

Numerické metody matematiky I

Riešenie sústav lineárnych rovníc

OBSAH

1. Sústavy lineárnych rovníc
2. Priame metódy
3. Gaussova eliminačná metóda
4. Výber hlavného prvku
5. Vplyv zaokrúhľovacích chýb
6. Podmienenosť
7. Determinanty matíc a Cramerove pravidlo
8. Iteračné metódy riešenia sústavy rovníc
9. Konvergencia, iteračná matica, kritéria na ukončenie iterácií
10. Jacobiho metóda
11. Gauss-Seidlova metóda
12. Literatúra

Základné pojmy

$$x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n} = b_1$$

$$x_1 a_{21} + \cdots + x_n a_{2n} = b_2$$

.....

$$x_1 a_{m1} + \cdots + x_n a_{mn} = b_m$$

(1)

K sústave rovníc (1) možno priradiť dve matice:

- maticu sústavy

- rozšířenú maticu sústavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Označme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Potom možno zapísať sústavu lineárnych rovníc (1) v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Ak $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, tak sa sústava (1) nazýva **homogénna**,

ak $\mathbf{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, tak sa nazýva **nehomogénna**.

Definícia Hovoríme, že n -tica $(r_1, \dots, r_n)$ je **riešením sústavy (1)**, ak $\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} .$$

Poznámka

Sústavu (1) nazývame **riešiteľnou**,
ak má aspoň jedno riešenie;
v opačnom prípade sa nazýva **neriešiteľná**.

Priame metódy

sú metódy,
ktoré dodajú v konečnom počte krokov
presné riešenie
za predpokladu,
že výpočet prebieha
bez zaokrúhľovacích chýb

Iteračné metódy

poskytnú len približné riešenie.
Počet krokov závisí
od požadovanej presnosti.

Príklad: Nad množinou reálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$2x + 3y - z + 2t = 13$$

$$2x + 5y + z + t = 8$$

$$3x + y + 3z + t = 1$$

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$7y - 9z = 25$$

$$9y - 7z - t = 20$$

$$7y - 9z - 2t = 19$$

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$7y - 9z = 25$$

$$32/7z - t = -85/7$$

$$-2t = -6$$

$$x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$$

Definícia: **Elementárnymi riadkovými úpravami** sústavy lineárnych rovníc nazývame nasledujúce tri úkony:

- vzájomná výmena dvoch rovníc,
- násobenie rovnice nenulovým číslom,
- pričítanie ľubovoľného násobku niektorej rovnice k inej rovnici.

Definícia: **Elementárnymi riadkovými operáciami (ERO)**

na matici nazývame nasledujúce tri úkony:

- vzájomná výmena dvoch riadkov matice,
- násobenie riadku matice nenulovým skalárom,
- pričítanie násobku niektorého riadku matice k inému riadku.

Definícia: Hovoríme, že matica **A** typu $m \times n$ je **riadkovo ekvivalentná** s maticou **B** typu $m \times n$ ak **B** možno dostať z **A** pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií.

Horná trojuholníková matica

Definícia: O matici **U** hovoríme, že je
horná trojuholníková
ak má pod hlavnou diagonálou všetky prvky nulové.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Veta: Každá matica je riadkovo ekvivalentná
s nejakou hornou trojuholníkovou maticou.

Hodnosť matice

Definícia: **Hodnosťou matice A** nazývame
počet nenulových riadkov
redukovanej trojuholníkovej matice
prislúchajúcej k matici A ,
označujeme ju $h(A)$.

alebo

Hodnosťou matice je
počet lineárne nezávislých riadkov / stĺpcov matice.

Dôsledok: Riadkovo ekvivalentné matice majú rovnakú hodnosť.

