od prvej po druhú iteráciu. Rozdiel vo výsledkoch je spôsobený napríklad aj spôsobom, akým je aproximovaná bb-krivka či spôsobom, akým modely zahŕňajú útlm. V druhej iterácii sa zúčastnené tímy výsledkami rozdelili na niekoľko podskupín, ktorých výsledky sú veľmi podobné.

Druhou fázou projektu je validačná fáza. Tím Prenolinu vyberie niekoľko lokalít v Japonsku, na ktorých sa vykonajú geotechnické merania. Na týchto lokalitách boli zaznamenané silné aj slabé seizmické pohyby a bude teda možné porovnávať simulácie s reálnymi dátami. Podmienkou musí byť tiež ich 1D geometrická štruktúra.



Obr. 14 Spektrálny pomer zrýchlenia na voľnom povrchu a referenčného signálu pre homogénnu vrstvu na polpriestore. Farby odlišujú jednotlivé tímy. Vľavo: spektrálny pomer pre elastický model. Vpravo: prenosové funkcie pre nelineárny model a reálny vstupný signál škálovaný na amplitúdu $PGA = 5 m.s^{-2}$ (vysvetlenie neskôr). Grafy sú prevzaté z prezentácie koordinátorky projektu Prenolin.

Participácia na projekte bola veľkou príležitosťou overiť nami používanú konečno-diferenčnú schému a najmä implementáciu nelineárneho modelu do tejto schémy. Naše simulácie pre lineárne elastické a viskoelastické modely boli v druhej iterácii takmer identické s referenčným riešením. Výsledky simulácií pre nelineárne modely patria do

jednej z dvouh početných skupín. Projekt naďalej pokračuje a tím fakulty bude v účasti pokračovať aj po ukončení a odovzdaní tejto diplomovej práce.

2 Ciele práce

- vytvorenie algoritmickeho matematicko-fyzikalneho popisu Iwanovho modelu
- návrh alternativnych diskretizacií 1D vrstevnatého modelu elastoplastického prostredia a ich numerické testovanie
- vypracovanie výpočtového programu
- testovanie navrhnutého algoritmu a programu
- aplikácia v projekte Prenolin

3 Metódy riešenia

V podkapitole 4.1 popisujeme navrhnutý algoritmus na výpočet napätia z deformácie v Iwanovom modeli. Tento algoritmus sme implementovali do výpočtového programu 1DFD_DVS, ktorý je podrobne popísaný v knihe Moczo et al. (2004). V tejto kapitole stručne zhrnieme všetky metódy, ktoré program pri numerickej simulácii vlnového poľa využíva. Všetky spomínané metódy a ich podrobný popis je možné nájsť v knihe Moczo et al. (2014).

3.1 Konečno-diferenčná schéma pre numerickú simuláciu seizmického pohybu v 1D viskoelastickom prostredí

Program 1DFD_DVS je 1D program založený na metóde konečných diferencií. Pohybová rovnica je vyjadrená v displacement-velocity-stress formulácii, ktorú sme popísali v podkapitole 1.1. Schéma používa striedavo-usporiadanú sieť (*staggered-grid*) v čase aj priestore. Hodnoty posunutia, rýchlosti a zrýchlenia počítame v sieťových bodoch L a hodnoty napätia a deformácie v sieťových bodoch $L+1/2$. Schéma je štvrtého rádu presnosti v priestore a druhého rádu presnosti v čase. Takúto schému označujeme (2,4) DVS SG a je popísaná vzťahmi

$$\begin{aligned} T_{L+1/2}^m &= C_{I+1/2}^H \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{24} (D_{L+2}^m - D_{L-1}^m) + \frac{9}{8} (D_{L+1}^m - D_L^m) \right] \\ V_I^{m+1/2} &= V_I^{m-1/2} + \frac{1}{\rho_I^A} \frac{\Delta t}{h} \left[-\frac{1}{24} (T_{L+3/2}^m - T_{L-3/2}^m) + \frac{9}{8} (T_{L+1/2}^m - T_{L-1/2}^m) \right] \\ D_I^{m+1} &= D_I^m + \Delta t V_I^{m+1/2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde písmená D, V, T označujú posunutie, rýchlosť a napätie, Δt časový krok a h sieťový krok. $C_{I+1/2}^H$ a ρ_I^A sú efektívne parametre prostredia a počítame ich podľa vzťahov

$$\rho_L^A = \frac{1}{h} \int_{z_{L-1/2}}^{z_{L+1/2}} \rho(z) dz \quad , \quad C_{L+1/2}^H = \left[\frac{1}{h} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \frac{1}{C(z)} dz \right]^{-1} \quad (3.2)$$

Keďže pre sieťové body na voľnom povrchu nemôžeme použiť schému (3.1), používa program alternatívnu metódu AFDA – adjustované konečno-diferenčné aproximácie. Táto metóda využíva pri simulácii voľného povrchu iba sieťové body vnútri prostredia, pričom zachováva presnosť štvrtého rádu.

Neodrážajúce hranice siete sú simulované metódou PML (*perfectly matched layer*).

Realistický model útlmu je realizovaný reológiou generalizovaného Maxwellovho telesa (GMB). Model umožňuje simulovať konštantný útlm Q na širokom intervale frekvencií. Simulácie pre elastické a viskoelastické modely sme počítali v pôvodnom programe 1DFD_DVS. Príprava sieťového modelu je realizovaná programom MODEL_PREP_1D. Oba programy je možné nájsť v knihe Moczo et al. (2004).

Simulácia dopadajúcej rovinatej vlny je realizovaná metódou *wavefield decomposition method*, ktorá rozkladá vlnové pole na jeho zdrojovú a reziduálnu časť. Takáto excitácia vlnového poľa je fyzikálne kauzálna a v projekte Prenolin sa nazýva *elastic base*. Ako vstupný signál sme v tomto prípade použili časový záznam posunutia. Druhý typ excitácie vlnového poľa, použitý v projekte Prenolin, sa nazýva *rigid base*. V takomto prípade sa priamo na rozhraní vrstva/polpriestor predpíše okrajová podmienka, ktorú sme predpísali vo forme zrýchlenia. Veľkosť modelu je v takomto prípade limitovaná hrúbkou vrstvy (vrstiev). Vstupným signálom pre projekt Prenolin boli v oboch prípadoch impulzný Rickerov signál a dva reálne seizmogramy zaznamenané na voľnom povrchu počas dvoch zemetrasení. Integráciu zrýchlenia pre všetky typy signálov vykonal tím projektu Prenolin. Keďže efekt zosilnenia na voľnom povrchu spôsobuje dvojnásobné amplitúdy v porovnaní s dopadajúcou vlnou, vstupný signál sa v prípade *elastic base* vydělil faktorom dva. V prípade *rigid base* sme na hranici vrstva/polpriestor predpísali pôvodný záznam zrýchlenia. Pri vyhodnocovaní výsledkov použili koordinátori projektu Prenolin koncept referenčného signálu. Referenčným signálom je pre *elastic base* aj *rigid base* pôvodný záznam zrýchlenia (nevýdelený faktorom 2). Na kvantifikáciu prenosových vlastností prostredia bol namiesto prenosovej funkcie použitý spektrálny pomer zrýchlenia na voľnom povrchu a referenčného signálu. V ďalšom texte budeme pre jednoduchosť hovoriť len o spektrálnom pomere $Z0/ref$.

Ak chceme aby použitá numerická schéma bola dostatočne presná pre frekvencie menšie ako frekvencia f_{AC} (efekt sieťovej disperzie je zanedbateľný), potom pre sieťový krok platí podmienka

$$h \approx \frac{v_{\min}}{6f_{AC}} \quad (3.3)$$

kde v_{\min} označuje minimálnu rýchlosť v uvažovanom modeli. Časový krok Δt musí spĺňať podmienku stability

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{h}{v_{\max}} \quad (3.4)$$

kde v_{\max} označuje maximálnu rýchlosť v modeli.

3.2 Implementácia Iwanovho modelu do výpočtového programu

Matematicko-fyzikálny popis Iwanovho modelu a zavedenie pojmu aktivačných napätí a deformácií sa nachádza v podkapitole 4.1. Na tomto mieste uvedieme iba princíp implementácie do konečno-diferenčnej schémy. Pre deformáciu a napätie platí

$$E_{L+1/2}^m = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{24} (D_{L+2}^m - D_{L-1}^m) + \frac{9}{8} (D_{L+1}^m - D_L^m) \right] \quad (3.5)$$

$$T_{L+1/2}^m = \text{FuncIw} \left\{ E_{L+1/2}^{m-1}, \sigma_{L+1/2}^{m-1}, E_{L+1/2}^m \right\}$$

kde sme označením $\text{FuncIw}\{ \}$ označili funkciu, ktorá počíta napätie v sieťovom bode $L+1/2$ v čase $m\Delta t$ pomocou Iwanovho modelu a jej vstupným parametrom je deformácia a napätie v čase $(m-1)\Delta t$ a deformácia v čase $m\Delta t$. Označme prvý sieťový bod nachádzajúci sa v homogénnom elastickom polpriestore L_{NL} . Všetky sieťové body $L = L_{NL}, \dots, MZ$, kde MZ označuje posledný sieťový bod modelu, sa pri výpočte napätia riadia Hookeovým zákonom pre homogénne, izotropné elastické kontinuum. V týchto bodoch potrebujeme poznať iba hustotu ρ a elastický modul C . Každý sieťový bod $L = 0, \dots, L_{NL} - 1$ je definovaný jedným Iwanovým modelom a jeho parametrami. Napätie v sieťovom bode potom počítame podľa algoritmu, ktorý popisujeme v podkapitole 4.1.

4 Výsledky

4.1 Matematicko – fyzikálny popis Iwanovho modelu

V nasledujúcej podkapitole odvodíme všeobecné vzťahy pre výpočet napätia z deformácie v Iwanovom modeli. Pri odvádzaní budeme využívať poznatky z odstavca 1.3.3 o reologických modeloch a odstavca 3.4.2 z knihy Moczo et al. (2014). Podkapitola môže slúžiť ako teoretický návod na zostavenie výpočtového algoritmu.

4.1.1 Pomocné úvahy

Sériové zapojenie pružín. Uvažujme $N+1$ sériovo zapojených pružín. Označme M_k elastický modul k -tej pružiny. Aplikácia napätia na takúto sústavu spôsobí okamžitú deformáciu. Z definície sériového zapojenia je zrejmé, že napätie na všetkých pružinách bude rovnaké. Veľkosť deformácie jednotlivých pružín bude závislá od hodnoty ich elastických modulov. Uvažujme nejaký referenčný stav napätia a deformácie v čase t a označme ho $[\sigma^r, \varepsilon^r]$. Pre celkové napätie a celkovú deformáciu platia vzťahy:

$$\sigma^r = \sigma_{H,k}^r, \quad \varepsilon^r = \sum_{k=0}^N \varepsilon_{H,k}^r = \sigma^r \sum_{k=0}^N \frac{1}{M_k} \quad (4.1)$$

V čase $t + \Delta t$ bude v dôsledku prírastku $\Delta\sigma$ celkové napätie a deformácia

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^r + \Delta\sigma \\ \varepsilon &= \varepsilon^r + \Delta\varepsilon = \varepsilon^r + \sum_{k=0}^N \frac{\Delta\sigma}{M_k} = \varepsilon^r + \sum_{k=0}^N \frac{\Delta\sigma}{M_k} = \varepsilon^r + (\sigma - \sigma^r) \sum_{k=0}^N \frac{1}{M_k} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sériové zapojenie H-p-StV telies. Uvažujme $N+1$ sériovo zapojených H-p-StV. Označme M_k elastický modul k -tej pružiny a $\sigma_{Y,k}$ medzné napätie k -teho StV. Nech pre medzné napätia jednotlivých StV platí

$$\sigma_{Y,0} < \sigma_{Y,1} < \dots < \sigma_{Y,N} \quad (4.3)$$

Pre deformáciu a napätie na zapojení $(\text{H-p-StV})_k$ dostaneme

$$\sigma_k = \sigma_{\text{H},k} + \sigma_{\text{StV},k} = \sigma \quad , \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{\text{H},k} = \varepsilon_{\text{StV},k} \quad (4.4)$$

Vo všeobecnosti sa zaujímame o cyklickú zmenu napätia. To znamená, že nielen veľkosť, ale aj smer napätia sa menia. Ak je prírastok $\Delta\sigma$ kladný, hovoríme o namáhaní v kladnom smere. Ak je prírastok $\Delta\sigma$ záporný, hovoríme o namáhaní v zápornom smere. Bod, v ktorom zmeníme smer namáhania (prírastok $\Delta\sigma$ sa zmení zo záporného na kladný alebo naopak) budeme volať *reverzný bod*.

V porovnaní so sériovým zapojením pružín nemusí aplikácia napätia na sústavu sériovo zapojených H-p-StV nevyhnutne spôsobiť okamžitú deformáciu. $(\text{H-p-StV})_k$ sa aktivuje (začne deformovať) v kladnom smere, ak platí, že $\sigma_{\text{StV},k} = \sigma_{Y,k}$ a v zápornom smere ak $\sigma_{\text{StV},k} = -\sigma_{Y,k}$. Dosadíme tieto hodnoty do prvej z rovníc (4.4) a nazvime celkové napätie, pri ktorom sa $(\text{H-p-StV})_k$ aktivuje, *aktivačné napätie*:

$$\bar{\sigma}_k^A \equiv \sigma_{\text{H},k} + \sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A \equiv \sigma_{\text{H},k} - \sigma_{Y,k} \quad (4.5)$$

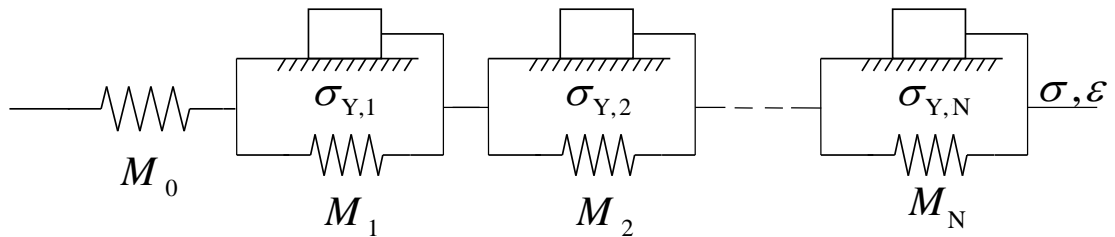
kde šípka určuje smer namáhania. Zo vzťahu (4.5) je zrejmé, že aktivačné napätie je závislé od napätia kumulovaného na pružine. Uvažujme nejaký stav napätia a deformácie a označme ho $[\sigma^R, \varepsilon^R]$. Zmeňme v tomto bode smer namáhania. $[\sigma^R, \varepsilon^R]$ je potom reverzný bod. Je dôležité si uvedomiť, že v reverznom bode sa všetky zapojenia H-p-StV deaktivujú. Ak vo vzťahu (4.5) dosadíme za $\sigma_{\text{H},k}$ napätie na pružine zodpovedajúce reverznému bodu, potom pre aktivačné napätia dostaneme

$$\bar{\sigma}_k^A \equiv \sigma^R - \sigma_{\text{StV},k}^R + \sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A \equiv \sigma^R - \sigma_{\text{StV},k}^R - \sigma_{Y,k} \quad (4.6)$$

kde horný index R označuje hodnoty príslušných napätí v reverznom bode. Aktivačné napätie určuje hodnotu napätia, pri ktorej sa $(\text{H-p-StV})_k$ opätovne aktivuje v jednom alebo druhom smere.

4.1.2 Iwanov model

Položme vo vyššie uvedenom sériovom zapojení H-p-StV telies, $\sigma_{Y,0} = 0$. Nulová hodnota medzného napätia zredukuje zapojenie $(\text{H-p-StV})_0$ na pružinu H_0 . Sériové zapojenie jednej pružiny a N telies H-p-StV nazývame Iwanov model (Obr. 15). Pružina H_0 zabezpečuje modelu vlastnosť okamžitej deformácie, ktorá je podmienkou elasto-plastického správania materiálu.



Obr. 15 Iwanov elastoplastický model.

Uvažujme počiatočný stav $\sigma = 0$ a $\varepsilon = 0$. Ďalej popísaný vývoj ilustruje (Obr. 16). Namáhajme Iwanov model v kladnom smere (doprava), až kým nedosiahneme určitý stav napätia

$$\sigma_{Y,K_0} \leq \sigma < \sigma_{Y,K_0+1} \quad (4.7)$$

Nerovnosť (4.7) znamená, že sa počas namáhania aktivovalo K_0 zapojení H-p-StV. H_0 a každé $(\text{H-p-StV})_k$; $k = 1, \dots, K_0$ prispieva k celkovej deformácii priamoúmerne rozdielu $\sigma - \sigma_{Y,k}$ a nepriamoúmerne elastickému modulu M_k . Celkovú deformáciu môžeme zapísať:

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{K_0} \frac{\sigma - \sigma_{Y,k}}{M_k} \quad (4.8)$$

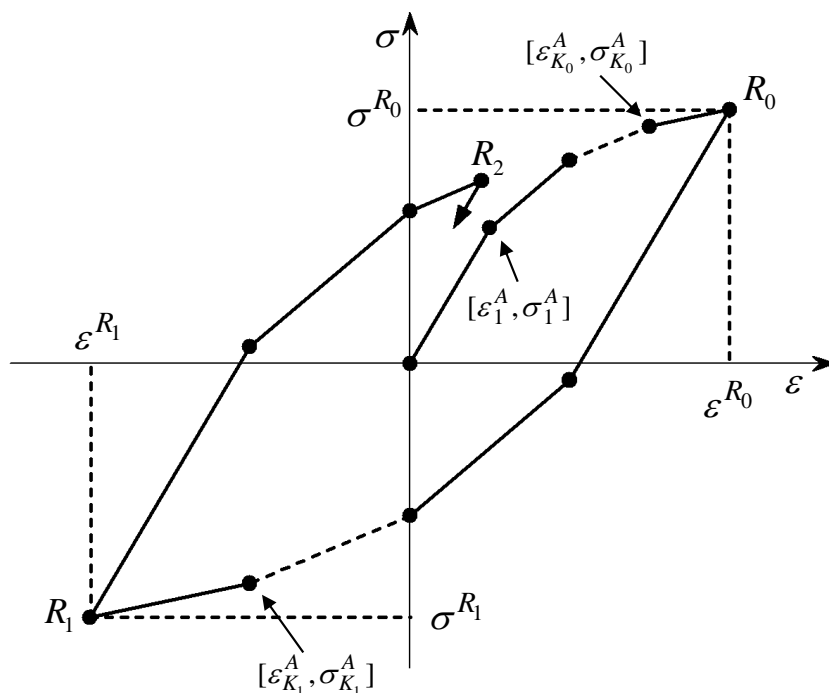
(Poznámka: Z dôvodu jednoduchšieho zápisu je vo vzťahu (4.8) zahrnutá aj nulová hodnota $\sigma_{Y,0} = 0$.)

Uvažujme, že v stave definovanom rovnicami (4.7) a (4.8) zmeníme smer namáhania.

Označme hodnoty napätia a deformácie v reverznom bode $[\sigma^{R_0}, \varepsilon^{R_0}]$:

$$\varepsilon^{R_0} = \sum_{k=0}^{K_0} \frac{\sigma^{R_0} - \sigma_{Y,k}}{M_k} \quad (4.9)$$

(Krivka spájajúca počiatkový stav $[\sigma = 0, \varepsilon = 0]$ s reverzným bodom $[\sigma^{R_0}, \varepsilon^{R_0}]$ je časť bb-krivky).



Obr. 16 Vývoj napätia σ a deformácie ε v Iwanovom modeli. $[\bar{\varepsilon}_l^A, \bar{\sigma}_l^A]$ označuje bod, v ktorom sa l -té zapojenie H-p-StV aktivuje. R_j označuje j -ty reverzný bod.

V reverznom bode zmeníme smer namáhania. Všetky zapojenia H-p-StV sa deaktivujú, pružina H_0 reaguje na zmenu smeru okamžitou zmenou deformácie. Vzhľadom k tomu, že uvažujeme všeobecný časový priebeh napätia, môžeme sa do ďalšieho reverzného bodu R_1 dostať v ktoromkoľvek časovom okamihu. Z toho vyplýva, že pri namáhaní v zápornom smere môže byť aktivovaný ľubovoľný počet zapojení H-p-StV.

Nájdime aktivačné napätia v reverznom bode R_0 . Pre napätia na StV telesách platí

$$\sigma_{StV,k}^{R_0} = \sigma_{Y,k} ; k = 0, \dots, K_0 \quad ; \quad \sigma_{StV,k}^{R_0} = \sigma^{R_0} ; k = K_0 + 1, \dots, N \quad (4.10)$$

Použitím vzťahov (4.10) a (4.6) dostávame pre aktivačné napätia

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_k^A &= \sigma^{R_0} - 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_0} \quad ; \quad k = 0, \dots, K_0 \\
\bar{\sigma}_k^A &= -\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma_{Y,k} \quad ; \quad k = K_0 + 1, \dots, N
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

Pri pohľade na rovnice (4.11) si môžeme uvedomiť, že $\bar{\sigma}_0^A$ a teda aktivačné napätie samotnej pružiny je v oboch smeroch totožné s hodnotou napätia v reverznom bode.

V bode $[\sigma^{R_0}, \varepsilon^{R_0}]$ sme zmenili smer namáhania. Aplikujme napätie v zápornom smere až do stavu charakterizovaného hodnotami $[\sigma^{R_1}, \varepsilon^{R_1}]$. Tento stav považujeme za ďalší reverzný bod. Počet aktivovaných zapojení H-p-StV označme K_1 . Pre napätie a deformáciu v reverznom bode platí

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{K_1+1}^A &< \sigma^{R_1} \leq \bar{\sigma}_{K_1}^A \\
\varepsilon^{R_1} &= \varepsilon^{R_0} + \Delta\varepsilon = \varepsilon^{R_0} + \Delta\varepsilon_0 + \dots + \Delta\varepsilon_{K_1} = \varepsilon^{R_0} + \sum_{k=0}^{K_1} \frac{\sigma^{R_1} - \bar{\sigma}_k^A}{M_k}
\end{aligned}
\tag{4.12}$$

Tak ako v reverznom bode R_0 , aj v bode R_1 je potrebné určiť aktivačné napätia. Pre všeobecné riešenie musíme rozlišovať dva prípady

$$\begin{aligned}
K_1 &< K_0 \\
k = 0, \dots, K_1 & : \quad \sigma_{\text{StV},k}^{R_1} = -\sigma_{Y,k} \\
& \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_1} + 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_1} \\
k = K_1 + 1, \dots, K_0 & : \quad \sigma_{\text{StV},k}^{R_1} = \sigma_{Y,k} - \left(\sigma^{R_0} - \sigma^{R_1} \right) \\
& \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_0} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_0} - 2\sigma_{Y,k} \\
k = K_0 + 1, \dots, N & : \quad \sigma_{\text{StV},k}^{R_1} = \sigma^{R_1} \\
& \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = -\sigma_{Y,k}
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
& K_1 \geq K_0 \\
& k = 0, \dots, K_0 \quad : \quad \sigma_{\text{StV},k}^{R_1} = -\sigma_{Y,k} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_1} + 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_1} \\
& k = K_0 + 1, \dots, K_1 : \quad \sigma_{\text{StV},k}^{R_1} = -\sigma_{Y,k} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_1} + 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_1} \\
& k = K_1 + 1, \dots, N \quad : \quad \sigma_{\text{StV},k}^{R_1} = \sigma^{R_1} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma_{Y,k} \quad \quad \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = -\sigma_{Y,k}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Porovnajme aktivačné napätia vypočítané v reverznom bode R_0 a v reverznom bode R_1 . Zmena aktivačných napätí nastala iba v tých zapojeniach, ktoré boli medzi bodmi R_0 a R_1 aktivované. Takéto správanie je prirodzené, vzhľadom k tomu, že na neaktívnych zapojeniach H-p-StV nedošlo k zmene napätia na pružine (pozri vzťah (4.5)).

V bode $[\sigma^{R_1}, \varepsilon^{R_1}]$ sme zmenili smer namáhania. Aplikujme na Iwanov model napätie v kladnom smere, až do stavu charakterizovaného hodnotami $[\sigma, \varepsilon]$. Uvažujme aktiváciu K_2 H-p-StV. Pre celkovú deformáciu a napätie platí

$$\begin{aligned}
& \bar{\sigma}_{K_2}^A \leq \sigma < \bar{\sigma}_{K_2+1}^A \\
& \varepsilon = \varepsilon^{R_1} + \Delta\varepsilon = \varepsilon^{R_1} + \sum_{k=0}^{K_2} \frac{\sigma - \bar{\sigma}_k^A}{M_k}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Podobne môžeme pokračovať pre ďalšie reverzné body.

Ukázali sme návod na výpočet deformácie z napätia pri namáhaní v kladnom smere pozdĺž bb-krivky, namáhaní v zápornom smere a opätovnom namáhaní v kladnom smere. Podobne môžeme pokračovať aj pre ďalšie reverzné body.