Príklad: Nad množinou reálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \quad / (2) - 2 \cdot (1) \\ 2x + 5y + z + t &= 8 \quad / (3) - 2 \cdot (1) \\ 3x + y + 3z + t &= 1 \quad / (4) - 3 \cdot (1)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 9y - 7z - t &= 20 \quad / (3) - 9/7 \cdot (2) \\ 7y - 9z - 2t &= 19 \quad / (4) - 7/7 \cdot (2)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 0 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 32/7z - t &= -85/7 \\ -2t &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 32/7 & -1 & -85/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = -2, \quad t = 3$$

Ukázali sme si princíp
Gaussovej eliminačnej metódy (GEM):

Konečným počtom elementárnych riadkových operácií
upravíme maticu sústavy
na **hornú trojuholníkovú maticu**
a
spätnou substitúciou vypočítame vektor neznámych.

Ukázali sme si princíp
Gaussovej eliminačnej metódy (GEM):

Konečným počtom elementárnych riadkových operácií
upravíme maticu sústavy
na **hornú trojuholníkovú maticu**
a
spätnou substitúciou vypočítame vektor neznámych.

Priamy chod GEM:

Nech

$$\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}, \mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$$

prvky matice $\mathbf{A}^{(0)}$ označíme $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$
prvky vektora $\mathbf{b}^{(0)}$ označíme $b_i^{(0)} = b_i$

algorithmus GEMz

for $k := 1$ **to** $n - 1$ **do**

begin

$\mathbf{A}^{(k)} := \mathbf{A}^{(k-1)} ; \mathbf{b}^{(k)} := \mathbf{b}^{(k-1)} ;$

for $i := k + 1$ **to** n **do**

begin

$m_{ik} := a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} ;$

for $j := k + 1$ **to** n **do** $a_{ij}^{(k)} := a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} ;$

$b_i^{(k)} := b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} ;$

end

end

algorithmus GEMz

for $k := 1$ to $n - 1$ do

begin

$\mathbf{A}^{(k)} := \mathbf{A}^{(k-1)} ; \mathbf{b}^{(k)} := \mathbf{b}^{(k-1)}$

for $i := k + 1$ to n do

begin

$m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} ;$

for $j := k + 1$ to n do $a_{ij}^{(k)} := a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} ;$

$b_i^{(k)} := b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} ;$

end

end

multiplikátor zaistí,
aby v pozícii (i, k) matice $\mathbf{A}^{(k)}$
vznikla nula

algorithmus GEMz

for $k := 1$ **to** $n - 1$ **do**

begin

$\mathbf{A}^{(k)} := \mathbf{A}^{(k-1)} ; \mathbf{b}^{(k)} := \mathbf{b}^{(k-1)} ;$

for $i := k + 1$ **to** n **do**

begin

$m_{ik} := a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} ;$

for $j := k + 1$ **to** n **do** $a_{ij}^{(k)} := a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} ;$

$b_i^{(k)} := b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} ;$

end

end

hlavný prvok (pivot)
nesmie byť nula

Príklad:

Riešte sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2,099 & 6 \\ 5 & -1,1 & 4,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3,901 \\ 5,9 \end{pmatrix}$$

na hypotetickom počítači,
ktorý pracuje v dekadickej sústave
s päťmiestnou mantisou.

Gaussova eliminačná metóda

Príklad:

Riešte sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2,099 & 6 \\ 5 & -1,1 & 4,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3,901 \\ 5,9 \end{pmatrix}$$

na hypotetickom počítači,
ktorý pracuje v dekadickej sústave
s päťmiestnou mantisou.

Presné riešenie je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gaussova eliminačná metóda

V prvom kroku eliminujeme poddiagonálne prvky v prvom slupci a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0,001 & 6 \\ 0 & 2,4 & 4,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6,001 \\ 2,4 \end{pmatrix}$$