Všeobecný algoritmus pre výpočet deformácie z napätia. Vyššie uvedená analýza vedie ku všeobecnému záveru. Uvažujme počiatočný stav $[\sigma = 0, \varepsilon = 0]$. Pre účely zovšeobecnenia považujme aj tento stav za reverzný bod. Určíme v ňom počiatočné aktivačné napätia. Zo vzťahu (4.5) vyplýva, že $\bar{\sigma}_k^A = \sigma_{Y,k}$, $\bar{\sigma}_k^A = -\sigma_{Y,k}$. Aktivačné napätie zapojenia

$(H-p-StV)_k$ sa v reverznom bode R_j zmení len vtedy, ak je aktívne medzi bodmi R_{j-1} a R_j . Výpočet aktivačných napätí a výpočet deformácie z napätia sumarizuje Tab. 3.

Aktivačné napätia v reverznom bode $[\sigma = 0, \varepsilon = 0]$	
$\bar{\sigma}_k^A = \sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = -\sigma_{Y,k}$	
Výpočet aktivačných napätí v reverznom bode Zmena smeru namáhania	
z kladného na záporný	zo záporného na kladný
ak $\bar{\sigma}_{K_j}^A \leq \sigma^{R_j} < \bar{\sigma}_{K_{j+1}}^A$ potom pre $k = 0, \dots, K_j$ $\bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j} - 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j}$	ak $\bar{\sigma}_{K_{j+1}}^A < \sigma^{R_j} \leq \bar{\sigma}_{K_j}^A$ potom pre $k = 0, \dots, K_j$ $\bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j} + 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j}$
Výpočet deformácie	
namáhanie v zápornom smere	namáhanie v kladnom smere
ak $\bar{\sigma}_{K_{j+1}+1}^A < \sigma \leq \bar{\sigma}_{K_{j+1}}^A$	ak $\bar{\sigma}_{K_{j+1}}^A \leq \sigma < \bar{\sigma}_{K_{j+1}+1}^A$
$\varepsilon = \varepsilon^{R_j} + \sum_{k=0}^{K_{j+1}} \frac{\sigma - \bar{\sigma}_k^A}{M_k}$	$\varepsilon = \varepsilon^{R_j} + \sum_{k=0}^{K_{j+1}} \frac{\sigma - \bar{\sigma}_k^A}{M_k}$

Tab. 3 Výpočet aktivačných napätí v reverzných bodoch a celkovej deformácie Iwanovho modelu.

Všeobecný algoritmus pre výpočet napätia z deformácie. Vzhľadom k tomu, že riešenie pohybovej rovnice numerickým modelovaním vyžaduje v každom časovom kroku výpočet napätia z deformácie, je potrebné urobiť podobné zovšeobecnenie ako v predchádzajúcom prípade aj pre výpočet napätia z deformácie.

Uvažujme druhú z rovníc (4.15). Položme $\sigma = \bar{\sigma}_l^A$, $K_2 = l$ a vypočítajme deformáciu pre $l = 0, \dots, K_1$

$$\bar{\varepsilon}_l^A = \varepsilon^{R_1} + \sum_{k=0}^l \frac{\bar{\sigma}_l^A - \bar{\sigma}_k^A}{M_k} \quad (4.16)$$

Deformáciu sme označili ako $\bar{\varepsilon}_l^A$ z jednoduchého dôvodu: Rovnica (4.16) udáva celkovú deformáciu v Iwanovom modeli v okamihu aktivácie $(\text{H-p-StV})_l$ medzi reverznými bodmi R_1 a R_2 . Môžeme teda hovoriť o aktivačnej deformácii. Vzťah (4.16) vieme upraviť do tvaru, ktorý je vhodnejší pre výpočtový algoritmus. Deformácia Iwanovho modelu v intervale $\bar{\varepsilon}_l^A \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}_{l+1}^A$ je ekvivalentná deformácii l sériovo zapojených pružín. Využime druhú z rovníc (4.2) a položíme $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{l+1}^A$, $\varepsilon^r = \bar{\varepsilon}_l^A$, $\sigma = \bar{\sigma}_{l+1}^A$, $\sigma^r = \bar{\sigma}_l^A$ a $N = l$. Pre aktivačnú deformáciu dostaneme iteratívny vzťah

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{l+1}^A &= \bar{\varepsilon}_l^A + \left(\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A \right) \sum_{k=0}^l \frac{1}{M_k} \\ l &= 0, \dots, K_1 - 1 \quad , \quad \bar{\varepsilon}_0^A = \varepsilon^{R_1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Rovnosť $\bar{\varepsilon}_0^A = \varepsilon^{R_1}$ vyplýva zo vzťahu (4.16). V reverznom bode R_j je postačujúce zmeniť deformácie len tých zapojení, ktoré boli aktívne medzi reverzným bodom R_{j-1} a R_j .

Uvažujme teraz podmienku podobnú nerovnici z (4.15)

$$\bar{\varepsilon}_{K_2}^A \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}_{K_2+1}^A \quad (4.18)$$

Podobne ako pri odvodení iteratívneho vzťahu pre výpočet aktivačnej deformácie, aj teraz môžeme využiť analógiu so sériovo zapojenými pružinami. V druhej z rovníc (4.2) položíme $\varepsilon^r = \bar{\varepsilon}_{K_2}^A$, $\sigma^r = \bar{\sigma}_{K_2}^A$ a $N = K_2$. Potom pre výpočet napätia z deformácie dostaneme vzťah

$$\sigma = \bar{\sigma}_{K_2}^A + \frac{\left(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_{K_2}^A \right)}{\sum_{k=0}^{K_2} \frac{1}{M_k}} \quad (4.19)$$

Postup pri výpočte napätia z deformácie sumarizuje Tab. 4.

Aktivačné napätia v bode $[\sigma = 0, \varepsilon = 0]$	
$\bar{\sigma}_k^A = \sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = -\sigma_{Y,k} \quad , k = 0, \dots, N$	
Výpočet aktivačnej deformácie v bode $[\sigma = 0, \varepsilon = 0]$	
$\bar{\varepsilon}_{l+1}^A = \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A) \sum_{k=0}^l \frac{1}{M_k} \quad , \quad \bar{\varepsilon}_{l+1}^A = \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A) \sum_{k=0}^l \frac{1}{M_k}$ $l = 0, \dots, N-1 \quad , \quad \bar{\varepsilon}_0^A = \bar{\varepsilon}_0^A = \bar{\sigma}_0^A = \bar{\sigma}_0^A = 0$	
Výpočet aktivačných napätí a deformácií v reverznom bode Zmena smeru namáhania	
z kladného na záporný	zo záporného na kladný
ak $\bar{\varepsilon}_{K_j}^A \leq \varepsilon^{R_j} < \bar{\varepsilon}_{K_j+1}^A$ potom pre $k = 0, \dots, K_j$ $\bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j} - 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j}$	ak $\bar{\varepsilon}_{K_j+1}^A < \varepsilon^{R_j} \leq \bar{\varepsilon}_{K_j}^A$ potom pre $k = 0, \dots, K_j$ $\bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j} + 2\sigma_{Y,k} \quad , \quad \bar{\sigma}_k^A = \sigma^{R_j}$
$\bar{\varepsilon}_{l+1}^A = \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A) \sum_{k=0}^l \frac{1}{M_k} \quad , \quad \bar{\varepsilon}_{l+1}^A = \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A) \sum_{k=0}^l \frac{1}{M_k}$ $l = 0, \dots, K_j - 1 \quad , \quad \bar{\varepsilon}_0^A = \bar{\varepsilon}_0^A = \varepsilon^{R_j}$	
Výpočet napätia	
namáhanie v zápornom smere	namáhanie v kladnom smere
ak $\bar{\varepsilon}_{K_{j+1}+1}^A < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_{K_{j+1}}^A$ $\sigma = \bar{\sigma}_{K_{j+1}}^A + \frac{(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_{K_{j+1}}^A)}{\sum_{k=0}^{K_{j+1}} \frac{1}{M_k}}$	$\bar{\varepsilon}_{K_{j+1}}^A \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}_{K_{j+1}+1}^A$ $\sigma = \bar{\sigma}_{K_{j+1}}^A + \frac{(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_{K_{j+1}}^A)}{\sum_{k=0}^{K_{j+1}} \frac{1}{M_k}}$

Tab. 4 Výpočet aktivačných napätí a deformácií a celkového napätia v Iwanovom modeli.

Poznámka: Aby sme mohli z reálnych dát získať parametre Iwanovho modelu, je dôležité uvedomiť si ich spojitosť s veličinami popísanými v podkapitole 1.2.

- Počiatočné aktivačné napätia a k nim prislúchajúce deformácie vytvárajú bb-krivku.

- Tangenciálny modul je definovaný ako smernica dotyčnice k bb-krivke. V prípade diskrétnych bodov bb-krivky ho môžeme vyjadriť vzťahom

$$G_{t,l} = \frac{\sigma_{Y,l+1} - \sigma_{Y,l}}{\varepsilon_{Y,l+1} - \varepsilon_{Y,l}}, \quad l = 0, \dots, N \quad (4.20)$$

kde $\varepsilon_{Y,l}$ je deformácia prislúchajúca medznému napätiu $\sigma_{Y,l}$.

- Dosadením počiatkových aktivačných napätí a deformácií do vzťahu (4.17) pre tangenciálny modul dostávame

$$G_{t,l} = \left[\sum_{k=0}^l \frac{1}{M_k} \right]^{-1} \quad (4.21)$$

Pre výpočet aktivačných deformácií potom platí vzťah

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{l+1}^A &= \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A) (G_{t,l})^{-1} \\ \bar{\varepsilon}_{l+1}^A &= \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l+1}^A - \bar{\sigma}_l^A) (G_{t,l})^{-1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pre napätie potom dostávame

$$\sigma = \bar{\sigma}_l^A + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_l^A) G_{t,l} \quad (4.23)$$

V prípade, že poznáme tangenciálne moduly $G_{t,l}$, nepotrebujeme poznať elastické moduly M_k jednotlivých zapojení H-p-StV. To nám uľahčí výpočet parametrov Iwanovho modelu.

4.1.3 Výpočet parametrov Iwanovho modelu

Parametre Iwanovho modelu musíme voliť tak, aby čo najlepšie aproximovali nelineárne vlastnosti materiálov popísané v podkapitole 1.2. Uviedli sme tu dva druhy kriviek, ktoré je možné merať. Krivku redukcie modulu, ktorá udáva závislosť normalizovaného modulu od deformácie a útlmovú krivku, ktorá určuje závislosť útlmu od deformácie. Iwanov model uvedený v paragrafe 1.3.3.5 neumožňuje rešpektovať ľubovoľnú útlmovú krivku. Útlm vyplýva z jeho vlastností a vieme ho vypočítať pre konkrétnu bb-krivku. Okrem kriviek definujúcich nelineárne vlastnosti materiálov potrebujeme poznať aj hustotu

a rýchlosť šírenia S-vln, z ktorých vieme vypočítať elastický modul podľa vzťahu $G_{\max} = \rho v_S^2$. Postup pri určovaní parametrov Iwanovho modelu je nasledovný:

- Z nameranej krivky redukcie modulu získame bb-krivku.
- bb-krivku aproximujeme $N + 1$ bodmi, kde N označuje počet H-p-StV.
- Z bb-krivky získame tangenciálne moduly.

4.1.3.1 Výpočet bb-krivky

Uvažujme nameranú krivku redukcie modulu. Označme si jednotlivé body tejto krivky

$\left[\left(\frac{G_s}{G_{\max}} \right)^{(i)}, \varepsilon^{(i)} \right]$. Podľa vzťahov (1.7) a (1.8) dostávame pre body bb-krivky

$$\left[\varepsilon^{(i)}, \sigma^{(i)} = G_s^{(i)} \varepsilon^{(i)} \right], \quad G_s^{(i)} = \left(\frac{G_s}{G_{\max}} \right)^{(i)} G_{\max}, \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (4.24)$$

kde n určuje počet nameraných bodov. Všimnime si, že index i nadobúda hodnoty $i = 2, \dots, n+1$. Dôvod je vysvetlený v ďalšom odseku.

Krivky redukcie modulu sa udávajú pre hodnoty $G_s / G_{\max} < 1$. Hodnota $G_s / G_{\max} = 1$ zodpovedá elastickému správaniu materiálu. To znamená, že prvému bodu krivky redukcie nezodpovedá bod bb-krivky v jej elastickej časti, ale bod, v ktorom je už materiál pretvorený – čierny bod na Obr. 16. Kvôli výpočtu parametrov Iwanovho modelu by sme však potrebovali prvý bod bb-krivky, od ktorého sa materiál už nespráva elasticky, t.j., bod, ktorý zodpovedá prvému medznému napätiu. Popíšeme spôsob, ktorým sme tento bod (červený bod na Obr. 16) odhadli. Uvedený postup je vo svojej podstate len jednoduchou interpoláciou.

Chceli by sme nájsť bod, pre ktorý platí vzťah $\sigma^{(1)} = G_s^{(1)} \varepsilon^{(1)}$, kde $G_s^{(1)} = G_{\max}$. Z definície tangenciálneho modulu G_t (vzťah (4.20)) a aplikácie na body nameranej krivky dostávame

$$G_t^{(i)} = \frac{\sigma^{(i+1)} - \sigma^{(i)}}{\varepsilon^{(i+1)} - \varepsilon^{(i)}} \quad (4.25)$$

Uvažujme $\left[\sigma^{(0)} = 0, \varepsilon^{(0)} = 0 \right]$. Potom pre $G_t^{(0)}$ a $G_t^{(1)}$ platí

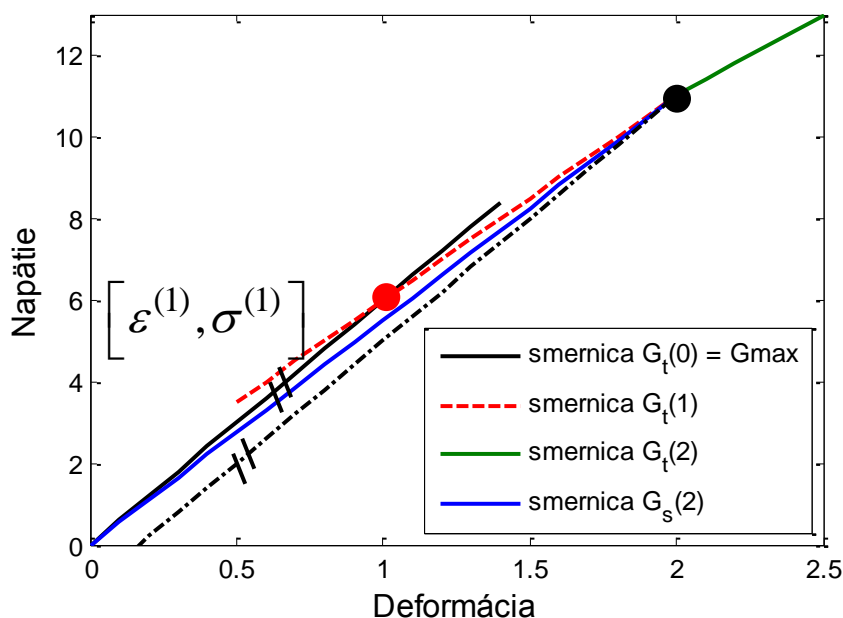
$$G_t^{(0)} = \frac{\sigma^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \quad , \quad G_t^{(0)} = G_s^{(1)} = G_{\max} \quad ; \quad G_t^{(1)} = \frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}}{\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}} \quad (4.26)$$

Nájďme neznáme hodnoty $\sigma^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$ a $G_t^{(1)}$ také, aby platili podmienky (4.26). Pre tangenciálny modul v Iwanovom modeli platí

$$G_t^{(i-1)} > G_t^{(i)} > G_t^{(i+1)} \quad (4.27)$$

Podmienka vyplýva zo vzťahu (4.21). Ak by podmienka neplatila, vzťah by implikoval negatívnu hodnotu modulu pružnosti pružiny v zapojení H-p-StV. Z Obr. 17 vyplýva, že riešený problém je hľadaním priesečníku dvoch polpriamok s rôznymi smernicami, pričom smernicu $G_t^{(0)}$ poznáme a smernicu $G_t^{(1)}$ volíme podľa určitých podmienok. Z (4.27) vyplýva, že $G_t^{(0)} > G_t^{(1)} > G_t^{(2)}$. Ak chceme, aby hodnoty deformácie a napätia $\sigma^{(1)}$ a $\varepsilon^{(1)}$ boli kladné (priesečník polpriamok sa nachádza v prvom kvadrante), potom je podmienkou nerovnosť $G_s^{(2)} > G_t^{(1)} > G_t^{(2)}$, kde $G_s^{(2)} = \frac{\sigma^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}$ a platí, že $G_t^{(0)} > G_s^{(2)}$.

Jednotlivé priamky s príslušnými smernicami zobrazuje Obr. 17.



Obr. 17 Hľadanie prvého bodu bb-krivky. Smernica červenej čiary určuje hranicu, ktorú hľadaná smernica $G_t^{(1)}$ (čiarkovaná modrá čiara) nemôže prekročiť. Čierna čiarkovaná čiara je rovnobežná s čiarou so smernicou $G_t^{(0)}$ a ilustruje nevhodný interval hodnôt pre smernice $G_t^{(1)}$.

Položme $G_t^{(1)} = G_t^{(2)} + \alpha (G_s^{(2)} - G_t^{(2)})$, kde $\alpha \in (0,1)$. Vyjadrieme $\varepsilon^{(1)}$ z druhej z rovníc (4.26). Pre hodnoty deformácie a napätia prvého bodu bb-krivky dostávame

$$\left[\varepsilon^{(1)} = \frac{\sigma^{(2)} - G_t^{(1)} \varepsilon^{(2)}}{G_t^{(0)} - G_t^{(1)}}, \sigma^{(1)} = G_t^{(0)} \varepsilon^{(1)} \right], \quad G_t^{(1)} = G_t^{(2)} + \alpha (G_s^{(2)} - G_t^{(2)}) \quad (4.28)$$

Hodnotu koeficientu α môžeme len odhadnúť na základe toho, či je zodpovedajúci získaný bod bb-krivky „konzistentný s ostatnými bodmi“. Rigorózne overenie by vyžadovalo kvantifikáciu efektu na výsledný seizmogram.

4.1.3.2 Aproximácia bb-krivky

bb-krivku tvorí po pridaní prvého bodu $n+1$ bodov, ktoré vytvárajú n intervalov. bb-krivku je však vhodné reprezentovať väčším počtom bodov, t.j., väčším počtom H-p-StV zapojení. Môžeme to dosiahnuť tak, že každý interval aproximujeme rovnakým počtom bodov NI . V takom prípade je teda bb-krivka reprezentovaná $nNI+1$ bodmi, t.j. $N \equiv nNI$ zapojeniami H-p-StV.

Vnútri intervalov budeme krivku aproximovať hyperbolickou funkciou (prvá z rovníc (1.13)). Modul a referenčná deformácia tu strácajú svoj fyzikálny význam a sú parametrami funkcie. Preto miesto označenia G_{\max} a γ_{ref} použijeme označenie p a $1/q$. Vo vzťahoch môžeme tiež vynechať absolútnu hodnotu, keďže sú body bb-krivky definované len pre kladné hodnoty deformácie. Pre každé dva susedné body bb-krivky zostavíme sústavu rovníc o dvoch neznámych:

$$\sigma^{(i)} = \frac{p_i \varepsilon^{(i)}}{1 + q_i \varepsilon^{(i)}}, \quad \sigma^{(i+1)} = \frac{p_i \varepsilon^{(i+1)}}{1 + q_i \varepsilon^{(i+1)}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

Nájdeme riešenie pre neznáme parametre p_i a q_i . Parametre počítame pre každý z intervalov $\left\{ \left[\sigma^{(i)}, \varepsilon^{(i)} \right], \left[\sigma^{(i+1)}, \varepsilon^{(i+1)} \right] \right\}; i = 1, \dots, n$. Hodnoty hyperbolickej funkcie počítame v logaritmicke ekvidistantných hodnotách deformácie. Pre počiatkové aktivačné deformácie a napätia dostávame vzťahy:

$$\varepsilon_{Y,l} = \varepsilon^{(i+1)} \left(\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i+1)}} \right)^{\frac{NI-j}{NI}}, \quad \sigma_{Y,l} = \frac{p_i \varepsilon_{Y,l}}{1 + q_i \varepsilon_{Y,l}} \quad (4.30)$$

$$l = (i-1)NI + j + 1 \quad ; \quad j = 0, \dots, NI - 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Pre výpočet tangenciálnych modulov budeme potrebovať $N + 1$ bodov. Preto

$$\varepsilon_{Y,N+1} = \varepsilon^{(n+1)}, \quad \sigma_{Y,N+1} = \sigma^{(n+1)} \quad (4.31)$$

4.1.3.3 Výpočet tangenciálnych modulov

Tangenciálne moduly vypočítame z bb-krivky podľa vzťahu

$$G_{t,l} = \frac{\sigma_{Y,l+1} - \sigma_{Y,l}}{\varepsilon_{Y,l+1} - \varepsilon_{Y,l}}, \quad l = 0, \dots, N \quad (4.32)$$

4.1.4 Algoritmizácia výpočtu

Všetky výpočtové programy a skripty potrebné k numerickej simulácii šírenia seizmických vln v nelineárnom prostredí sa nachádzajú na CD.

Výpočet bb-krivky z krivky redukcie modulu. Výpočet sme implementovali do programu MODEL_PREP_1D a program sme nazvali MODEL_PREP_1D_NL. Pre podrobný popis vstupných a výstupných parametrov týkajúcich sa lineárneho výpočtu odkazujeme čitateľa na Moczo et al. (2004). Vstupné a výstupné parametre potrebné k nelineárnemu výpočtu popisuje Príloha B. Výpočet prebieha nasledovným spôsobom:

- 1) Načítame vstupné parametre prostredia.
- 2) Diskretizujeme model.
- 3) Vypočítame maximálny efektívny modul a efektívnu hustotu (3.2).
- 4) Subroutina *parameterize_grid.f90*: Násobíme efektívny maximálny modul v sieťovom bode $L + 1/2$ hodnotami redukcie modulu definovanými v sieťovom bode $L + 1/2$. Podľa vzťahu (4.24) získame sečnicový modul

$$G_{s,L+1/2}^{(i)} = G_{\max,L+1/2}^H \left(\frac{G_s}{G_{\max}} \right)_{L+1/2}^{(i)}, \quad i = 2, \dots, n + 1$$

kde n označuje počet bodov zadanej krivky redukcie modulu.

- 5) Z hodnôt $G_{s,L+1/2}^{(i)}$ získame podľa vzťahu (4.24) hodnoty napätia a deformácie bb-krivky.
- 6) Položíme $G_{t,L+1/2}^{(0)} = G_{\max,L+1/2}^H$. Podľa vzťahu (4.25) vypočítame tangenciálny modul $G_{t,L+1/2}^{(2)}$. Podľa vzťahu (4.28) vypočítame hodnoty $G_{t,L+1/2}^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ a $\varepsilon^{(1)}$.
- 7) Opakujeme body 1 – 6 vo všetkých sieťových bodoch, v ktorých je definovaná krivka redukcie modulu. Zapamätáme si hodnotu prvého sieťového bodu, ktorý sa bude riadiť lineárnym konštitučným vzťahom. Označíme ho L_{NL} .

Poznámka: Vo výpočtoch sme vo vzťahu (4.28) použili $\alpha = 0.3$.

Aproximácia bb-krivky. Aproximácia získanej bb-krivky prebieha v skripte *make_Mofile.m*. Skript je napísaný v programe Matlab. Vstupné a výstupné parametre sú popísané v Prílohe B.

- 1) Načítajme hodnoty

N - počet zapojení H-p-StV

$[\varepsilon^{(i)}, \sigma^{(i)}]$, $i = 1, \dots, n+1$ - body bb-krivky

- 2) Ak $N < n$ ďalej nepokračuj.
- 3) Ak $N = n$ potom $\varepsilon_{Y,i} = \varepsilon^{(i)}$, $\sigma_{Y,i} = \sigma^{(i)}$, $i = 1, \dots, n+1$. Skoč na krok 13.
- 4) Označme $NIin = [N/n]$ celú časť čísla N/n a $dNI = N - NIin \cdot n$.
- 5) Položme $NI = NIin + 1$
- 6) Ak $dNI = 0 \rightarrow NI = NI - 1$
- 7) Vypočítajme $G_t^{(0)}$ podľa vzťahu (4.25).
- 8) Položme $p_0 = G_t^{(0)}$ a $q_0 = 0$.
- 9) Položme $i = 1$
- 10) Vypočítajme $G_t^{(i)}$.
 - ak $G_t^{(i)} > G_t^{(i-1)}$ alebo $G_t^{(i)} < 0$ ($G_t^{(i)}$ nespĺňa podmienku (4.27))

a je menšie ako nula), potom $p_i = p_{i-1}$ a $q_i = q_{i-1}$ a platí

$$\varepsilon_{Y,l} = \varepsilon^{(i+1)} \left(\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i+1)}} \right)^{\frac{NI-j}{NI}}, \quad \sigma_{Y,l} = \frac{p_i \varepsilon_{Y,l}}{1 + q_i \varepsilon_{Y,l}}$$

$$l = (i-1)NI + j + 1 \quad ; \quad j = 0, \dots, NI - 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

- ak neplatí predchádzajúce, potom vyriešme sústavu rovníc (4.29)

$$p_i = \frac{\varepsilon_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_i - \varepsilon_i \sigma_{i+1} \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i \sigma_{i+1} - \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i \sigma_i}, \quad p_i = \frac{-\varepsilon_i \sigma_{i+1} + \varepsilon_{i+1} \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} \sigma_i (\sigma_{i+1} - \sigma_i)}$$

kde sme označili $\varepsilon_i = \varepsilon^{(i)}$ a $\sigma_i = \sigma^{(i)}$. Pre napätie a deformáciu platí

$$\varepsilon_{Y,l} = \varepsilon^{(i+1)} \left(\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i+1)}} \right)^{\frac{NI-j}{NI}}, \quad \sigma_{Y,l} = \frac{p_i \varepsilon_{Y,l}}{1 + q_i \varepsilon_{Y,l}}$$

$$l = (i-1)NI + j + 1 \quad ; \quad j = 0, \dots, NI - 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

11) Opakuj krok 9 pre $i = 2, \dots, n$

12) Prirad' $\varepsilon_{Y,N+1} = \varepsilon^{(n+1)}$, $\sigma_{Y,N+1} = \sigma^{(n+1)}$

13) Opakuj kroky 1 – 10 pre $L = 0, \dots, L_{NL} - 1$

Výpočet napätia pomocou Iwanovho modelu. Navrhnutý algoritmus sme najprv overili v jednoduchom programe **e2s**. Program predstavuje výpočet napätia z deformácie pre jeden Iwanov model, vstupné a výstupné parametre sa nachádzajú v Prílohe B.