Prvek v pozici (2,2) je ve srovnání s ostatními prvky matice malý. Přesto pokračujeme v eliminaci. V dalším kroku je třeba ke třetímu řádku přičíst řádek druhý násobený 2400:

$$(4,8 + 6 \cdot 2400) \cdot x_3 = 2,4 + 6,001 \cdot 2400.$$

Na levé straně je koeficient $4,8 + 6 \cdot 2400 = 14404,8$ zaokrouhlen na 14405. Na pravé straně výsledek násobení $6,001 \cdot 2400 = 14402,4$ nelze zobrazit přesně, musí být zaokrouhlen na 14402. K tomu se pak přičte 2,4 a znovu dojde k zaokrouhlení. Poslední rovnice tak nabude tvaru

$$14405 x_3 = 14404.$$

Zpětný chod začne výpočtem

$$x_3 = \frac{14404}{14405} \doteq 0,99993.$$

Gaussova eliminační metoda

Přesný výsledek je $x_3 = 1$. Zdá se, že chyba není nijak vážná. Bohužel, x_2 je třeba určit z rovnice

$$-0,001 x_2 + 6 \cdot 0,99993 = 6,001,$$

což dává, po zaokrouhlení $6 \cdot 0,99993 \doteq 5,9996$,

$$x_2 = \frac{0,0014}{-0,001} = -1,4.$$

Nakonec vypočteme x_1 z první rovnice

$$10x_1 - 7 \cdot (-1,4) = 7$$

a dostaneme $x_1 = -0,28$. Místo přesného řešení $\mathbf{x}$ jsme dostali přibližné řešení

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -0,28 \\ -1,4 \\ 0,99993 \end{pmatrix}.$$

Čiastočný výber hlavného prvku

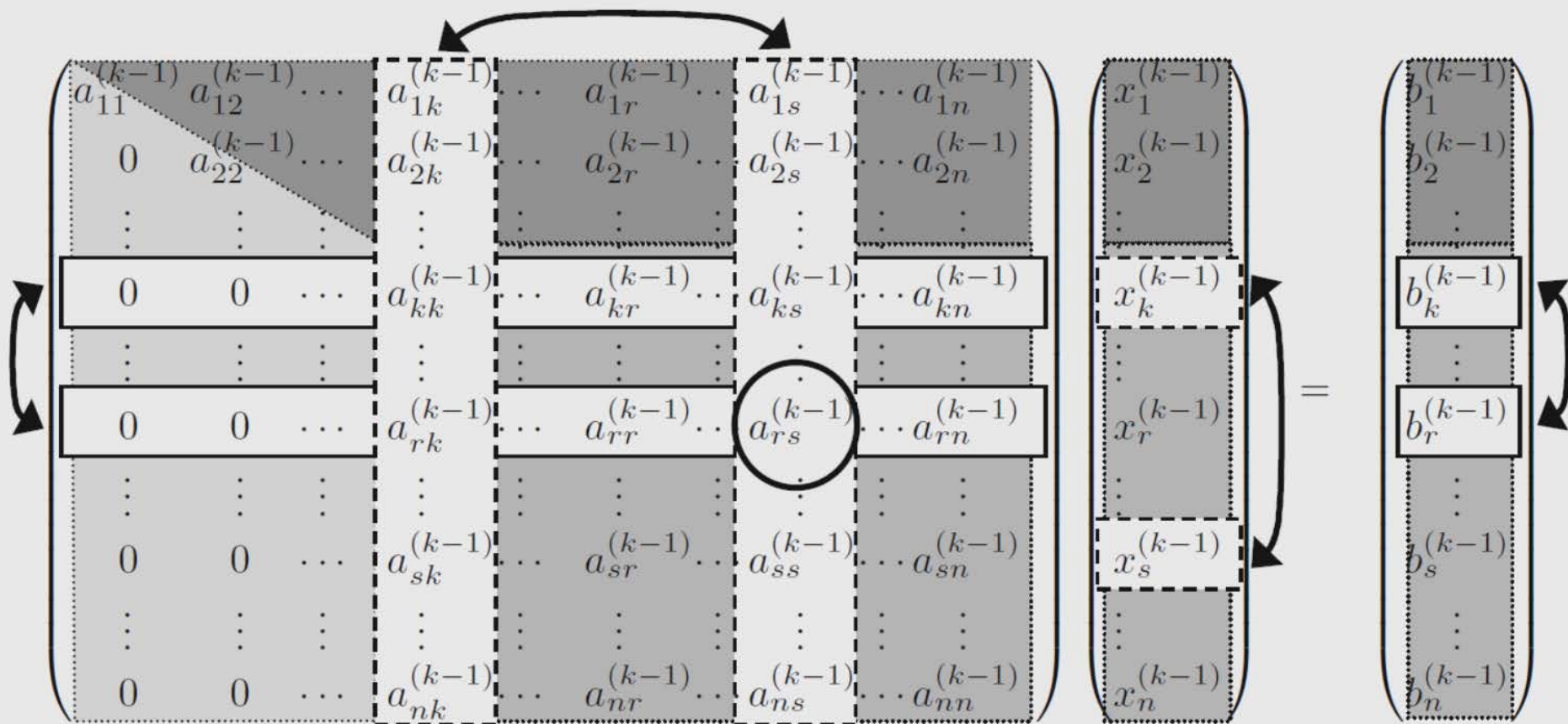
je modifikácia **GEM** zaistujúca,
aby absolútne hodnoty multiplikátorov
boli menšie alebo rovné 1.

V k -tom kroku eliminácie
sa ako pivot vyberá prvok
s najväčšou absolútnou hodnotou
v zatiaľ neeliminovanej časti
 k -teho stĺpca matice $\mathbf{A}^{(k-1)}$

Gaussova eliminačná metóda – čiastočný výber hlavného prvku

$$\left(\begin{array}{cccc}
 a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \dots & a_{1k}^{(k-1)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} \\
 0 & a_{22}^{(k-1)} & \dots & a_{2k}^{(k-1)} & \dots & a_{2n}^{(k-1)} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & a_{rk}^{(k-1)} & \dots & a_{rn}^{(k-1)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)}
 \end{array} \right)
 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} b_1^{(k-1)} \\ b_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_r^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminačná metóda – **úplný** výber hlavného prvku



Čiastočný alebo **úplný výber hlavného prvku?**
väčšinou sa používa len čiastočný výber hlavného prvku

Aj ten postačuje na to,
aby zaokrúhľovacie chyby
zostali malé a
neznehodnotili riešenie.

Realizácia čiastočného výberu hlavného prvku
vyžaduje výrazne menší počet operácií
než výber úplný.

Výpočtová náročnosť

Počet aritmetických operácií pri priamom chode: $\approx \frac{2}{3}n^3$

Počet aritmetických operácií pri spätnom chode: $\approx n^2$

LU rozklad

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \quad / (2) - 2 * (1) \\ 2x + 5y + z + t &= 8 \quad / (3) - 2 * (1) \\ 3x + y + 3z + t &= 1 \quad / (4) - 3 * (1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 9y - 7z - t &= 20 \quad / (3) - 9/7 * (2) \\ 7y - 9z - 2t &= 19 \quad / (4) - 7/7 * (2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 0 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 32/7z - t &= -85/7 \\ -2t &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 32/7 & -1 & -85/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$$

LU rozklad

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \quad / (2) - 2 * (1) \\ 2x + 5y + z + t &= 8 \quad / (3) - 2 * (1) \\ 3x + y + 3z + t &= 1 \quad / (4) - 3 * (1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 9y - 7z - t &= 20 \quad / (3) - 9/7 * (2) \\ 7y - 9z - 2t &= 19 \quad / (4) - 7/7 * (2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 2 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 3 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 32/7z - t &= -85/7 \\ -2t &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 2 & 0 & 32/7 & -1 & -85/7 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$$

LU rozklad

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \quad / (2) - 2 * (1) \\ 2x + 5y + z + t &= 8 \quad / (3) - 2 * (1) \\ 3x + y + 3z + t &= 1 \quad / (4) - 3 * (1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 9y - 7z - t &= 20 \quad / (3) - 9/7 * (2) \\ 7y - 9z - 2t &= 19 \quad / (4) - 7/7 * (2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 2 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 3 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 32/7z - t &= -85/7 \\ -2t &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 2 & 9/7 & 32/7 & -1 & -85/7 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$$