Iwanov model sme implementovali do programu 1DFD_DVS. Pre podrobný popis vstupných a výstupných parametrov odkazujeme čitateľa na Moczo et al. (2004). Program s implementáciou Iwanovho modelu sme nazvali 1DFD_DVS_NL. Vstupné a výstupné parametre týkajúce sa nelineárneho výpočtu popisuje Príloha B. V nasledujúcich bodoch popíšeme algoritmus použitý pri výpočte napätia z deformácie v subroutine *stress_iwan.f90*, ktorá je súčasťou programu 1DFD_DVS_NL. Niektoré dôležité body výpočtu prebiehajú aj v iných subroutinách. V takom prípade vždy napíšeme meno subroutín.

Základom algoritmu je koncept aktivačných napätí a deformácií, ktoré meníme v každom reverznom bode. Smer namáhania určuje premenná *dir*. Jej hodnota sa mení v každom reverznom bode. Ak *dir* = 1, model namáhame v kladnom smere (deformácia sa zväčšuje), ak *dir* = -1 model namáhame v zápornom smere (deformácia sa znižuje). V každej časovej hladine *m* program zisťuje hodnotu premennej *dir* a počet aktívnych zapojení H-p-StV, ktorý označíme *k*. Tieto dve hodnoty určujú ďalší vývoj závislosti napätia od deformácie. Vstupným parametrom do výpočtu je v každej časovej hladine *m* deformácia ε^m a deformácia a napätie z predchádzajúcej časovej hladiny ε^{m-1} a σ^{m-1} . Samotný algoritmus prebieha nasledovne:

Sieťový bod L+1/2

Časová hladina $m = 0$

- $\bar{\sigma}_0^A = \bar{\sigma}_0^A = \sigma_{Y,0} = 0, \bar{\varepsilon}_0^A = \bar{\varepsilon}_0^A = \varepsilon_{Y,0} = 0$ (*read_model_par.f90*).
- Definujeme počet aktívnych zapojení H-p-StV, $k = 0$ (*read_model_par.f90*).
- Definujeme premennú *dir* = 1, *lin* = .TRUE. (*read_model_par.f90*).
- Počiatočným aktivačným napätiam a deformáciám priradíme hodnoty napätí a deformácii prislúchajúce bodom bb-krivky (*read_nonlin_par.f90*)

$$\bar{\sigma}_l^A = \sigma_{Y,l} \quad , \quad \bar{\sigma}_l^A = -\sigma_{Y,l} \quad , \quad l = 1, \dots, N+1$$

$$\bar{\varepsilon}_l^A = \varepsilon_{Y,l} \quad , \quad \bar{\varepsilon}_l^A = -\varepsilon_{Y,l} \quad , \quad l = 1, \dots, N+1$$

- Vypočítame tangenciálne moduly (*read_nonlin_par.f90*)

$$G_{t,l} = \frac{\sigma_{Y,l+1} - \sigma_{Y,l}}{\varepsilon_{Y,l+1} - \varepsilon_{Y,l}} \quad , \quad l = 0, \dots, N$$

Časové hladiny $m = 1$ až $m = m_{\max}$ (*stress_iwan.f90*)

- 1) ak *lin* = .TRUE. $\wedge \varepsilon^m > \bar{\varepsilon}_1^A$

lin = .FALSE.

dir = 1

k = 1

- 2) ak *lin* = .TRUE. $\wedge \varepsilon^m < \bar{\varepsilon}_1^A$

$$lin = .FALSE.$$

$$dir = -1$$

$$k = 1$$

3) ak $lin = .TRUE.$, pre výpočet napätia použijeme Hookeov vzťah

$$\sigma^m = G_{t,0} \varepsilon^m$$

4) ak $lin = .FALSE.$

- $\Delta\varepsilon = \varepsilon^m - \varepsilon^{m-1}$

- ak $\Delta\varepsilon < 0 \wedge dir = 1$

- i. $\bar{\sigma}_0^A = \bar{\sigma}_0^A = \sigma^{m-1}$, $\bar{\varepsilon}_0^A = \bar{\varepsilon}_0^A = \varepsilon^{m-1}$

- ii. $\bar{\sigma}_l^A = \sigma^{m-1} - 2\sigma_{Y,l}$, $\bar{\sigma}_l^A = \sigma^{m-1}$, $l = 1, \dots, k$

- iii. $\bar{\varepsilon}_l^A = \bar{\varepsilon}_l^A + (\bar{\sigma}_{l-1}^A - \bar{\sigma}_{l-1}^A)(G_{t,l-1})^{-1}$
 $\bar{\varepsilon}_l^A = \bar{\varepsilon}_{l-1}^A + (\bar{\sigma}_l^A - \bar{\sigma}_{l-1}^A)(G_{t,l-1})^{-1}$, $l = 1, \dots, k$

- iv. $k = 0$, $dir = -1$

- ak $\Delta\varepsilon > 0 \wedge dir = -1$

- i. $\bar{\sigma}_0^A = \bar{\sigma}_0^A = \sigma^{m-1}$, $\bar{\varepsilon}_0^A = \bar{\varepsilon}_0^A = \varepsilon^{m-1}$

- ii. $\bar{\sigma}_l^A = \sigma^{m-1}$, $\bar{\sigma}_l^A = \sigma^{m-1} + 2\sigma_{Y,l}$, $l = 1, \dots, k$

- iii. $\bar{\varepsilon}_l^A = \bar{\varepsilon}_{l-1}^A + (\bar{\sigma}_l^A - \bar{\sigma}_{l-1}^A)(G_{t,l-1})^{-1}$
 $\bar{\varepsilon}_l^A = \bar{\varepsilon}_{l-1}^A + (\bar{\sigma}_l^A - \bar{\sigma}_{l-1}^A)(G_{t,l-1})^{-1}$, $l = 1, \dots, k$

- iv. $k = 0$, $dir = 1$

- ak $dir = 1$

- i. $i = k + 1$

- ii. ak $\varepsilon^m > \bar{\varepsilon}_i^A \rightarrow k = k + 1$

- iii. $i = i + 1$

- iv. Opakuj body i – ii, až kým $i = N - 1$ alebo kým $\varepsilon^m < \bar{\varepsilon}_i^A$.

- v. $\sigma^m = \bar{\sigma}_k^A + (\varepsilon^m - \bar{\varepsilon}_k^A)G_{t,k}$

- ak $dir = -1$

- i. $i = k + 1$

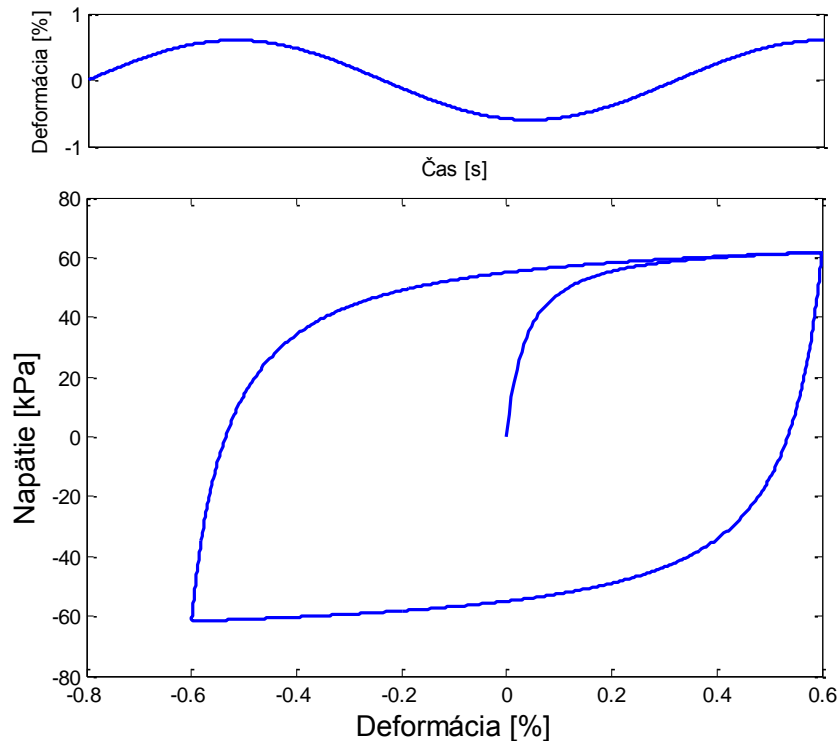
- ii. ak $\varepsilon^m < \bar{\varepsilon}_i^A \rightarrow k = k + 1$
- iii. $i = i + 1$
- iv. Opakuj body i –ii, až kým $i = N - 1$ alebo kým $\varepsilon^m > \bar{\varepsilon}_i^A$.
- v. $\sigma^m = \bar{\sigma}_k^A + (\varepsilon^m - \bar{\varepsilon}_k^A)G_{t,k}$

Postup prebieha vo všetkých sieťových bodoch $L = 1, \dots, L_{NL} - 1$.

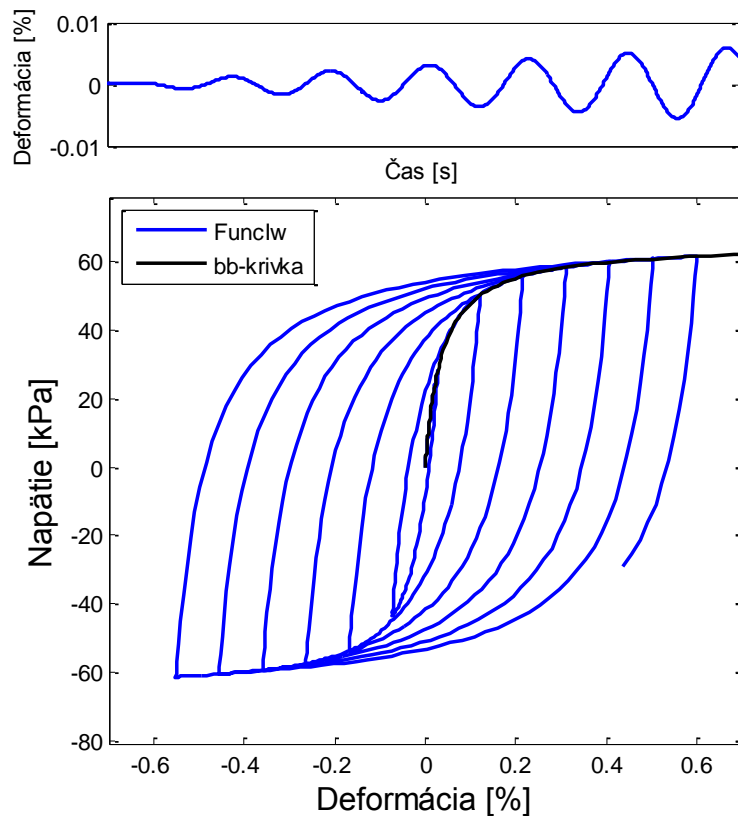
Pre sieťové body $L = L_{NL}, \dots, MZ$, kde MZ označuje posledný sieťový bod modelu, vypočítame napätie podľa Hookeovho zákona (*stress.f90*).

4.1.5 Test algoritmu na jednoduchých funkčných závislostiach

Algoritmus sme otestovali v programe *e2s.f90*. Testovali sme ho na jednoduchých funkčných závislostiach, pričom sme sledovali jeho schopnosť dodržiavať všetky štyri Masingove pravidlá. Pri testovaní sme použili 200 zapojení H-p-StV. Uvádzame tri ilustratívne obrázky, ktoré postačujú na preukázanie schopnosti algoritmu sledovať všetky štyri Masingove pravidlá.



Obr. 18 Závislosť napätia od deformácie v Iwanovom modeli. Výpočet bol vykonaný pre sinusoidálnu závislosť deformácie od času. Vidieť súhlas s druhým Masingovým pravidlom: ak $\varepsilon^{R_2} = -\varepsilon^{R_1}$, potom aj $\sigma^{R_2} = -\sigma^{R_1}$.



Obr. 19 Závislosť napätia od deformácie v Iwanovom modeli. Výpočet vykonaný pre deformáciu so zväčšujúcou sa amplitúdou. Vidieť súhlas s tretím Masingovým pravidlom – pozri paragraf 1.3.2.2.

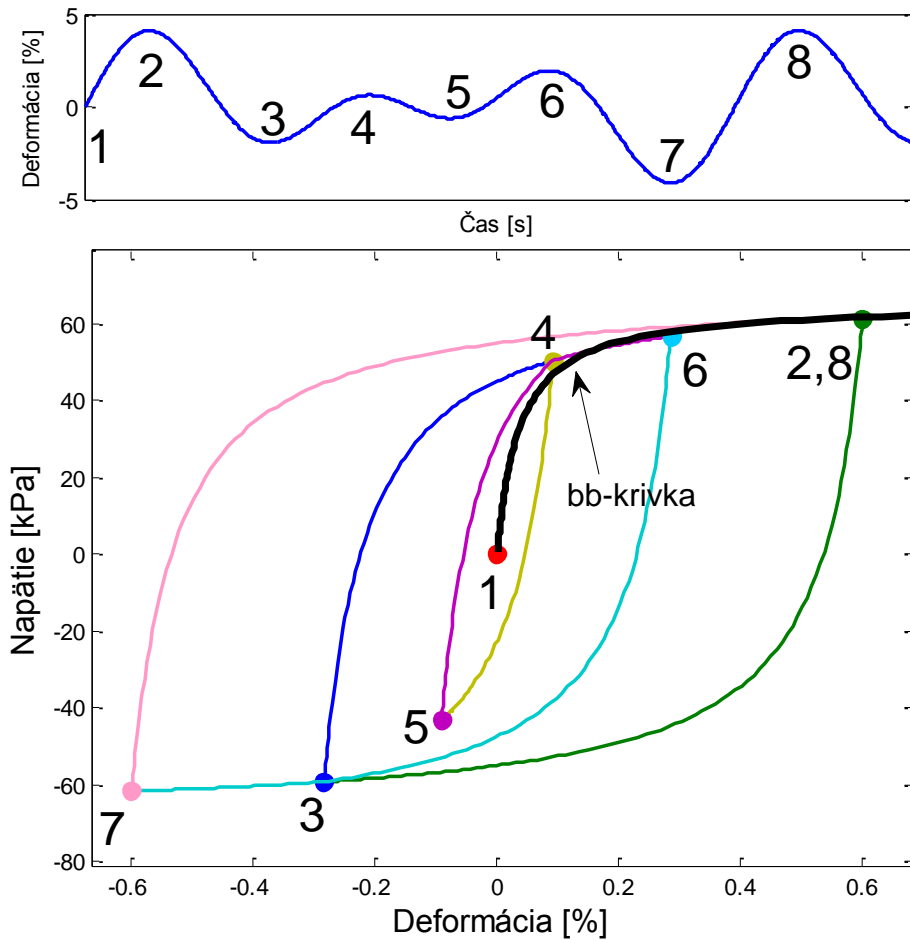
4.2 Diskretizácia 1D vrstevnatého modelu elastoplastického prostredia

Podkapitola 4.2 sa zaoberá niektorými aspektami diskretizácie 1D vrstevnatého modelu elastoplastického prostredia. Cieľom podkapitoly nie je podrobná analýza problému diskretizácie v nelineárnych prostrediach, ktorá by zrejme vyžadovala podrobný výskum, ale poukázanie na niektoré dôležité problémy súvisiace s diskretizáciou a ich vplyv na seizmickú odozvu.

4.2.1 Optimálny sieťový krok pre prostredie definované nelineárnymi parametrami

V podkapitole 3.1 sme uviedli podmienku, ktorá musí platiť, aby sa vlny s frekvenciami menšími ako je frekvencia f_{AC} mohli v uvažovanej konečno-diferenčnej schéme šíriť so zanedbateľnou sieťovou disperziou. Sieťová disperzia v samotných lineárnych elastických a viskoelastických modeloch nie je triviálny problém. Aj keď sme sa nevenovali tejto

problematike podrobne, problém sieťovej disperzie v nelineárnych prostrediach je natoľko dôležitý, že uvedieme aspoň niektoré základné, nám známe, poznatky.

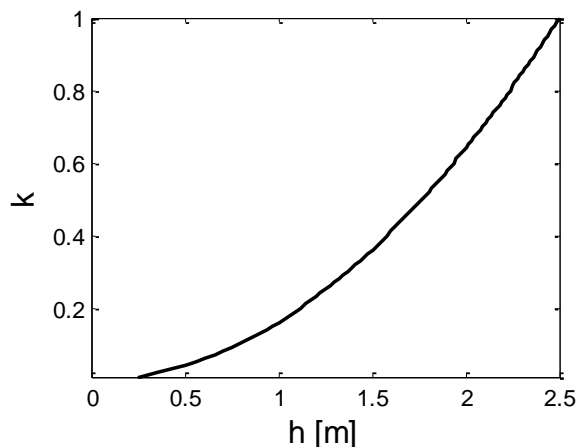


Obr. 20 Závislosť napätia od deformácie v Iwanovom modeli. Čísla indexujú reverzné body. Symbol „8,2“ znamená, že reverzný bod 8 je zhodný s reverzným bodom 2. Výpočet pre nepravidelné cyklické namáhanie. 1-2: prvé Masingove pravidlo - model sleduje bb-krivku. 5-6, 6-7: štvrté Masingove pravidlo, vetva hysterézneho slučky sa napája na vetvu predchádzajúceho cyklu. V každom reverznom bode model sleduje druhé Masingove pravidlo.

Redukcia modulu, ku ktorej dochádza v nelineárnych materiáloch, spôsobuje, že sa rýchlosť šírenia vln v materiáloch mení. Závislosť rýchlosti šírenia od modulu je zrejmá zo vzťahu $G_{\max} = \rho v_S^2$. Uvažujme redukcii modulu z hodnoty G_1 na hodnotu $k G_1$, kde $k < 1$ je nejaký parameter. Pre rýchlosť zodpovedajúcu takémuto poklesu modulu platí $v = \sqrt{k} v_S$. Uvažujme teraz podmienku (3.3) a nejakú nami zvolenú hodnotu f_{AC} . Pre sieťový krok dostávame vzťah

$$h \approx \frac{v}{6f_{AC}} = \frac{\sqrt{k} v_S}{6f_{AC}} \quad (4.33)$$

Ak pod redukciou modulu rozumieme pokles sečnicového modulu s rastúcou deformáciou, potom je parameter k definovaný hodnotami krivky redukcie modulu. Výber sieťového kroku je teda závislý od hodnoty maximálnej deformácie, ktorú sme počas výpočtu dosiahli. Závislosť sieťového kroku od parametra k vo vrstve s rýchlosťou šírenia S-vĺn $v_S = 300 \text{ m.s}^{-1}$ a $f_{AC} = 20 \text{ Hz}$ znázorňuje Obr. 21. Problematike sieťovej disperzie v prípade šírenia seizmických vĺn v nelineárnych prostrediach sa venuje práca Gandomzadeh (2011). Obsahuje analýzu numerickej disperzie v simuláciách vykonaných metódou konečných elementov. Autor sám uvádza, že nie je možné získať všeobecné pravidlo, ktorým by sme sa mali riadiť pri určení optimálnej veľkosti. Úroveň maximálnej deformácie je totiž závislá od vstupného signálu a materiálových parametrov. Autor odporúča vykonávať numerické simulácie vždy v dvoch krokoch. V prvom kroku zistíme maximálne deformácie generované nelineárnym prostredím. V druhom kroku týmto deformáciám prispôbime výpočet, v našom prípade podľa vzťahu (4.33).



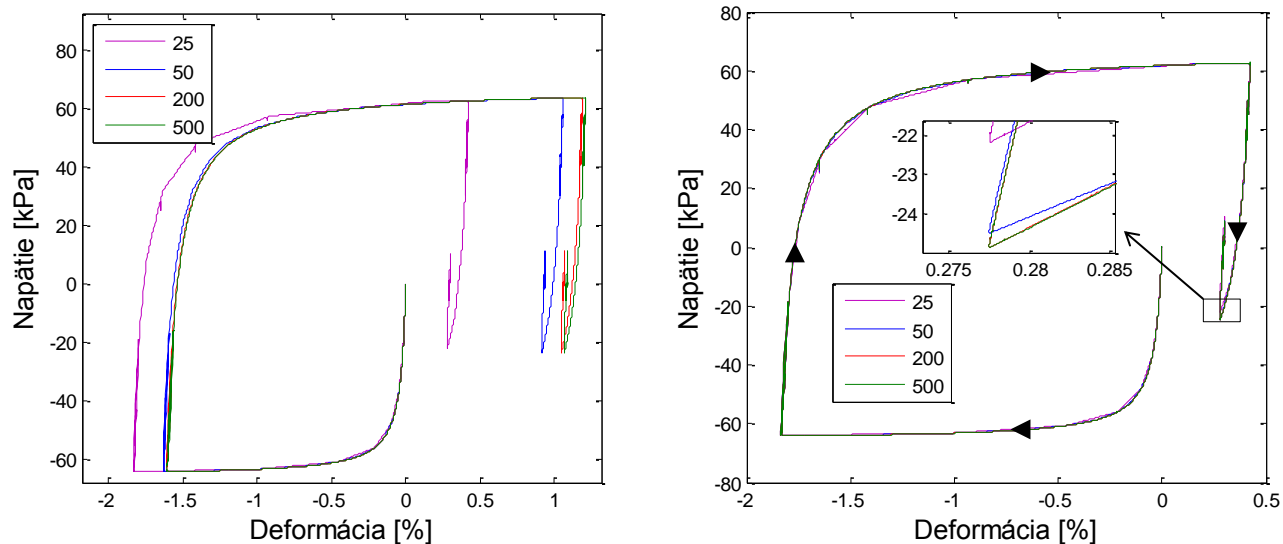
Obr. 21 Závislosť sieťového kroku h od nelineárneho parametra k .

4.2.2 Optimálny počet zapojení H-p-StV

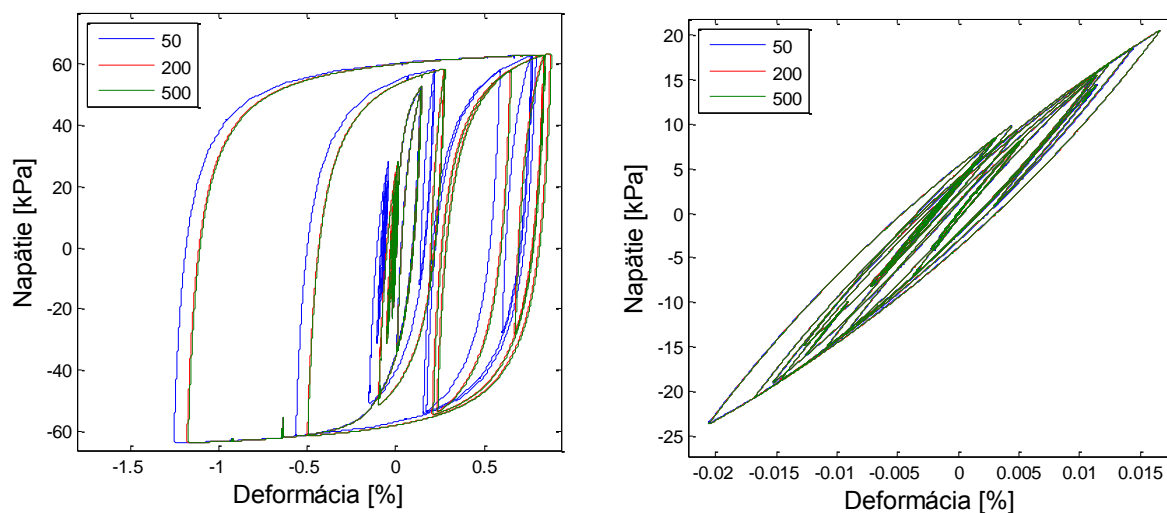
Základom algoritmu, ktorý popisuje správanie Iwanovho modelu sú diskrétné hodnoty aktivačných napätí a deformácií. Je zrejme, že sa bude výpočet líšiť v závislosti od použitého počtu zapojení H-p-StV. Literatúra neuvádza exaktný vzťah, ktorý by v závislosti od parametrov numerickej simulácie a charakteristík vstupného signálu určoval počet potrebných zapojení. Rao a Panda (1999) vo svojej práci uvádzajú 50 – 100 zapojení, Assimaki et al. (2011) 50, Joyner a Chen (1975) 50 – 100 a Assimaki et al. (2008) uvádza 500 zapojení, aby bolo možné dosiahnuť dostatočnú presnosť aj pri vysokofrekvenčných

signáloch. Veľký počet zapojení nepredstavuje v 1D prípade problém – nároky na výpočtový čas sú zanedbateľné. Ak by sme však chceli implementovať Iwanov model do 3D programu, môže byť počet zapojení H-p-StV dôležitým parametrom výpočtu. Efekt počtu zapojení je ilustrovaný na Obr. 22 vľavo, ktorý znázorňuje závislosť napätia od deformácie zaznamenanú v hĺbke 19.5 m pod voľným povrchom (hĺbka s najväčšou deformáciou) v modeli vrstvy na polpriestore (mocnosť vrstvy 20 m). Vstupným signálom je impulzný Rickerov signál zobrazený na Obr. 24. Výpočet sme vykonali postupne pre 25, 50, 200, 500 zapojení H-p-StV. Vidíme významné rozdiely v deformáciách pre 25, 50 a 200 zapojení. Napríklad v prípade 25 a 200 zapojení je to rozdiel až 13% .