LU rozklad

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \quad / (2) - 2 \cdot (1) \\ 2x + 5y + z + t &= 8 \quad / (3) - 2 \cdot (1) \\ 3x + y + 3z + t &= 1 \quad / (4) - 3 \cdot (1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 9y - 7z - t &= 20 \quad / (3) - 9/7 \cdot (2) \\ 7y - 9z - 2t &= 19 \quad / (4) - 7/7 \cdot (2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 2 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 3 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z &= 25 \\ 32/7z - t &= -85/7 \\ -2t &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 2 & 9/7 & 32/7 & -1 & -85/7 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$$

LU rozklad

Multiplikátory m_{ij} z priameho chodu umiestnime do dolnej trojuholníkovej matice $\mathbf{L}$)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n-1,1} & \ell_{n-1,2} & \ell_{n-1,3} & \cdots & \ell_{n-1,n-1} & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{n,n-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\ell_{ik} := \begin{cases} 0 & \text{pro } i = 1, 2, \dots, k-1, \\ 1 & \text{pro } i = k, \\ m_{ik} & \text{pro } i = k+1, k+2, \dots, n, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Získali sme **LU** rozklad matice **A**
 (tzv. Doolittleova verzia – jednotky na diagonále matice **L**)
 pretože sa dá ukázať, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9/7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 32/7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Špeciálnym Doolittleovým algoritmom
 je možné nájsť **LU** rozklad
 s polovičným počtom
 aritmetických operácií

$$\approx \frac{1}{3}n^3$$

LU rozklad matice **A**
sa dá výhodne použiť pri riešení postupnosti úloh

$$\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}_i$$

ak novú pravú stranu $\mathbf{b}_i$ je možné zostaviť až potom,
čo sa vyriešili predchádzajúce sústavy

$$\mathbf{Ax}_k = \mathbf{b}_k$$

pre $k < i$.

LU rozklad matice **A**
sa dá výhodne použiť pri riešení postupnosti úloh

$$\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}_i$$

ak novú pravú stranu $\mathbf{b}_i$ je možné zostaviť až potom,
čo sa vyriešili predchádzajúce sústavy

$$\mathbf{Ax}_k = \mathbf{b}_k$$

pre $k < i$.

Riešiť sústavu $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ znamená riešiť

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}.$$

LU rozklad s čiastočným výberom hlavného prvku
je štandardná rutina dostupná v každej knižnici programov.

LU rozklad s čiastočným výberom hlavného prvku
je štandardná rutina dostupná v každej knižnici programov.

Vstupným parametrom je matica **A**.

LU rozklad s čiastočným výberom hlavného prvku
je štandardná rutina dostupná v každej knižnici programov.

Vstupným parametrom je matica **A**.

Výstupným sú tri matice:

L, **U** a tzv. permutačná matica **P**

pričom

$$\mathbf{LU} = \mathbf{PA}.$$

LU rozklad s čiastočným výberom hlavného prvku
je štandardná rutina dostupná v každej knižnici programov.

Vstupným parametrom je matica **A**.

Výstupným sú tri matice:

L, **U** a tzv. permutačná matica **P**

pričom

$$\mathbf{LU} = \mathbf{PA}.$$

Permutačná matica vznikne z jednotkovej matice
prehádzaním jej riadkov.

LU rozklad s čiastočným výberom hlavného prvku
je štandardná rutina dostupná v každej knižnici programov.

Vstupným parametrom je matica **A**.

Výstupným sú tri matice:

L, **U** a tzv. permutačná matica **P**
pričom
LU = PA.

Permutačná matica vznikne z jednotkovej matice
prehádzaním jej riadkov.

Riešenie sústavy **Ax = b** nájdeme riešením rovníc

$$z = Pb, \quad Ly = z, \quad Ux = y.$$

(ukážte to)

Namiesto matice **P** pracujeme len
s **vektrom riadkových premutácií p**.

Na začiatku položíme

$$\mathbf{p}^{(0)} = (1, 2, \dots, n)^T$$

a v algoritme len prehadzujeme prvky vektora **p**.

LU rozklad s čiastočným výberom hlavného prvku

Algoritmus LUp (s čiastočným výberom hlavného prvku)

- 1) Položíme $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$, $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I}$.
- 2) Postupne pro $k = 1, 2, \dots, n - 1$ provádíme
 - 2a) Určíme index r pivotního řádku, viz (2.14).
 - 2b) Prohodíme řádky k a r v matici $\mathbf{A}^{(k-1)}$ a takto získanou matici označíme jako $\mathbf{A}^{(k)}$. Prohodíme rovněž řádky k a r v matici $\mathbf{P}^{(k-1)}$ a takto získanou matici označíme jako $\mathbf{P}^{(k)}$.
 - 2c) Upravíme matici $\mathbf{A}^{(k)}$ tak, že eliminujeme poddiagonální prvky v k -tém sloupci, tj. postupně pro $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ počítáme

$$\begin{aligned} m_{ik} &:= a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \\ a_{ij}^{(k)} &:= a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad \text{pro } j = k + 1, k + 2, \dots, n, \\ a_{ik}^{(k)} &:= m_{ik}. \end{aligned}$$

Do anulovaných pozic (i, k) matice $\mathbf{A}^{(k)}$ tedy ukládáme multiplikátory m_{ik} .

- 3) Dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$ sestrojíme tak, že do hlavní diagonály dáme jedničky a poddiagonální prvky převezmeme z výsledné matice $\mathbf{A}^{(n-1)}$. Horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{U}$ dostaneme z diagonálních a naddiagonálních prvků výsledné matice $\mathbf{A}^{(n-1)}$. Permutační matice $\mathbf{P}$ je rovna výsledné permutační matici $\mathbf{P}^{(n-1)}$.

Definícia: Hovoríme, že matica $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je **rýdzo diagonálne dominantná**, ak

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Definícia: Symetrická matica $\mathbf{A}$ je **pozitívne definitná**, ak pre ľubovoľný nenulový vektor x platí

$$x^T \cdot \mathbf{A} \cdot x > 0$$

Ak je $\mathbf{A}$ regulárna, potom

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$$

je pozitívne definitná.

Sylvesterovo kritérium: Symetrická matica $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$

je **pozitívne definitná**, práve vtedy keď sú kladné determinanty všetkých hlavných rohových submatic, t.j. keď platí

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Dá sa ukázať,
že algoritmus **GEM**
je možné použiť pre riešenie sústav,
ktorých matica je buď
rýdzo diagonálne dominantná
alebo
pozitívne definitná.

Choleského dekompozičná teoréma: Pozitívne definitnú maticu $\mathbf{A}$, je možné práve jedným spôsobom rozložiť na tvar

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$$

kde $\mathbf{L}$ je dolná trojuholníková matica.

Choleského dekompozičná teoréma: Pozitívne definitnú maticu $\mathbf{A}$, je možné práve jedným spôsobom rozložiť na tvar

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$$

kde $\mathbf{L}$ je dolná trojuholníková matica.

Algoritmus (Choleského metóda):

$$\begin{aligned} \ell_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2}, \\ \ell_{ik} &= \frac{1}{\ell_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij} \ell_{kj} \right), \quad i = k+1, k+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Choleského dekompozičná teoréma: Pozitívne definitnú maticu $\mathbf{A}$, je možné práve jedným spôsobom rozložiť na tvar

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$$

kde $\mathbf{L}$ je dolná trojuholníková matica.

Algoritmus (Choleského metóda):

$$\begin{aligned} \ell_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2}, \\ \ell_{ik} &= \frac{1}{\ell_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij} \ell_{kj} \right), \quad i = k+1, k+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Počet aritmetických operácií : $\approx \frac{1}{3}n^3$

Príklad:

Riešte na hypotetickom počítači s trojmiestnou mantisou sústavu

$$\begin{pmatrix} 3,96 & 1,01 \\ 1 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,03 \\ 1,25 \end{pmatrix} .$$

GEM s výberom hlavného prvku
zaručuje vznik malých rezíduí

GEM s výberom hlavného prvku
zaručuje vznik malých rezíduí

Aj keď je rezíduum malé
tvrdenie nič nehovorí o veľkosti chyby

$$\tilde{x} - x.$$

Aby sme mohli určiť podmienenosť úlohy
„nájsť riešenie $\mathbf{x}$ sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ “
potrebujeme posúdiť
ako veľmi sa zmení riešenie $\mathbf{x}$,
ak trochu zmeníme $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$.