Obr. 22 vpravo znázorňuje závislosť napätia od deformácie, ktorá je výstupom programu **e2s**. Tento program počíta napätie z deformácie pre samostatný Iwanov model. Ako vstupné hodnoty sme použili záznam deformácie z predchádzajúceho výpočtu (výpočet s 25 zapojeniami). Výpočet sme podobne ako v predchádzajúcom prípade vykonali pre rôzne počty zapojení H-p-StV: 25, 50, 200, 500. Vidíme, že rozdiely vo výpočtoch sú minimálne. Priblížená časť obrázku nás privádza k príčine rozdielnych výsledkov pre rôzne počty zapojení. Hodnote deformácie v reverznom bode priraduje Iwanov model rôzne hodnoty napätia, a to v závislosti od miery aproximácie bb-krivky (počtu zapojení H-p-StV). Priblížený obrázok znázorňuje až tretí reverzný bod. Tento bod sme zvolili z jednoduchého dôvodu. K zmene smeru namáhania dochádza v mieste, kde je vetva hysteréznej slučky najviac zakrivená a rozdiel medzi jednotlivými aproximáciami je najmarkantnejší. Rozdielne napätia v reverznom bode majú za následok výpočet rozdielnych aktivačných napätí a deformácií v reverznom bode a z toho vyplývajúci rozdielny priebeh závislosti napätia od deformácie. V programe **e2s** je deformácia nezávislou premennou výpočtu. Nezávislou preto, že napätie zodpovedajúce n -tej hodnote deformácie nijako neovplyvní $n+1$ hodnotu deformácie. To neplatí v numerickej simulácii vlnového poľa, čo je dôvodom, prečo nevieme, podobne ako na Obr. 22, priamo vizuálne identifikovať vyššie popísaný jav, ktorý je príčinou vzniknutých rozdielov vo výsledkoch. Rovnaký výpočet pre vrstvu na polpriestore sme vykonali aj pre reálny signál škálovaný na malú a veľkú hodnotu amplitúdy posunutia. Závislosť napätia od deformácie v hĺbke 19.5 m znázorňuje Obr. 23. Môžeme vidieť, že veľkosť rozdielu medzi hysteréznymi slučkami je závislá od veľkosti amplitúdy vstupného signálu.



Obr. 22 Vľavo: Závislosť napätia od deformácie. Závislosť sme zaznamenali v hĺbke 19.5 m pod voľným povrchom. Nelineárny výpočet sme vykonali pre vrstvu na polpriestore. Použitý bol impulzný Rickerov signál. Čísla označujú počet zapojení H-p-StV, ktoré boli pri výpočte použité. Vpravo: Výpočet napätia z deformácie podľa programu **e2s**. Priblížené okno ilustruje príčinu rozdielnych výsledkov pre rôzne aproximácie bb-krivky.



Obr. 23 Závislosť napätia od deformácie. Závislosť sme zaznamenali v hĺbke 19.5 m pod voľným povrchom. Nelineárny výpočet sme vykonali pre vrstvu na polpriestore. Vľavo: Signál škálovaný na veľké amplitúdy posunutia. Vpravo: Signál škálovaný na malé amplitúdy posunutia.

V numerických simuláciách projektu Prenolin sme zvolili 200 zapojení H-p-StV. Tento počet sa zdá byť pri uvedenej kvalitatívnej analýze dostatočne presnou aproximáciou.

4.2.3 Reprezentácia materiálového rozhrania

Konečno-diferenčná schéma s aritmetickým priemerovaním hustoty a harmonickým priemerovaním elastických modulov v elastickom prostredí zavedená v Moczo et al. (2002), dokáže vnímať (“vidieť”) skutočnú pozíciu materiálového rozhrania bez ohľadu na jeho polohu vo vzťahu k sieťovému bodu. Efektívne sieťové parametre sa počítajú pomocou vzťahov

$$\rho_L^A = \frac{1}{h} \int_{z_{L-1/2}}^{z_{L+1/2}} \rho(z) dz \quad , \quad G_{\max, L+1/2}^H = \left[\frac{1}{h} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \frac{1}{G_{\max}(z)} dz \right]^{-1} \quad (4.34)$$

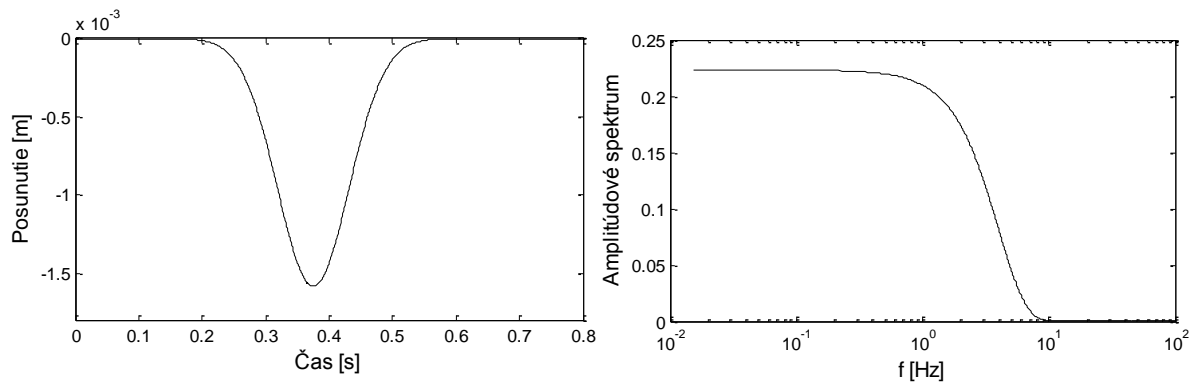
kde h určuje veľkosť sieťového kroku. Aj pre hladko heterogénne prostredie bez materiálových diskontinuití je lepšie použiť schému s integrálnym priemerovaním (Moczo et al. 2006). Otázkou je, či aplikácia takého priemerovania len na elastické moduly stačí aj v prípade kontaktu nelineárneho a elastického prostredia. Pre ilustráciu efektu priemerovania sme zvolili jednoduchý model vrstvy na polpriestore (Tab. 5). Hustota vo vrstve je rovnaká ako hustota v polpriestore, aby sme mohli sledovať výhradne vplyv priemerovania modulov. Ako vstupný signál sme použili impulzný Rickerov signál s frekvenčným obsahom do 10 Hz (Obr. 24) Nelineárne vlastnosti prostredia definuje krivka redukcie modulu zadaná v projekte Prenolin (krivka redukcie modulu pre profil P1, Obr. 31).

	Mocnosť [m]	ρ [kg.m ⁻³]	v_S [m.s ⁻¹]
Vrstva	19.5 – 20.5	2000	300
Polpriestor	-----	2000	1000

Tab. 5 Charakteristiky prostredia – vrstva na elastickom homogénnom polpriestore.

Najprv sme zistili najväčší možný sieťový krok. Vykonali sme nelineárny výpočet pre mocnosť 20 m a sieťový krok $h = 0.1 m$. Pri takto zvolenom kroku a mocnosti nedochádza k priemerovaniu modulov – sieťový bod posunutia sa nachádza priamo na rozhraní. Našli sme maximálnu hodnotu deformácie, ktorá bola 0.519 % (hľadali sme najväčšiu absolútnu hodnotu). Deformácii sme priradili zodpovedajúcu hodnotu redukcie modulu (G_s / G_{\max}) = 0.0663. Podľa vzťahov uvedených v odstavci 4.2.1 sme vypočítali

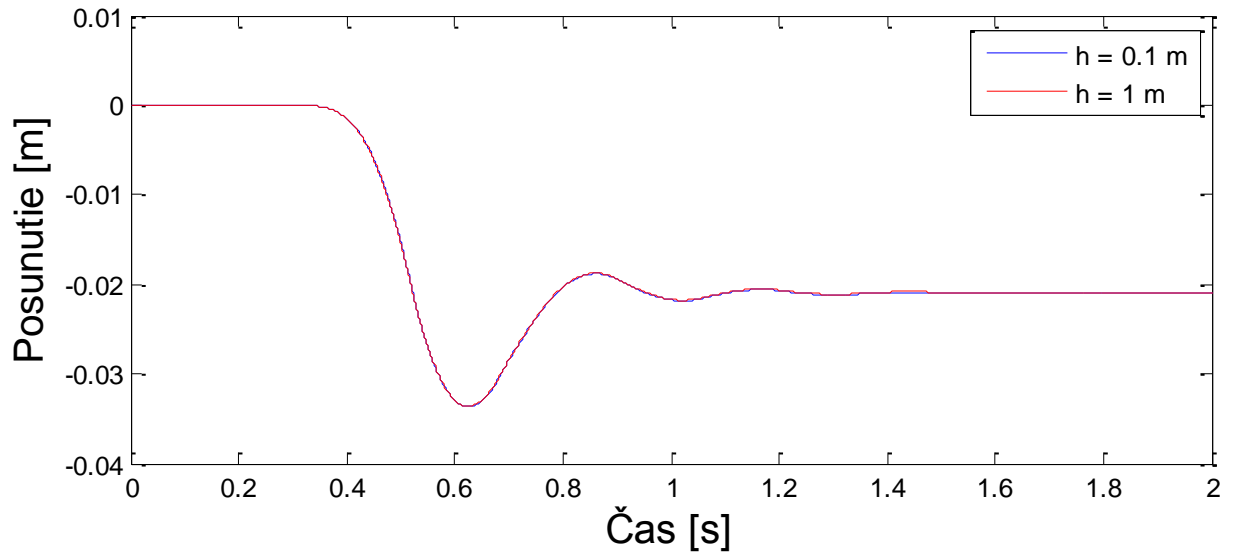
maximálny možný sieťový krok h pre frekvenciu $f_{AC} = 10 \text{ Hz}$: $h \approx 1.28 \text{ m}$. Na základe tohto odhadu sme výpočet zopakovali pre sieťový krok $h = 1 \text{ m}$ – predpokladali sme, že sa výpočty pre krok $h = 0.1 \text{ m}$ a $h = 1 \text{ m}$ nebudú odlišovať. Ani pri takto zvolenom sieťovom kroku nedochádza k priemerovaniu. Obr. 25 porovnáva oba výsledky. Po priblížení vidíme iba minimálny rozdiel na konci záznamu, ktorý je na úrovni 0.1% maximálneho posunutia.



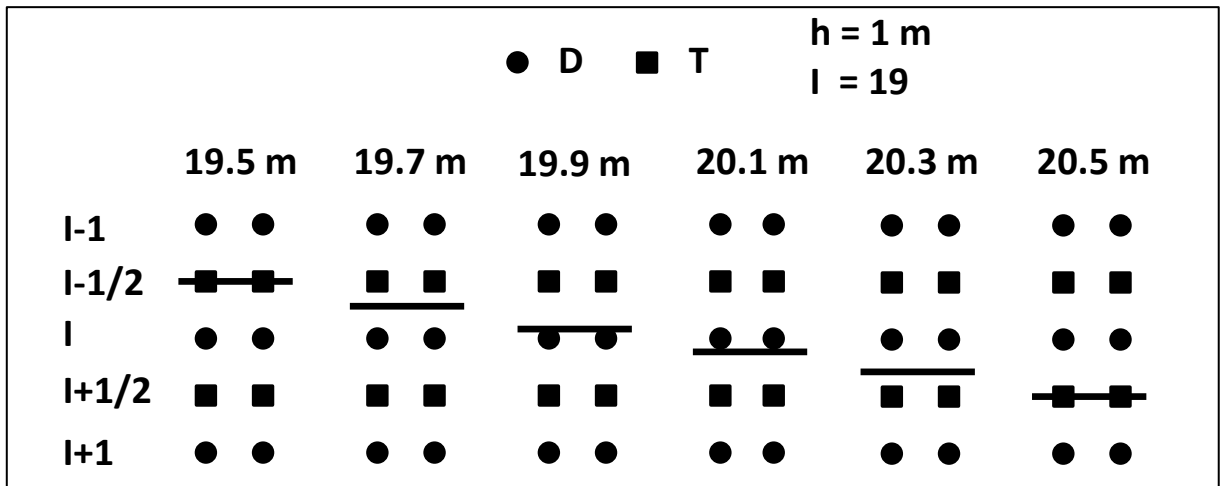
Obr. 24 Vľavo: Časový priebeh vstupného signálu. Vpravo: Amplitúdové spektrum vstupného signálu.

Po nájdení maximálneho sieťového kroku sme vykonali parametrické výpočty. Druhy výpočtov sú sumarizované v Tab. 6.

Najprv sme použili konštantný sieťový krok $h = 1 \text{ m}$ a mocnosť vrstvy sme menili s krokom 0.2 m v intervale $19.5 - 20.5 \text{ m}$. Obr. 26 ilustruje posun rozhrania medzi sieťovými bodmi $I - 1/2$ a $I + 1/2$. Písmená D a T označujú sieťové body pre posunutie a napätie (pripomíname, že používame striedavo usporiadanú sieť). Obr. 28(A) znázorňuje elastický výpočet s integrálnym harmonickým priemerovaním modulov. Jednotlivé seizmogramy sú od seba pravidelne vzdialené – výpočet vníma polohu rozhrania. Zvoľme teraz sieťový krok $h = 0.1 \text{ m}$ (pre uvažované mocnosti vrstvy nedochádza k priemerovaniu). Vykonajme nelineárny výpočet pre všetky mocnosti znázornené na Obr. 26. Na Obr. 28(B) vidíme porovnanie jednotlivých seizmogramov. Podobne ako v elastickom prípade sú seizmogramy od seba pravidelne vzdialené. Výpočet s konštantným krokom $h = 0.1 \text{ m}$ budeme považovať za referenčné riešenie.



Obr. 25 Porovnanie nelineárneho výpočtu pre $h = 0.1\text{ m}$ a $h = 1\text{ m}$, mocnosť vrstvy 20 m .



Obr. 26 Posúvanie rozhrania pri konštantnom sieťovom kroku $h = 1\text{ m}$. D označuje sieťový bod pre posunutie a T sieťový bod pre napätie.

Mocnosť [m]		19.5	19.7	19.9	20.1	20.3	20.5	Obrázok	Skratka
Sieťový krok	h = 1 m	Elastický výpočet. Priemerovanie modulov podľa vzťahu (4.34).						A	EL-avg
		Nelineárny výpočet. Priemerovanie maximálnych modulov podľa vzťahu (4.36).						C	NL-avg
		Nelineárny výpočet. Priemerovanie sečnicových modulov podľa vzťahu (4.37).						----	NL-avgGs
		Nelineárny výpočet. Lokálne hodnoty modulov Lokálna krivka redukcie modulu.						G	NL-noavg
	h = 0.1 m	Nelineárny (referenčný) výpočet. Nedochádza k priemerovaniu, rozhranie sa vždy nachádza v sieťovom bode posunutia.						B	NL-ref

Tab. 6 Prehľad vykonaných výpočtov. Obrázky prislúchajúce jednotlivým výpočtom sme označili písmenami A, C, G a B. Skratky používame na rozlíšenie jednotlivých výpočtov v grafoch.

Vráťme sa teraz ku konštantnému sieťovému kroku $h = 1 m$ a sledujme ako reagujú seizmogramy na zmenu polohy rozhrania nelineárna vrstva/polpriestor. Vykonáme tri druhy výpočtov:

- Integrálne priemerovanie maximálnych modulov (NL-avg): Uvažujme maximálny modul vrstvy $G_{\max,V}$, modul polpriestoru $G_{\max,PP}$ a rozhranie medzi ľubovoľnými sieťovými bodmi L a $L + 1$. Použijme druhý zo vzťahov (4.34):

$$G_{\max,L+1/2}^H = \left[\frac{1}{h} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \frac{1}{G_{\max}(z)} dz \right]^{-1}, \quad \begin{matrix} G_{\max}(z) = G_{\max,V}, & z \leq z_R \\ G_{\max}(z) = G_{\max,PP}, & z > z_R \end{matrix} \quad (4.35)$$

kde z_R určuje polohu rozhrania. V prípade, že sa sieťový bod $L + 1/2$ nachádza vo vrstve, vypočítame sečnicové moduly prislúchajúce tomuto sieťovému bodu podľa vzťahu (1.7)

$$\bar{G}_{s,L+1/2}^{(i)} = G_{\max,L+1/2}^H K^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.36)$$

kde $K^{(i)} = (G_s / G_{\max})^{(i)}$ označuje hodnoty redukcie modulu a n počet bodov krivky redukcie modulu. Z hodnôt sečnicového modulu a deformácie prislúchajúcej hodnotám $K^{(i)}$ vieme ľahko získať body bb-krivky podľa vzťahu (1.8). Ak sa sieťový bod $L+1/2$ nachádza v polpriestore, potom $K^{(i)} = 1$ a výpočet posunutí v sieťovom bode L je elastický. Obr. 28(C) ukazuje seizmogramy zodpovedajúce popísanému postupu. Porovnajme ich s Obr. 28(B). Je zrejmé, že pokiaľ sa rozhranie nachádza medzi sieťovými bodmi, samotné priemerovanie maximálnych modulov ho nedokáže vnímať s dostatočnou presnosťou. Obr. 29(D) porovnáva výpočet NL-avg s referenčným riešením (NL-ref) zblízka. Obr. 29(E) ukazuje toto porovnanie len pre mocnosť 19.5 m a 20.1 m. Rozdiel medzi výpočtami je väčší pri mocnosti 19.5 m, kedy sa rozhranie nachádza priamo v sieťovom bode napätia, a teda polovica sieťového kroku je vo vrstve a polovica v polpriestore. Aj z toho môžeme usudzovať, že na reprezentáciu rozhrania nelineárnej vrstvy a lineárneho polpriestoru nestačí priemerovanie len maximálnych (t.j. elastických) modulov.

- ii) Priemerovanie sečnicových modulov (NL-avgGs): Pokúsme sa priemerovať všetky sečnicové moduly, nie len maximálne moduly. Označme $G_{s,V}^{(i)} = K^{(i)} G_{\max,V}$. Podľa vzťahu (4.35) dostaneme

$$\bar{G}_{s,L+1/2}^{(i)} = \left[\frac{1}{h} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \frac{1}{G_s^{(i)}(z)} dz \right]^{-1}, \quad \begin{aligned} G_s^{(i)}(z) &= G_{s,V}^{(i)}, & z \leq z_R \\ G_s^{(i)}(z) &= G_{\max,PP}, & z > z_R \end{aligned}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.37)$$

Z takto získaných hodnôt sečnicového modulu vieme podobne ako v prípade i) vypočítať bb-krivku. Seizmogramy získané takýmto výpočtom však nepreukázali žiadne zlepšenie oproti i). Obr. 29(F) porovnáva oba typy výpočtov pre mocnosť 19.5 m. Seizmogramy sú identické.

- iii) Tretí výpočet urobíme bez akéhokoľvek priemerovania (NL-noavg). Znamená to, že v sieťovom bode $L+1/2$ zvolíme lokálnu hodnotu maximálneho modulu a lokálnu krivku redukcie modulu. Ak patrí sieťový bod $L+1/2$ polpriestoru, položíme podobne ako v i) $K^{(i)} = 1$. Obr. 29 (D) znázorňuje príslušné seizmogramy. Môžeme vidieť, že výpočet nerozlišuje mocnosť vrstvy, pokiaľ sa rozhranie nachádza medzi sieťovými bodmi $I-1 /$ a $I+1/2$, čo sme aj očakávali.

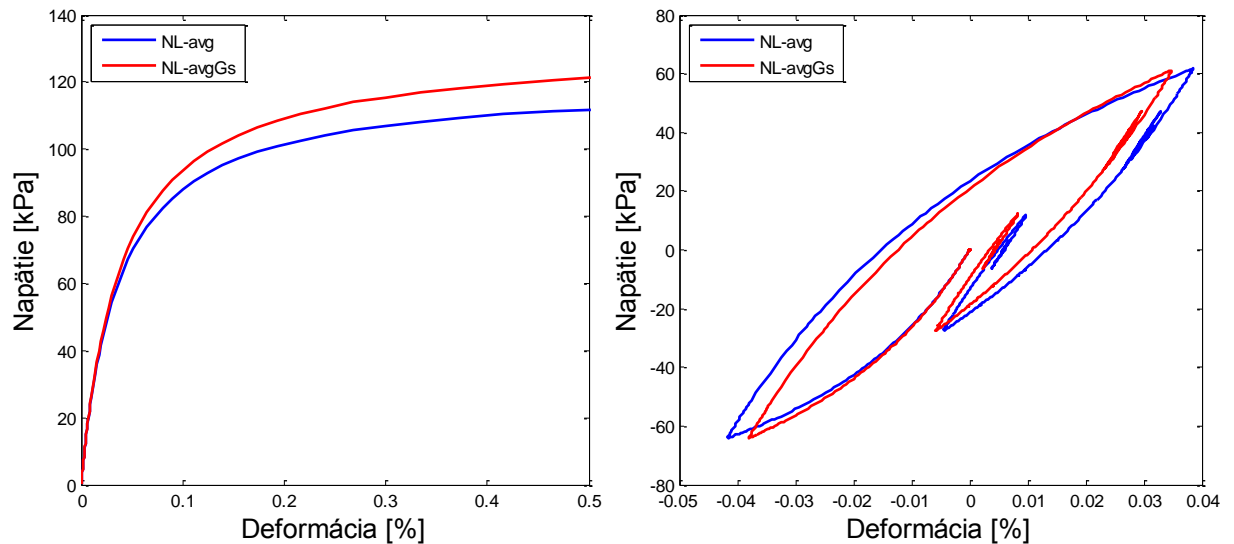
Výpočty sme vykonali aj pre konečno-diferenčnú schému (2,2) DVS SG. Schéma aproximuje priestorovú deriváciu posunutia centrálnou konečno-diferenčnou formulou druhého rádu. Do výpočtu deformácie vstupujú hodnoty posunutia iba v dvoch sieťových bodoch. Uvažovali sme, že by takáto aproximácia v bode na rozhraní mohla zlepšiť výsledky. Predpoklad sa však nepotvrdil.

4.2.3.1 Diskusia

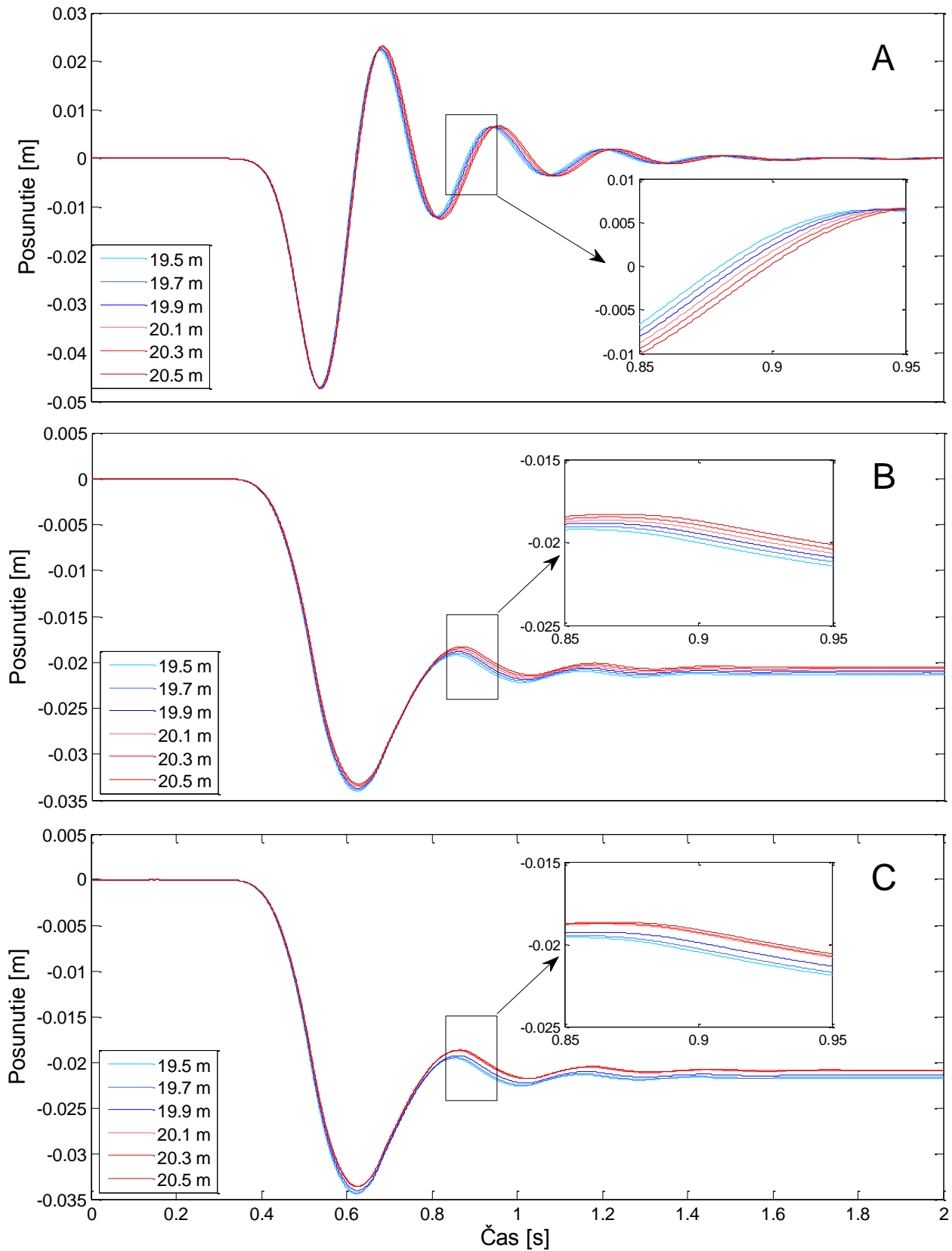
Moczo et al. (2002) vo svojej práci zaviedli výpočet efektívnych parametrov prostredia vo forme aritmetického priemerovania hustoty a harmonického priemerovania modulov. Toto riešenie umožňuje tzv. heterogénny prístup pri simulácii vlnového poľa metódou konečných diferencií. Prístup využíva rovnakú konečno-diferenčnú schému pre všetky vnútorné sieťové body (body, ktoré neležia na okrajoch siete), bez ohľadu na ich polohu vzhľadom k materiálovému rozhraniu. Prítomnosť materiálového rozhrania je zohľadnená hodnotami materiálových sieťových parametrov.

Je otázne, či je možné použiť heterogénny prístup aj v prípade kontaktu dvoch nelineárnych prostredí, či kontaktu nelineárneho a elastického prostredia. Problém je zložitejší vzhľadom k tomu, že materiálový parameter prostredia, modul, sa mení v závislosti od deformácie. Uvedené výpočty ukázali, že v prípade materiálového rozhrania nelineárnej vrstvy a elastického polpriestoru neposkytuje samotné priemerovanie maximálnych modulov výsledky porovnateľné s referenčným riešením. Navrhli sme alternatívny výpočet v podobe priemerovania sečnicových modulov. Toto riešenie nepreukázalo signifikantné zlepšenie výsledkov. Pozrime sa na Obr. 27 vľavo. Môžeme vidieť porovnanie bb-kriviek použitých v sieťovom bode na rozhraní vo výpočtoch NL-avg a NL-avgGs. Rozdiel medzi hodnotami napätia jednej a druhej krivky je maximálne 8-9%, pričom pre menšie deformácie tento rozdiel klesá (krivky vychádzajú z rovnakej hodnoty maximálneho modulu). Na Obr. 27 vpravo vidíme závislosť napätia od deformácie v sieťovom bode na rozhraní pre oba výpočty. Maximálna deformácia tu dosiahla hodnotu približne 0.04 % . Hysterézie sú síce odlišné, napriek tomu sa však rozdiel neprejavil v seizmogramoch na voľnom povrchu. Môžeme teda usudzovať, že priemerovanie sečnicových modulov v jednom sieťovom bode, ktoré môžeme chápať ako zmenu tvaru bb-krivky (rozdielne hodnoty medzných napätí a k nim prislúchajúcich deformácií) má na posunutie na voľnom povrchu minimálny vplyv. Otázkou teda je, či je priemerovanie modulov v prípade kontaktu nelineárneho a elastického prostredia naozaj dôležité.

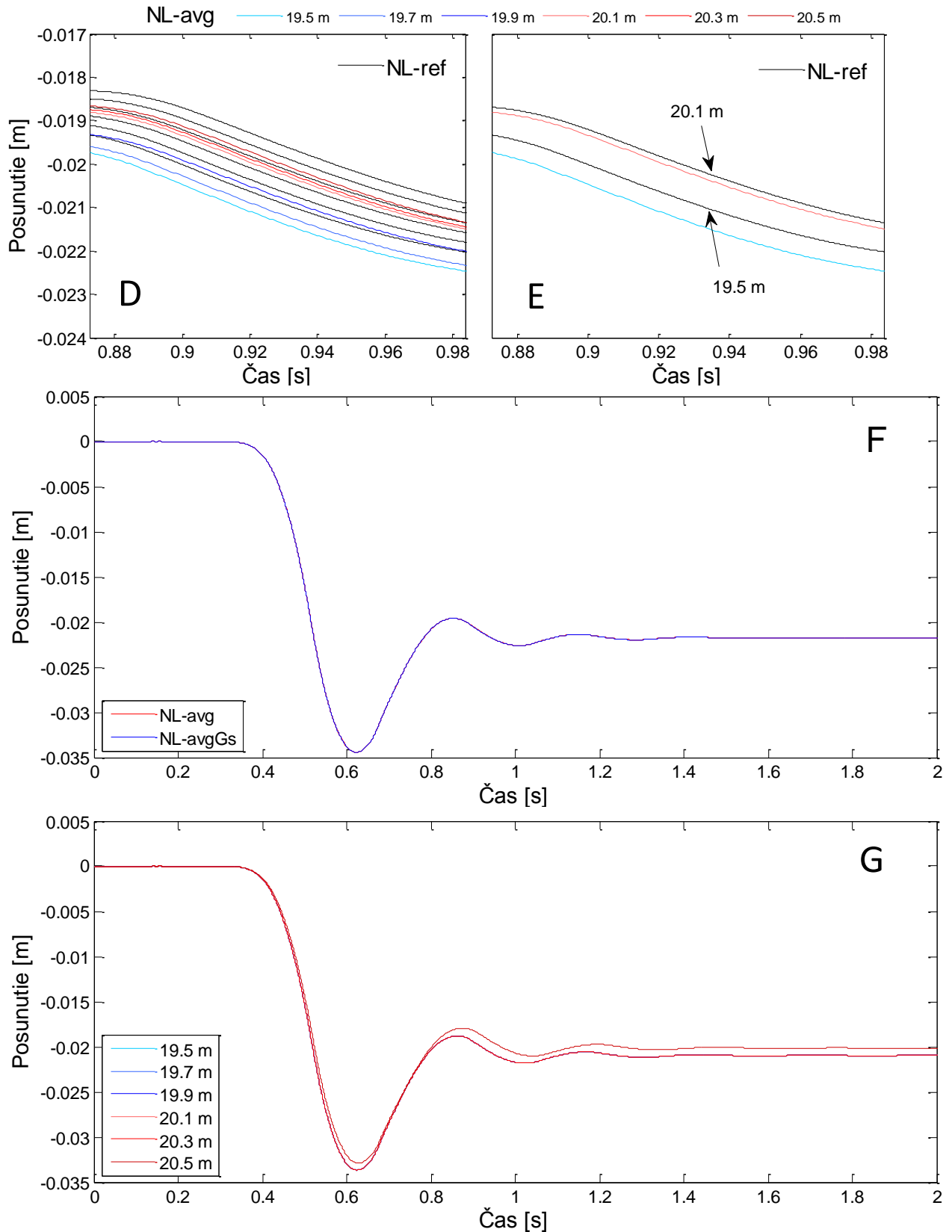
Aby sme sa vyhli výraznej sieťovej disperzii počas výpočtu, musíme voliť v nelineárnych prostrediach malé sieťové kroky. Ukázali sme, že v prípade, že uvažujeme maximálny sieťový krok zodpovedajúci podmienke (4.33), potom je rozdiel vo výsledných seizmogramoch minimálny (pripomíname hodnotu 0.1%). Rozdiel medzi referenčným riešením a riešením s priemerovaním elastických modulov bol až desaťnásobne väčší – 1.2% maximálneho posunutia. Môžeme teda vylúčiť, že by rozdiely pozorované pri porovnaní Obr. 28(C) a (B) boli spôsobené zmenou veľkosti sieťového kroku. Rozdiel 1.2% je síce veľmi malý, no poukazuje na fakt, že nelineárne efekty a problém modelovania seizmických vln v nelineárnom prostredí nie je triviálny. Priemerovanie (maximálnych) elastických modulov neposkytuje v prostredí definovanom nelineárnymi parametrami uspokojivé výsledky. Otázkou je aj vzťah vstupného signálu k priemerovaniu a efekt na seizmickú odozvu.



Obr. 27 Mocnosť vrstvy 19.5 m, sieťový bod $I-1/2$. Rozhranie sa nachádza priamo v sieťovom bode. Vľavo: Porovnanie bb-kriviek použitých vo výpočtoch NL-avg a NL-avgGs. Vpravo: Závislosť napätia od deformácie pre vstupný signál. Porovnanie pre výpočty NL-avg a NL-avgGs.



Obr. 28 Seizmogram na voľnom povrchu. **A:** EL-avg. **B:** NL-ref. **C:** NL-avg. (Význam skratiek je uvedený v Tab. 6).



Obr. 29 Seizmogram na voľnom povrchu. **D:** Porovnanie výpočtu NL-avg a NL-ref. **E:** Porovnanie výpočtov NL-avg a NL-ref pre mocnosť vrstvy 19.5 m a 20.1 m. **F:** Porovnanie výpočtov NL-avg a NL-avgGs pre mocnosť vrstvy 19.5 m. Obidva výpočty dávajú identické výsledky. **G:** NL-noavg. (Význam skratiek je uvedený v Tab. 6).

4.3 Projekt Prenolin

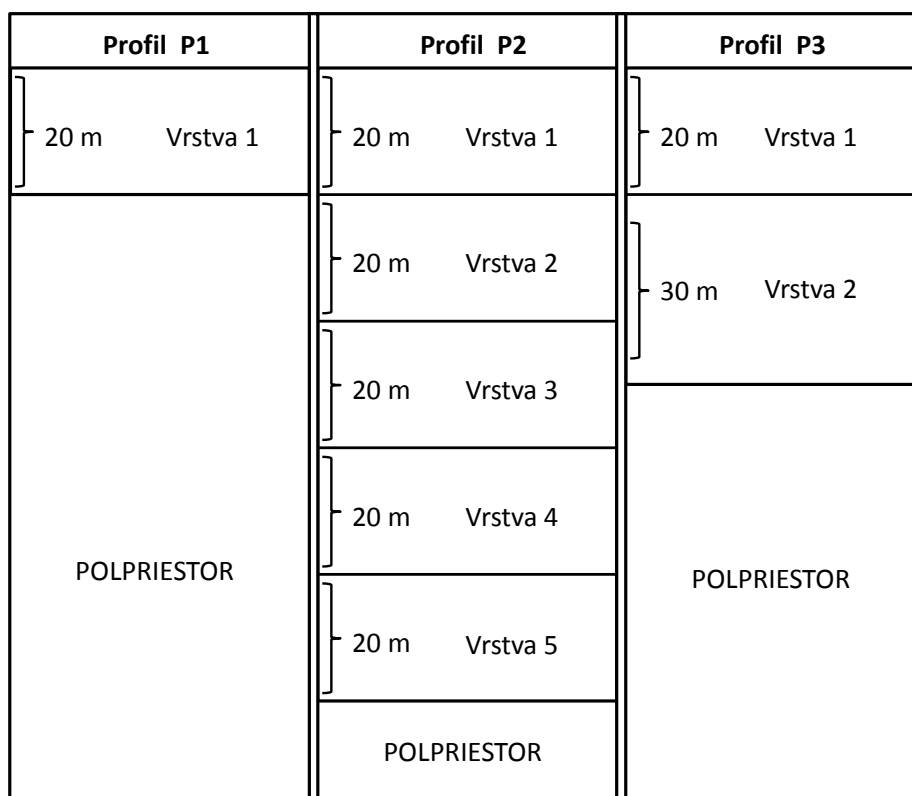
V tejto podkapitole popíšeme kanonické modely prostredia definované v projekte Prenolin. Popíšeme typy vstupných signálov a parametre výpočtových modelov. Následne uvedieme porovnania výsledkov z projektu Prenolin, a to so zameraním na výsledky nášho výpočtového programu. Ilustrujeme vplyv nelineárneho správania materiálov na seizmický pohyb na niekoľkých príkladoch. Použijeme pri tom výpočty vykonané v projekte Prenolin.

4.3.1 Definícia parametrov prostredia

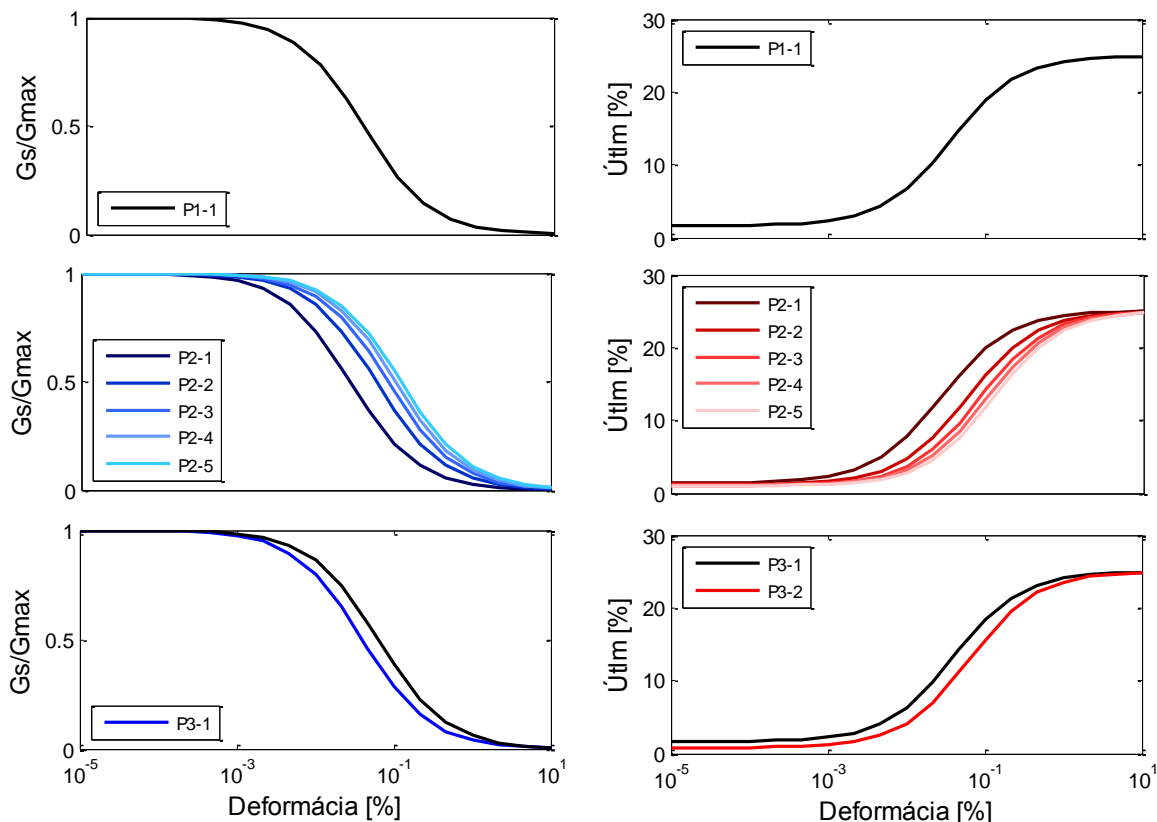
V 2. iterácii projektu Prenolin boli definované tri rôzne profily. Sú charakterizované materiálovými parametrami prostredia a mocnosťou vrstiev. Profily porovnáva Obr. 30. Materiálové parametre a mocnosti sumarizuje Tab. 7. Nelineárne vlastnosti prostredia určujú krivky redukcie modulu a útlmové krivky (Obr. 31). Z kriviek redukcie modulu sme podľa odstavca 4.1.3 zostrojili bb-krivku a vypočítali parametre Iwanovho modelu. bb-krivku sme aproximovali 201 bodmi – použili sme 200 zapojení H-p-StV. Útlmové krivky sme pri výpočte nepoužili. Porovnanie zadanej a vypočítanej útlmovej krivky pre profil P1 sme uviedli v paragrafe 1.3.2.2 (Obr. 8).

Profil	z [m]	Vs [m.s ⁻¹]	ρ [kg.m ⁻³]	Q _{el}	Q _{ve}	NL
P1	≤ 20	300	2000	5000	30	P1_1
	PP	1000	2000		200	PP
P2	≤ 20	150 - 500	2000		34.1703	P2_1
	≤ 40				40.6843	P2_2
	≤ 60				44.2831	P2_3
	≤ 80				46.8992	P2_4
	≤ 100				48.995	P2_5
PP	2000	2500	200		PP	
P3	≤ 20	300	2000		30	P3_1
	≤ 50	600			60	P3_2
	PP	2000	2500	200	PP	

Tab. 7 Materiálové parametre a mocnosti vrstiev pre profily P1, P2 a P3 definované v druhej iterácii verifikačnej fázy projektu Prenolin.



Obr. 30 Profily definované v druhej iterácii verifikačnej fázy projektu Prenolin.



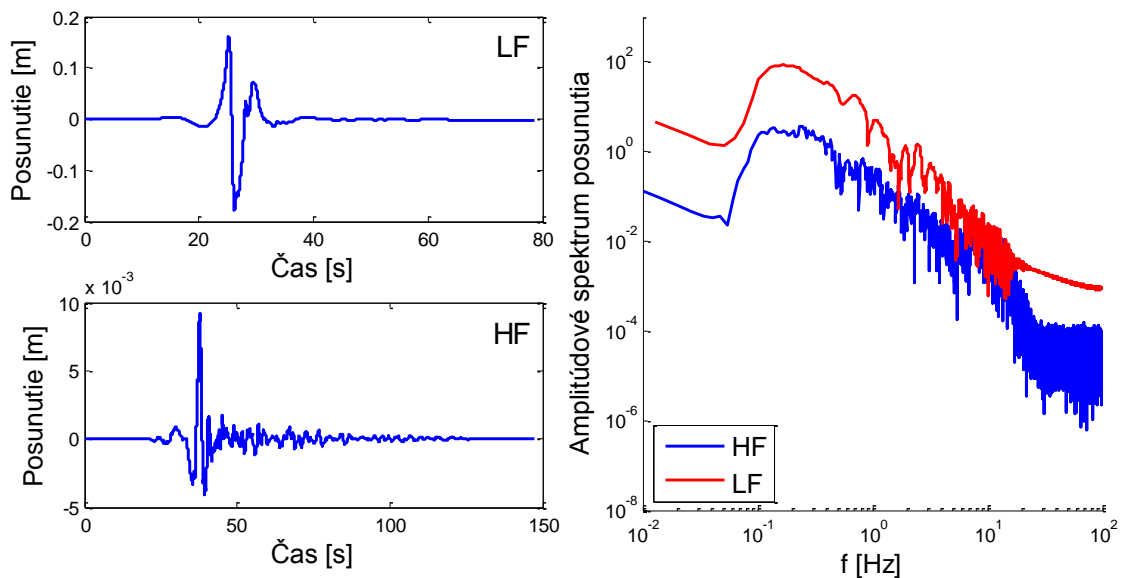
Obr. 31 Vľavo: Krivky redukcie modulu. Vpravo: Útlmové krivky.

4.3.2 Vstupný signál

Zadané boli dva typy reálnych vstupných signálov, získané zo záznamov dvoch zemetrasení na voľnom povrchu. Signál bohatší na nižšie frekvencie sa označuje LF (*low-frequency*), druhý typ signálu HF (*high-frequency*). Do použitého výpočtového programu sme zadávali vstupný signál vo forme posunutia v prípade *elastic base* (signál sme vydělili faktorom 2) a vo forme zrýchlenia v prípade *rigid base*. Oba signály sú na Obr. 32 a boli filtrované na 20 Hz. Uvedené signály sme použili ako vstupné signály do elastických a viskoelastických výpočtov. Pre účely nelineárnych výpočtov boli signály LF a HF škálované na rôzne hodnoty PGA, ktoré sumarizuje Tab. 8. Keďže signál LF generoval veľmi veľké deformácie, zadali koordinátori Prenolinu dodatočne signál LF4 škálovaný na 0.01 m.s^{-2} . Pre účely lineárnych výpočtov bol zadaný aj pseudoimpulzný Rickerov signál ().

	LF1	LF2	LF3	LF4	HF1	HF2	HF3
PGA [m.s^{-2}]	0.5	2	5	0.01	0.5	2	5

Tab. 8 Vstupné signály LF a HF škálované na uvedené hodnoty PGA.



Obr. 32 Vľavo: Závislosť posunutia od času pre dva typy vstupného signálu. Vpravo: Amplitúdové spektrum vstupných signálov. LF označuje vstupný signál bohatší na nižšie frekvencie, HF druhý typ vstupného signálu.

4.3.3 Parametre výpočtových modelov

Vo výpočtoch sme zvolili model s veľkosťou $Z_{\max} = 3000 \text{ m}$. Veľkosť hraníc PML sme definovali počtom 100 sieťových bodov. Pri určovaní sieťového a časového kroku v lineárnych výpočtoch sme sa riadili vzťahmi (3.3) a (3.4). Najprv sme urobili simulácie pre sieťový krok $h = 0.5 \text{ m}$ pre profily P1, P2, P3 a vstupný signál LF3 a HF3. Našli sme maximálne absolútne hodnoty deformácií $|\varepsilon_{\max}|$ (Hľadali sme vo všetkých časových hladinách a v každej hĺbke). Maximálnym deformáciám sme priradili zodpovedajúce hodnoty redukcie modulu, ktoré označíme k . Vstupné signály boli filtrované na 20 Hz. Túto frekvenciu sme považovali za maximálnu pri navrhovaní priestorovej numerickej siete. Podľa vzťahu (4.33) sme pre každý z profilov vypočítali nové hodnoty sieťového kroku h , podľa vzťahu (3.4) časový krok Δt . Tab. 9 sumarizuje všetky parametre výpočtových modelov pre jednotlivé profily. Všetky vykonané výpočty ilustruje Tab. 10.

	Profily	$ \varepsilon_{\max} $ [%]	k	h [m]	Δt [s]
Lineárne výpočty	P1	-	-	1	0.000771
	P2	-	-	0.5	0.000192
	P3	-	-	0.5	0.000192
Nelineárne výpočty	P1	2.5	0.01	0.2	0.000154
	P2	0.4	0.05	0.5	0.000192
	P3	0.8	0.04	0.5	0.000192

Tab. 9 Parametre výpočtových modelov.

Nelineárny výpočet																					
P1			P2			P3			P1				P2				P3				
HF1	HF2	HF3	HF1	HF2	HF3	HF1	HF2	HF3	LF1	LF2	LF3	LF4	LF1	LF2	LF3	LF4	LF1	LF2	LF3	LF4	
E	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	R

Tab. 10 Vykonané nelineárne výpočty pre profily P1, P2 a P3. HF a LF označujú typ vstupného signálu, E – označuje výpočet *elastic base*, R – *rigid base*.

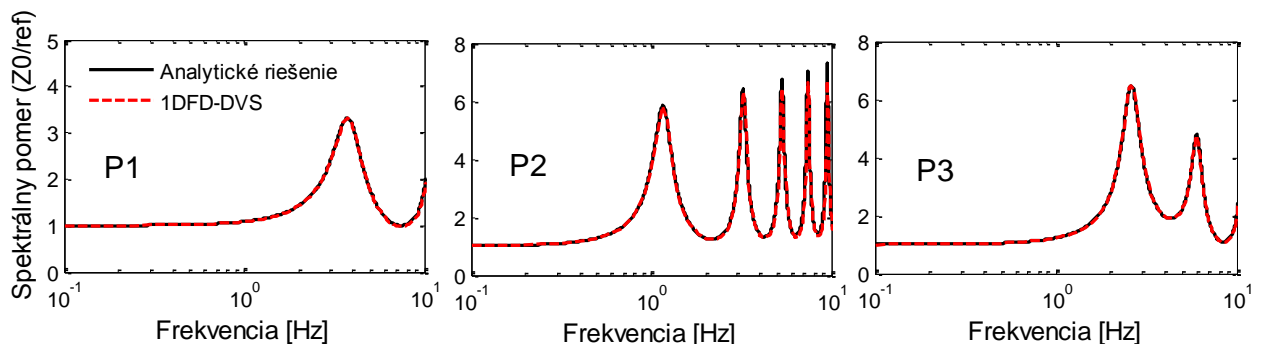
4.3.4 Verifikácia numerickej metódy

Obrázky uvedené v tomto odstavci sú prevzaté a upravené grafy spracované koordinátormi projektu Prenolin.