Norma vektora

trieda vektorových noriem l_p ,

$$1 \leq p \leq \infty:$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Norma vektora

trieda vektorových noriem l_p ,

$$1 \leq p \leq \infty:$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Najčastejšie sa používa $p=1$, $p=2$, alebo $p \rightarrow \infty$:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Manhattan

Euclid

Čebyšev

Vlastnosti

1. $\|\mathbf{x}\| > 0$, kedyž $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ a $\|\mathbf{o}\| = 0$,
2. $\|c \mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$ pro každé číslo c ,
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Číslo podmienenosti matice

Nech

$$M = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad m = \min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

kde maximum resp. minimum sa uvažuje pre všetky nenulové $\mathbf{x}$.

Pomer M/m sa nazýva **číslo podmienenosti matice $\mathbf{A}$** :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{M}{m} = \left(\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) \cdot \left(\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right)^{-1}.$$

Uvažujme systém rovníc

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

a druhý systém, ktorý dostaneme keď zmeníme pravú stranu:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}, \text{ alebo } \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}.$$

Uvažujme systém rovníc

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

a druhý systém, ktorý dostaneme keď zmeníme pravú stranu:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}, \text{ alebo } \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}.$$

$\Delta\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$ môžeme považovať za chybu pravej strany $\mathbf{b}$

a

$\Delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ zodpovedajúcu chybu riešenia $\mathbf{x}$.

Podmienenosť

Pretože $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$,
z definície M a m
okamžite vyplýva

$$\|\mathbf{b}\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \|\Delta\mathbf{b}\| \geq m\|\Delta\mathbf{x}\|,$$

takže pre $m \neq 0$,

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

kde $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ je rezíduum.

Podmienenosť

Pretože $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$,
z definície M a m
okamžite vyplýva

$$\|\mathbf{b}\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \|\Delta\mathbf{b}\| \geq m\|\Delta\mathbf{x}\|,$$

takže pre $m \neq 0$,

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

kde $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ je rezíduum.

**Číslo podmienenosti matice teda pôsobí
ako zosilňovač relatívnej chyby !**

Dá sa ukázať, že zmeny v matici $\mathbf{A}$
majú na zmeny riešenia podobný vplyv.

Niektoré vlastnosti čísla podmienenosti matice

1. Pretože $M \geq m$, je $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$.
2. Pro jednotkovou maticí $\mathbf{I}$ je $\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, takže $\kappa(\mathbf{I}) = 1$.
3. Je-li $\mathbf{A}$ singulárny, je $m = 0$ a tedy $\kappa(\mathbf{A}) = \infty$.
4. Kedyž maticí $\mathbf{A}$ vynásobíme číslom c , pak M i m se násobí $|c|$ a $\kappa(c\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A})$.
5. Pro diagonálnú maticí $\mathbf{D}$ je $\kappa(\mathbf{D}) = \max_i |d_{ii}| / \min_i |d_{ii}|$ (dokažte!).

Norma matice

číslo M je tiež známe ako norma matice

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

takže tiež platí

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = 1/m$$

Ekvivalentne môžeme číslo podmienenosti matice zapísať

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Norma matice

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Frobeniova norma (súhlasná s l_2)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

maximálne súčty v stĺpcoch

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

maximálne súčty v riadkoch

Norma matice - vlastnosti

1. $\|\mathbf{A}\| > 0$, kedyž $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ a $\|\mathbf{O}\| = 0$,
2. $\|c\mathbf{A}\| = |c| \cdot \|\mathbf{A}\|$ pro každé číslo c ,
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ (trojúhelníková nerovnost),
4. $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ (multiplikativnost),
5. $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ pro každý vektor $\mathbf{x}$ (suhlasnost).