Prvou fázou projektu Prenolin je verifikačná fáza. Podľa Moczo et al. (2014) je verifikácia definovaná nasledovne: „Pod verifikáciou rozumieme vo všeobecnosti preukázanie konzistentnosti numerickej metódy s originálnym matematicko-fyzikálnym problémom, ktorý je definovaný riadiacou rovnicou, konštitučným zákonom a počiatočnými a okrajovými podmienkami. Kvantitatívna analýza presnosti numerickej metódy by mala byť súčasťou verifikácie.“

Takáto formulácia je aplikovateľná na lineárne výpočty, ktoré vieme pre kanonické modely overiť porovnaním s analytickým, a teda presným riešením problému. V prípade nelineárnych výpočtov nemáme k dispozícii analytické riešenie ani pre kanonické 1D modely. Verifikačnú fázu definovanú v projekte Prenolin je preto možné chápať v dvoch krokoch. Prvým krokom je verifikácia numerickej metódy pre lineárne výpočty. V druhom kroku je dôležité, aby sa projektu zúčastnilo viac tímov, ktoré využívajú rôzne numerické schémy a rôzne typy nelineárnych modelov. Ak sa výsledky jednotlivých tímov bez ohľadu na použité metódy k sebe približujú, môžeme toto považovať za určitý typ verifikácie. Validácia, a teda porovnanie výsledkov s reálnymi dátami, je v prípade nelineárnych výpočtov o to dôležitejšia, o čo je verifikácia tak povediac „nepresnejšia“.

Pôvodný výpočtový program 1DFD_DVS, do ktorého sme implementovali Iwanov model, bol v prípade lineárnych výpočtov verifikovaný v iných projektoch. Obr. 33 zobrazuje prenosové funkcie kanonických 1D modelov, ktoré sú získané z výsledkov lineárnych výpočtov v elastickom prostredí v projekte Prenolin. Čierna čiara reprezentuje analytické riešenie. Vstupný signál bol pseudoimpulzný Rickerov signál. Vidíme, že náš výpočet spĺňa kritérium presnosti tak povediac „v hrúbke čiary“.



Obr. 33 Spektrálny pomer Z_0/ref pre profily P1, P2 a P3 definované v projekte Prenolin.

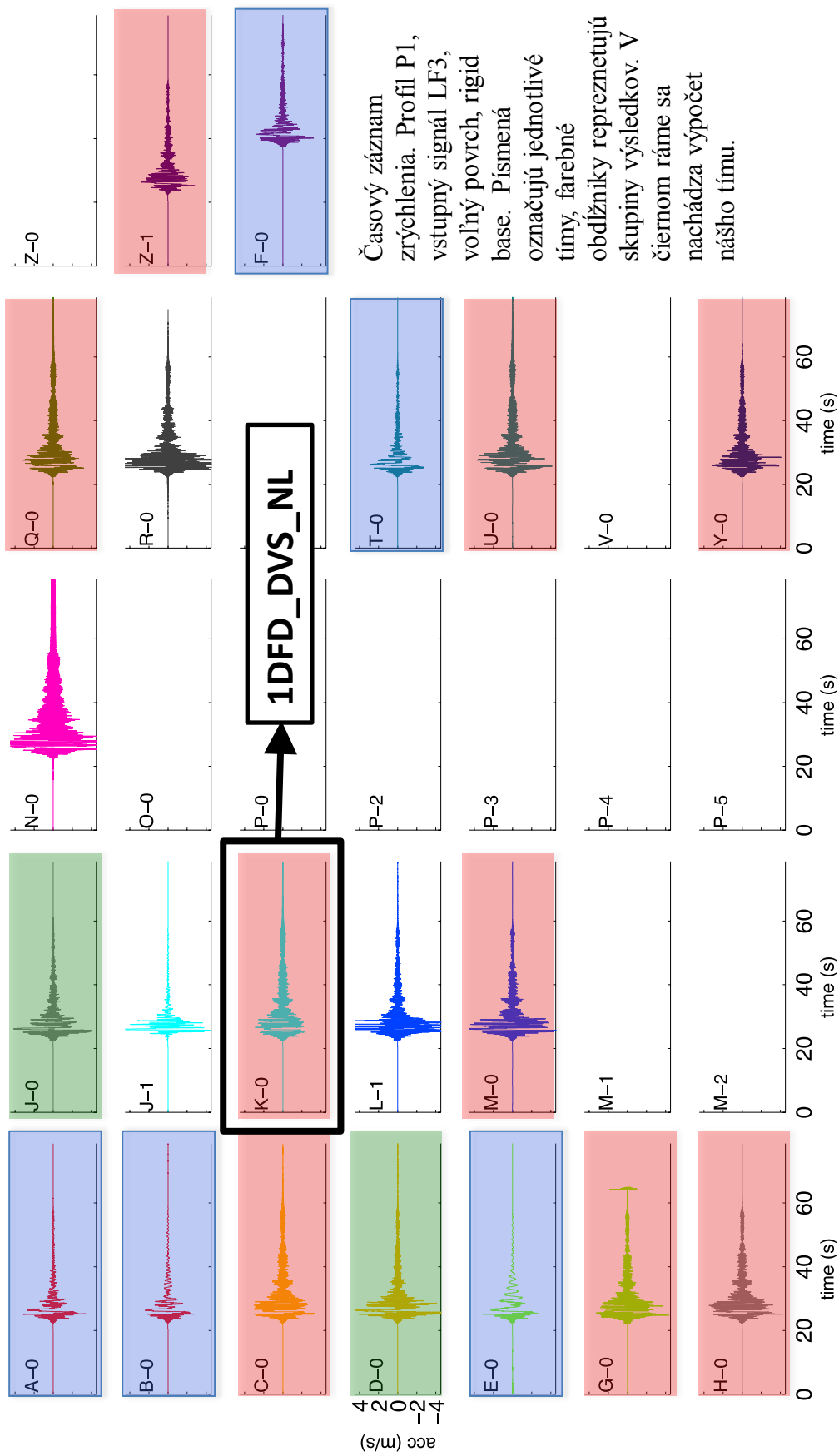
V ďalšom kroku bolo dôležité, aby sa výsledky našich nelineárnych výpočtov zhodovali s čo najväčším počtom výsledkov iných tímov. Koordinátori projektu rozdelili nelineárne výpočty do troch skupín, pričom niektoré z výpočtov nebolo možné zaradiť. V rámci jednej skupiny boli výsledky vo všeobecnosti podobné. Toto rozdelenie bolo však len kvalitatívne a tiež veľmi subjektívne. Obr. 34 ukazuje časové záznamy zrýchlenia na voľnom povrchu pre profil P1. Uvedené sú výsledky všetkých tímov, ktoré vykonali výpočet *rigid base* pre vstupný signál LF3. Rôznymi farbami obdĺžnikov sú vyznačené tímy, ktoré zaradili koordinátori Prenolinu do rovnakej skupiny. Záznam v čiernom ráme označuje náš výsledok. Jednotlivé skupiny boli identifikované aj v spektrálnom pomere $Z0/ref$ a tiež v závislosti PGA a maximálnej deformácie od hĺbky (Obr. 36). Obr. 35 znázorňuje závislosť napätia od deformácie v hĺbke $h = 5 m$ pre ten istý výpočet. Môžeme vidieť, že rozdiely v rámci jednej skupiny sú veľké a predchádzajúce rozdelenie sa nejaví byť opodstatnené. Napriek tomu môžeme konštatovať, že sa naše výsledky vo všetkých porovnaníach jednoznačne zaraďujú do najpočetnejšej skupiny riešení a sú veľmi blízke viacerým výsledkom. Toto konštatovanie je priamou indikáciou toho, že implementácia algoritmu do výpočtového programu a tiež samotný algoritmus boli správne.

Pre bližšie porovnanie výsledkov sme si zvolili tri tímy s označením Q, Y a H. Nášmu tímu bolo priradené písmeno K. Tím Q používa metódu spektrálnych elementov a tím H metódu konečných elementov. Numerickú metódu tímu Y nepoznáme. Malý rozdiel výsledkov pre tri rozdielne numerické metódy (vrátane našej) je tiež relevantným overením funkčnosti programu. Výpočty v projekte Prenolin neboli všetky povinné, preto uvádzame v niektorých prípadoch výsledky len dvoch či troch tímov. Porovnanie sme urobili pre signál HF3 pre profily P1 a P2, a to pre prípad *elastic base* aj *rigid base*. Porovnanie výsledkov je na Obr. 37 a Obr. 38. Môžeme vidieť, že najväčšiu zhodu dosahujú výsledky v spektrálnom pomere $Z0/ref$ (najmä v intervale frekvencií 1–10 Hz). Obrázok tiež porovnáva závislosť PGA a maximálnej deformácie od hĺbky. Pod maximálnou deformáciou v tomto prípade rozumieme maximálnu absolútnu hodnotu deformácie určenú v danej hĺbke z . Obrázok ukazuje, že náš program mierne nadhodnocuje hodnoty deformácie a podhodnocuje hodnoty PGA. Toto môže byť spôsobené neschopnosťou Iwanovho modelu simulovať realistický útlm pri väčších deformáciách (útlm Iwanovho modelu je väčší).

Výsledky vo všeobecnosti poskytli niekoľko informácií. Rozdiel medzi výpočtami sa zväčšuje pre zväčšujúcu sa amplitúdu vstupného signálu. Signál LF generuje väčšie

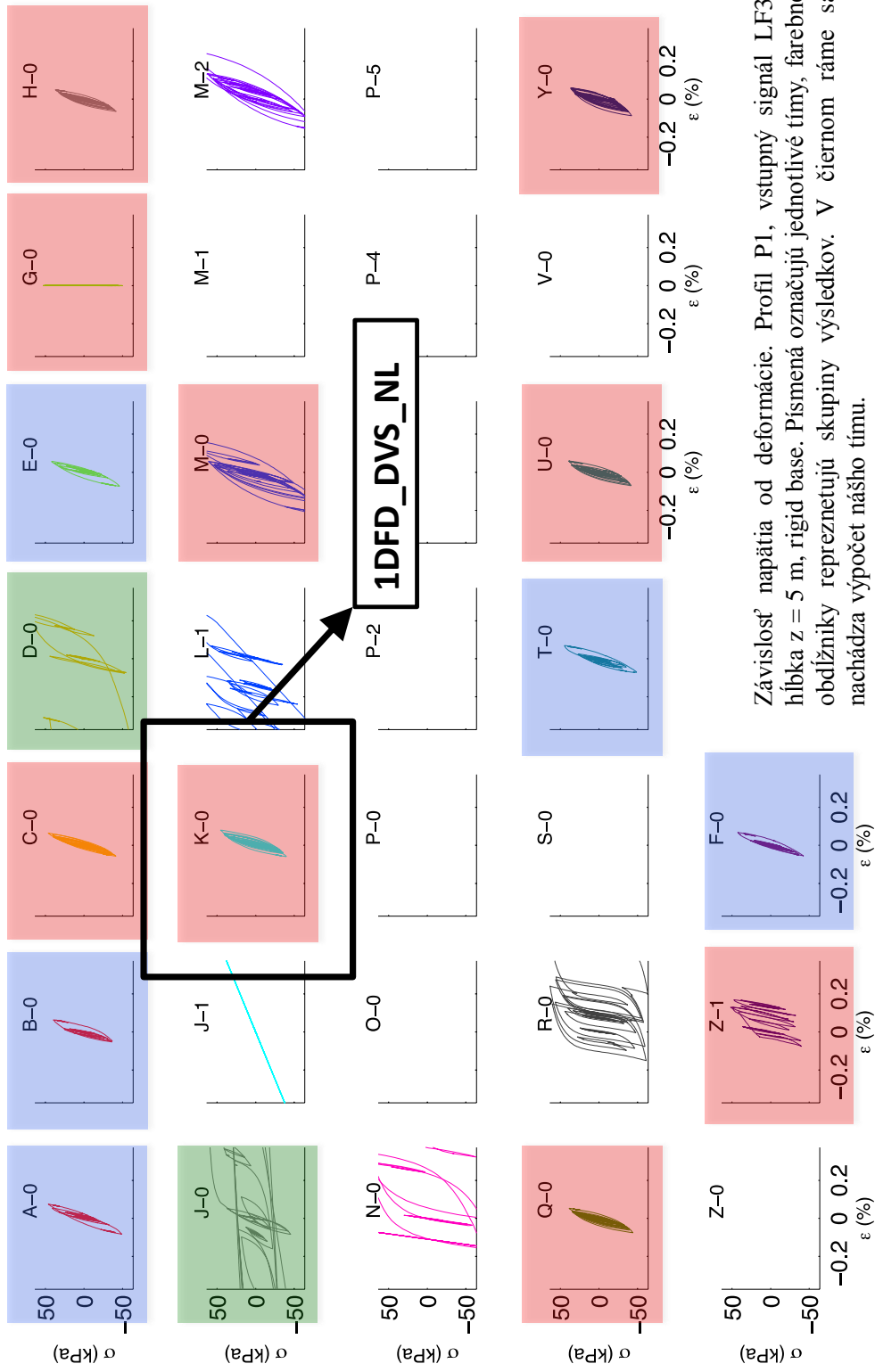
deformácie – nelineárnejšie správanie v porovnaní s HF. Rozdiely vo výsledkoch sú v prípade LF väčšie. To isté platí aj pre *rigid base* v porovnaní s *elastic base*.

Overili sme správnosť navrhnutého algoritmu porovnaním s výsledkami troch tímov projektu Prenolin. V ďalšom odstavci ilustrujeme vplyv nelineárneho konštitučného vzťahu na seizmický pohyb.



Časový záznam
zrýchlenia. Profil P1,
vstupný signál LF3,
voľný povrch, rigid
base. Písmená
označujú jednotlivé
tímy, farebné
obdĺžniky reprezentujú
skupiny výsledkov. V
čiernom ráme sa
nachádza výpočet
nášho tímu.

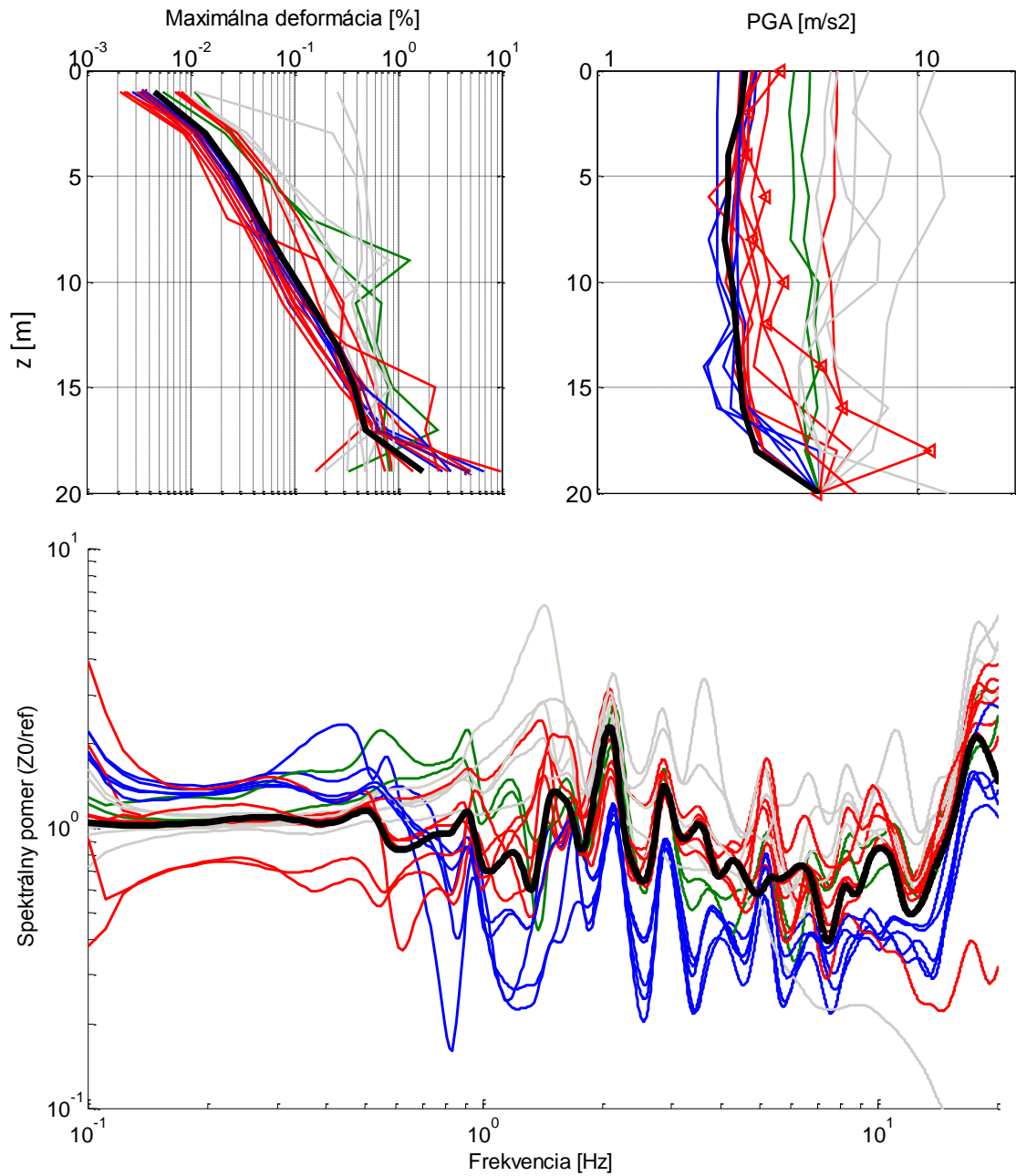
Obr. 34



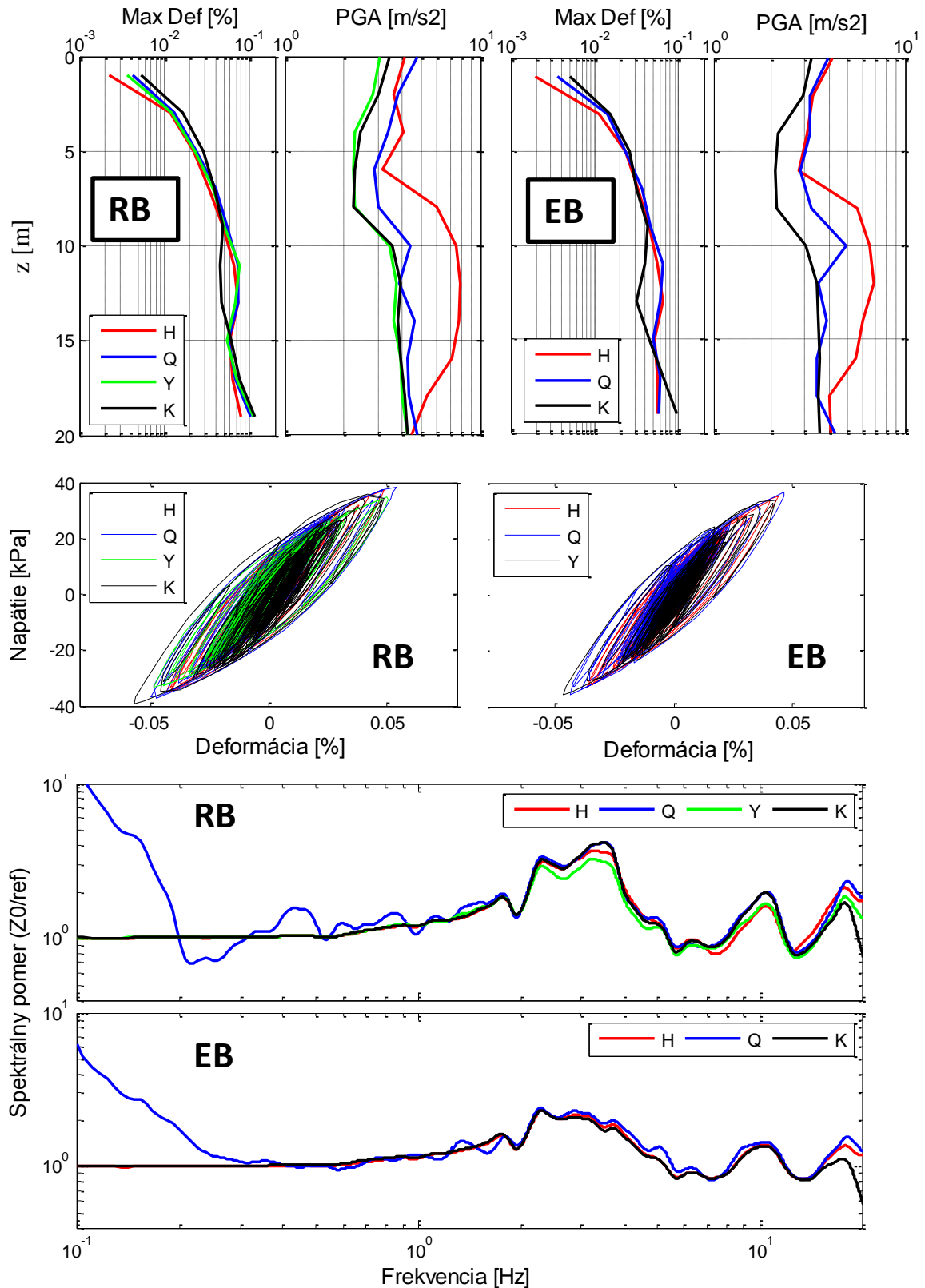
Závislosť napätia od deformácie. Profil P1, vstupný signál LF3, hĺbka $z = 5$ m, rigid base. Písmená označujú jednotlivé tímy, farebné obdĺžniky reprezentujú skupiny výsledkov. V čiernom ráme sa nachádza výpočet nášho tímu.

Obr. 35

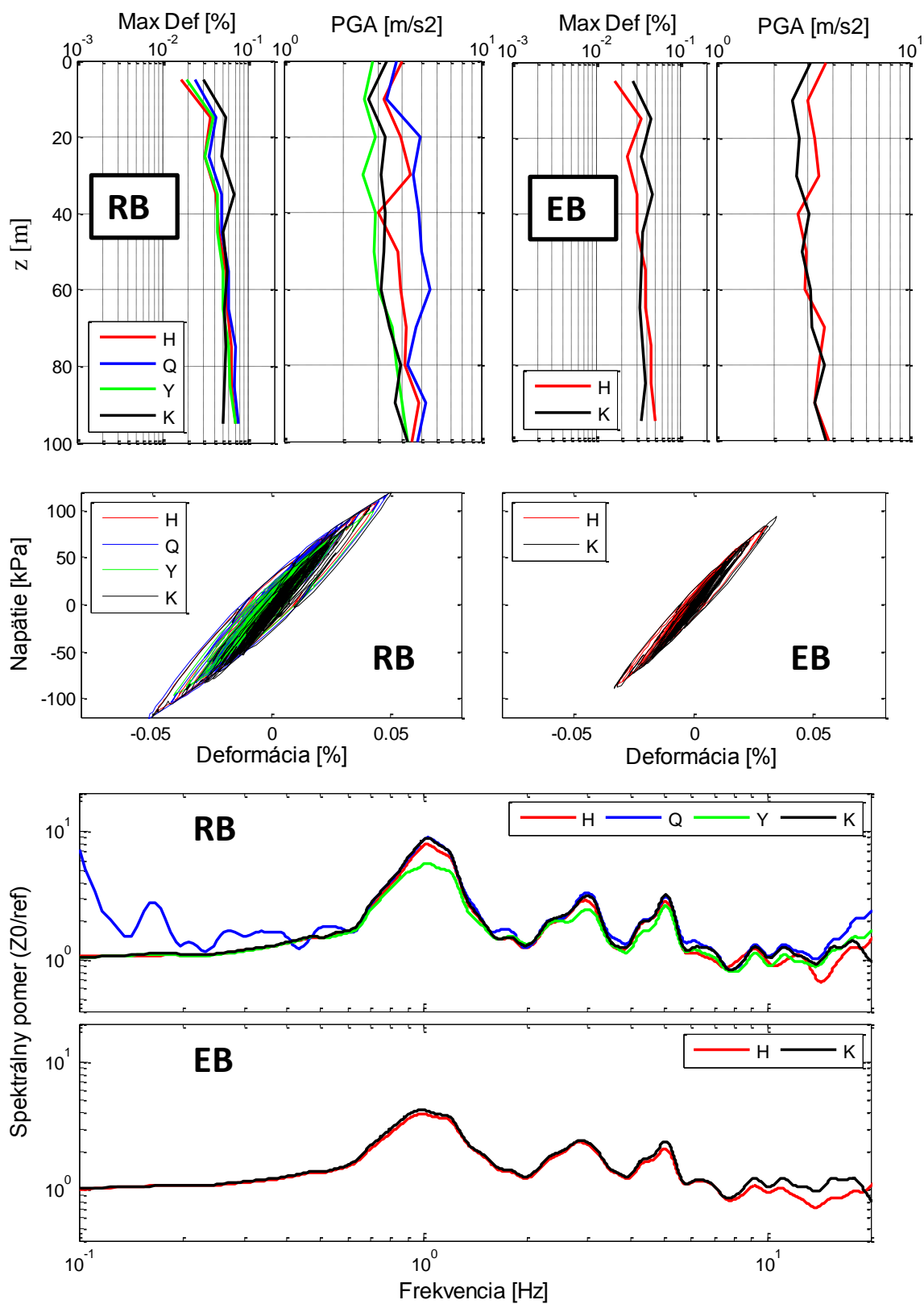
Obr. 36 Hore: Závislosť maximálnej deformácie a PGA od hĺbky. Profil P1, vstupný signál LF3, rigid base. Modrou, červenou a zelenou farbou sú označené skupiny s podobnými výsledkami. Výpočet nášho tímu je označený čiernou farbou a patrí do červenej skupiny výsledkov. Šedou farbou sú označené nezaradené výsledky. Dole: Spektrálny pomer Z0/ref.



Obr. 37 Profil P1. Farby označujú jednotlivé tímy, RB – rigid base, EB – elastic base. Hore: Závislosť maximálnej deformácie a PGA od hĺbky. V strede: Závislosť napätia od deformácie v hĺbke 5 m. Dole: Spektrálny pomer Z0/ref.

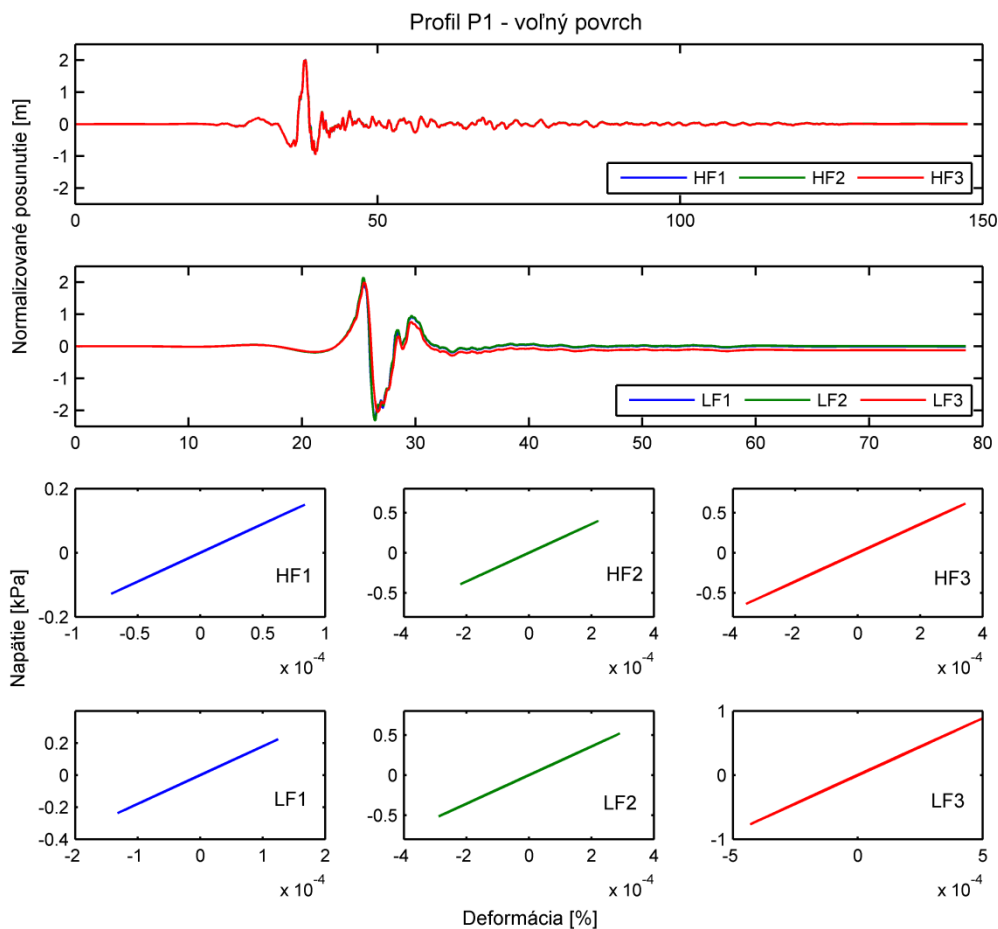


Obr. 38 Profil P2. Farby označujú jednotlivé tímy, RB – *rigid base*, EB – *elastic base*. Hore: Závislosť maximálnej deformácie a PGA od hĺbky. V strede: Závislosť napätia od deformácie v hĺbke 5 m. Dole: Spektrálny pomer Z0/ref.

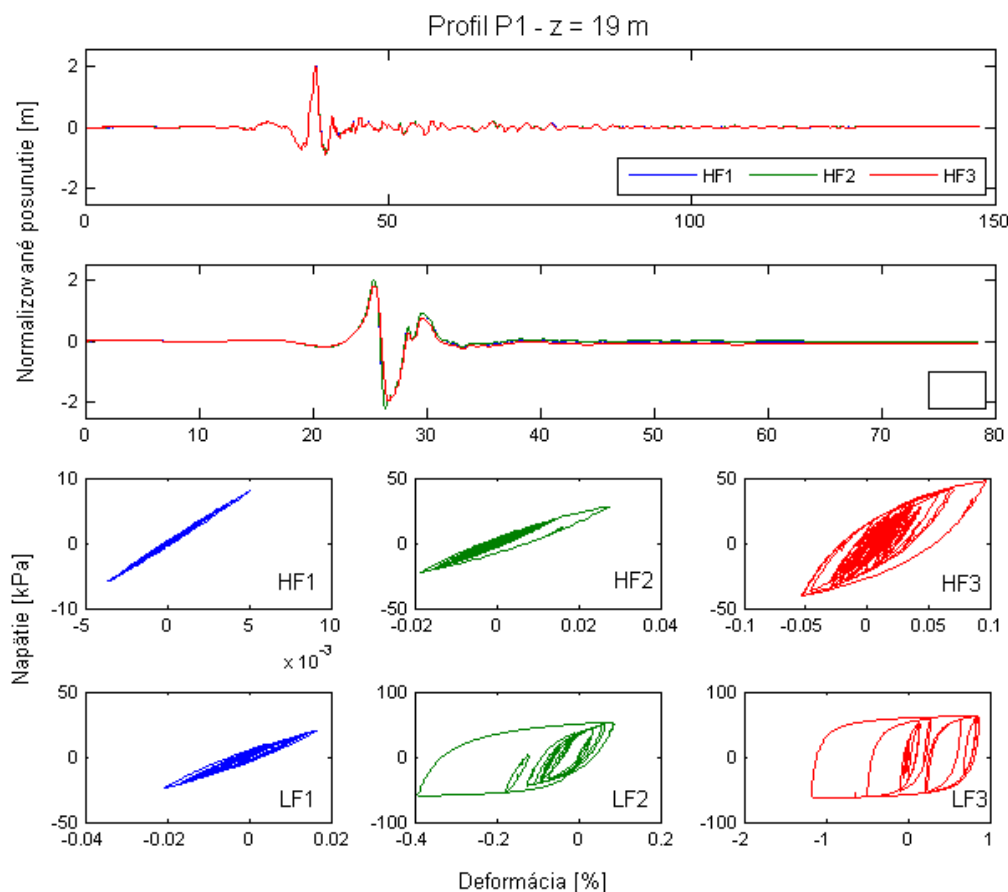


4.3.5 Ilustrácia vplyvu nelineárneho konštitučného vzťahu na seizmický pohyb

Obr. 39 a Obr. 40 zobrazujú závislosť posunutia od času a závislosť napätia od deformácie pre profil P1 vypočítané na voľnom povrchu a v hĺbke $z = 19 \text{ m}$. Vzhľadom k tomu, že používame striedavo usporiadanú sieť, hodnoty napätia a deformácie boli v skutočnosti vypočítané v hĺbke $z + h/2$, kde $h = 0.2 \text{ m}$. Posunutie sme normalizovali maximálnou hodnotou posunutia vstupného signálu, hodnoty napätia a deformácie sme nemenili. Môžeme vidieť, že charakter signálu v časovej oblasti sa mení minimálne, rozdiel vidíme najmä na zázname posunutia signálu LF3. Posunutie je v hĺbke $h/2$ nenulové aj na konci seizmogramu, čo je spôsobené nevratnými deformáciami, ktoré vznikajú počas nelineárneho výpočtu (deformácia je nenulová pri nulovom napätí). V hĺbke $z = 19 \text{ m}$ vidíme výrazné nelineárne správanie pre oba typy signálov. Amplitúdy deformácie sú pre signál LF až o jeden rád väčšie, hodnoty napätia približne o 50%.



Obr. 39 Profil P1 – voľný povrch. Hore: Normalizovaná závislosť posunutia od času pre škálované signály HF a LF. Dole: Závislosť napätia od deformácie pre škálované signály HF a LF.



Obr. 40 Profil P1 – hĺbka $z = 19$ m. Hore: Normalizovaná závislosť posunutia od času pre škálované signály HF a LF. Dole: Závislosť napätia od deformácie pre škálované signály HF a LF.

Obr. 41 zobrazuje priebeh maximálnej deformácie a PGA v profiloch P1, P2 a P3 v závislosti od hĺbky. Porovnáva osobitne prípady *elastic base* a *rigid base* pre všetky typy signálov. Pozrime sa na prípad *elastic base*. Čiernou farbou sú vykreslené výpočty vo viskoelastickom prostredí pre vstupný signál HF1 a HF3. Deformácie získané v nelineárnom výpočte HF1 sa líšia len minimálne od lineárneho výpočtu. Hodnoty PGA na voľnom povrchu pre signál HF1 sú vo výpočtoch pre viskoelastické prostredie na profiloch P2 a P3 takmer identické s hodnotami nelineárnych výpočtov, na profile P1 je rozdiel na úrovni 0.2 m.s^{-2} . Tvar krivky závislosti maximálnej deformácie a PGA od hĺbky je pre viskoelastické výpočty HF1 a HF3 rovnaký. Toto neplatí pre nelineárny výpočet, pri ktorom sa ich tvar so zväčšujúcou amplitúdou vstupného signálu mení. Rozdiel v hodnotách PGA pre viskoelastický výpočet a nelineárny výpočet sa pri amplitúde vstupného signálu HF3 zväčšuje, pre vrstvu P2 je tento rozdiel až 7 m.s^{-2} . Tiež si môžeme všimnúť výrazný skok v hodnote deformácie na rozhraní dvoch nelineárnych prostredí v profile P3 v hĺbke $z = 19.25 \text{ m}$, a to najmä pre signál LF3. Aj toto môže byť

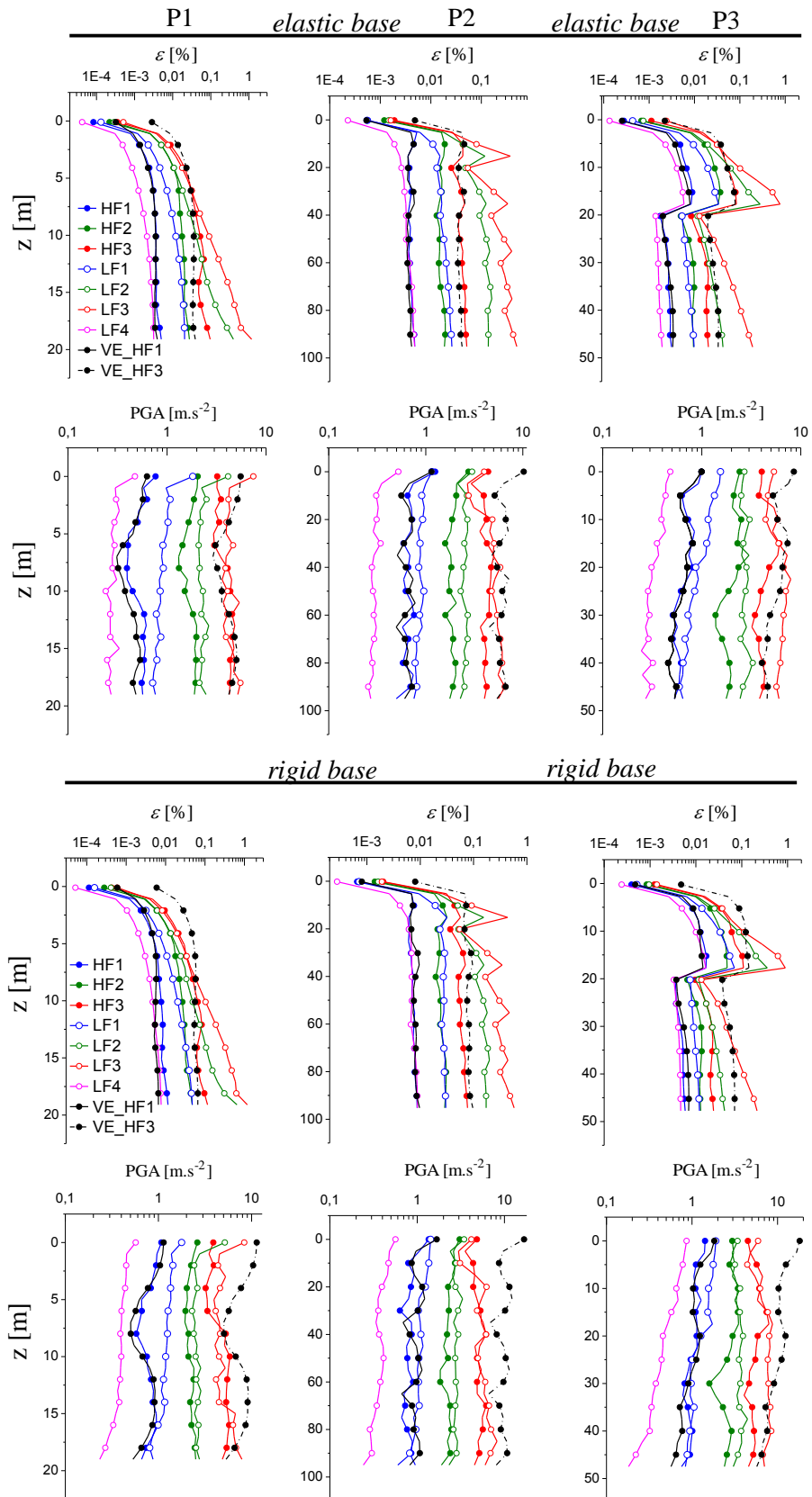
indikáciou skutočnosti, že je vo výpočte dôležitá správna reprezentácia materiálového rozhrania. Aj profil P2 sa vyznačuje výrazným skokom v hodnote deformácie v hĺbke $z = 19.5 \text{ m}$, čo môže súvisieť s veľmi nízkymi hodnotami rýchlosti v_S – len 150 m.s^{-1} v blízkosti voľného povrchu.

Obr. 42 hore ukazuje závislosť PGA na voľnom povrchu od PGA vstupného signálu pre signály HF1, HF2 a HF3. V prípade lineárnych výpočtov je závislosť lineárna, čo však neplatí pre nelineárny výpočet. Môžeme vidieť, že so zväčšujúcou sa hodnotou PGA vstupného signálu je rast PGA na voľnom povrchu stále menší. Takýto jav môžeme považovať za dôsledok nelineárneho správania. Modrá krivka reprezentuje profil P1. Napriek tomu, že je PGA na voľnom povrchu pre tento profil najmenšie, (čo je zrejme spôsobené malým impedančným kontrastom na rozhraní), vrstva sa javí byť najnelineárnejšia. Tento fakt súhlasí s tvrdením, že plytké sedimentárne vrstvy s impedančným kontrastom blízko voľného povrchu môžu vybudieť nelineárne správanie už pri menších hodnotách PGA. Obr. 42 dole zobrazuje závislosť hodnoty PGA na voľnom povrchu od maximálnej deformácie vypočítanej vo vrstve. Obrázok ukazuje podobné nelineárne správanie ako Obr. 42 hore.

V odstavci 1.2.2 sme uviedli ako jeden z prejavov nelineárneho správania posun rezonančnej frekvencie k nižším hodnotám.

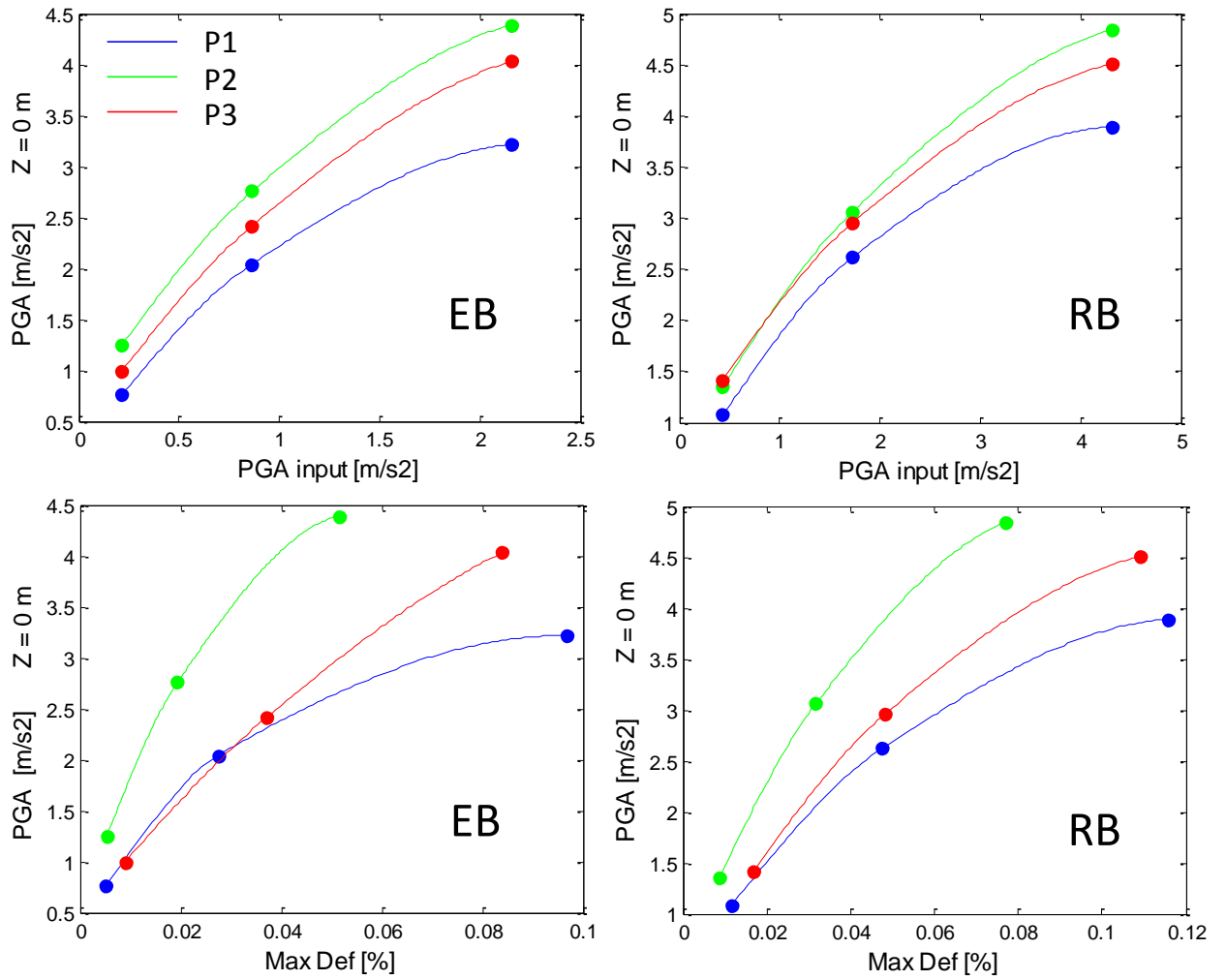
Obr. 43 ukazuje prenosové funkcie získané z nelineárnych výpočtov *elastic base* pre profily P1, P2 a P3 a vstupné signály HF (1 – 3) a LF (1 – 4). Prenosové funkcie sme vypočítali ako pomer spektra posunutia na voľnom povrchu a spektra vstupného signálu. Spektrá sme vyhladili pseudo-Gaussovskou vyhladzovacou funkciou. V prípade HF aj LF vidíme pomerne jasný posun rezonančnej frekvencie k nižším hodnotám. Prenosové funkcie získané z výpočtu so vstupným signálom LF3 sú výrazne utlmované a strácajú svoj charakteristický tvar. Je potrebné pripomenúť, že prenosová funkcia už necharakterizuje prenosové vlastnosti prostredia v rovnakom význame ako pri lineárnych výpočtoch. V lineárnom prostredí vieme pre akúkoľvek dopadajúcu vlnu vypočítať spektrálne posunutie na voľnom povrchu jednoduchým vynásobením spektra dopadajúcej vlny prenosovou funkciou. Toto však neplatí v prípade nelineárnej vrstvy a význam prenosovej funkcie sa v tomto zmysle redukuje na kvantifikáciu nelineárnych efektov.

V tomto odstavci sme ilustrovali niektoré vplyvy nelineárnych efektov na vypočítaný seizmický pohyb. Či je náš program schopný reprodukovať reálne namerané dáta bude zrejmé až vo validačnej fáze projektu Prenolin.



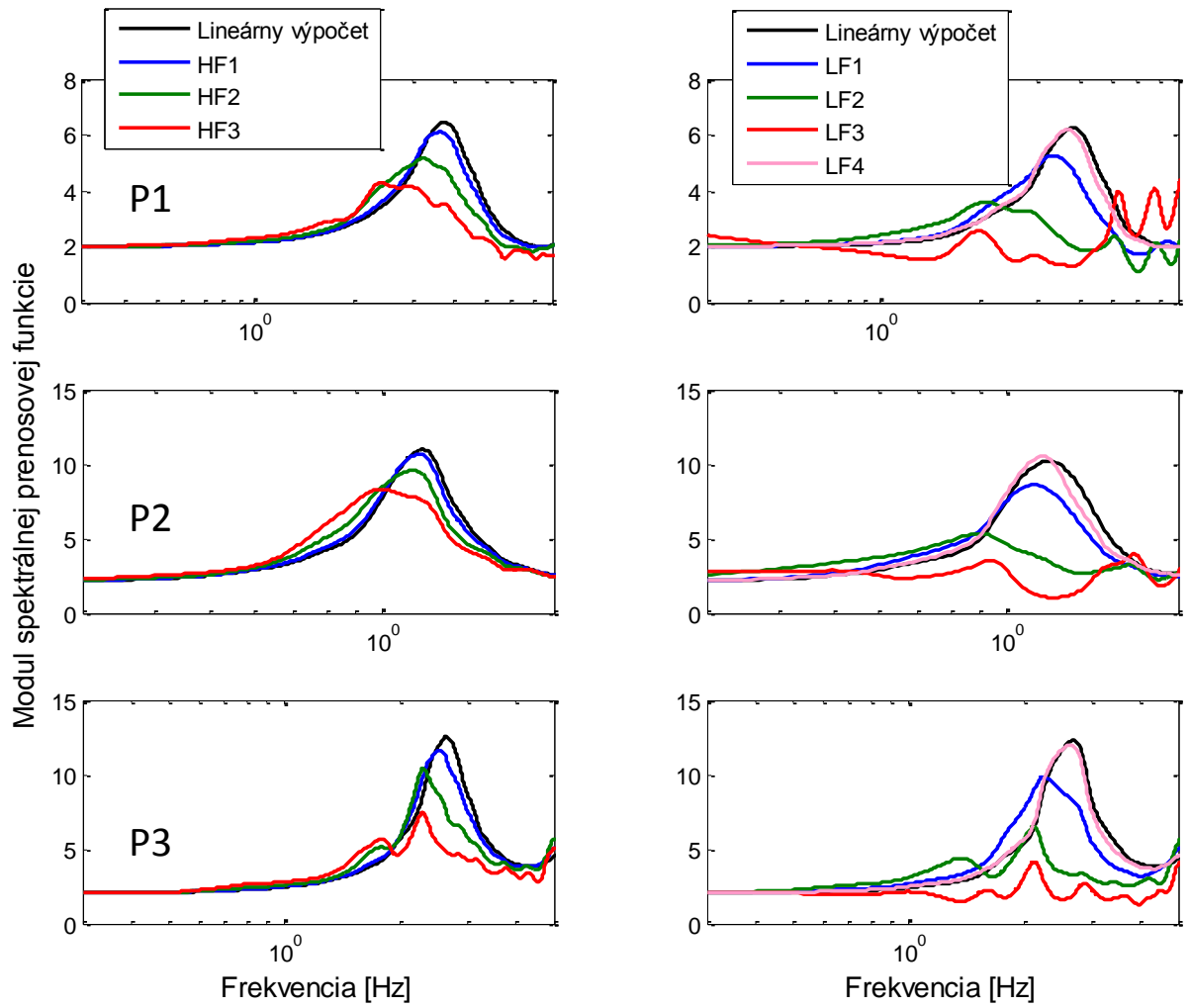
Obr. 41 Hodnoty PGA a maximálnej deformácie pre profily P1, P2 a P3 pre prípady *rigid base* a *elastic base*. Jednotlivé farby odlišujú amplitúdu vstupného signálu, plný krúžok označuje signál HF, prázdny krúžok LF. Čiernou farbou sú vyznačené viskoelastické výpočty prislúchajúce signálu HF1 a HF2.

Vstupný signál HF



Obr. 42 Profily P1.P2 a P3, signál HF. Hore: Závislosť PGA na voľnom povrchu od PGA vstupného signálu. Dole: Závislosť PGA na voľnom povrchu od maximálnej vypočítanej deformácie v profile.

Elastic base



Obr. 43 Moduly spektrálnej prenosovej funkcie pre profily P1,P2 a P3. Vľavo: Vstupný signál - škálovaný signál HF. Vpravo: Vstupný signál - škálovaný signál LF.