Iný príklad: Nad množinou reálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$\begin{aligned}x+2y+z-t &= 1 \\2x+3y-z+2t &= 3 \\4x+7y+z &= 5 \\5x+7y-4z+7t &= 10\end{aligned}$$

Príklad: Nad množinou reálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$x + 2y + z - t = 1$$

$$2x + 3y - z + 2t = 3$$

$$4x + 7y + z = 5$$

$$5x + 7y - 4z + 7t = 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y + z - t = 1$$

$$-y - 3z + 4t = 1$$

$$0z + 0t = 2$$

$$0t = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sústava nemá riešenie

Ďalší příklad: Nad množinou racionálních čísel řešte soustavu rovnic.

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \\ 3x + y + 3z + 3t &= 7 \\ x + 5y - 5z + t &= 19\end{aligned}$$

Príklad: Nad množinou racionálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$2x + 3y - z + 2t = 13$$

$$3x + y + 3z + 3t = 7$$

$$x + 5y - 5z + t = 19$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & -5 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$7y - 9z + 0t = 25$$

$$0z + 0t = 0$$

$$0t = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad: Nad množinou racionálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$7y - 9z + 0t = 25$$

$$0z + 0t = 0$$

$$0t = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sústava má nekonečne veľa riešení

$$t = p, \quad z = q, \quad p, q \in \mathbb{Q}$$

$$y = \frac{25}{7} + \frac{9}{7}q \quad x = \frac{8}{7} - \frac{10}{7}q - p$$

$$S = \left\{ \left(\frac{8}{7} - \frac{10}{7}q - p, \frac{25}{7} + \frac{9}{7}q, q, p \right), p, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

Napr.: ak $q = 1, p = 0$, dostaneme partikulárne riešenie $\left(\frac{-2}{7}, \frac{34}{7}, 1, 0 \right)$

Frobeniova veta: Sústava nehomogénnych rovníc **je riešiteľná** vtedy a len vtedy, keď sa **hodnosť matice sústavy** rovná **hodnosti rozšírenej matice sústavy**.

Dôsledok 1: Ak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = n$ (n je počet neznámych), potom má sústava práve jedno riešenie.

Dôsledok 2: Ak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') < n$ (n je počet neznámych), potom má sústava nekonečne veľa riešení a $n-h$ neznámych možno ľubovoľne zvoliť.

Dôsledok 3: Ak $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}')$, potom sústava nemá riešenie.

Sústavy homogénnych lineárnych rovníc

$$x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n} = 0$$

$$x_1 a_{21} + \dots + x_n a_{2n} = 0$$

.....

$$x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn} = 0$$

Pretože $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}')$, systém je vždy riešiteľný

Veta: Systém homogénnych rovníc má netriviálne riešenie práve vtedy, ak $h(\mathbf{A}) < n$.
(triviálne riešenie je $(0, 0, \dots, 0)$)

Príklad: Nad množinou racionálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= 0 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 0 \\ 3x + y + 3z + 3t &= 0 \\ x + 5y - 5z + t &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= 0 \\ 7y - 9z + 0t &= 0 \\ 0z + 0t &= 0 \\ 0t &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad: Nad množinou racionálnych čísel riešte sústavu rovníc.

$$x - 2y + 4z + t = 0$$

$$7y - 9z + 0t = 0$$

$$0z + 0t = 0$$

$$0t = 0$$

$$t = p, \quad z = q, \quad p, q \in \mathbb{Q}$$

$$y = \frac{9}{7}q$$

$$x = -\frac{10}{7}q - p$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{10}{7}q - p, \frac{9}{7}q, q, p \right), p, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

- homogénna a nehomogénna sústava lineárnych rovníc
- matica a rozšírená matica sústavy lineárnych rovníc
- riešiteľná a neriešiteľná sústava lineárnych rovníc
- elementárne riadkové úpravy / operácie
- riadkovo ekvivalentné matice
- hodnosť matice
- horná a dolná trojuholníková matica
- Gaussova eliminačná metóda (výber hlavného prvku)
- LU rozklad (Doolittleova metóda)
- Choleského rozklad
- Frobeniova veta
- riešenie sústav homogénnych lineárnych rovníc