Závery

- Charakterizovali sme
 - výsledky laboratórnych meraní ako motiváciu pre výskum nelineárneho správania materiálov,
 - vplyv nelineárneho správania na seizmický pohyb pri silných zemetraseniach,
 - hysteréznú závislosť napätia od deformácie a jej základné vlastnosti,
 - štyri fenomenologické pravidlá popisujúce jav hysteréznej závislosti – rozšírené Masingove pravidlá,
 - nelineárne modely aproximujúce nelineárne správanie materiálov,
 - výhody a nedostatky jednotlivých modelov.
- Na opis hysteréznej závislosti napätia od deformácie sme vybrali Iwanov model, ktorý je konzistentný s rozšírenými Masingovými pravidlami. Podobne ako iné modely riadiace sa druhým Masingovým pravidlom, neumožňuje Iwanov model zahrnúť reálny (meraný) útlm pre všetky hodnoty deformácie. Popísali sme možné riešenia tohto problému uvádzané v literatúre.
- Vytvorili sme algoritmizovateľný matematicko-fyzikálny popis Iwanovho modelu. Schopnosť modelu sledovať rozšírené Masingove pravidlá sme v navrhnutom algoritme zohľadnili pomocou konceptu aktivačných napätí a deformácií. Algoritmus sme naprogramovali a otestovali na jednoduchých funkčných závislostiach. Následne sme ho implementovali do 1D výpočtového programu na simulovanie šírenia seizmických vln.
- Popísali sme postup určenia parametrov Iwanovho modelu z nameraných dát. Kľúčovou je pri tom krivka redukcie modulu, ktorá určuje pokles modulu v závislosti od deformácie.
- Venovali sme sa zásadným problematickým aspektom diskretizácie 1D vrstevnatého modelu elastoplastického prostredia:
 - charakterizovali sme iteratívny dvojkrokový postup pri určovaní optimálneho sieťového kroku v nelineárnych prostrediach,
 - analyzovali sme vplyv počtu zapojení Iwanovho modelu na závislosť napätia od deformácie,

- skúmali sme problém reprezentácie rozhrania nelineárnej vrstvy a elastického polpriestoru.
- Zúčastnili sme sa medzinárodného projektu Prenolin zameraného na zlepšenie numerického modelovania seizmického pohybu v nelineárnych prostrediach:
 - vykonali sme numerické simulácie pre zadané kanonické modely
 - výsledky nášho tímu patria do najpočetnejšej skupiny riešení a sú blízke riešeniam viacerých tímov,
 - porovnanie našich výsledkov s výsledkami viacerých tímov možno považovať za overenie správnosti nášho algoritmu a jeho implementácie do výpočtového programu.
- Ilustrovali sme vplyv nelineárneho správania materiálov na seizmický pohyb.

Zoznam použitej literatúry

- Assimaki, D., Li, W., & Kalos, A. (2011). A Wavelet-based Seismogram Inversion Algorithm for the In Situ Characterization of Nonlinear Soil Behavior. *Pure Appl. Geophys.*, 168, 1669-1691.
- Assimaki, D., Li, W., Steidl, J., & Schmedes, J. (2008). Quantifying nonlinearity susceptibility via site-response modeling uncertainty at three sites in the Los Angeles basin. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 98, 2364-2390.
- Bardet, J. P., & Tobita, T. (2001). *NERA: A Computer Program for Nonlinear Earthquake site Response Analyses of Layered Soil Deposits*. University of Southern California.
- Bardet, J. P., Ichii, K., & Lin, C. H. (2000). *EERA: A computer program for Equivalent-linear Earthquake site response analyses of layered soil deposits*. University of Southern California, Los Angeles, California.
- Bonilla, L. F. (2007). *Analyse des Effets de Site, Estimation des Mouvements Forts et Calcul Probabiliste de l'Alea Sismique*. Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches. University of Joseph Fourier. Grenoble, France.
- Bonilla, L. F., Archuleta, R. J., & Lavallée, D. (2005). Hysteretic and Dilatant Behavior of Cohesionless Soils and Their Effects on Nonlinear Site Response: Field Data Observations and Modeling. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 95, 2373 - 2395.
- Bonilla, L. F., Gelis, C., & Regnier, J. (2011). The challenge of nonlinear site response: Field data observations and numerical simulations. *4th IAESPE/IAEE International Symposium: Effects of surface geology on seismic motion*.
- Darendeli, M. B. (2001). *Development of a New Family of Normalized Modulus Reduction and Material Damping Curves*. Dissertation. The University of Texas, Austin.
- De Martin, F. (2010). *Influence of the Nonlinear Behavior of Soft Soils on Strong Ground Motions*. Thèse. École Centrale Paris.
- Gandomzadeh, A. (2011). *Interaction Dynamique Sol-Structure: Influence des Nonlinéarités de Comportement du Sol*. Thèse de Doctorat. Université Paris EST.
- Gélis, C., & Bonilla, L. F. (2012). 2-D P-SV numerical study of soil-source interaction in a non-linear basin. *Geophys. J. Int.*, 191, 1374-1390.
- Hardin, B. O., & Drnevich, V. (1972a). Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects. *J. Soil. Mech. Found. Div.*, 98, 603-624.

- Hardin, B. O., & Drnevich, V. (1972b). Shear Modulus and Damping in Soils: Design Equations and Curves. *J. Soil. Mech. Found. Div.*, 98, 667-692.
- Choi, Y., & Stewart, J. P. (2005). *Nonlinear Site Amplification as Function of 30m Shear Wave Velocity*. Postprints. University of California.
- Idriss, I. M., & Sun, J. I. (1992). *SHAKE91: User's Manual*. Center fo Geotechnical Modeling, Department of Civil and Environmental Engineering. University of California.
- Ishibashi, I., & Zhang, X. (1993). Unified Dynamic Shear Moduli and Damping Ratios of Sand and Clay. *Soils and Foundations*, 33, 182-191.
- Ishihara, K., Yoshida, N., & Tsujino, S. (1985). Modelling of stress-strain relations of soils in cyclic loading. *5th International Conference on numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya.
- Iwan, W. D. (1967). On a Class of Models for the Yielding Behaviour of Continuous and Composite Systems. *J. Appl. Mech.*, 612 - 617.
- Joyner, W. B. (1975). Method for calculating nonlinear seismic response in two dimensions. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 65, 1337-1357.
- Joyner, W. B., & Chen, A. (1975). Calculation of Nonlinear Ground Response in Earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1315 - 1336.
- Kausel, E., & Assimaki, D. (2002). Seismic Simulation of Inelastic Soils via Frequency-Dependent Moduli and Damping. *J. Eng. Mech.*, 128, 34-47.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical earthquake engineering*. New Jersey: Prentice Hall.
- Masing, G. (1926). Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. *Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, 332 - 335.
- Moczo, P. (2005). *Zemetrasenia a seizmológia budúcnosti*. Dostupné na Internet: http://www.nuquake.eu/Earthquakes/Uvodny_text.pdf
- Moczo, P., Kristek, J., & Gális, M. (2014). *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions*. Cambridge University Press.
- Moczo, P., Kristek, J., & Halada, L. (2004). *The Finite Difference method for seismologists. An Introduction*. Bratislava: Comenius University.
- Moczo, P., Kristek, J., Vavryčuk, V., Archuleta, R. J., & Halada, L. (2002). Heterogeneous Staggered-Grid Finite-Difference Modeling of Seismic Motion with Volume

- Harmonic and Arithmetic Averaging of Elastic Moduli and Densities. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 92, 3042-3066.
- Pavlenko, O. V., & Irikura, K. (2005). Identification of the non-linear behaviour of liquefied and non-liquefied soils during the 1995 Kobe earthquake. *Geophys. J. Int.*, 160, 539-553.
- Rao, S. N., & Panda, A. P. (1999). Non-linear analysis of undrained cyclic strength of soft marine clay. *Ocean engineering*, 241 - 253.
- Régnier, J., Héloise, C., Bonilla, L. F., Bertrand, E., & Semblat, J.-F. (2013). Assessing Nonlinear Behavior of Soils in Seismic Site Response: Statistical Analysis on KiK-net Strong-Motion Data. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 103, 1750-1770.
- Richterová, A. (2012). *ID modelovanie nelineárnych efektov zemetrasení*. Bakalárska práca. Bratislava.
- Santos, J. A., & Correia, G. (2001). Shear Modulus of Soils under Cyclic Loading at Small and Medium Strain Level. Technical University of Lisbon.
- Schnabel, P. B., Lysmer, J., & Seed, H. B. (1972). *SHAKE: a computer program for earthquake response analyses of horizontally layered sites*. . Earthquake Engineering Research Center (EERC) Report No. EERC 72-12. University of California, Berkeley.
- Stewart, J. P., Kwok, A. O.-L., Hashash, Y. M., Pyke, R., Wang, Z., & Yang, Z. (2008). *Benchmarking of Nonlinear Geotechnical Ground Response Analysis Procedures*. University of California.
- Vucetic, M., & Dobry, R. (1991). Effect of Soil Plasticity on Cyclic Response. *J. Geotech. Engrg.*, 117, 89-107.
- Wen, K. L., Huang, J. Y., Chen, C.-T., & Chen, Y.-W. (2011). Nonlinear Site Response of the 2010 Darfield New Zealand Earthquake sequence. *4th IAESPEI/IAEE International Symposium: Effects of surface geology on seismic motion*.

Príloha A

Výpočet útlmovej krivky pre nelineárne modely riadiace sa druhým Masingovým pravidlom a špecifikácia pre Iwanov model

V tomto odseku sme postupovali podobne ako autori práce Bardet a Tobita (2001). Pre lepšie pochopenie sme však miesto všeobecnej funkcie τ použili napätie vyjadrené zo vzťahu (1.14) (druhé Masingove pravidlo).

Útlm je podľa vzťahu (1.9) definovaný ako

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{W_D}{W_S} \quad (4.38)$$

Význam veličín ilustruje Obr. 3 v podkapitole 1.2.1. Označme si hysteréznú slučku $H(\varepsilon)$ a bb-krivku $F_{bb}(\varepsilon)$. Uvažujme druhé Masingove pravidlo a reverzný bod $[\varepsilon^R, \sigma^R]$. Dosadíme tieto hodnoty do vzťahu (1.14). Uvažujme teraz namáhanie v zápornom smere a hodnotu deformácie v ďalšom reverznom bode $-\varepsilon^R$. Zo vzťahu (1.14) a antisymetrie funkcie F_{bb} vyplýva, že súradnice ďalšieho reverzného bodu budú $[-\varepsilon^R, -\sigma^R]$. Uvažujme teraz znovu namáhanie v kladnom smere až po hodnotu deformácie ε^R . Takýmto spôsobom dostávame podľa druhého Masingovho pravidla symetrickú hysteréznú slučku. Označme napätie na vetve hysteréznej slučky zodpovedajúce namáhaniu v zápornom smere F_- a v kladnom smere F_+ . Podľa vzťahu (1.14) platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\sigma - \sigma^R}{2} &= F_{bb}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^R}{2}\right) \rightarrow F_-(\varepsilon) = \sigma^R + 2F_{bb}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^R}{2}\right) \\ \frac{\sigma + \sigma^R}{2} &= F_{bb}\left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^R}{2}\right) \rightarrow F_+(\varepsilon) = -\sigma^R + 2F_{bb}\left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^R}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Obr. 44 (vľavo) zobrazuje funkcie F_{bb} , F_- a F_+ . Pre W_D platí

$$\begin{aligned}
W_D &= \oint_{\varepsilon^R} H(\varepsilon) d\varepsilon \\
&= \int_{\varepsilon^R}^{-\varepsilon^R} F_- d\varepsilon + \int_{-\varepsilon^R}^{\varepsilon^R} F_+ d\varepsilon \\
&= -4\varepsilon^R \sigma^R + \int_{-\varepsilon^R}^{\varepsilon^R} 2F_{bb} \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^R}{2} \right) d\varepsilon + \int_{\varepsilon^R}^{-\varepsilon^R} 2F_{bb} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^R}{2} \right) d\varepsilon, \quad \begin{array}{l} \text{substitúcia} \\ \frac{\varepsilon + \varepsilon^R}{2} = z_1 \rightarrow \varepsilon \\ \frac{\varepsilon - \varepsilon^R}{2} = z_2 \rightarrow \varepsilon \end{array} \\
&= -4\varepsilon^R \sigma^R + 4 \int_0^{\varepsilon^R} F_{bb}(\varepsilon) d\varepsilon + 4 \int_0^{-\varepsilon^R} F_{bb}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \begin{array}{l} \text{substitúcia} \\ \varepsilon = -z \rightarrow -\varepsilon \end{array} \\
&= -4\varepsilon^R \sigma^R + 4 \int_0^{\varepsilon^R} F_{bb}(\varepsilon) d\varepsilon - 4 \int_0^{\varepsilon^R} F_{bb}(-\varepsilon) d\varepsilon, \quad \boxed{F_{bb}(\varepsilon) = -F_{bb}(-\varepsilon)} \\
&= -4\varepsilon^R \sigma^R + 8 \int_0^{\varepsilon^R} F_{bb}(\varepsilon) d\varepsilon \\
&= -4\varepsilon^R \sigma^R + 8A
\end{aligned} \tag{4.40}$$

kde sme označili $A = \int_0^{\varepsilon^R} F_{bb}(\varepsilon) d\varepsilon$. Pre W_S platí

$$W_S = \frac{\sigma^R \varepsilon^R}{2} \tag{4.41}$$

Dosadením (4.40) a (4.41) do (4.38) dostávame pre útlm

$$\xi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2A}{\sigma^R \varepsilon^R} - 1 \right) \tag{4.42}$$

Je dôležité poznamenať, že vzťah (4.42) platí len pre modely, ktoré sa riadia druhým Masingovým pravidlom.

Aplikujeme výsledok (4.42) na Iwanov model a diskretnú bb-krivku. Integrál A má význam plochy pod bb-krivkou (Obr. 44 vpravo). Výpočet integrálu A sa v Iwanovom modeli zredukuje na diskretnú sumu

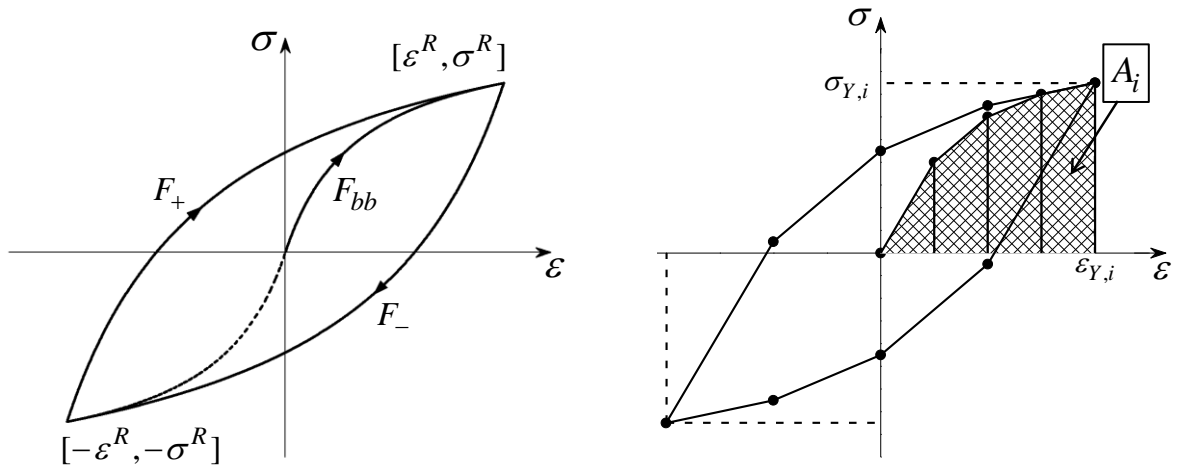
$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^i (\sigma_{Y,l} + \sigma_{Y,l-1}) (\varepsilon_{Y,l} - \varepsilon_{Y,l-1}) \quad (4.43)$$

kde $[\varepsilon_{Y,i}, \sigma_{Y,i}] = [\varepsilon^R, \sigma^R]$.

Útlmová krivka Iwanovho modelu bude pozostávať z diskretných hodnôt, z ktorých každá bude reprezentovať útlm Iwanovho modelu pri maximálnej deformácii a napätí $[\varepsilon_{Y,i}, \sigma_{Y,i}]$, $i = 1, \dots, N$. Pre i -ty bod útlmovej krivky $[\xi^{(i)}, \varepsilon_{Y,i}]$ platí

$$\xi^{(i)} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2A_i}{\sigma_{Y,i} \varepsilon_{Y,i}} - 1 \right), \quad A_i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^i (\sigma_{Y,l} + \sigma_{Y,l-1}) (\varepsilon_{Y,l} - \varepsilon_{Y,l-1}), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.44)$$

Všimnime si, že $\xi^{(1)} = 0$. Táto hodnota zodpovedá lineárnemu úseku bb-krivky, a teda nulovému obsahu hysteréznej slučky. Porovnanie vypočítanej a reálnej útlmovej krivky ukazuje Obr. 8.



Obr. 44 Vľavo: Funkcia bb-krivky F_{bb} , vetva reprezentujúca namáhanie v zápornom smere F_- a vetva reprezentujúca namáhanie v kladnom smere F_+ . Vpravo: Diskretná hysterézná slučka Iwanovho modelu so znázornením plochy A_i pod bb-krivkou.

Príloha B

Program e2s – program pre výpočet napätia v samostatnom Iwanovom modeli

Program sa nachádza v priečinku CD/Programy. Priečinok CD/Príklady/e2s obsahuje súbor *e2s.exe* a potrebné vstupné súbory. Súbor *deformacia.txt* obsahuje hodnoty deformácie, pre ktoré počítame napätie. Súbory *Sin.txt*, *eSin.txt* a *VariableLimits.txt* sú vzorové príklady hodnôt deformácie uvedené na obrázkoch v odstavci 4.1.5. Vstupný súbor *input.txt* obsahuje:

číslo reprezentujúce počet zapojení H-p-StV	
NAMELIST /PARAMETRE/ <i>eY</i> , <i>sY</i>	
<i>eY</i>	počiatočné aktivačné deformácie (deformácie bb-krivky)
<i>sY</i>	počiatočné aktivačné napätia (napätia bb-krivky)

Parametre *eY* a *sY* nachádzajúce sa v súbore *input.txt* sú vzorové hodnoty napätia a deformácie bb-krivky. Výstupom programu je súbor *output.txt*, ktorý obsahuje hodnoty napätia a deformácie v stĺpcoch: *deformácia* | *napätie* .

Všetky programy sa nachádzajú v priečinku CD/Programy. Vstupné parametre, ktoré sme v porovnaní s lineárnym výpočtom nemenili, sú popísané v knihe Moczo et al. (2004). Na tomto mieste budeme popisovať iba vstupné parametre týkajúce sa nelineárneho výpočtu.

**Program MODEL_PREP_1D_NL – program na výpočet
parametrov nelineárneho prostredia**

MODEL.IN	
NAMELIST/CONTROL/KEY_AVG,KEY_AVGNL	
KEY_AVG	<p>.FALSE. : Výpočet parametrov prostredia prebieha bez harmonického priemerovania elastických modulov a bez aritmetického priemerovania hustoty. Na výpočet sečnicových modulov sa používajú lokálne krivky redukcie modulu.</p> <p>.TRUE. : Výpočet prebieha s harmonickým priemerovaním elastických modulov a aritmetickým priemerovaním hustoty. Na výpočet sečnicových modulov sa používajú lokálne krivky redukcie modulu.</p>
KEY_AVGNL	<p>Platí iba ak KEY_AVG == .TRUE.</p> <p>.FALSE. : Na výpočet sečnicových modulov sa používajú lokálne krivky redukcie modulu.</p> <p>.TRUE. : Prebieha harmonické priemerovanie sečnicových modulov</p>
MODEL_NONLIN.IN ²	
<p>Názov súboru, ktorý obsahuje nelineárne parametre vo forme stĺpcov</p> $\varepsilon^{(i)} (G_s / G_{\max})_{curve}^{(i)} \xi_{curve}^{(i)} (G_s / G_{\max})_{curve+1}^{(i)} \xi_{curve+1}^{(i)}$ <p>kde i je hodnota redukcie modulu a útlmu prislúchajúca i-tej deformácii. Index $curve = 1, \dots, \text{NUM_CURVES}$ určuje poradie parametrov v prípade, že rozlišujeme viac kriviek redukcie modulu, a to v smere od voľného povrchu k polpriestoru. Je zrejmé, že uvažujeme hodnoty redukcie modulu a útlmu definované v každej vrstve pre rovnaké hodnoty deformácie.</p>	
NAMELIST/NONLIN/NUM_CURVES	
NUM_CURVES	Počet nelineárnych vrstiev, v ktorých sú definované krivky redukcie modulu.

Pred spustením programu je nutné priradiť nelineárne vlastnosti prostredia príslušným hĺbkam. Toto vykonáme vo fortranovskom module *mod_func.f90*. Premennej *curve*

² Aj keď do programu načítavame hodnoty útlmu, program ich však nepoužíva. Túto možnosť sme v programe nechali z dôvodu ďalšieho vývoja programu a možnú korekciu na útlm.

priradujeme hodnoty $curve = 1, \dots, NUM_CURVES$, a to podľa poradia, v akom sa nachádza v priloženom súbore. Uvedený je príklad pre profil definovaný piatimi nelineárnymi vrstvami. Farebným je zvýraznená časť funkcie, v ktorej meníme hodnoty premennej $curve$. Písmeno z označuje hĺbku.

```

FUNCTION FUNC GG(I, Z)

  USE NRTYPE, ONLY: WP

  INTEGER , INTENT(IN) :: I
  REAL(WP) , INTENT(IN) :: Z

  REAL(WP) :: FUNC GG
  INTEGER :: curve

  curve = -1

  if (z<=20.0) then
    !layer1
    curve = 1
  else if (20.<z .AND. z<=40) then
    !layer2
    curve = 2
  else if (40.<z .AND. z<=60) then
    !layer3
    curve = 3
  else if (60.<z .AND. z<=80) then
    !layer4
    curve = 4
  else if (80.<z .AND. z<=100) then
    !layer5
    curve = 5
  end if

  if (I==0 .OR. curve== -1) then
    funcgg = 1.
  else
    funcgg = GG(I, curve)
  end if

END FUNCTION FUNC GG

```

Výstupom súboru je súbor $MO_FILE_NAME.MO$ (názov MO_FILE_NAME zadávame v súbore $MODEL.IN.$) a tiež súbor $MO_FILE_NAME.LOG$. V súbore $.LOG$ sa nachádza informácia o spodnej hranici nelineárneho prostredia, ktorú reprezentuje parameter L_NL . Súbor $.MO$ obsahuje informáciu o parametroch prostredia, ktoré sú zapísané vo forme:

$L = 0, \dots, L_NL-1$			
ρ [kg.m ⁻³]	$\varepsilon^{(i)}$	$\sigma^{(i)}$ [Pa]	$i = 1, \dots, n+1$
$L = L_NL, \dots, MZ$			
ρ [kg.m ⁻³]	$G_{\max,PP}$ [Pa]		

Skript *make_Mofile.m* – matlabovský skript na výpočet aproximácie bb-krivky

Súbor `MO_FILE_NAME.MO` načítame do programu Matlab. Spustíme skript `make_Mofile.m`:

`A = make_MOfile (B, L_NL, N, name)`

Vstupné parametre	
B	Matica <code>MO_FILE_NAME</code> .
L_NL	Spodná hranica nelineárneho prostredia.
N	Počet zapojení H-p-StV, ktorými chceme aproximovať bb-krivku.
name	Meno súboru, do ktorého sa uloží vypočítaná matica A (bez prípony).

Výstup	
A	Matica obsahujúca nelineárne parametre prostredia v nižšie uvedenom formáte.
name.MO	Súbor, do ktorého sa uložia hodnoty matice A.

Formát výstupu			
$L = 0, \dots, L_NL-1$			
ρ [kg.m ⁻³]	$\varepsilon_{\gamma,i}$	$\sigma_{\gamma,i}$ [Pa]	$i = 1, \dots, N+1$
$L = L_NL, \dots, MZ$			
ρ [kg.m ⁻³]	$G_{\max,PP}$ [Pa]		

Program 1DFD_DVS_NL – výpočtový program
pre simuláciu šírenia seizmických vln v nelineárnom prostredí

Vstupné súbory: MO_FILE_NAME.MO, HF_1DFD_DVS, MODEL.IN, STF.DAT

MODEL.IN	
NAMELIST/KEYS/KEY_TLSS	
KEY_TLSS	.TRUE. : Generuje súbor, ktorý zaznamenáva hodnoty napätia a deformácie v sieťovom bode $L + 1/2$. .FALSE.: Negeneruje súbor.
KEY_TLA	.TRUE. : Generuje súbor, ktorý zaznamenáva hodnoty zrýchlenia. .FALSE.: Negeneruje súbor.
NAMELIST/CONTROLDATA/VEL	
VEL	Rýchlosť šírenia vln v elastickom polpriestore.
NAMELIST/SOURCE/LS,KEY_RIGID	
LS	Hĺbka, v ktorej excitujeme vlnu v prípade <i>elastic base</i> . Sieťový bod LS sa musí nachádzať v elastickom polpriestore
KEY_RIGID	.TRUE. : Na hranici vrstvy predpisujeme zrýchlenie. .FALSE.: Excitujeme vlnové pole v sieťovom bode LS.
NAMELIST/NONLIN/N,L_NL	
N	Počet zapojení H-p-StV. Rovnaké číslo ako v skripte <i>make_Mofile.m</i> .
L_NL	Hranica pre nelineárny výpočet. Výstup programu MODEL_PREP_1D_NL.

Výstupné súbory: MODEL_SS, MODEL_D, MODEL_V, MODEL_A

MODEL_SS		
Čas [s]	ε [%]	σ [kPa]
MODEL_A		
Čas [s]	Zrýchlenie [$m \cdot s^{-2}$]	-

V priečinku CD/PRENOLIN sa nachádzajú vzorové súbory pre spustenie výpočtov. Priložené súbory s príponou *.txt* sú vstupné signály, koncovka *_R* znamená vstupný súbor pre výpočet *rigid base*.